1. Considera i punti $A(1,1,0)$ e $B(3,2,-1)$ ed il piano α di equazione $x-y+2z+6=0$.

   Determina:

   a. l'equazione del piano β passante per B e perpendicolare alla retta AB;
   b. le equazioni parametriche della retta *r* intersezione tra i piani α e β;
   c. la proiezione ortogonale C del punto A sul piano α;
   d. l'equazione del luogo dei punti dello spazio equidistanti da B e C, precisando di quale ente geometrico si tratta;
   e. l'equazione della superficie sferica Σ di centro A e raggio AB.
   f. Verifica se il piano α è tangente alla superficie sferica Σ.
   g. Senza svolgere calcoli, spiega perché il piano β è tangente alla superficie sferica Σ e determina le coordinate del punto di tangenza.

2. Considera i punti $A(1,-2,1)$, $B(4,-2,-2)$, $C(4,1,4)$, $D(2,0,-2)$.

   Determina:

   a. l'area del triangolo ABC, dopo avere dimostrato che è rettangolo;
   b. le ampiezze (*approssimate al centesimo di grado*) degli angoli acuti del triangolo ABC;
   c. l'equazione cartesiana del piano α passante per i punti A, B, C;
   d. le equazioni parametriche della retta AD;
   e. il volume del tetraedro Λ di base ABC e vertice D. (*Ricorda che* $V_{tetr}=\frac{1}{3}\cdot S_{base}\cdot h$).
   f. Sapendo che il piano β di equazione $x-2y+z-2=0$ interseca gli spigoli AD, BD e CD del tetraedro ABCD nei punti E, F, G rispettivamente, calcola il volume del tetraedro Γ di base EFG e vertice D. (*Osserva la posizione reciproca dei piani* α *e* β *e utilizza questa osservazione per ridurre al minimo i calcoli*).

4^A - Correzione compito n°6

1.

a. Alla retta AB è associato il vettore $\vec{v_{AB}} \equiv (x_B - x_A, y_B - y_A, z_B - z_A) \equiv (2, 1, -1)$.

Il piano β ha $\vec{v_{AB}}$ come vettore normale, per cui la sua eq. sarà del tipo: $2x + y - z + d = 0$.

Imponiamo il passaggio per B: $6 + 2 + 1 + d = 0 \Rightarrow d = -9$. Quindi $\beta :\ 2x + y - z - 9 = 0$.

b. Poniamo a sistema le eq. dei piani α e β ed esprimiamo due variabili in funzione della terza:

$$\begin{cases} x - y + 2z + 6 = 0 \\ 2x + y - z - 9 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = y - 2z - 6 \\ 2y - 4z - 12 + y - z - 9 = 0 \Rightarrow 3y - 5z - 21 = 0 \Rightarrow y = 5/3z + 7 \end{cases} .$$

Scegliendo $z = 3t$, ricaviamo le eq. parametriche: $r :\ \begin{cases} x = -t + 1 \\ y = 5t + 7 \\ z = 3t \end{cases}$.

c. Il punto C si trova sulla retta *n* passante per A e perpendicolare al piano α:

$$\vec{v_\alpha} \equiv (1, -1, 2) \equiv \vec{v_n} \Rightarrow n :\ \begin{cases} x = t + 1 \\ y = -t + 1 \\ z = 2t \end{cases} .$$

Sostituiamo le eq. parametriche della retta *n* nell'eq. cartesiana del piano α:

$t + 1 + t - 1 + 4t + 6 = 0 \Rightarrow 6t = -6 \Rightarrow t = -1 \Rightarrow C(0, 2, -2)$.

d. *Primo metodo*. Consideriamo un punto generico dello spazio $P(x, y, z)$ e imponiamo che le sue distanze dai punti B e C siano uguali:

$PB^2 = PC^2 \Rightarrow (x-3)^2 + (y-2)^2 + (z+1)^2 = x^2 + (y-2)^2 + (z+2)^2 \Rightarrow$

$-6x + 9 - 4y + 4 + 2z + 1 = -4y + 4 + 4z + 4 \Rightarrow 6x + 2z - 6 = 0 \Rightarrow 3x + z - 3 = 0$.

Possiamo verificare che si tratta di un piano π avente vettore normale $\vec{v_\pi} \equiv (3, 0, 1) \equiv \vec{v_{BC}}$, quindi perpendicolare alla retta BC e passante per il punto medio del segmento BC.

