

1. In un triangolo ABC abbiamo $a=4$, $b=3$, $\beta=30^\circ$.

Determina i possibili valori dell'angolo α (sia esatti che approssimati al centesimo di grado).

2. L'area di un triangolo misura $S=3\text{ cm}^2$ e due lati misurano $b=2\text{ cm}$ e $c=3\text{ cm}$.

Calcola la misura del lato a .

3. Dato un triangolo isoscele, dimostra che la somma delle distanze di un punto della base dai lati obliqui è costante (la stessa per tutti i punti della base).

4. Due osservatori A e B, posti al suolo alla distanza $d=500\text{ m}$, seguono con il cannocchiale un aeroplano. Quando questo passa per il piano verticale comune ad A e B (*“dalla stessa parte sia per A che per B”*), essi lo vedono con degli angoli di elevazione $\alpha=80,0^\circ$ e $\beta=70,0^\circ$ rispettivamente. A quale altezza dal suolo vola l'aeroplano?

5. Da un mazzo di 40 carte da gioco, vengono estratte 6 carte contemporaneamente.

a. Qual è la probabilità che nessuna delle carte estratte sia rossa?

b. Qual è la probabilità che, tra le carte estratte, vi siano esattamente 2 assi?

6. Qual è il numero delle cinquine che si possono ottenere completando l'ambo $\{3, 25\}$?

(Nel gioco del Lotto vengono estratti cinque numeri interi compresi tra 1 e 90).

7. Per progettare un sito web è necessario generare dei codici unici di accesso. Si vogliono utilizzare, a tale scopo, due lettere maiuscole dell'alfabeto inglese seguite da una serie di cifre comprese tra 0 e 9. Tutti i codici di accesso dovranno avere lo stesso numero di cifre ed è ammessa la ripetizione di lettere e numeri. Qual è il numero minimo di cifre da impostare in modo da riuscire a generare almeno 5 milioni di codici di accesso diversi?

(Una risposta fornita per tentativi viene valutata molto meno di una che contiene il procedimento “formale”)

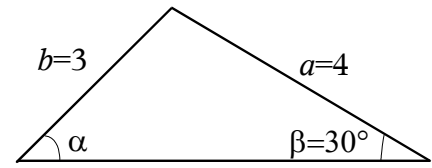
8. Una classe è composta da 12 ragazzi e 4 ragazze.

Tra i 16 allievi se ne scelgono 3 a caso: qual è la probabilità che essi siano tutti maschi?

1. Applichiamo il teorema dei seni al triangolo ABC:

$$\frac{\sin \alpha}{a} = \frac{\sin \beta}{b} \Rightarrow \sin \alpha = \frac{a}{b} \sin \beta = \frac{4}{3} \cdot \frac{1}{2} = \frac{2}{3} \Rightarrow$$

$$\alpha_1 = \arcsin \frac{2}{3} \simeq 41,81^\circ ; \quad \alpha_2 = 180^\circ - \arcsin \frac{2}{3} \simeq 138,19^\circ .$$



[Q1 PNI 2014]

2. Dalla formula per l'area del triangolo ricaviamo:

$$S = \frac{1}{2} bc \sin \alpha \Rightarrow \sin \alpha = \frac{2S}{bc} = \frac{2 \cdot 3 \text{ cm}^2}{2 \text{ cm} \cdot 3 \text{ cm}} = 1 \Rightarrow \alpha = 90^\circ .$$

Il triangolo è quindi rettangolo con ipotenusa $a = \sqrt{b^2 + c^2} = \sqrt{2^2 + 3^2} = \sqrt{13} \text{ cm}$. [Q1 2013]

3. Se indichiamo con b la misura della base del triangolo e con α quella dell'angolo alla base, un punto generico P della base ha distanze x e $b-x$ dagli estremi della base, con $0 \leq x \leq b$.

La somma delle distanze del punto P dai lati obliqui è:

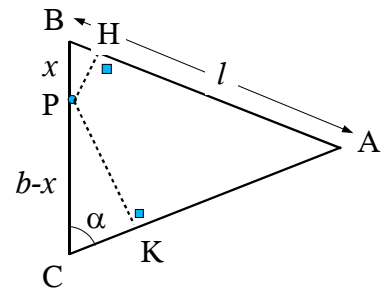
$$\overline{PH} + \overline{PK} = x \sin \alpha + (b-x) \sin \alpha = b \sin \alpha$$

che non dipende da x c.v.d.

Oppure, senza utilizzare la trigonometria, esprimiamo l'area del triangolo isoscele:

$$S_{ABC} = A_{PAB} + S_{PAC} = \frac{l \cdot PH}{2} + \frac{l \cdot PK}{2} \Rightarrow PH + PK = \frac{2S_{ABC}}{l} = \text{cost} .$$

[Q4 PNI sup 2007]



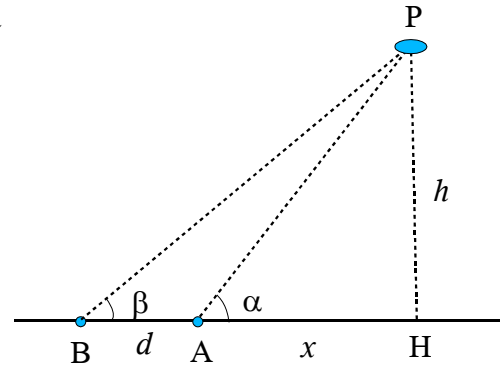
4. Indichiamo con P la posizione dell'aeroplano e con H la sua proiezione sul suolo.

Dai triangoli rettangoli APH e BPH ricaviamo:

$$h = x \tan \alpha ; \quad h = (d+x) \tan \beta ,$$

da cui, eliminando x :

$$h = \frac{\tan \alpha \tan \beta}{\tan \alpha - \tan \beta} d \simeq \frac{\tan 80^\circ \tan 70^\circ}{\tan 80^\circ - \tan 70^\circ} \cdot 500 \text{ m} \simeq 2.665 \text{ m} .$$



In alternativa, possiamo applicare il teorema dei seni al triangolo generico ABP.

Il testo ministeriale lascia aperta la possibilità che l'aeroplano si trovi “tra i due osservatori”, nel qual caso il segno a denominatore sarebbe positivo, ottenendo $h \simeq 925 \text{ m}$. [Q1 Com str 2014]

5.

- a. Calcoliamo la probabilità che vengano estratte successivamente sei carte nere supponendo ogni volta che tutte le precedenti siano nere:

$$p(N_1 \wedge \dots \wedge N_6) = \frac{20}{40} \cdot \frac{19}{39} \cdot \frac{18}{38} \cdot \frac{17}{37} \cdot \frac{16}{36} \cdot \frac{15}{35} \simeq 0,0101 \simeq 1,01\% .$$

Oppure applicando la def. classica: $p = \frac{C_{20,6}}{C_{40,6}}$.

- b. Calcoliamo la probabilità che vengano estratti prima due assi e poi quattro carte diverse dagli assi, e poi moltiplichiamo per il numero di modi di scegliere due assi su sei carte:

$$p(A_1 \wedge A_2 \wedge \overline{A_3} \wedge \dots \wedge \overline{A_6}) = \frac{4}{40} \cdot \frac{3}{39} \cdot \frac{36}{38} \cdot \frac{35}{37} \cdot \frac{34}{36} \cdot \frac{33}{35} \cdot \binom{6}{2} \simeq 0,0921 \simeq 9,21 \% \quad .$$

Oppure applicando la def. classica: $p = \frac{C_{4,2} \cdot C_{36,4}}{C_{40,6}}$. [Q5 str 2019]

6. Per completare la cinquina, dobbiamo scegliere tre numeri tra 1 e 90 che non siano 3 e 25:

$$C_{88,3} = \frac{88 \cdot 87 \cdot 86}{3 \cdot 2 \cdot 1} = 109.736 \quad . \quad \text{[Q10 PNI str 2014]}$$

7. Dobbiamo scegliere e ordinare due lettere scelte tra 26 ed n cifre scelte tra 10 (anche con eventuali ripetizioni), quindi:

$$D'_{26,2} \cdot D'_{10,n} = 26^2 \cdot 10^n > 5 \cdot 10^6 \Rightarrow n > \log \frac{5 \cdot 10^6}{26^2} = 6 + \log \frac{5}{26^2} \simeq 3,87 \quad .$$

Sono quindi necessarie almeno 4 cifre. [Q5 2^a Sim 2015]

8. Utilizziamo la formula della probabilità composta:

$$p(M_1 \wedge M_2 \wedge M_3) = \frac{12}{16} \cdot \frac{11}{15} \cdot \frac{10}{14} \simeq 0,393 \simeq 39,3 \% \quad .$$

Oppure applicando la def. classica: $p = \frac{C_{12,3}}{C_{16,3}}$. [Q8 PNI 2001]

1. In un triangolo ABC abbiamo $a=3$, $b=4$, $\alpha=30^\circ$.

Determina i possibili valori dell'angolo β (sia esatti che approssimati al centesimo di grado).

2. L'area di un triangolo misura $S=3\text{ cm}^2$ e due lati misurano $a=2\text{ cm}$ e $b=3\text{ cm}$.

Calcola la misura del lato c .

3. Dato un triangolo isoscele, dimostra che la somma delle distanze di un punto della base dai lati obliqui è costante (la stessa per tutti i punti della base).

4. Due osservatori A e B, posti al suolo alla distanza $d=600\text{ m}$, seguono con il cannocchiale un aeroplano. Quando questo passa per il piano verticale comune ad A e B (*“dalla stessa parte sia per A che per B”*), essi lo vedono con degli angoli di elevazione $\alpha=70,0^\circ$ e $\beta=80,0^\circ$ rispettivamente. A quale altezza dal suolo vola l'aeroplano?

5. Da un mazzo di 52 carte da gioco, vengono estratte 5 carte contemporaneamente.

a. Qual è la probabilità che nessuna delle carte estratte sia rossa?

b. Qual è la probabilità che, tra le carte estratte, vi siano esattamente 2 assi?

6. Qual è il numero delle cinque che si possono ottenere completando il terno $\{3, 25, 72\}$?

(Nel gioco del Lotto vengono estratti cinque numeri interi compresi tra 1 e 90).

7. Per progettare un sito web è necessario generare dei codici unici di accesso. Si vogliono utilizzare, a tale scopo, due lettere maiuscole dell'alfabeto italiano seguite da una serie di cifre comprese tra 0 e 9. Tutti i codici di accesso dovranno avere lo stesso numero di cifre ed è ammessa la ripetizione di lettere e numeri. Qual è il numero minimo di cifre da impostare in modo da riuscire a generare almeno 4 milioni di codici di accesso diversi?

(Una risposta fornita per tentativi viene valutata molto meno di una che contiene il procedimento “formale”)

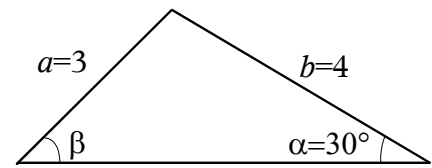
8. Una classe è composta da 14 ragazzi e 5 ragazze.

Tra i 19 allievi se ne scelgono 3 a caso: qual è la probabilità che essi siano tutte femmine?

1. Applichiamo il teorema dei seni al triangolo ABC:

$$\frac{\sin \alpha}{a} = \frac{\sin \beta}{b} \Rightarrow \sin \beta = \frac{b}{a} \sin \alpha = \frac{4}{3} \cdot \frac{1}{2} = \frac{2}{3} \Rightarrow$$

$$\beta_1 = \arcsin \frac{2}{3} \simeq 41,81^\circ ; \quad \beta_2 = 180^\circ - \arcsin \frac{2}{3} \simeq 138,19^\circ .$$



[Q1 PNI 2014]

2. Dalla formula per l'area del triangolo ricaviamo:

$$S = \frac{1}{2} ab \sin \gamma \Rightarrow \sin \gamma = \frac{2S}{ab} = \frac{2 \cdot 3 \text{ cm}^2}{2 \text{ cm} \cdot 3 \text{ cm}} = 1 \Rightarrow \gamma = 90^\circ .$$

Il triangolo è quindi rettangolo con ipotenusa $c = \sqrt{a^2 + b^2} = \sqrt{2^2 + 3^2} = \sqrt{13} \text{ cm}$. [Q1 2013]

3. Se indichiamo con b la misura della base del triangolo e con α quella dell'angolo alla base, un punto generico P della base ha distanze x e $b-x$ dagli estremi della base, con $0 \leq x \leq b$.

La somma delle distanze del punto P dai lati obliqui è:

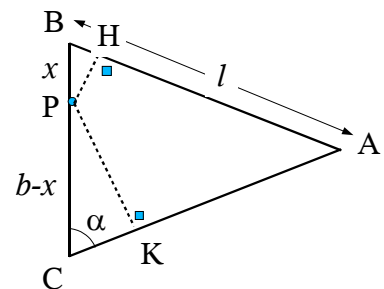
$$\overline{PH} + \overline{PK} = x \sin \alpha + (b-x) \sin \alpha = b \sin \alpha$$

che non dipende da x c.v.d.