Secondo metodo. Se siamo già a conoscenza delle caratteristiche geometriche del luogo cercato, possiamo imporre che $\vec{v_\pi} \equiv (3, 0, 1) \equiv \vec{v_{BC}}$ e che il piano passi per il punto medio del segmento BC: $M(3/2, 2, -3/2)$, ottenendo il risultato precedente.

e. Un punto generico dello spazio $P(x, y, z)$ appartiene alla superficie sferica se e solo se:

$PA^2 = AB^2 \Rightarrow (x-1)^2 + (y-1)^2 + z^2 = (3-1)^2 + (2-1)^2 + 1^2 \Rightarrow x^2 + y^2 + z^2 - 2x - 2y - 4 = 0$.

f. La distanza tra il centro A della sfera ed il piano α è: $d_{A,\alpha} = \dfrac{|1 - 1 + 6|}{\sqrt{1 + 1 + 4}} = \sqrt{6}$.

Poiché $d_{A,\alpha} = r_\Sigma$, allora il piano α è tangente alla superficie sferica.

g. Sappiamo per costruzione che il piano β passa per il punto B ed è perpendicolare alla retta AB, mentre la superficie sferica Σ ha centro A e raggio AB, per cui la distanza del piano β dal centro A della sfera è uguale al raggio AB. Quindi il piano β è tangente alla superficie Σ nel punto B.

2.

a. Alle rette AB e AC sono associati rispettivamente i vettori:

$$\vec{v_{AB}} \equiv (x_B - x_A, y_B - y_A, z_B - z_A) \equiv (3, 0, -3) \quad , \quad \vec{v_{AC}} \equiv (x_C - x_A, y_C - y_A, z_C - z_A) \equiv (3, 3, 3) \quad .$$

Potremmo anche considerare i vettori $\vec{v_{AB}} \equiv (1, 0, -1)$ e $\vec{v_{AC}} \equiv (1, 1, 1)$, paralleli ai precedenti.

Abbiamo: $\vec{v_{AB}} \cdot \vec{v_{AC}} = 9 - 9 = 0 \Rightarrow AB \perp AC$, per cui il triangolo ABC è rettangolo in A.

$$AB = \sqrt{9+9} = 3\sqrt{2} \quad , \quad AC = \sqrt{9+9+9} = 3\sqrt{3} \quad ; \quad S_{ABC} = \frac{1}{2} AB \cdot AC = \frac{1}{2} \cdot 3\sqrt{2} \cdot 3\sqrt{3} = \frac{9}{2}\sqrt{6} \quad .$$

b. $BC = \sqrt{AB^2 + AC^2} = \sqrt{18+27} = \sqrt{45} = 3\sqrt{5} \Rightarrow A\hat{B}C = sen^{-1}\dfrac{AC}{BC} = sen^{-1}\sqrt{\dfrac{3}{5}} \simeq 50{,}77° \quad .$

Per differenza: $A\hat{C}B = 90° - A\hat{B}C \simeq 39{,}23°$.

c. Imponiamo l'appartenenza dei punti A, B, C al piano generico: $\begin{cases} a - 2b + c + d = 0 \\ 4a - 2b - 2c + d = 0 \\ 4a + b + 4c + d = 0 \end{cases}$.

Sottraggo la 1^ eq. dalla 2^: $3a - 3c = 0 \Rightarrow a = c$.

Sottraggo la 2^ eq. dalla 3^: $3b + 6c = 0 \Rightarrow b = -2c$.

Sostituisco nella 1^: $c + 4c + c + d = 0 \Rightarrow d = -6c$.

Ponendo $c = 1$ ricaviamo: $a = 1,\ b = -2,\ d = -6 \Rightarrow \alpha:\ x - 2y + z - 6 = 0$.

d. Equazioni parametriche retta AD: $\begin{cases} x = (x_D - x_A)t + x_A = t + 1 \\ y = (y_D - y_A)t + y_A = 2t - 2 \\ z = (z_D - z_A)t + z_A = -3t + 1 \end{cases}$.

e. L'altezza del tetraedro Λ è la distanza del punto D dal piano ABC: $d_{D,\alpha} = \dfrac{|2-2-6|}{\sqrt{1+4+1}} = \sqrt{6}$.

$$V_\Lambda = \frac{1}{3} \cdot S_{ABC} \cdot d_{D,\alpha} = \frac{1}{3} \cdot \frac{9}{2}\sqrt{6} \cdot \sqrt{6} = 9 \quad .$$

f. I piani α e β sono paralleli, in quanto hanno lo stesso vettore normale $\vec{v_\alpha} = \vec{v_\beta} \equiv (1, -2, 1)$.

L'altezza del tetraedro Γ è la distanza del punto D dal piano EFG: $d_{D,\beta} = \dfrac{|2-2-2|}{\sqrt{1+4+1}} = \sqrt{\dfrac{2}{3}}$.

I tetraedri Λ e Γ sono simili ed il loro rapporto di similitudine è il rapporto delle altezze:

$$k = \frac{d_{D,\beta}}{d_{D,\alpha}} = \frac{\sqrt{2/3}}{\sqrt{6}} = \frac{1}{3} \quad .$$

Il rapporto tra i volumi dei tetraedri è il cubo del rapporto di similitudine: $V_\Gamma = k^3 V_\Lambda = \dfrac{1}{27} \cdot 9 = \dfrac{1}{3}$.

Dati i punti $A(2,0,-1)$, $B(0,1,3)$, $C(5,2,0)$, determina:

a. le equazioni della retta AB;

b. l'equazione del piano α passante per A, B, C;

c. l'equazione del piano β passante per $P(1,2,-1)$ e parallelo ad α;

d. l'equazione del piano γ passante per P e per A e perpendicolare ad α;

e. le equazioni della retta *r* passante per P e parallela ai piani α e γ, verificando che tale retta appartenga al piano γ;

f. le equazioni della retta *s* passante per P e perpendicolare ad α e le coordinate del punto D di intersezione tra la retta *s* ed il piano α;

g. le equazioni parametriche della retta *t* intersezione tra i piani α e γ;

h. l'ampiezza esatta dell'angolo $B\hat{A}C$ e quella approssimata al centesimo di grado di $A\hat{B}C$;

i. i centri delle sfere di raggio $R=\sqrt{6}$ tangenti al piano α nel punto A;

j. le coordinate del punto E (*di ascissa positiva*) in cui la sfera Σ di centro l'origine e raggio unitario interseca la retta OA;

k. l'equazione del piano δ tangente alla sfera Σ nel punto E.

<u>4^C</u> *- Correzione compito n°6*

a. Se scegliamo come "posizione iniziale" quella del punto A e come parametri direttori quelli del vettore $\vec{AB}$, le equazioni parametriche della retta AB sono:

$$\begin{cases} x=l\,t+x_0=(x_B-x_A)t+x_A=-2t+2 \\ y=mt+y_0=(y_B-y_A)t+y_A=t \\ z=nt+z_0=(z_B-z_A)+z_A=4t-1 \end{cases} .$$

b. Imponiamo il passaggio del piano generico $ax+by+cz+d=0$ per i punti A, B, C:

$$\begin{cases} 2a-c+d=0 \\ b+3c+d=0 \\ 5a+2b+d=0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} d=c-2a \\ b+3c+c-2a=0 \\ 5a+2b+c-2a=0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} d=c-2a \\ b=2a-4c \\ 3a+4a-8c+c=0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} d=-c \\ b=-2c \\ a=c \end{cases} .$$

Se scegliamo $c=1 \Rightarrow a=1;\ b=-2;\ d=-1$.

L'equazione del piano α è quindi: $x-2y+z-1=0 \Rightarrow \vec{v}_\alpha \equiv (1,-2,1)$.

c. Condizione di parallelismo: $\vec{v}_\beta \propto \vec{v}_\alpha \Rightarrow x-2y+z+d=0$.

Imponiamo il passaggio per P: $1-4+1+d=0 \Rightarrow d=4$.

L'equazione del piano β è quindi: $x-2y+z+4=0$.

d. Condizione di perpendicolarità: $\vec{v}_\gamma \perp \vec{v}_\alpha \Rightarrow a-2b+c=0$.

Passaggio per P: $a+2b-c+d=0$. Passaggio per A: $2a-c+d=0$.

Sommiamo membro a membro le prime due equazioni e sostituiamo:

$$\begin{cases} 2a+d=0 \\ a+2b-c+d=0 \\ 2a-c+d=0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} d=-2a \\ 2b-c-a=0 \\ c=0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} d=-4b \\ a=2b \\ c=0 \end{cases} .$$

Se scegliamo $b=1 \Rightarrow a=2;\ c=0;\ d=-4$.