Oppure, senza utilizzare la trigonometria, esprimiamo l'area del triangolo isoscele:

$$S_{ABC} = A_{PAB} + S_{PAC} = \frac{l \cdot PH}{2} + \frac{l \cdot PK}{2} \Rightarrow PH + PK = \frac{2S_{ABC}}{l} = \cos t .$$

[Q4 PNI sup 2007]



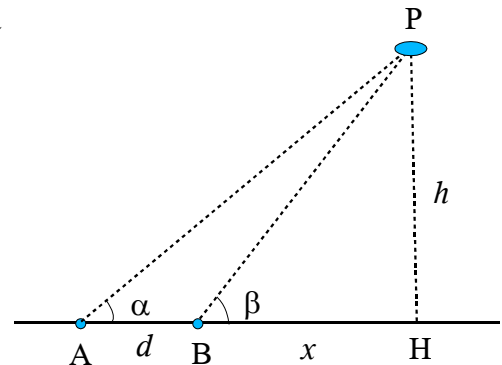
4. Indichiamo con P la posizione dell'aeroplano e con H la sua proiezione sul suolo.

Dai triangoli rettangoli APH e BPH ricaviamo:

$$h = x \tan \beta ; \quad h = (d+x) \tan \alpha ,$$

da cui, eliminando x :

$$h = \frac{\tan \alpha \tan \beta}{\tan \beta - \tan \alpha} d \simeq \frac{\tan 70^\circ \tan 80^\circ}{\tan 80^\circ - \tan 70^\circ} \cdot 600 \text{ m} \simeq 3.198 \text{ m} .$$



In alternativa, possiamo applicare il teorema dei seni al triangolo generico ABP.

Il testo ministeriale lascia aperta la possibilità che l'aeroplano si trovi “tra i due osservatori”, nel qual caso il segno a denominatore sarebbe positivo, ottenendo $h \simeq 1.110 \text{ m}$. [Q1 Com str 2014]

5.

- a. Calcoliamo la probabilità che vengano estratte successivamente cinque carte nere supponendo ogni volta che tutte le precedenti siano nere:

$$p(N_1 \wedge \dots \wedge N_5) = \frac{26}{52} \cdot \frac{25}{51} \cdot \frac{24}{50} \cdot \frac{23}{49} \cdot \frac{22}{48} \simeq 0,0253 \simeq 2,53\% .$$

Oppure applicando la def. classica: $p = \frac{C_{26,5}}{C_{52,5}}$.

- b. Calcoliamo la probabilità che vengano estratti prima due assi e poi tre carte diverse dagli assi, e poi moltiplichiamo per il numero di modi di scegliere due assi su cinque carte:

$$p(A_1 \wedge A_2 \wedge \overline{A_3} \wedge \overline{A_4} \wedge \overline{A_5}) = \frac{4}{52} \cdot \frac{3}{51} \cdot \frac{48}{50} \cdot \frac{47}{49} \cdot \frac{46}{48} \cdot \frac{5!}{2!3!} \simeq 0,0399 \simeq 3,99\% .$$

Oppure applicando la def. classica: $p = \frac{C_{4,2} \cdot C_{48,3}}{C_{52,5}}$. [Q5 str 2019]

6. Per completare la cinquina, dobbiamo scegliere due numeri tra 1 e 90 che non siano 3, 25, 72:

$$C_{87,2} = \frac{87 \cdot 86}{2 \cdot 1} = 3.741 .$$
 [Q10 PNI str 2014]

7. Dobbiamo scegliere e ordinare due lettere scelte tra 21 ed n cifre scelte tra 10 (anche con eventuali ripetizioni), quindi:

$$D'_{26,2} \cdot D'_{10,n} = 21^2 \cdot 10^n > 4 \cdot 10^6 \Rightarrow n > \log \frac{4 \cdot 10^6}{21^2} = 6 + \log \frac{4}{21^2} \simeq 3,96 .$$

Sono quindi necessarie almeno 4 cifre.

[Q5 2^a Sim 2015]

8. Utilizziamo la formula della probabilità composta:

$$p(F_1 \wedge F_2 \wedge F_3) = \frac{5}{19} \cdot \frac{4}{18} \cdot \frac{3}{17} \simeq 0,0103 \simeq 1,03\% .$$

Oppure applicando la def. classica: $p = \frac{C_{5,3}}{C_{19,3}}$.

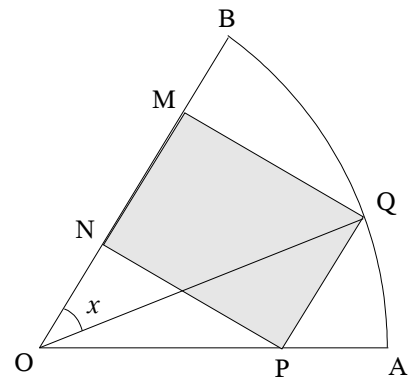
[Q8 PNI 2001]

1. Nel settore circolare OAB di ampiezza $\alpha=60^\circ$ e raggio $r=1$ è inscritto il rettangolo MNPQ (vedi figura).

- a. Determina l'area del rettangolo in funzione dell'angolo

$$\widehat{POQ}=x \text{ e scrivila come } S(x)=A \sin(\omega x + \phi) + k.$$

- b. Determina per quale valore di x l'area è massima e calcola tale valore massimo.



2. Considera l'insieme A delle sequenze di sei cifre. Ad esempio: 272348 e 003714 sono elementi di A.

Determina utilizzando le proprietà del calcolo combinatorio ed esponendo i tuoi ragionamenti:

- il numero di elementi di A;
 - il numero di elementi di A che sono numeri naturali di sei cifre;
 - il numero di elementi di A che contengono sei cifre diverse;
 - il numero di elementi di A che hanno solo due cifre uguali;
 - il numero di elementi di A che hanno almeno due cifre uguali;
 - il numero di elementi di A che non contengono lo zero.
- g. In Italia le targhe dei ciclomotori vengono formate da sequenze di sei caratteri, che possono essere cifre o lettere dell'alfabeto inglese (26 caratteri) secondo le seguenti regole:
- il primo carattere può essere una cifra tra 2 e 9 o una lettera tra X, Y, Z;
 - i cinque caratteri rimanenti possono essere una cifra tra 2 e 9 o una consonante (esclusa la Q), e sono ammesse ripetizioni.

Quale percentuale delle sequenze possibili è costituita dalle targhe che contengono sei cifre?

3. Una azienda produce dei componenti elettronici, e la probabilità che un componente prodotto sia difettoso è $p=0,002$. Per un controllo della qualità, viene estratto un campione di 20 componenti. Calcola:
- la probabilità che il campione estratto non contenga alcun pezzo difettoso;
 - la probabilità che il campione estratto contenga esattamente due pezzi difettosi;
 - la probabilità che il campione estratto contenga almeno un pezzo difettoso.
 - Da quanti componenti al massimo può essere costituito uno stock di vendita, se si vuole che la probabilità che esso non contenga alcun pezzo difettoso sia superiore al 95%?

4. La diagnosi di un'infezione è effettuata mediante un test clinico a cui risulta positivo il 98% dei soggetti infetti e il 4% dei soggetti non infetti. Possiamo stimare che nella popolazione un soggetto su mille abbia l'infezione. Considera gli eventi:

- I = “il soggetto è infetto”;
- S = “il soggetto è sano”;
- N = “il soggetto è negativo al test”;
- P = “il soggetto è positivo al test”.

Calcola (*con almeno tre cifre significative*):

- a. la probabilità che un soggetto sia positivo al test;
- b. la probabilità che un soggetto sia negativo al test;
- c. la probabilità che un soggetto sia positivo al test e che sia sano;
- d. la probabilità che un soggetto risulti negativo al test sapendo che è infetto;
- e. la probabilità che un soggetto sia infetto sapendo che è risultato positivo al test;
- f. la probabilità che un soggetto sia sano sapendo che è risultato negativo al test.
- g. Spiega se gli eventi P ed S sono incompatibili.
- h. Spiega se gli eventi I e P sono indipendenti.
- i. *In base ai risultati che hai ottenuto nei punti e ed f, spiega come dovrebbe comportarsi un medico che analizza l'esito del test.*

1.

a. Dal triangolo rettangolo OQM ricaviamo: $MQ = OQ \sin x = \sin x$.

Nel triangolo generico OPQ abbiamo:

- $\hat{OQP} = \hat{QOB} = x$ perché angoli alterni interni formati dalle rette PQ e OB (parallele perché contenenti i lati opposti di un rettangolo) tagliate dalla trasversale OQ;
- $\hat{QOP} = \hat{BOP} - \hat{BOQ} = 60^\circ - x$ e $\hat{QPO} = 180^\circ - \hat{OQP} - \hat{QOP} = 120^\circ$
o, più semplicemente: $\hat{OPQ} = \hat{OPN} + \hat{NOQ} = 30^\circ + 90^\circ = 120^\circ$.

Applichiamo quindi il teorema dei seni al triangolo OPQ:

$$\frac{PQ}{\sin(60^\circ - x)} = \frac{OQ}{\sin 120^\circ} \Rightarrow PQ = \frac{\sqrt{3}/2 \cos x - 1/2 \sin x}{\sqrt{3}/2} = \cos x - \frac{1}{\sqrt{3}} \sin x.$$

Oppure dal triangolo rettangolo OQM ricaviamo: $OM = OQ \cos x = \cos x$; dal triangolo rettangolo OPN ricaviamo: $ON = NP \tan 30^\circ = \sin x / \sqrt{3}$ e facciamo la differenza.

L'area del rettangolo misura quindi: $S(x) = MQ \cdot PQ = \sin x \cos x - \frac{1}{\sqrt{3}} \sin^2 x$.

Applichiamo prima le formule di duplicazione e poi il metodo dell'angolo aggiunto:

$$S(x) = \frac{1}{2} \sin 2x + \frac{1}{2\sqrt{3}} \cos 2x - \frac{1}{2\sqrt{3}} = \frac{1}{\sqrt{3}} \sin(2x + 30^\circ) - \frac{1}{2\sqrt{3}}.$$

A causa delle limitazioni del problema, la funzione è definita per $0^\circ \leq x \leq 60^\circ$.

b. La funzione $S(x)$ assume il valore massimo quando il seno è uguale ad 1, e quindi quando:

$$2x + 30^\circ = 90^\circ \Rightarrow x = 30^\circ, \text{ nel qual caso } S_{\max} = 1/(2\sqrt{3}).$$

2.

a. Devo scegliere e ordinare sei cifre in un insieme che ne comprende dieci, e sono ammesse ripetizioni: $D'_{10,6} = 10^6 = 1.000.000$.

b. La prima cifra deve essere diversa da zero, mentre le cifre successive possono essere comprese tra zero e nove e possono ammettere ripetizioni: $D_{9,1} \cdot D'_{10,5} = 9 \cdot 10^5 = 900.000$.

c. Come la risposta a, ma non sono ammesse ripetizioni: $D_{10,6} = 10 \cdot 9 \cdot 8 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 5 = \frac{10!}{4!} = 151.200$.

d. Un possibile ragionamento è il seguente:

- scelgo la cifra che verrà ripetuta: $C_{10,1}$;
- scelgo quattro cifre diverse tra le rimanenti nove: $C_{9,4}$;
- permuto le sei cifre scelte, di cui due sono uguali: P_6/P_2 .

In conclusione: $C_{10,1} \cdot C_{9,4} \cdot \frac{P_6}{P_2} = 10 \cdot \frac{9 \cdot 8 \cdot 7 \cdot 6}{4 \cdot 3 \cdot 2} \cdot \frac{6!}{2!} = 453.600$.

Un ragionamento lievemente diverso può essere il seguente:

- scelgo la prima cifra: $D_{10,1}$;
- impongo che la seconda cifra sia uguale alla prima: $D_{1,1}$;
- scelgo le successive quattro cifre in modo che siano diverse dalla prima e tra loro: $D_{9,4}$;
- scelgo quali posizioni sono occupate dalle due cifre uguali: $C_{6,2}$.

e. Il numero di sequenze che hanno almeno due cifre uguali è dato dalla differenza tra il numero totale di sequenze ed il numero di sequenze aventi sei cifre diverse, e, quindi, dalla differenza tra i risultati dei punti *a* e *c*: $1.000.000 - 151.200 = 848.800$.

f. Come la risposta *a*, ma l'insieme comprende nove elementi: $D'_{9,6} = 9! = 362.880$.

g. Per le targhe possibili ho 11 possibilità di scelta (8 cifre e 3 lettere) per il primo carattere e 28 possibilità di scelta (8 cifre e 20 consonanti) per i caratteri successivi, con possibilità di ripetizione:

$$D_{11,1} \cdot D'_{28,5} = 11 \cdot 28^5 = 189.314.048$$
 .