L'equazione del piano γ è quindi: $2x+y-4=0 \Rightarrow \vec{v}_\gamma \equiv (2,1,0)$.

e. Mettiamo a sistema le condizioni di parallelismo:

$$\begin{cases} \vec{v}_r \perp \vec{v}_\alpha \Rightarrow l-2m+n=0 \\ \vec{v}_r \perp \vec{v}_\gamma \Rightarrow 2l+m=0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} n=2m-l=-5l \\ m=-2l \end{cases} \Rightarrow$$

Poniamo $l=1 \Rightarrow m=-2;\ n=-5$ e prendiamo come "posizione iniziale" P.

Le equazioni parametriche della retta *r* sono quindi: $\begin{cases} x=t+1 \\ y=-2t+2 \\ z=-5t-1 \end{cases}$.

Sostituiamo le equazioni parametriche della retta *r* nell'equazione del piano γ:

$2t+2-2t+2-4=0 \Rightarrow vera \quad \forall t \in \mathbb{R}$, per cui $r \subset \gamma$ c.v.d.

f. Condizione di perpendicolarità: $\vec{v}_s \propto \vec{v}_\alpha \Rightarrow l=1;\ m=-2;\ n=1$.

Imponiamo il passaggio per P: $x_0 = 1\ ;\ \ y_0 = 2\ ;\ \ z_0 = -1$.

Le equazioni parametriche della retta *s* sono quindi $\begin{cases} x = t+1 \\ y = -2t+2 \\ z = t-1 \end{cases}$.

Sostituiamo le coordinate parametriche della retta *s* nell'equazione del piano α:

$$t+1+4t-4+t-1-1=0 \ \Rightarrow\ t=\frac{5}{6} \ \Rightarrow\ D\left(\frac{11}{6},\frac{1}{3},-\frac{1}{6}\right) \ .$$

g. Mettiamo a sistema le equazioni dei piani α e γ:

$$\begin{cases} x-2y+z-1=0 \\ 2x+y-4=0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x-8+4x+z-1=0 \\ y=4-2x \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} z=-5x+9 \\ y=4-2x \end{cases} .$$

Se poniamo $x = t$, ricaviamo le equazioni parametriche della retta *t*: $\begin{cases} x = t \\ y = -2t+4 \\ z = -5t+9 \end{cases}$.

h. Calcoliamo le lunghezze dei lati del triangolo ABC:

$$AB=\sqrt{2^2+1^2+4^2}=\sqrt{21} \ \ ; \ \ AC=\sqrt{3^2+2^2+1^1}=\sqrt{14} \ \ ; \ \ BC=\sqrt{5^2+1^2+3^2}=\sqrt{35} \ .$$

Poiché $AB^2+AC^2=BC^2$, il triangolo ABC è rettangolo in A.

Quindi: $sen\,A\hat{B}C=\frac{AC}{BC}=\sqrt{\frac{2}{5}} \ \Rightarrow\ A\hat{B}C=arc\,sen\sqrt{\frac{2}{5}}\simeq 39{,}23°$.

i. Il centro K della sfera deve trovarsi sulla retta passante per A e perpendicolare ad α, per cui avrà coordinate parametriche $K(t+2,-2t,t-1)$ (*vedi punto f*).

Imponiamo $R=KA=\sqrt{6} \ \Rightarrow\ \sqrt{t^2+4t^2+t^2}=\sqrt{6} \ \Rightarrow\ t^2=1 \ \Rightarrow\ t=\pm 1$.

I centri delle sfere hanno coordinate: $K_1(3,-2,0)$, $K_2(1,2,-2)$.

j. La retta OA ha equazioni parametriche: $\begin{cases} x = 2t \\ y = 0 \\ z = -t \end{cases}$.

Imponiamo che un punto generico della retta OA abbia distanza unitaria dall'origine:

$$\sqrt{4t^2+t^2}=1 \ \Rightarrow\ t=\pm\frac{1}{\sqrt{5}} \ \Rightarrow\ E\left(\frac{2}{\sqrt{5}},0,-\frac{1}{\sqrt{5}}\right) \ .$$

k. Il vettore $\vec{v}_\delta$ perpendicolare al piano δ deve essere parallelo ad $\vec{OA}$: $\vec{v}_\delta \propto (2,0,-1)$.

L'equazione del piano δ è quindi del tipo: $2x-z+d=0$.

Imponiamo il passaggio per E: $\frac{4}{\sqrt{5}}+\frac{1}{\sqrt{5}}+d=0 \ \Rightarrow\ d=-\sqrt{5}$.