Per le targhe con sei cifre: $D'_{8,6} = 8^6 = 262.144$.

La percentuale richiesta è quindi: $\frac{D'_{8,6}}{D_{11,1} \cdot D'_{28,5}} \cdot 100 = \frac{262.144}{189.314.048} \cdot 100 \simeq 0,138\%$.

In alternativa, possiamo osservare che la probabilità che la targa sia formata da sei cifre è:

$$p(6 \text{ cifre}) = p(1^a \text{ cifra}) \cdot p(2^a - 6^a \text{ cifra}) = \frac{8}{11} \cdot \left(\frac{8}{28}\right)^5 \simeq 0,138\%$$
 .

3.

a. La probabilità che un pezzo non sia difettoso è $1 - p$.

Supponendo che la probabilità che un dato pezzo sia difettoso non sia influenzata da quella che un altro pezzo sia difettoso, ovvero supponendo di avere 20 eventi indipendenti, la probabilità richiesta è: $p(\text{funz}_1 \wedge \dots \wedge \text{funz}_{20}) = (1 - p)^{20} = (0,998)^{20} \simeq 0,961 \simeq 96,1\%$.

b. Moltiplichiamo la probabilità di avere due pezzi difettosi e 18 funzionanti per il numero di modi in cui possiamo scegliere due pezzi difettosi su 20:

$$p(2 \text{ dif}) = \binom{20}{2} \cdot p^2 \cdot (1 - p)^{18} = \frac{20 \cdot 19}{2} \cdot 0,002^2 \cdot 0,998^{18} \simeq 7,33 \cdot 10^{-4} \simeq 0,0733\%$$
 .

c. Si tratta dell'evento contrario a quello considerato nel punto *a*, quindi:

$$p(\text{almeno 1 dif}) = 1 - p(20 \text{ funz}) \simeq 1 - 0,961 \simeq 0,039 \simeq 3,9\%$$
 .

d. Se indichiamo con *n* il numero di componenti dello stock, avremo:

$$p(n \text{ funz}) = (1 - p)^n > 0,95 \Rightarrow n < \log_{1-p} 0,95 \Rightarrow n < \frac{\log 0,95}{\log 0,998} \simeq 25,6$$
 .

Quindi lo stock può essere costituito al massimo da 25 componenti.

4. Osserviamo (se non fosse ovvio) che $N=\bar{P}$ e $S=\bar{I}$.

a. $p(P) = p(I) \cdot p(P/I) + p(S) \cdot p(P/S) = 0,001 \cdot 0,98 + 0,999 \cdot 0,04 = 0,04094$;

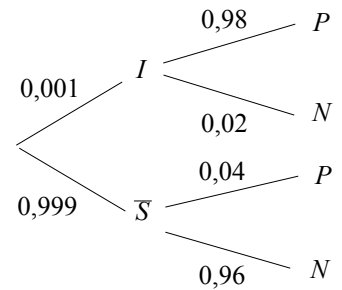
b. $p(N) = 1 - p(P) = 1 - 0,04094 = 0,95906$;

c. $p(P \wedge S) = p(S) \cdot p(P/S) = 0,999 \cdot 0,04 = 0,03996$;

d. $p(N/I) = 0,02$ (fornita dal testo del problema);

e. $p(I/P) = \frac{p(I) \cdot p(P/I)}{p(P)} = \frac{0,001 \cdot 0,98}{0,04094} \simeq 0,023937$;

f. $p(S/N) = \frac{p(S) \cdot p(N/S)}{p(N)} = \frac{0,999 \cdot 0,96}{0,95906} \simeq 0,999979$;



g. Gli eventi P ed S non sono incompatibili, in quanto $p(P \wedge S) = 0,03996 \neq 0$, come calcolato nel punto c.

h. Gli eventi I e P non sono indipendenti, in quanto $p(I/P) \simeq 0,023937 \neq p(I)$, come calcolato nel punto e.

i. Dal punto f sappiamo che, se il test ha dato esito negativo, siamo ragionevolmente certi che il paziente sia sano, per cui non dovrebbe essere opportuno sottoporlo ad ulteriori esami.

Dal punto e, invece, vediamo che, anche se il test ha dato esito positivo, la probabilità che il paziente sia realmente infetto è relativamente bassa (poco superiore al 2%), per cui, prima di intraprendere un percorso di terapia, potrebbe essere utile sottoporlo ad ulteriori esami.

1. Dimostra che la misura dell'altezza di un triangolo relativa al lato a è $h_a = \frac{\sin \beta \sin \gamma}{\sin \alpha} a$.

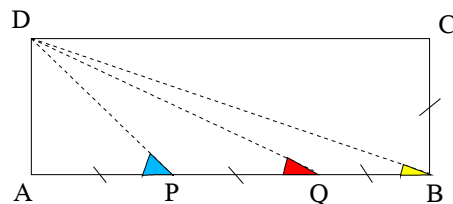
Distingui i casi in cui l'altezza h_a è interna o esterna al triangolo.

2. Data la semicirconferenza di diametro AB, centro O e raggio r , traccia le corde $AD=r$ e $BC=r/2$. Calcola la lunghezza della corda CD.
3. Sono date le sei cifre 2, 3, 4, 5, 7, 9 e non sono permesse ripetizioni. Calcola:
- quanti numeri di cinque cifre si possono formare;
 - quanti di questi numeri sono maggiori di 50.000;
 - quanti di questi numeri sono pari;
 - quanti di questi numeri sono multipli di 5.
 - Scrivendo tali numeri in ordine crescente, determina quale numero occupa la 241^a posizione.
4. Nel piano sono dati sei punti “rossi”, chiamati A, B, C, D, E, F, e quattro punti “neri”, detti G, H, I, L. Tra tali punti, non ce ne sono tre allineati. Calcola:
- quanti segmenti hanno come vertici due dei punti dati;
 - quanti segmenti hanno un vertice “rosso” ed uno “nero”;
 - quanti triangoli hanno come vertici tre dei punti dati;
 - quanti triangoli hanno due vertici “rossi” ed uno “nero”;
 - quanti triangoli non contengono come lato il segmento AB.
5. Un treno arriva in ritardo nel 70% dei casi se nevicava e nel 15% dei casi se non nevicava. Sapendo che la probabilità che oggi nevichi è del 60%, calcola:
- la probabilità che il treno arrivi in ritardo;
 - la probabilità che abbia nevicato, sapendo che il treno è arrivato in ritardo;
 - la probabilità che non abbia nevicato, sapendo che il treno è stato puntuale.
6. Un tiratore colpisce il bersaglio con una probabilità del 95%. Calcola:

- la probabilità che faccia cinque centri su cinque tiri;
- la probabilità che faccia almeno un centro su cinque tiri;
- la probabilità che faccia esattamente tre centri su cinque tiri;
- il numero n di tiri tale che la probabilità di fare n centri sia minore dell'1%.

7. Nel rettangolo in figura abbiamo: $AP = PQ = QB = BC$.

Dimostra che $\hat{APD} = \hat{AQD} + \hat{ABD}$.

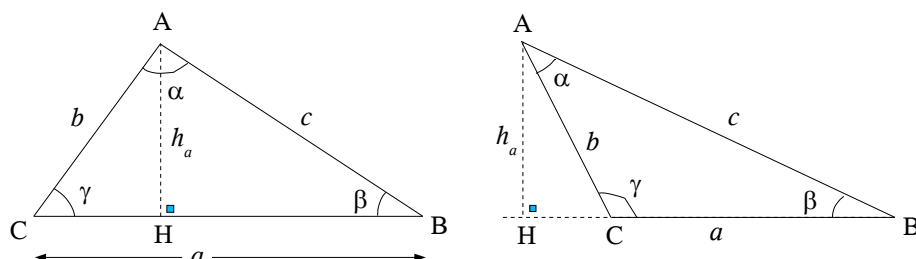


4^C - Correzione compito n°5

1. Se l'altezza h_a è interna al triangolo ABC (figura a sx), allora dal triangolo rettangolo ACH:

$$h_a = b \sin \gamma, \text{ mentre dal teorema dei seni: } \frac{b}{\sin \beta} = \frac{a}{\sin \alpha} \Rightarrow b = \frac{\sin \beta}{\sin \alpha} a.$$

Mettendo a sistema queste due relazioni, ricaviamo la formula del testo.



Se, invece, l'altezza h_a è esterna al triangolo ABC (figura a dx), allora dal triangolo rettangolo ACH ricaviamo: $h_a = b \sin(\pi - \gamma) = b \sin \gamma$, ottenendo lo stesso risultato del caso precedente.

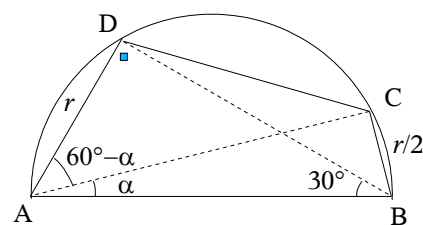
2. Per il teorema della corda (ponendo $\hat{BAC} = \alpha$):

$$AD = r = 2r \sin \hat{ABD} \Rightarrow \hat{ABD} = 30^\circ \Rightarrow \hat{BAD} = 60^\circ;$$

$$BC = \frac{r}{2} = 2r \sin \alpha \Rightarrow \sin \alpha = \frac{1}{4} \Rightarrow \cos \alpha = \frac{\sqrt{15}}{4};$$

$$CD = 2r \sin(60^\circ - \alpha) = 2r(\sin 60^\circ \cos \alpha - \cos 60^\circ \sin \alpha) =$$

$$2r\left(\frac{\sqrt{3}}{2} \cdot \frac{\sqrt{15}}{4} - \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{4}\right) = \frac{3\sqrt{5}-1}{4}r.$$



3.

a. Dobbiamo scegliere e ordinare 5 cifre su 6: $D_{6,5} = 6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 = 720$.

b. La prima cifra può essere 5, 7, 9: $D_{3,1} \cdot D_{5,4} = 3 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 = 360$.

c. L'ultima cifra può essere 2 o 4: $D_{5,4} \cdot D_{2,1} = 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 2 = 240$.

d. L'ultima cifra deve essere 5: $D_{5,4} \cdot D_{1,1} = 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 120$.

e. Osserviamo che $241 = 2 \cdot 120 + 1$. Disponendo i numeri in ordine crescente, avremo quindi

$$D_{5,4} = 120 \text{ numeri che iniziano con la cifra 2 e } D_{5,4} = 120 \text{ numeri che iniziano con la cifra 3.}$$

Il numero richiesto sarà quindi il primo che inizia per 4, ovvero: 42357.

4.

a. Dobbiamo scegliere (ma non ordinare) due dei dieci punti dati: $C_{10,2} = \binom{10}{2} = \frac{10 \cdot 9}{2} = 45$.

b. Scegliamo un punto rosso su sei ed un punto nero su quattro: $C_{6,1} \cdot C_{4,1} = 6 \cdot 4 = 24$.

c. Scegliamo tre dei dieci punti dati: $C_{10,3} = \binom{10}{3} = \frac{10 \cdot 9 \cdot 8}{3 \cdot 2} = 120$.

d. Scegliamo due punti rossi su sei ed un punto nero su quattro: $C_{6,2} \cdot C_{4,1} = 15 \cdot 4 = 60$.

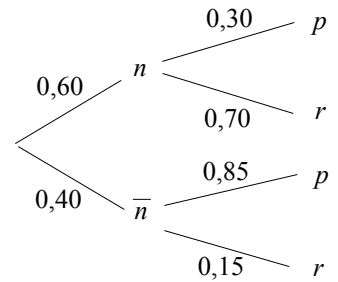
e. I triangoli che contengono come lato il segmento AB si ottengono scegliendo uno degli otto punti rimasti: $C_{8,1} = 8$. Per differenza, quelli che non lo contengono sono: $120 - 8 = 112$.

5. Indichiamo con r l'evento "il treno è in ritardo", con n l'evento "oggi nevica", etc.

a. $p(r) = p(n) \cdot p(r/n) + p(\bar{n}) \cdot p(r/\bar{n}) = 0,6 \cdot 0,7 + 0,4 \cdot 0,15 = 0,48$.

b. $p(n/r) = \frac{p(n) \cdot p(r/n)}{p(r)} = \frac{0,6 \cdot 0,7}{0,48} = 0,875$.

c. $p(\bar{n}/p) = \frac{p(\bar{n}) \cdot p(p/\bar{n})}{p(p)} = \frac{0,4 \cdot 0,85}{0,52} \simeq 0,654$.



6. Indichiamo con $p(c)$ la probabilità che il tiratore faccia centro.

a. $p(c_1 \wedge \dots \wedge c_5) = p(c)^5 = 0,95^5 \simeq 0,774 \simeq 77,4\%$.

b. $p(\text{almeno } 1 c) = 1 - p(0 c) = 1 - p(\bar{c})^5 = 1 - 0,05^5 \simeq 1 - 3,125 \cdot 10^{-7}$.

c. Applichiamo la distribuzione binomiale: $p(3 c) = \binom{5}{3} \cdot 0,95^3 \cdot 0,05^2 \simeq 2,14 \cdot 10^{-3}$.

d. $p(c)^n = (0,95)^n < 0,01 \Rightarrow n > \frac{\log 0,01}{\log 0,95} \simeq 89,8 \Rightarrow n \geq 90$.

7. *Primo metodo.* Consideriamo i triangoli rettangoli APD, AQD, ABD:

$$\operatorname{tg} \hat{APD} = \frac{AD}{AP} = 1 \quad ; \quad \operatorname{tg} \hat{AQD} = \frac{AD}{AQ} = \frac{1}{2} \quad ; \quad \operatorname{tg} \hat{ABD} = \frac{AD}{AB} = \frac{1}{3} \quad .$$

Osserviamo che: $\operatorname{tg}(\hat{AQD} + \hat{ABD}) = \frac{\operatorname{tg} \hat{AQD} + \operatorname{tg} \hat{ABD}}{1 - \operatorname{tg} \hat{AQD} \operatorname{tg} \hat{ABD}} = \frac{1/2 + 1/3}{1 - 1/2 \cdot 1/3} = \frac{5/6}{5/6} = 1$.

Gli angoli acuti \hat{APD} e $\hat{AQD} + \hat{ABD}$ hanno la stessa tangente, e quindi sono uguali c.v.d.

Secondo metodo. Dagli stessi triangoli rettangoli, ponendo $AB = l$, ricaviamo con Pitagora:

$$PD = l\sqrt{2} \quad , \quad QD = l\sqrt{5} \quad , \quad BD = l\sqrt{10} \quad , \text{ per cui:}$$

$$\operatorname{sen} \hat{APD} = \frac{1}{\sqrt{2}} \quad ; \quad \operatorname{sen} \hat{AQD} = \frac{1}{\sqrt{5}} \quad ; \quad \operatorname{sen} \hat{ABD} = \frac{1}{\sqrt{10}} \quad ; \quad \cos \hat{AQD} = \frac{2}{\sqrt{5}} \quad ; \quad \cos \hat{ABD} = \frac{3}{\sqrt{10}} \quad .$$

$$\operatorname{sen}(\hat{AQD} + \hat{ABD}) = \operatorname{sen} \hat{AQD} \cos \hat{ABD} + \cos \hat{AQD} \operatorname{sen} \hat{ABD} = \frac{1}{\sqrt{5}} \cdot \frac{3}{\sqrt{10}} + \frac{2}{\sqrt{5}} \cdot \frac{1}{\sqrt{10}} = \frac{5}{\sqrt{50}} = \frac{1}{\sqrt{2}} \quad .$$

Gli angoli acuti \hat{APD} e $\hat{AQD} + \hat{ABD}$ hanno lo stesso seno, e quindi sono uguali c.v.d.

1. Su una circonferenza di raggio r è data la corda $AB = r\sqrt{3}$.

Prendi un punto C sul minore degli archi AB ed un punto D sul maggiore degli archi AB in modo che le corde BC e AD giacciono su rette parallele. Poni $\widehat{ABC} = x$.

- Determina le ampiezze degli angoli \widehat{BAD} , \widehat{ADB} , \widehat{ACB} .
- Esprimi le lunghezze dei lati del quadrilatero ACBD in funzione di $\cos x$ e $\sin x$.
- Verifica che il perimetro del quadrilatero ACBD misura $f(x) = r(2\sqrt{3}\cos x + 4\sin x)$.
- Scrivi il perimetro nella forma $f(x) = k \sin(x + \phi)$ determinando il valore di ϕ con l'approssimazione del centesimo di grado.
- Determina le limitazioni geometriche e descrivi i casi limite.
- Traccia il grafico della funzione $y = f(x)$ tenendo conto delle limitazioni geometriche e calcolando i valori agli estremi e le coordinate del punto di massimo.
- Determina il valore di x per cui il perimetro del quadrilatero ACBD misura $2p = 5r$.

(Applica il metodo dell'angolo aggiunto, utilizzando la calcolatrice per determinare il risultato).

2.

- Dati gli insiemi A e B di cardinalità (numero di elementi) $\text{card } A = 4$, $\text{card } B = 5$, determina il numero di funzioni e quello di funzioni iniettive da A in B.
- Dato l'insieme A di cardinalità $\text{card } A = 10$, determina il numero di sottoinsiemi di A formati da 6 elementi ed il numero complessivo di sottoinsiemi di A.
- La tua classe è formata da 27 alunni, di cui 12 donne. Determina in quanti modi si può scegliere una squadra di pallavolo (composta da 6 persone) nei seguenti casi:
 - la squadra comprende esattamente due donne;
 - la squadra comprende almeno una donna;
 - la squadra comprende quattro donne, due delle quali sono "titolari fisse" (devono comparire in tutte le formazioni possibili).
- Dimostra le seguenti proprietà dei coefficienti binomiali e spiega quali proprietà del triangolo di Tartaglia esse esprimono:

$$\binom{n}{k} = \binom{n-1}{k-1} + \binom{n-1}{k} ; \quad \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} = 2^n .$$

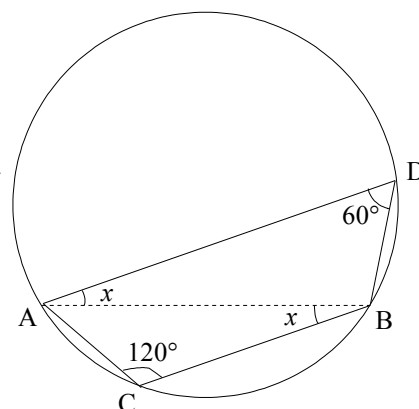
1.

- a. $\hat{BAD} = \hat{ABC} = x$ perché angoli alterni interni formati dalle rette BC e AD, parallele per costruzione, tagliate dalla trasversale AB.

Per il teorema della corda:

$$AB = 2r \sin \hat{ADB} \Rightarrow \sin \hat{ADB} = \frac{\sqrt{3}}{2} \Rightarrow \hat{ADB} = 60^\circ.$$

$\hat{ACB} = 180^\circ - \hat{ADB} = 120^\circ$ perché un quadrilatero inscritto in una circonferenza ha gli angoli opposti supplementari.



- b. Per il teorema della corda (o per quello dei seni): $AC = BD = 2r \sin x$;

$$BC = 2r \sin(60^\circ - x) = r(\sqrt{3} \cos x - \sin x) ;$$

$$AD = 2r \sin(120^\circ - x) = r(\sqrt{3} \cos x + \sin x) .$$

- c. $2p_{ACBD} = 4r \sin x + r(\sqrt{3} \cos x - \sin x) + r(\sqrt{3} \cos x + \sin x) = r(2\sqrt{3} \cos x + 4 \sin x)$ c.v.d.

- d. Per il metodo dell'angolo aggiunto:

$$k = \sqrt{a^2 + b^2} = \sqrt{12 + 16} = 2\sqrt{7} ; \quad \phi = \arctg \frac{b}{a} = \arctg \frac{\sqrt{3}}{2} \simeq 40,89^\circ .$$

- e. Limitazioni geometriche:

- se il punto C coincide con A, allora $x = 0^\circ$, e il quadrilatero ACBD degenera in due segmenti coincidenti con la corda AB;
- se il punto C tende a B lungo la circonferenza, allora la corda BC tende alla tangente in B, e quindi $x \rightarrow 60^\circ$, e il quadrilatero ACBD degenera un triangolo equilatero di lato AB.

In conclusione: $0^\circ \leq x \leq 60^\circ$.

- f. Valori agli estremi: $f(0^\circ) = 2r\sqrt{3}$, $f(60^\circ) = 3r\sqrt{3}$
(in accordo con i casi limite descritti nel punto e).

La sinusoida assume il valore massimo quando:

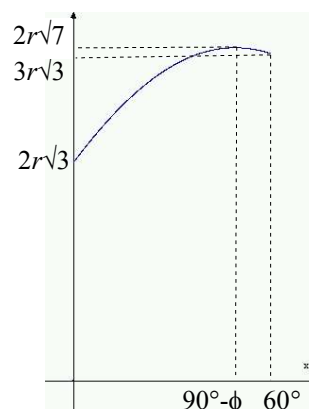
$$x + \phi = 90^\circ \Rightarrow x = 90^\circ - \phi \simeq 49,11^\circ \Rightarrow f_{\max} = k = 2\sqrt{7} .$$

- g. Impostiamo l'equazione $2\sqrt{7} \sin(x + \phi) = 5r \Rightarrow$.

Poiché $\arcsin \frac{5}{2\sqrt{7}} \simeq 70,89^\circ$, possiamo avere:

- $x + \phi \simeq 70,89^\circ \Rightarrow x \simeq 30,00^\circ$ (soluzione accettabile);
- $x + \phi \simeq 180^\circ - 70,89^\circ \Rightarrow x \simeq 68,22^\circ$ (non accettabile per le limitazioni geometriche).

Sostituendo il valore $x = 30^\circ$ nell'equazione di partenza, oppure risolvendo la stessa con un metodo differente (grafico o con l'uso delle formule parametriche), possiamo verificare che tale soluzione è esatta.



2.

- a. In una funzione generica, ognuno dei 4 elementi di A deve avere un corrispondente, che può essere uno qualunque dei 5 elementi di B: $D'_{5,4} = 5^4 = 625$.

In una funzione iniettiva, una volta scelto il corrispondente di un elemento di A, gli altri devono essere distinti da esso: $D_{5,4} = 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 = 120$.

- b. Il numero di sottoinsiemi di A formati da 6 elementi è il numero di modi in cui possiamo scegliere (indipendentemente dall'ordine) 6 oggetti su 10 possibili:

$$C_{10,6} = \binom{10}{6} = \binom{10}{4} = \frac{10 \cdot 9 \cdot 8 \cdot 7}{4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1} = 210.$$

Il numero complessivo di sottoinsiemi di A è: $\sum_{k=0}^{10} \binom{10}{k} = 2^{10} = 1.024$.

- c. Se la squadra comprende due donne, scegliamo 4 maschi tra 15 e 2 donne tra 12:

$$C_{15,4} \cdot C_{12,2} = \binom{15}{4} \cdot \binom{12}{2} = \frac{15 \cdot 14 \cdot 13 \cdot 12}{4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1} \cdot \frac{12 \cdot 11}{2 \cdot 1} = 90.090.$$

Se la squadra comprende almeno una donna, dobbiamo sottrarre a tutte le formazioni possibili quelle che sono formate da 6 maschi:

$$C_{27,6} - C_{15,6} = \binom{27}{6} - \binom{15}{6} = \frac{27 \cdot 26 \cdot 25 \cdot 24 \cdot 23 \cdot 22}{6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1} - \frac{15 \cdot 14 \cdot 13 \cdot 12 \cdot 11 \cdot 10}{6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1} = 291.005.$$

Se la squadra comprende quattro donne, due delle quali non possono variare, rimangono da scegliere 2 maschi su 15 e 2 donne su 10:

$$C_{15,2} \cdot C_{10,2} = \binom{15}{2} \cdot \binom{10}{2} = \frac{15 \cdot 14}{2 \cdot 1} \cdot \frac{10 \cdot 9}{2 \cdot 1} = 4.725.$$

d.
$$\binom{n-1}{k} + \binom{n-1}{k-1} = \frac{(n-1)!}{(n-k-1)!k!} + \frac{(n-1)!}{(n-k)!(k-1)!} = \frac{(n-k)(n-1)! + k(n-1)!}{(n-k)!k!} =$$
$$= \frac{(n-1)!(n-k+k)}{(n-k)!k!} = \frac{n!}{(n-k)!k!} = \binom{n}{k} \quad \text{c.v.d.}$$

Esprime il fatto che ogni elemento del triangolo di Tartaglia è la somma dei due elementi della riga precedente che si trovano a destra e a sinistra dell'elemento da calcolare.

Sostituiamo $a=b=1$ nell'identità che definisce il binomio di Newton:

$$(a+b)^n = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} a^{n-k} b^k \Rightarrow \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} = 2^n.$$

La proprietà esprime il fatto che le somme dei coefficienti delle righe del triangolo di Tartaglia sono date dalle successive potenze di 2.

1. Dato l'angolo retto \hat{AOB} , conduci internamente ad esso una semiretta OC.

Prendi su OA un punto M tale che $OM = 1$ e su OB un punto N tale che $ON = \sqrt{3}$.