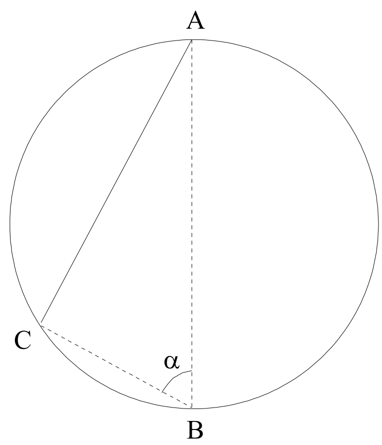
L'equazione del piano δ è quindi: $2x-z-\sqrt{5}=0$.

4^A - MATEMATICA compito n°7 - 2015-2016

1. Dati i punti $A(1,0,0)$, $B(0,2,0)$, $C(0,0,3)$, determina:
    a. l'equazione della retta BC;
    b. l'equazione del piano α passante per A, B, C;
    c. l'equazione del piano β passante per O e parallelo ad α;
    d. l'equazione del piano γ passante per O e per C e perpendicolare ad α;
    e. l'equazione della retta *r* passante per O, parallela ad α e giacente sul piano *yz*;
    f. l'equazione della retta *s* passante per O e perpendicolare ad α;
    g. l'equazione della retta *t* intersezione tra i piani α e γ;
    h. l'equazione della sfera S avente centro nell'origine O e tangente al piano α;
    i. il punto P (avente coordinate positive) di intersezione tra la sfera S e la retta *u* di equazioni $x=y=z$;
    j. l'equazione del piano δ tangente alla sfera S nel punto P.
    k. Al tempo $t=0$ un corpo di massa 3*m* che si trova nell'origine si divide in tre frammenti uguali che al tempo $t=1$ si trovano rispettivamente nei punti A, B, C.

       Determina componenti e modulo del vettore velocità $\vec{V}(0)$ del corpo per $t=0$.

2. E' data la circonferenza Γ di diametro $AB=2r$.

   Un punto materiale inizialmente fermo in A scivola sotto l'azione della forza peso (e della reazione vincolare) lungo un piano inclinato che coincide con la corda AC.

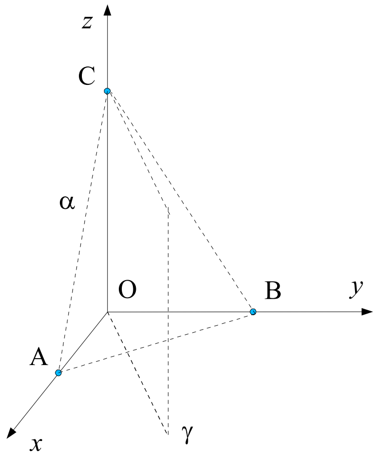
   Sapendo che sull'arco AC insiste un angolo alla circonferenza α, calcola il tempo di discesa t_d. Cosa osservi?

   Se non osservi niente, come cambia il tempo t_d al variare del punto C sulla circonferenza?

   Cosa puoi dire riguardo i casi limite $\alpha=0°$ e $\alpha=90°$?

4^A - *Correzione compito n°7*

1.



a. Prendiamo come "posizione iniziale" B e come parametri direttori le componenti del vettore $\vec{BC}$. Eq. retta BC:

$$\begin{cases} x = l\,t + x_0 = (x_C - x_B)t + x_B = 0 \\ y = mt + y_0 = (y_C - y_B)t + y_B = -2t + 2 \\ z = nt + z_0 = (z_C - z_B) + z_B = 3t \end{cases} .$$

b. Imponiamo il passaggio del piano generico $ax + by + cz + d = 0$ per i punti A, B, C:

$$\begin{cases} a + d = 0 \;\Rightarrow\; a = -d \\ 2b + d = 0 \;\Rightarrow\; b = -d/2 \\ 3c + d = 0 \;\Rightarrow\; c = -d/3 \end{cases} .$$

Poniamo ad esempio: $d = -6 \;\Rightarrow\; a = 6;\; b = 3;\; c = 2$.

L'equazione del piano α è quindi: $6x + 3y + 2z - 6 = 0 \;\Rightarrow\; \vec{v}_\alpha \equiv (6, 3, 2)$.

c. Condizione di parallelismo: $\vec{v}_\beta \propto \vec{v}_\alpha \;\Rightarrow\; 6x + 3y + 2z + d = 0$.