Chiamia J e K le proiezioni di M ed N su OC e P il punto medio di JK. Poni $\hat{AOC} = x$.

a. Esprimi in funzione di x le misure dei segmenti OJ, OK, OP, MJ, NK.

b. Verifica che l'area del triangolo NOP misura $f(x) = \frac{\sqrt{3}}{4}(\cos^2 x + \sqrt{3} \sin x \cos x)$.

c. Esprimi tale area in funzione di $\cos 2x$ e $\sin 2x$.

d. Scrivi poi l'area nella forma $f(x) = r \sin(2x + \phi) + k$.

e. Traccia le figure nei casi limite e calcola il valore di $f(x)$ in tali casi.

f. Traccia il grafico della funzione $y = f(x)$ tenendo conto delle limitazioni geometriche.

Descrivi la funzione e determina le coordinate del suo punto di massimo.

g. Determina i valori di x per cui l'area assume il valore $f(x) = \sqrt{3}/4$.

2. Uno studente va a scuola con l'autobus nel 65% dei giorni feriali e con la bicicletta negli altri giorni feriali. Egli arriva a scuola in orario con probabilità 0,55 quando utilizza l'autobus e con probabilità 0,85 quando usa la bicicletta. Calcola:

a. la probabilità che lo studente arrivi in orario;

b. la probabilità che lo studente arrivi in ritardo;

c. sapendo che è in orario, quale è stata la probabilità che abbia utilizzato l'autobus;

d. sapendo che ha fatto ritardo, quale è stata la probabilità che abbia utilizzato la bicicletta.

e. Se l'anno scolastico dura 200 giorni, quanti giorni (*circa*) lo studente sarà in orario?

f. Gli eventi “lo studente utilizza l'autobus” e “lo studente arriva in orario” sono indipendenti?

g. Gli eventi “lo studente utilizza l'autobus” e “lo studente utilizza la bicicletta” sono indipendenti?

Un lunedì lo studente prende l'autobus, mentre martedì prende la bicicletta.

Calcola la probabilità che lo studente:

- h. sia in ritardo entrambi i giorni;
- i. sia in ritardo almeno uno dei due giorni;
- j. sia in ritardo solo lunedì;
- k. sia in ritardo martedì sapendo che lunedì era in orario.

Lo studente prende la bicicletta per dieci giorni feriali di seguito.

Calcola la probabilità che egli:

- l. sia sempre in orario;
- m. sia in orario otto giorni su dieci;
- n. sia in orario nei sei giorni compresi tra il terzo e l'ottavo;
- o. sia in orario almeno in un giorno.

Giunto al quinto anno, lo studente prende la bicicletta ogni giorno.

- p. Calcola dopo quanti giorni la probabilità che egli sia stato sempre in orario è minore dell'1%.

1.

a. $OJ = \cos x$; $OK = \sqrt{3} \sin x$; $MJ = \sin x$; $NK = \sqrt{3} \cos x$;

$$OP = \frac{OJ + OK}{2} = \frac{1}{2}(\sqrt{3} \sin x + \cos x) .$$

b. Consideriamo OP come base ed NK come altezza:

$$f(x) = \frac{OP \cdot NK}{2} = \frac{\sqrt{3}}{4}(\cos^2 x + \sqrt{3} \sin x \cos x) \text{ c.v.d.}$$

c. Ricordiamo che: $\cos^2 x = \frac{1 + \cos 2x}{2}$; $\sin x \cos x = \frac{1}{2} \sin 2x$ e sostituiamo:

$$f(x) = \frac{\sqrt{3}}{4} \left(\frac{1}{2} \cos 2x + \frac{\sqrt{3}}{2} \sin 2x + \frac{1}{2} \right) .$$

d. Appliciamo il metodo dell'angolo aggiunto: $\sqrt{(1/2)^2 + (\sqrt{3}/2)^2} = 1$; $\arctg \sqrt{3} = 30^\circ$.

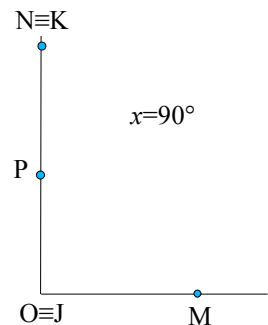
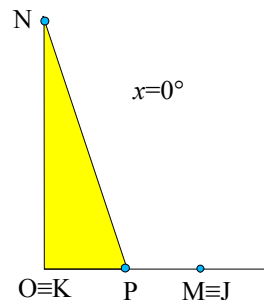
$$\text{Quindi: } f(x) = \frac{\sqrt{3}}{4} \sin(2x + 30^\circ) + \frac{\sqrt{3}}{8} .$$

e. $C.E: 0^\circ \leq x \leq 90^\circ$.

Per $x=0^\circ$, il triangolo NOP diventa rettangolo, mentre, per $x=90^\circ$, degenera in due segmenti coincidenti. Vediamo dai disegni a fianco che:

$$f(0^\circ) = \sqrt{3}/4 , \quad f(90^\circ) = 0 .$$

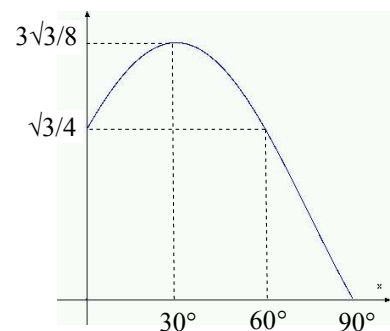
Tali risultati sono in accordo con quelli che otteniamo sostituendo $x=0^\circ$ e $x=90^\circ$ nell'espressione analitica di $f(x)$.



f. Si tratta di un arco di seno avente pulsazione $\omega=2$, periodo $T=180^\circ$, ampiezza $A=\sqrt{3}/4$, che ha subito una traslazione di vettore $\vec{v} \equiv (-15^\circ, \sqrt{3}/8)$.

Otteniamo il massimo se: $2x + 30^\circ = 90^\circ \Rightarrow x = 30^\circ$.

L'ordinata del massimo è: $f(30^\circ) = \frac{3}{8} \sqrt{3}$.



g. $\frac{\sqrt{3}}{4} \sin(2x + 30^\circ) + \frac{\sqrt{3}}{8} = \frac{\sqrt{3}}{4} \Rightarrow \sin(2x + 30^\circ) = \frac{1}{2} \Rightarrow$

$$2x + 30^\circ = 30^\circ \Rightarrow x_1 = 0 \quad \vee \quad 2x + 30^\circ = 150^\circ \Rightarrow x_2 = 60^\circ .$$

2. Indichiamo con o l'evento "lo studente è in orario", con a l'evento "lo studente utilizza l'autobus", etc.

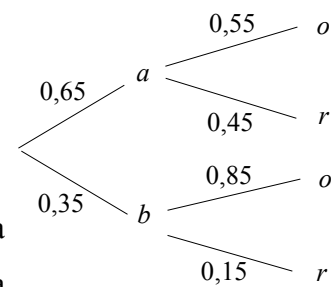
a. $p(o) = p(a) \cdot p(o/a) + p(b) \cdot p(o/b) = 0,65 \cdot 0,55 + 0,35 \cdot 0,85 = 0,655$;

b. $p(r) = 1 - p(o) = 1 - 0,655 = 0,345$;

Per i punti c, d applichiamo il teorema di Bayes o ragioniamo sul grafo ad albero:

$$c. \quad p(a/o) = \frac{p(a) \cdot p(o/a)}{p(o)} = \frac{0,65 \cdot 0,55}{0,655} \simeq 0,546 \quad ;$$

$$d. \quad p(b/r) = \frac{p(b) \cdot p(r/b)}{p(r)} = \frac{0,35 \cdot 0,15}{0,345} \simeq 0,152 \quad ;$$



e. Supponiamo che l'anno scolastico sia abbastanza lungo perché la frequenza relativa sia una “buona” approssimazione della probabilità: $N(o) = p(o) \cdot N(tot) = 0,655 \cdot 200 = 131$.

f. Ricordiamo che due eventi A e B sono *indipendenti* se $p(A/B) = p(A)$, o $p(B) = p(B/A)$.

Poiché $p(o/a) = 0,55$, mentre $p(o) = 0,655$, gli eventi *o* ed *a* sono *dependenti*.

g. Poiché gli eventi *a* e *b* sono *incompatibili*, non possono essere indipendenti.

Infatti: $p(a) = 0,65$, mentre $p(a/b) = 0$.

$$h. \quad p(r_1 \wedge r_2) = p(r_1) \cdot p(r_2) = 0,45 \cdot 0,15 = 0,0675 \quad ;$$

$$i. \quad p(r_1 \vee r_2) = p(r_1) + p(r_2) - p(r_1 \wedge r_2) = 0,45 + 0,15 - 0,0675 = 0,5325 \quad ;$$

$$j. \quad p(r_1 \wedge o_2) = p(r_1) \cdot p(o_2) = 0,45 \cdot 0,85 = 0,3825 \quad (\text{anche } p(r_1) - p(r_1 \wedge r_2)) ;$$

$$k. \quad p(r_2/o_1) = p(r_2) = 0,15 \quad , \text{ in quanto gli eventi } o_1 \text{ ed } r_2 \text{ sono indipendenti};$$

$$l. \quad p(10o) = 0,85^{10} \simeq 0,197 \quad ;$$

$$m. \quad p(6o) = \binom{10}{8} \cdot 0,85^8 \cdot 0,15^2 \simeq 0,276 \quad ;$$

$$n. \quad p(6o \text{ dati}) = 0,85^6 \simeq 0,377 \quad ;$$

$$o. \quad p(\text{almeno } 1o) = 1 - p(10r) = 1 - 0,15^{10} \simeq 1 - 5,76 \cdot 10^{-9} \quad ;$$

$$p. \quad p(\text{sempre } o) = 0,85^n < 0,01 \Rightarrow n > \frac{\log 0,01}{\log 0,85} \simeq 28,3 \Rightarrow n \geq 29 \quad .$$

1. Data la semicirconferenza di diametro $AB=4$, traccia la corda AC e la bisettrice AD dell'angolo \widehat{BAC} (che interseca la semicirconferenza in D). Determina con l'approssimazione del centesimo di grado la misura dell'angolo $\widehat{BAD}=x$ in modo che $AC+AD=4$.
2. Indiana Jones cerca di raggiungere un tempio nascosto nella foresta seguendo una linea retta. Egli, però, si dirige per sbaglio in una direzione leggermente diversa da quella corretta.
Dopo tre ore (*esatte*) si accorge dell'errore e compie una deviazione verso destra di un angolo di $13,5^\circ$ (*esatto*), in modo da dirigersi verso il tempio, che viene raggiunto dopo altre due ore (*esatte*).
Se l'esploratore ha mantenuto sempre una velocità costante, quanti minuti ha perso a causa dell'errore? (*Fornisci il risultato con tre cifre significative corrette*).
3. Calcola perimetro ed area del poligono regolare di 12 lati inscritto in una circonferenza di raggio 1.
4.
 - a. Calcola il numero di stringhe di 6 lettere che si possono formare con le 21 lettere dell'alfabeto italiano nei seguenti casi:
 - le lettere vengono scelte liberamente, senza nessun vincolo;
 - le lettere non possono essere ripetute;
 - le stringhe non possono contenere delle “doppie” (due o più lettere uguali consecutive);
 - le stringhe devono contenere almeno una vocale;
 - le stringhe devono contenere esattamente una vocale.
 - b. Uno sciagurato studente deve sostenere un test che contiene 12 quesiti di matematica e 8 di fisica, e deve rispondere a 10 quesiti. In quanti modi può scegliere i quesiti a cui rispondere se:
 - i quesiti possono essere scelti liberamente;
 - deve rispondere a 6 quesiti di matematica e 4 di fisica;
 - deve rispondere a 6 quesiti di matematica e 4 di fisica, ma 4 dei quesiti di matematica e 2 di quelli di fisica sono obbligatori.

1. I triangoli ABC e ABD sono rettangoli rispettivamente in C e in D, in quanto gli angoli aventi tali vertici insistono su una semicirconferenza. Per il teo. dei triangoli rettangoli:

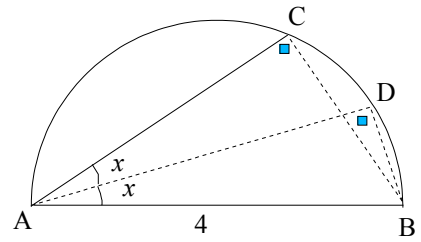
$$AD = AB \cos x = 4 \cos x, \quad AD = AB \cos 2x = 4 \cos 2x.$$

Impostiamo l'equazione: $AC + AD = 5 \Rightarrow$

$$4 \cos x + 4(2 \cos^2 x - 1) = 4 \Rightarrow 2 \cos^2 x + \cos x - 2 = 0 \Rightarrow \cos x = \frac{-1 \pm \sqrt{17}}{4}.$$

Ricaviamo quindi: $x = \arccos \frac{\sqrt{17}-1}{4} \simeq 38,67^\circ$, accettabile perché $0^\circ \leq x \leq 45^\circ$.