Passaggio per O: $d = 0 \;\Rightarrow\; \beta:\; 6x + 3y + 2z = 0$.

d. Condizione di perpendicolarità: $\vec{v}_\beta \perp \vec{v}_\alpha \;\Rightarrow\; 6a + 3b + 2c = 0$.

Passaggio per O: $d = 0$. Passaggio per C: $3c + d = 0$.

Ponendo $a = 1$ ricaviamo quindi: $b = -2;\; c = 0 \;\Rightarrow\; \gamma:\; x - 2y = 0$.

e. Condizione di parallelismo: $\vec{v}_r \perp \vec{v}_\alpha \;\Rightarrow\; 6l + 3m + 2n = 0$.

Appartenenza al piano *yz*: $l = 0$. Ponendo $m = 2 \;\Rightarrow\; n = -3$.

Prendendo come "posizione iniziale" O, l'eq. della retta *r* è: $\begin{cases} x = 0 \\ y = 2t \\ z = -3t \end{cases}$.

f. Condizione di perpendicolarità: $\vec{v}_s \propto \vec{v}_\alpha \;\Rightarrow\; l = 6;\; m = 3;\; n = 2$.

Passaggio per O: $x_0 = y_0 = z_0 = 0$. Eq. retta *s*: $\begin{cases} x = 6t \\ y = 3t \\ z = 2t \end{cases}$.

g. $\begin{cases} 6x + 3y + 2z - 6 = 0 \;\Rightarrow\; 15y + 2z - 6 = 0 \;\Rightarrow\; z = (6 - 15y)/2 \\ x - 2y = 0 \;\Rightarrow\; x = 2y \end{cases}$.

Pongo $y = 2t \;\Rightarrow\; z = 3 - 15t \;\Rightarrow\; x = 4t$. Eq. retta *t*: $\begin{cases} x = 4t \\ y = 2t \\ z = -15t + 3 \end{cases}$.

h. Il raggio della sfera è la distanza del centro O dal piano α:

$$r=\frac{|ax_0+by_0+cz_0+d|}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}}=\frac{6}{\sqrt{36+9+4}}=\frac{6}{7} \quad .$$

Eq. sfera S: $x^2+y^2+z^2=36/49$.

i. $\begin{cases} x^2+y^2+z^2=36/49 \\ x=y=z \end{cases} \Rightarrow 3x^2=\frac{36}{49} \Rightarrow x^2=\frac{12}{49} \Rightarrow x_P=y_P=z_P=\frac{2}{7}\sqrt{3}$.

j. Le componenti del vettore $\vec{v}_\delta$ devono essere proporzionali a quelle di $\vec{OP}$.

Possiamo quindi prendere $a=b=c=2\sqrt{3}$ o, per semplicità: $a=b=c=1$.

L'equazione del piano δ è quindi del tipo: $x+y+z+d=0$.

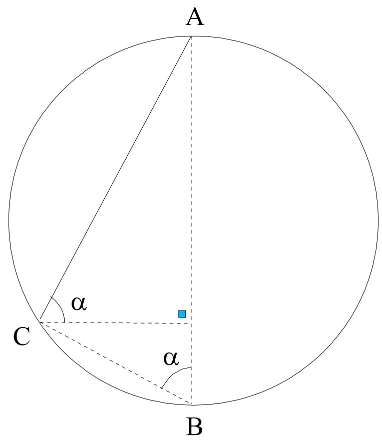
Passaggio per P: $\frac{6}{7}\sqrt{3}+d=0 \Rightarrow d=-\frac{6}{7}\sqrt{3}$.

Equazione piano δ: $7(x+y+z)-6\sqrt{3}=0$.

k. Possiamo supporre che nell'intervallo di tempo considerato il corpo ed i suoi frammenti costituiscano un sistema isolato, per il quale vale la conservazione della quantità di moto:

$$\begin{cases} 3mV_x=m\cdot 1 \\ 3mV_y=m\cdot 2 \\ 3mV_z=m\cdot 3 \end{cases} \Rightarrow \vec{V}\equiv\left(\frac{1}{3},\frac{2}{3},1\right) \Rightarrow V=\sqrt{\frac{1}{9}+\frac{4}{9}+1}=\frac{\sqrt{14}}{3} \quad .$$

2. Dalla geometria euclidea sappiamo che l'angolo α misura anche la pendenza del piano inclinato.



La forza risultante che agisce sul corpo è la componente parallela del suo peso: $F_{ris}=mg\,sen\,\alpha$, per cui il moto del corpo è uniformemente accelerato con accelerazione $a=g\,sen\,\alpha$.

Per il teorema della corda: $AC=2r\,sen\,\alpha$.

Sostituiamo nella legge oraria del moto uniformemente accelerato:

$$s=\frac{1}{2}at^2 \Rightarrow 2r\,sen\,\alpha=\frac{1}{2}gt^2\,sen\,\alpha \Rightarrow t_d=2\sqrt{\frac{r}{g}} \quad .$$

Il tempo t_d non dipende dall'angolo α, e, quindi, non varia al variare del punto C sulla circonferenza.

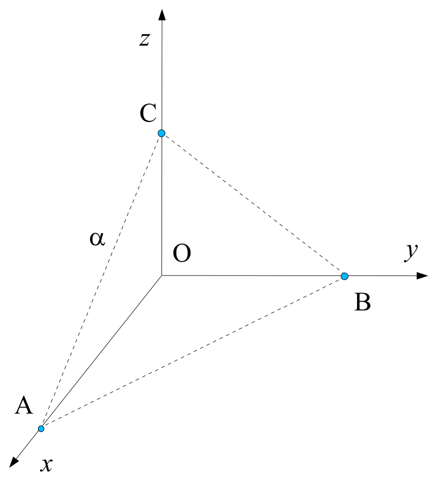
Il risultato ottenuto non è valido nel caso limite $\alpha=0°$, in quanto $C\equiv A$ e $t_d=0$.

E' invece valido nel caso limite $\alpha=90°$, ovvero $C\equiv B$, in quanto si ha un moto di caduta libera da un'altezza uguale al diametro: $2r=\frac{1}{2}gt^2 \Rightarrow t_d=2\sqrt{\frac{r}{g}}$.

1. Dato il piano α di equazione $3x+4y+6z-12=0$, determina:
    a. le coordinate dei punti A, B, C in cui il piano α interseca rispettivamente gli assi *x*, *y*, *z*;
    b. l'equazione della retta AC;
    c. l'equazione del piano β passante per O e parallelo ad α;
    d. l'equazione del piano γ passante per O e per B e perpendicolare ad α;
    e. l'equazione della retta *r* passante per O, parallela ad α e giacente sul piano *xz*;
    f. la distanza tra la retta *r* ed il piano α;
    g. l'equazione della retta *s* passante per O e perpendicolare ad α;
    h. l'equazione della retta *t* intersezione tra i piani α e γ;
    i. l'equazione della sfera S avente centro nell'origine O e tangente al piano α;
    j. il punto P (avente coordinate positive) di intersezione tra la sfera S e la retta *u* di equazioni $x=y=2z$;
    k. l'equazione del piano δ tangente alla sfera S nel punto P;
    l. l'equazione del piano ϕ passante per i punti A, B, $D(1,1,1)$.
2. Un determinato marcatore tumorale è positivo in 96 pazienti su 100 ammalati di quella forma di tumore, mentre è negativo in 98 pazienti su 100 che non hanno quella forma di tumore.
   Inoltre, è noto che in media 10 persone su 1000 hanno la forma tumorale in questione.
    a. Un paziente si sottopone al test. Qual è la probabilità che l'esito sia positivo e che egli abbia realmente la forma tumorale collegata a quel marcatore?
    b. Un paziente si sottopone al test e l'esito è positivo. Qual è la probabilità che egli abbia realmente la forma tumorale collegata a quel marcatore?

4^F - Correzione compito n°7

1.



a. $\begin{cases} 3x+4y+6z-12=0 \\ y=z=0 \end{cases} \Rightarrow A(4,0,0)$;

$\begin{cases} 3x+4y+6z-12=0 \\ x=z=0 \end{cases} \Rightarrow B(0,3,0)$;

$\begin{cases} 3x+4y+6z-12=0 \\ x=y=0 \end{cases} \Rightarrow C(0,0,2)$.

b. Prendiamo come “posizione iniziale” A e come parametri direttori le componenti del vettore $\vec{AC}$. Eq. retta AC:

$$\begin{cases} x=lt+x_0=(x_C-x_A)t+x_A=-4t+4 \\ y=mt+y_0=(y_C-y_A)t+y_A=0 \\ z=nt+z_0=(z_C-z_A)+z_A=2t \end{cases} .$$

c. Condizione di parallelismo: $\vec{v}_\beta \propto \vec{v}_\alpha \Rightarrow 3x+4y+6z+d=0$.