Invece, l'equazione $\cos x = -(1 + \sqrt{17})/4$ non ha soluzioni, perché $-1 \leq \cos x \leq 1$.



2. Se indichiamo con v la velocità dell'esploratore, avremo:

$AB = 3v$ (distanza percorsa prima di accorgersi dell'errore);

$BC = 2v$ (distanza percorsa dopo essersi accorto dell'errore);

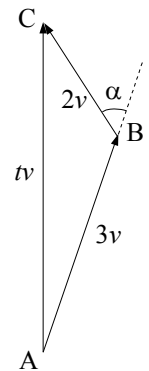
$AC = tv$ (distanza in linea d'aria tra punto di partenza e tempo).

Applichiamo il teorema di Carnot al triangolo ABC:

$$AC^2 = AB^2 + BC^2 - 2 AB \cdot BC \cos(180^\circ - \alpha) \Rightarrow$$

$$t^2 v^2 = 9v^2 + 4v^2 - 2 \cdot 3v \cdot 2v \cdot \cos 166,5^\circ \Rightarrow t = \sqrt{13 + 12 \cos 13,5^\circ} \simeq 4,9667 h.$$

Il tempo perso a causa dell'errore è quindi: $\Delta t \simeq (5 - 4,9667) \cdot 60 \simeq 2,00 \text{ min}$.



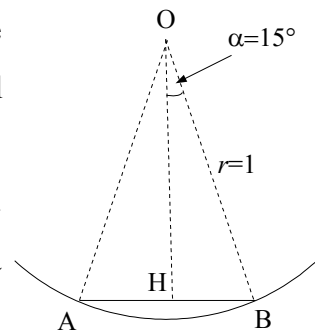
3. I lati del poligono regolare sono corde della circonferenza in cui esso è inscritto. A tali corde uguali corrispondono archi uguali e angoli al centro uguali. Pertanto, l'angolo al centro sotteso da ciascun lato misura:

$\hat{AOB} = 360^\circ / 12 = 30^\circ$. Poiché $OA = OB$ in quanto raggi della circonferenza, il triangolo OAB è isoscele di base AB, per cui l'altezza OH è anche mediana e bistrice, quindi: $\hat{BOH} = 30^\circ / 2 = 15^\circ$.

Per il teorema dei triangoli rettangoli: $AB = 2 BH = 2 OB \sin 15^\circ$; $OH = OB \cos 15^\circ$.

Perimetro ed area del poligono misurano quindi:

$$2 p_{pol} = 12 AB = 24 \sin 15^\circ \simeq 6,21; \quad S_{pol} = 6 AB \cdot OH = 12 \sin 15^\circ \cos 15^\circ = 6 \sin 30^\circ = 3.$$



4.

- a. Se non abbiamo alcun vincolo, dobbiamo scegliere e ordinare 6 elementi in un insieme che ne contiene 21, ammettendo la possibilità di ripetizioni, e quindi abbiamo 21 scelte possibili per ognuna delle 6 lettere: $D'_{21,6} = 21^6 = 85.766.121$.

Se le lettere non possono essere ripetute, ogni scelta diminuisce di una unità le possibilità

nella scelta successiva: $D_{21,6} = 21 \cdot 20 \cdot 19 \cdot 18 \cdot 17 \cdot 16 = 39.070.080$.

Se non possiamo avere delle “doppie”, ogni lettera dovrà essere diversa da quella precedente, quindi, a parte per il primo elemento, avremo 20 scelte possibili:

$$D_{21,1} \cdot (D_{20,1})^5 = 21 \cdot 20^5 = 67.200.000 \quad .$$

Per calcolare il numero di stringhe che contengono almeno una vocale, sottraiamo da tutte le stringhe possibili (calcolate in precedenza) quelle che contengono solo consonanti:

$$D'_{21,6} - D'_{16,6} = 21^6 - 16^6 = 68.988.905 \quad .$$

Nel calcolare il numero delle stringhe che contengono esattamente una vocale abbiamo tre fattori: scelta di una vocale (su 5), scelta del posto che tale vocale occupa nella stringa (su 6), scelta e ordinamento delle altre cinque lettere, che saranno consonanti:

$$C_{5,1} \cdot C_{6,1} \cdot D'_{16,5} = 5 \cdot 6 \cdot 16^5 = 31.457.280 \quad .$$

- b. Se non ci sono vincoli, lo studente deve scegliere 10 quesiti in un insieme che ne contiene 20 (non ha importanza l'ordine nel quale li risolve, né la distinzione tra matematica e fisica):

$$C_{20,10} = \binom{20}{10} = \frac{20!}{10! \cdot 10!} = 184.756 \quad .$$

Se deve scegliere 6 quesiti di matematica su 12 e 4 di fisica su 8:

$$C_{12,6} \cdot C_{8,4} = \binom{12}{6} \cdot \binom{8}{4} = \frac{12!}{6! \cdot 6!} \cdot \frac{8!}{4! \cdot 4!} = 924 \cdot 70 = 64.680 \quad .$$

Se 4 dei quesiti di matematica e 2 di quelli di fisica sono obbligatori, gli restano da scegliere due quesiti di matematica su 8 e due quesiti di fisica su 6:

$$C_{8,2} \cdot C_{6,2} = \binom{8}{2} \cdot \binom{6}{2} = \frac{8 \cdot 7}{2} \cdot \frac{6 \cdot 5}{2} = 420 \quad .$$

1. Data una circonferenza di diametro $AB=2r$, prendi su di essa, da parti opposte rispetto ad AB, due punti C e D tali che $\hat{ABC}=60^\circ$, $\hat{ABD}=x$.
 - a. Esprimi (anche in funzione di $\cos x$ e $\sin x$) le misure dei segmenti AD, BD, AC, BC, CD.
 - b. Verifica che: $f(x)=\frac{AD^2-CD^2}{BC^2}=3\sin^2 x-2\sqrt{3}\sin x \cos x-3\cos^2 x$.
 - c. Determina le limitazioni geometriche e calcola i valori di $f(x)$ nei casi limite.
 - d. Risolvi la disequazione $f(x)\geq 0$ tenendo conto delle limitazioni geometriche.
 - e. Esprimi la quantità $f(x)$ utilizzando $\cos 2x$ e $\sin 2x$.
 - f. Scrivi la stessa quantità nella forma $f(x)=-A\sin(2x+\phi)+k$.
 - g. Traccia il grafico della funzione $y=f(x)$ tenendo conto delle limitazioni geometriche.
Descrivi la funzione ottenuta e determina le coordinate del suo punto di minimo.
 - h. Risolvi l'equazione $f(x)=\sqrt{3}$.
2. La 4^F affronta una partita di calcetto ed una di basket. Le probabilità di vittoria sono rispettivamente $p(c)=0,35$ e $p(b)=0,75$. Calcola le probabilità che la 4^F:
 - a. vinca entrambe le partite;
 - b. perda entrambe le partite;
 - c. vinca almeno una partita;
 - d. vinca solo la partita di calcetto;

Sapendo che il torneo di calcetto si articola in sette partite, calcola la probabilità che la 4^F:

 - e. vinca tutte le partite;
 - f. perda tutte le partite;
 - g. vinca almeno una partita;
 - h. vinca esattamente quattro partite.
3. Una casa farmaceutica prepara un test per riconoscere se una persona ha l'influenza.

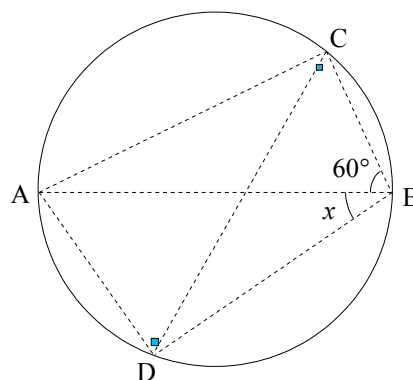
Il test risulta positivo (“dice che hai l'influenza”) nel 90% dei soggetti malati e nel 7% dei soggetti sani. La probabilità che una persona abbia l'influenza è $p(i)=0,08$.

Dopo avere tracciato un diagramma ad albero, calcola:

- a. la probabilità che un soggetto sia positivo al test;
- b. la probabilità che un soggetto sia negativo al test;
- c. la probabilità che un soggetto sia un *falso positivo*, ovvero che il soggetto sia sano, sapendo che è risultato positivo al test;
- d. la probabilità che un soggetto sia un *falso negativo*, ovvero che il soggetto abbia l'influenza, sapendo che è risultato negativo al test.

1. Sappiamo che $\hat{ACB} = \hat{ADB} = 90^\circ$ perché angoli alla circonferenza che insistono su una semicirconferenza.

Osserviamo che, invece, in generale \hat{CBD} non è un angolo retto, perché la sua ampiezza dipende dalla posizione scelta per D, che varia sulla semicirconferenza. Quindi CD non è un diametro.



- a. Applichiamo il teorema della corda o, quando possibile, quelli dei triangoli rettangoli:

$$AD = AB \sin x = 2r \sin x ; \quad BD = AB \cos x = 2r \cos x ; \quad AC = AB \sin 60^\circ = r\sqrt{3} ;$$

$$BC = AB \cos 60^\circ = r ; \quad CD = AB \sin(60^\circ + x) = r(\sqrt{3} \cos x + \sin x) .$$

b.
$$f(x) = \frac{AD^2 - CD^2}{BC^2} = \frac{4r^2 \sin^2 x - 3r^2 \cos^2 x - 2r\sqrt{3} \sin x \cos x - r^2 \sin^2 x}{r^2} =$$

$$3 \sin^2 x - 2\sqrt{3} \sin x \cos x - 3 \cos^2 x \quad \text{c.v.d.}$$

- c. Poiché D varia sulla semicirconferenza tra A e B: $0^\circ \leq x \leq 90^\circ$.

$$f(0^\circ) = -3 ; \quad f(90^\circ) = +3 .$$

d. $3 \sin^2 x - 2\sqrt{3} \sin x \cos x - 3 \cos^2 x \geq 0 \Rightarrow 3 \tan^2 x - 2\sqrt{3} \tan x - 3 \geq 0 \Rightarrow$
 $\tan x \leq -\sqrt{3}/3 \vee x \geq \sqrt{3} \Rightarrow 60^\circ \leq x \leq 90^\circ .$

Abbiamo diviso la disequazione per $\cos^2 x$ in quanto si tratta di una quantità generalmente positiva ed abbiamo tenuto conto delle limitazioni geometriche.

e.
$$f(x) = \frac{3}{2} - \frac{3}{2} \cos 2x - \sqrt{3} \sin 2x - \frac{3}{2} - \frac{3}{2} \cos 2x = -\sqrt{3} \sin 2x - 3 \cos 2x .$$

f. $A = \sqrt{9+3} = 2\sqrt{3} ; \quad \tan \phi = \sqrt{3} \Rightarrow \phi = 60^\circ ; \quad k = 0 .$

$$f(x) = -2\sqrt{3} \sin(2x + 60^\circ) .$$

- g. Si tratta di un arco di senoide avente pulsazione $\omega = 2$, periodo $T = 180^\circ$, ampiezza $A = 2\sqrt{3}$, che ha subito una traslazione di 30° verso sinistra ed una simmetria rispetto all'asse delle ascisse.

Otteniamo il minimo se: $2x + 60^\circ = 90^\circ \Rightarrow x = 15^\circ .$

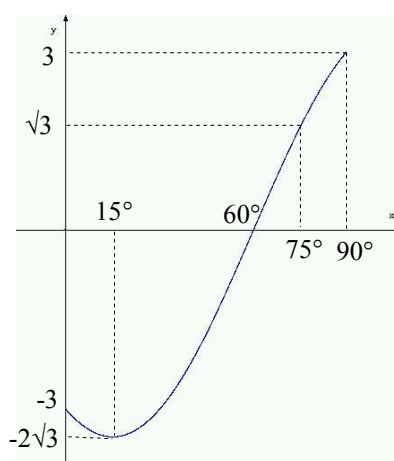
L'ordinata del minimo è: $f(15^\circ) = -2\sqrt{3} .$

h. $-2\sqrt{3} \sin(2x + 60^\circ) = \sqrt{3} \Rightarrow \sin(2x + 60^\circ) = -1/2 \Rightarrow$

$$2x + 60^\circ = 210^\circ + k 360^\circ \Rightarrow x = 75^\circ + k 180^\circ ;$$

$$2x + 60^\circ = 330^\circ + k 360^\circ \Rightarrow x = 135^\circ + k 180^\circ .$$

L'unica soluzione che rispetta le limitazioni geometriche è $x = 75^\circ$ (vedi grafico).