Passaggio per O: $d=0 \Rightarrow \beta:\ 3x+4y+6z$.

d. Condizione di perpendicolarità: $\vec{v}_\gamma \perp \vec{v}_\alpha \Rightarrow 3a+4b+6c=0$.

Passaggio per O: $d=0$. Passaggio per B: $3b+d=0$.

Ponendo $c=-1$ ricaviamo quindi: $b=0;\ a=2 \Rightarrow \gamma:\ 2x-z=0$.

e. Condizione di parallelismo: $\vec{v}_r \perp \vec{v}_\alpha \Rightarrow 3l+4m+6n=0$.

Appartenenza al piano *xz*: $m=0$. Ponendo $n=-1 \Rightarrow l=2$.

Prendendo come “posizione iniziale” O, l'eq. della retta *r* è: $\begin{cases} x=2t \\ y=0 \\ z=-t \end{cases}$.

f. Poiché la retta *r* ed il piano α sono paralleli, la loro distanza è la distanza tra un qualunque punto appartenente ad *r*, ad esempio l'origine O, ed α:

$$d(r,\alpha)=d(O,\alpha)=\frac{|-12|}{\sqrt{3^2+4^2+6^2}}=\frac{12}{\sqrt{61}} .$$

g. Condizione di perpendicolarità: $\vec{v}_s \propto \vec{v}_\alpha \Rightarrow l=3;\ m=4;\ n=6$.

Passaggio per O: $x_0=y_0=z_0=0$. Eq. retta *s*: $\begin{cases} x=3t \\ y=4t \\ z=6t \end{cases}$.

h. $\begin{cases} 3x+4y+6z-12=0 \Rightarrow 15x+4y-12=0 \Rightarrow y=(12-15x)/4 \\ 2x-z=0 \Rightarrow z=2x \end{cases}$.

Poniamo: $x=4t \Rightarrow y=3-15t \Rightarrow z=8t$. Eq. retta t: $\begin{cases} x=4t \\ y=-15t+3 \\ z=8t \end{cases}$.

i. Il raggio della sfera è la distanza del centro O dal piano α: $r=12/\sqrt{61}$.

Eq. sfera S: $x^2+y^2+z^2=144/61$.

j. $\begin{cases} x^2+y^2+z^2=144/61 \\ x=y=2z \end{cases} \Rightarrow 9z^2=\dfrac{144}{61} \Rightarrow z^2=\dfrac{16}{61} \Rightarrow P\left(\dfrac{8}{\sqrt{61}},\dfrac{8}{\sqrt{61}},\dfrac{4}{\sqrt{61}}\right)$.

k. Poiché $\vec{v}_\delta \propto \vec{OP}$, possiamo scegliere: $a=b=2,\ c=1 \Rightarrow 2x+2y+z+d=0$.

Passaggio per P: $\dfrac{16}{\sqrt{61}}+\dfrac{16}{\sqrt{61}}+\dfrac{4}{\sqrt{61}}+d=0 \Rightarrow d=-\dfrac{36}{\sqrt{61}}$.

Equazione piano δ: $\sqrt{61}(2x+2y+z)-36=0$.

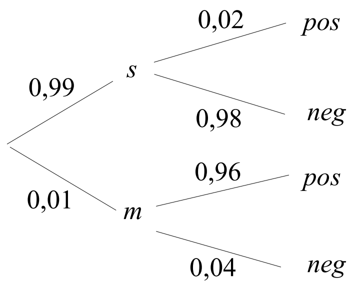
l. Imponiamo il passaggio del piano generico $ax+by+cz+d=0$ per i punti A, B, D:

$$\begin{cases} 4a+d=0 \Rightarrow d=-4a \\ 3b+d=0 \Rightarrow b=4a/3 \\ a+b+c+d=0 \Rightarrow c=5a/3 \end{cases}$$.

Poniamo ad esempio: $a=3 \Rightarrow b=4;\ c=5;\ d=-12$.

L'equazione del piano ϕ è quindi: $3x+4y-5z-12=0$.

2. Indichiamo con *m* l'evento “il paziente è malato”.



a. $p(m\wedge pos)=p(m)\cdot p(pos/m)=0{,}01\cdot 0{,}96=9{,}6\cdot 10^{-3}$;

b. $p(m/pos)=\dfrac{p(m)\cdot p(pos/m)}{p(pos)}=$

$\dfrac{0{,}01\cdot 0{,}96}{0{,}99\cdot 0{,}02+0{,}01\cdot 0{,}96}=\dfrac{96}{294}\simeq 32{,}65\%$.