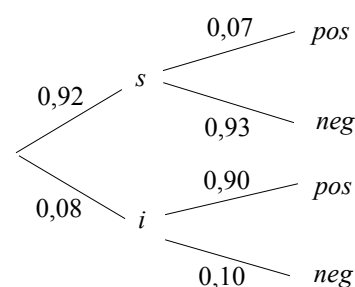


2. Supponiamo che gli eventi c e b siano indipendenti:

- a. $p(c \wedge b) = p(c) \cdot p(b) = 0,35 \cdot 0,75 = 0,2625$;
- b. $p(\bar{c} \wedge \bar{b}) = p(\bar{c}) \cdot p(\bar{b}) = 0,65 \cdot 0,25 = 0,1625$;
- c. $p(c \vee b) = p(c) + p(b) - p(c \wedge b) = 0,35 + 0,75 - 0,2625 = 0,8375$;
- d. $p(c \wedge \bar{b}) = p(c) \cdot p(\bar{b}) = 0,35 \cdot 0,25 = 0,0875$;
- e. $p(7c) = (0,35)^7 \simeq 6,43 \cdot 10^{-4}$;
- f. $p(7\bar{c}) = (0,65)^7 \simeq 0,0490$;
- g. $p(\text{almeno } 1c) = 1 - p(7\bar{c}) \simeq 0,9510$;
- h. $p(4c) = \binom{7}{4} \cdot (0,35)^4 \cdot (0,65)^3 \simeq 0,1442$.

3. Indichiamo con s l'evento "il soggetto è sano".

- a. $p(pos) = p(s) \cdot p(pos/s) + p(i) \cdot p(pos/i) =$
 $0,92 \cdot 0,07 + 0,08 \cdot 0,90 = 0,1364$;
- b. $p(neg) = 1 - p(pos) \simeq 0,8636$;
- c. $p(s/pos) = \frac{p(s) \cdot p(pos/s)}{p(pos)} = \frac{0,92 \cdot 0,07}{0,1364} \simeq 0,472$;
- d. $p(i/neg) = \frac{p(i) \cdot p(neg/i)}{p(neg)} = \frac{0,08 \cdot 0,10}{0,8636} \simeq 9,26 \cdot 10^{-3}$.



1. Considera la funzione $f(x)$ di equazione $y = x + \ln 4 + \frac{2}{e^x + 1}$ e chiama Γ il suo grafico.
 - a. Determina il dominio di $f(x)$ e dimostra che essa ha uno zero per $-4 < x < -3$.
 - b. Calcola i limiti della funzione agli estremi del dominio.
 - c. Dimostra che per ogni x reale: $f(x) = x + 2 + \ln 4 - \frac{2e^x}{e^x + 1}$.
 - d. Dimostra che il punto $A(0, 1 + \ln 4)$ è centro di simmetria di Γ .
 - e. Sapendo che l'equazione $f(x) = m$ ammette per ogni valore di m una ed una sola soluzione reale, e che $f(\alpha) = 3$, quanto vale $f(-\alpha)$?
 - f. Dimostra che le rette r ed s di equazioni $y = x + \ln 4$ e $y = x + \ln 4 + 2$ sono rispettivamente asintoto destro e sinistro di Γ . (*Utilizza la definizione di asintoto, senza calcoli inutili*).
 - g. Dimostra che Γ è interamente compresa nella striscia piana delimitata da r e da s .
 - h. Traccia il grafico probabile Γ tenendo conto delle informazioni precedenti.

2.

- a. Dimostra le seguenti proprietà dei coefficienti binomiali:

$$\binom{n}{k} = \binom{n}{n-k} ; \quad \binom{n}{k+1} = \binom{n}{k} \cdot \frac{n-k}{k+1} ; \quad \binom{n}{k} = \binom{n-1}{k-1} + \binom{n-1}{k} ; \quad \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} = 2^n$$

e spiega quali proprietà del triangolo di Tartaglia esse esprimono.

- b. Un insieme A ha 5 elementi ed un insieme B ha 6 elementi. Quante sono le possibili funzioni (o applicazioni) di A in B? Quante sono le funzioni iniettive?
- c. La classe 4[^]C è formata da 12 maschi e 8 femmine.

In quanti modi si può formare un gruppo di 3 maschi e 2 femmine?

In quanti modi si può formare il gruppo se gli studenti A e B (maschi) non vogliono stare insieme? In quanti modi si può formare il gruppo se gli studenti A (maschio) e B (femmina) partecipano solo se vengono scelti entrambi?

1.

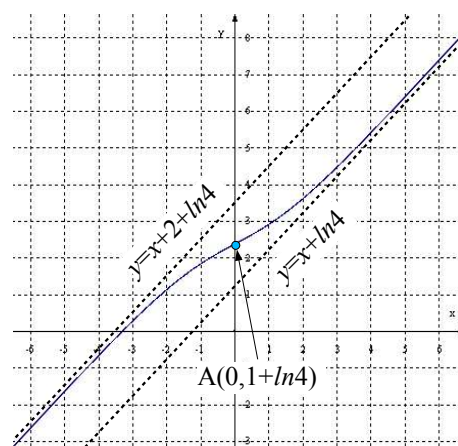
- a. Dominio: $\forall x \in \mathbb{R}$. La funzione è continua $\forall x \in \mathbb{R}$ in quanto somma, quoziente e composizione di funzioni continue.

$$f(-4) \simeq -0,65 < 0 \quad ; \quad f(-3) \simeq 0,29 > 0$$

Poiché la funzione è continua in un intervallo chiuso e limitato, sono valide le ipotesi del teorema dell'esistenza degli zeri, quindi $\exists x_0 \in (-4, -3)$ tale che $f(x_0) = 0$.

b. $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} \left(x + \ln 4 + \frac{2}{e^x + 1} \right) = \pm\infty$

c. $2 - \frac{2e^x}{e^x + 1} = \frac{2e^x + 2 - 2e^x}{e^x + 1} = \frac{2}{e^x + 1}$ c.v.d.



- d. Le equazioni della simmetria rispetto al punto $A(0, 1 + \ln 4)$ sono: $\begin{cases} x' = -x \\ y' = 2(1 + \ln 4) - y \end{cases}$

Sostituiamo nell'equazione di $f(x)$:

$$2 + 2 \ln 4 - y = -x + \ln 4 + \frac{2}{e^{-x} + 1} \Rightarrow y = x + \ln 4 + 2 - \frac{2e^x}{e^x + 1} = x + \ln 4 + \frac{2}{e^x + 1} \quad \text{c.v.d.}$$

- e. Per la dimostrazione precedente, sappiamo che al punto $P(\alpha, 3)$ appartenente a Γ , corrisponde il punto $P'(-\alpha, 2 + 2 \ln 4 - 3)$, simmetrico di P rispetto ad A, ed appartenente anche esso a Γ . Quindi: $f(-\alpha) = 2 \ln 4 - 1$.

- f. Se indichiamo con $y = g(x)$ e $y = h(x)$ le equazioni delle rette r ed s , abbiamo:

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} [f(x) - g(x)] = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2}{e^x + 1} = 0 \quad \text{e} \quad \lim_{x \rightarrow -\infty} [f(x) - h(x)] = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{-2e^x}{e^x + 1} = 0$$

Quindi r ed s sono asintoti di Γ in quanto la loro distanza da Γ tende a zero per $x \rightarrow +\infty$ e $x \rightarrow -\infty$ rispettivamente.

- g. Abbiamo $f(x) - g(x) = \frac{2}{e^x + 1} > 0 \quad \forall x \in \mathbb{R}$ e $h(x) - f(x) = \frac{2e^x}{e^x + 1} > 0 \quad \forall x \in \mathbb{R}$.

Quindi Γ è interamente compresa nella striscia piana delimitata da r e da s .

2.

- a. Per definizione di coefficiente binomiale: $\binom{n}{k} = \frac{n!}{(n-k)!k!} = \frac{n!}{k!(n-k)!} = \binom{n}{n-k}$ c.v.d.

Esprime il fatto che il triangolo di Tartaglia è simmetrico rispetto alla “mediana”.

$$\binom{n}{k} \cdot \frac{n-k}{k+1} = \frac{n!}{(n-k)!k!} \cdot \frac{n-k}{k+1} = \frac{n!}{(n-k-1)!(k+1)!} = \binom{n}{k+1} \quad \text{c.v.d.}$$

Permette di calcolare un elemento del triangolo di Tartaglia a partire dall'elemento

“precedente” (che occupa il posto a sinistra sulla stessa riga).

$$\binom{n-1}{k} + \binom{n-1}{k-1} = \frac{(n-1)!}{(n-k-1)!k!} + \frac{(n-1)!}{(n-k)!(k-1)!} = \frac{(n-k)(n-1)! + k(n-1)!}{(n-k)!k!} =$$

$$= \frac{(n-1)!(n-k+k)}{(n-k)!k!} = \frac{n!}{(n-k)!k!} = \binom{n}{k} \quad \text{c.v.d.}$$

Esprime il fatto che ogni elemento del triangolo di Tartaglia è la somma dei due elementi della riga precedente che si trovano a destra e a sinistra dell'elemento da calcolare.

Sostituiamo $a=b=1$ nell'identità $(a+b)^n = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} a^{n-k} b^k \Rightarrow \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} = 2^n$.

Esprime il fatto che le somme dei coefficienti delle righe del triangolo di Tartaglia sono date dalle successive potenze di 2.

- b. Per avere una funzione, ad ognuno dei 5 elementi di A può essere fatto corrispondere uno dei 6 elementi di B: $D'_{6,5} = 6^5 = 7.776$.

Per avere una funzione iniettiva, le immagini degli elementi di A devono essere elementi distinti di B: $D_{6,5} = 6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 = 720$.

- c. Le scelte di maschi e femmine sono indipendenti. Gruppi di 3 maschi e 2 femmine:

$$C_{12,3} \cdot C_{8,2} = \binom{12}{3} \cdot \binom{8}{2} = \frac{12 \cdot 11 \cdot 10}{3 \cdot 2 \cdot 1} \cdot \frac{8 \cdot 7}{2 \cdot 1} = 6.160.$$

Se A e B non devono stare insieme, possiamo escluderli entrambi (e quindi scegliere 3 maschi su 10) o includerne uno solo (e quindi scegliere altri 2 maschi su 10):

$$(C_{10,3} + 2C_{10,2}) \cdot C_{8,2} = \left[\binom{10}{3} + 2\binom{10}{2} \right] \cdot \binom{8}{2} = \left[\frac{10 \cdot 9 \cdot 8}{3 \cdot 2 \cdot 1} + 2 \cdot \frac{10 \cdot 9}{2 \cdot 1} \right] \cdot \frac{8 \cdot 7}{2 \cdot 1} = 5.880.$$

Più semplicemente, possiamo sottrarre al numero totale di gruppi quelli che comprendono sia A che B (in cui rimane da scegliere un maschio su 10):

$$6.160 - C_{10,1} \cdot C_{8,2} = 6.160 - \binom{10}{1} \cdot \binom{8}{2} = 6.160 - \frac{10}{1} \cdot \frac{8 \cdot 7}{2 \cdot 1} = 5.880.$$

Se A e B partecipano solo insieme, possiamo includerli entrambi (e scegliere 2 maschi su 11 e 1 femmina su 7) o escluderli entrambi (e scegliere 3 maschi su 11 e 2 femmine su 7):

$$C_{11,2} \cdot C_{7,1} + C_{11,3} \cdot C_{7,2} = \binom{11}{2} \cdot \binom{7}{1} + \binom{11}{3} \cdot \binom{7}{2} = \frac{11 \cdot 10}{2 \cdot 1} \cdot 7 + \frac{11 \cdot 10 \cdot 9}{3 \cdot 2 \cdot 1} \cdot \frac{7 \cdot 6}{2 \cdot 1} = 3.850.$$

1. Il triangolo ABC è equilatero di lato unitario. La retta r parallela ad AB interseca i lati AC e BC, rispettivamente, nei punti P e Q. Indica con x la distanza di r dal vertice C.

a. Per quale valore di x è possibile inscrivere una circonferenza nel quadrilatero ABQP?

(E' facoltativo dimostrare la proprietà utilizzata). Qual è la lunghezza del suo raggio?

b. Dimostra che il rapporto tra l'area del triangolo PQC e l'area del quadrilatero ABPQ è espresso

dalla funzione $y = f(x) = \frac{4x^2}{3-4x^2}$.

c. Studia la funzione $f(x)$ senza tenere conto delle limitazioni geometriche del problema e tracciane il grafico.

d. Spiega se la funzione $f(x)$, vista come corrispondenza tra il suo dominio ed \mathbb{R} , risulta iniettiva e/o suriettiva.

2. Uno studente della 4^C deve risolvere un compito del malefico insegnante di matematica.

Il compito consiste in due problemi e dieci quesiti “a crocette” con sei risposte ciascuno.

Lo studente, che è ottimista, ritiene di avere probabilità $p(A) = 3/4$ e $p(B) = 2/3$ di risolvere il primo e il secondo problema rispettivamente, e risponde ai quesiti lanciando un dado.

Calcola, giustificando le risposte, le probabilità che lo studente:

a. risolva entrambi i problemi;

b. risolva almeno un problema;

c. risolva solo un problema;

d. non risolva alcun problema;

e. abbia risolto il primo problema, sapendo che ne ha risolto uno solo;

Nota: dalla f alla k, le risposte vanno fornite in forma decimale e/o esponenziale.

f. risolva tutti i dieci quesiti;

g. risolva sette quesiti su dieci;

h. risolva solo i primi sette quesiti;

i. risolva almeno i primi sette quesiti;

j. risolva almeno un quesito;

k. ottenga il voto massimo;

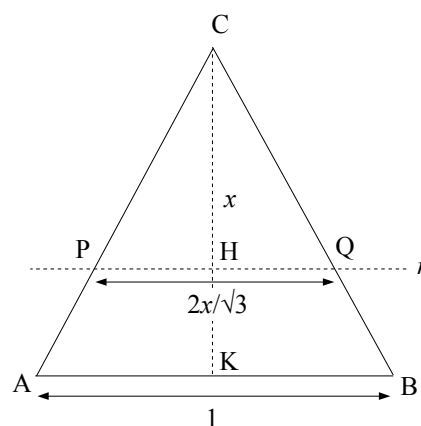
l. ottenga la sufficienza, per la quale è necessario risolvere almeno un problema e cinque quesiti (lascia impostati i calcoli senza svolgerli).

1. Se $AB=1$, sappiamo dalla geometria euclidea, o dalla trigonometria, che $CK=\sqrt{3}/2$.

Ponendo $CH=x$, abbiamo $PQ=PC=QC=2x/\sqrt{3}$.

Quindi: $HK=\sqrt{3}/2-x$ e $AP=BQ=1-2x/\sqrt{3}$.

- a. Perché un quadrilatero sia circoscrivibile ad una circonferenza, le somme dei lati opposti devono essere uguali. (La dimostrazione si basa sul teorema delle tangenti condotte da un punto ad una circonferenza).



$$\text{Imponiamo: } AB + PQ = AP + BQ \Rightarrow 1 + \frac{2x}{\sqrt{3}} = 2 - \frac{4x}{\sqrt{3}} \Rightarrow \frac{6x}{\sqrt{3}} = 1 \Rightarrow x = \frac{1}{2\sqrt{3}}.$$

Il diametro della circonferenza è uguale alla distanza tra i lati paralleli AB e PQ:

$$2r = \frac{\sqrt{3}}{2} - x = \frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{1}{2\sqrt{3}} = \frac{1}{\sqrt{3}} \Rightarrow r = \frac{1}{2\sqrt{3}}.$$

In pratica, perché il quadrilatero ABQP sia circoscrivibile ad una circonferenza, è necessario condurre la retta r ad un terzo dell'altezza.

b. $\text{Area}_{PQC} = \frac{1}{2} PQ \cdot CH = \frac{1}{2} \cdot \frac{2x}{\sqrt{3}} \cdot x = \frac{x^2}{\sqrt{3}}.$

$$\text{Area}_{ABQP} = \frac{1}{2} (AB + PQ) \cdot HK = \frac{1}{2} \cdot \left(1 + \frac{2x}{\sqrt{3}}\right) \cdot \left(\frac{\sqrt{3}}{2} - x\right) = \frac{3 - 4x^2}{4\sqrt{3}}, \text{ da cui segue la tesi.}$$

c. $\text{dom}: 3 - 4x^2 \neq 0 \Rightarrow x \neq \pm\sqrt{3}/2. f(-x) = f(x) \quad \forall x \in \text{dom } f.$

La funzione è pari ed il suo grafico è simmetrico rispetto all'asse delle ordinate.

	$-\sqrt{3}/2$	0	$\sqrt{3}/2$	
num	+	+	+	+
den	-	o	+	-
$f(x)$	-	•	+	-

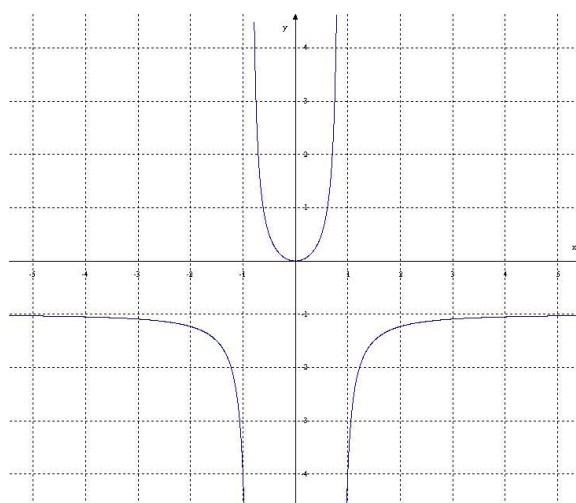
Intersezioni assi: $(0, 0)$.

$$\lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{4x^2}{3 - 4x^2} = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{4x^2}{x^2(3/x^2 - 4)} = -1.$$

Asintoto orizzontale di equazione $y = -1$.

$$\frac{4x^2}{3 - 4x^2} = -1 \Rightarrow 4x^2 = -3 + 4x^2 \Rightarrow \emptyset.$$

Non ci sono intersezioni tra il grafico della funzione ed il suo asintoto orizzontale.



$$\lim_{x \rightarrow (\sqrt{3}/2)^+} \frac{4x^2}{3 - 4x^2} = +\infty; \quad \lim_{x \rightarrow (-\sqrt{3}/2)^+} \frac{4x^2}{3 - 4x^2} = \pm\infty. \text{ Asintoti verticali di eq. } x = \frac{\pm\sqrt{3}}{2}.$$

d. La funzione non è iniettiva, perché valori opposti della variabile x hanno la stessa immagine.

Non è suriettiva, in quanto i valori $-1 \leq y < 0$ non sono immagine di alcun valore di x .

2. Supponiamo che la risoluzione del primo e del secondo problema siano indipendenti.

$$a. \quad p(A \cap B) = p(A) \cdot p(B) = \frac{3}{4} \cdot \frac{2}{3} = \frac{1}{2} ;$$

$$b. \quad p(A \cup B) = p(A) + p(B) - p(A \cap B) = \frac{3}{4} + \frac{2}{3} - \frac{1}{2} = \frac{11}{12} ;$$

$$c. \quad p(A \dot{\cup} B) = p(A \cup B) - p(A \cap B) = \frac{11}{12} - \frac{1}{2} = \frac{5}{12} , \text{ oppure:}$$

$$p(A \cap \bar{B}) + p(B \cap \bar{A}) = \frac{3}{4} \cdot \frac{1}{3} + \frac{2}{3} \cdot \frac{1}{4} = \frac{5}{12} ;$$

$$d. \quad p(\bar{A} \cap \bar{B}) = 1 - p(A \cup B) = 1 - \frac{11}{12} = \frac{1}{12} , \text{ oppure: } p(\bar{A}) \cdot p(\bar{B}) = \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{3} = \frac{1}{12} .$$

$$e. \quad p(A | 1 \text{ pr.}) = \frac{p(A) \cdot p(1 \text{ pr.} | A)}{p(1 \text{ pr.})} = \frac{3/4 \cdot 1/3}{5/12} = \frac{3}{5}$$

E' più semplice ragionare sul diagramma ad albero che applicare meccanicamente il teorema di Bayes;

$$f. \quad p(10 q) = [p(q)]^{10} = \left(\frac{1}{6}\right)^{10} \simeq 1,65 \cdot 10^{-8} ;$$

$$g. \quad p(7 q) = \binom{10}{7} \cdot \left(\frac{1}{6}\right)^7 \cdot \left(\frac{5}{6}\right)^3 \simeq 120 \cdot 3,57 \cdot 10^{-6} \cdot 0,58 \simeq 2,48 \cdot 10^{-4} ;$$

$$h. \quad p(\text{solo primi } 7 q) = \left(\frac{1}{6}\right)^7 \cdot \left(\frac{5}{6}\right)^3 \simeq 2,07 \cdot 10^{-6} ;$$

$$i. \quad p(\text{almeno primi } 7 q) = \left(\frac{1}{6}\right)^7 \simeq 3,57 \cdot 10^{-6} ;$$

$$j. \quad p(\text{almeno } 1 q) = 1 - [p(\bar{B})]^{10} = 1 - \left(\frac{5}{6}\right)^{10} \simeq 0,838 ;$$

$$k. \quad p(\text{max}) = p(A) \cdot p(B) \cdot p(10 q) \simeq \frac{1}{2} \cdot \left(\frac{1}{6}\right)^{10} \simeq 8,27 \cdot 10^{-9} ;$$

$$l. \quad p(\text{suff}) = p(A \cup B) \cdot p(\text{almeno } 5 q) = \frac{11}{12} \cdot \sum_{k=5}^{10} \binom{10}{k} \left(\frac{1}{6}\right)^k \left(\frac{5}{6}\right)^{10-k} .$$

1. Dati i punti $A(2,0)$, $B(0,4)$, sia $P(x,y)$ un punto tale che $x>0$ ed $y>0$, e siano C, D, E, F rispettivamente i punti medi dei lati OA, AP, PB, BO del quadrilatero OAPB.
- Quali posizioni può occupare P perché il quadrilatero OAPB degeneri in un triangolo?
 - Dimostra che il quadrilatero CDEF è un parallelogrammo.
 - Quali posizioni può occupare P perché il quadrilatero CDEF sia un rettangolo?
 - Quali posizioni può occupare P perché il quadrilatero CDEF sia un rombo?
 - Quali sono le coordinate di P quando CDEF è un quadrato?
 - Nel caso in cui P, oltre a rispettare le condizioni assegnate inizialmente, appartenga alla retta r di equazione $y=4-x$, esprimi in funzione dell'ascissa di P il rapporto z tra l'area del quadrato di lato CD e l'area del parallelogrammo CDEF.
 - Verificato che $z(x)=\frac{x^2-4x+8}{x+4}$, studia la funzione ottenuta e tracciane il grafico.
2. A e B partecipano ad una gara di tiro con l'arco. Le probabilità che essi colpiscano il bersaglio sono $p(A)=3/4$ e $p(B)=2/3$. Calcola, giustificando le risposte, le probabilità che in un singolo lancio:
- entrambi colpiscano il bersaglio;
 - almeno uno dei due colpisca il bersaglio;
 - solo uno dei due colpisca il bersaglio;
 - nessuno dei due colpisca il bersaglio;
 - sapendo che è stato colpito un solo bersaglio, che sia stato B a colpirlo.
- Calcola poi, esprimendole in forma decimale, le probabilità che in dieci lanci:
- entrambi colpiscano sempre il bersaglio;
 - A colpisca il bersaglio esattamente 7 volte;
 - A colpisca il bersaglio solo le prime 7 volte e B solo le prime 4 volte;
 - B colpisca almeno un bersaglio.
- Infine, A e B lanciano una freccia a turno, e vince chi fa centro per primo.
- Se A è il primo a lanciare, calcola la probabilità che vinca entro la sua terza freccia.
 - Se B è il primo a lanciare, calcola le rispettive probabilità di vittoria.

1. Dalla formula del punto medio: $C(1,0)$, $D(\frac{x+2}{2}, \frac{y}{2})$, $E(\frac{x}{2}, \frac{y+4}{2})$, $F(0,2)$.

a. OAPB degenera in un triangolo se P appartiene al segmento AB: $y=-2x+4$ con $0 < x < 2$.

b. Per via analitica: $m_{BC}=m_{EF}=\frac{y}{x} \Rightarrow BC \parallel EF$; $m_{DE}=m_{CF}=-2 \Rightarrow DE \parallel CF$.

Per via sintetica, è sufficiente applicare ai triangoli OPA e OPB il teorema per cui il segmento congiungente i punti medi di due lati è parallelo al terzo lato e congruente alla sua metà.

c. CDEF è un rettangolo se:

$$CD \perp DE \Rightarrow m_{CD} = -\frac{1}{m_{DE}} \Rightarrow y = \frac{x}{2} \text{ con } x > 0 .$$

d. CDEF è un rombo se:

$$CD=CF \Rightarrow \sqrt{\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{4}} = \sqrt{5} \Rightarrow x^2 + y^2 = 20 \text{ con } x > 0 \text{ e } y > 0 .$$

Lo stesso risultato si ottiene imponendo che le diagonali siano perpendicolari.

e. CDEF è un quadrato se: $\begin{cases} y=x/2 \\ x^2+y^2=20 \end{cases}$, da cui ottengo $P(4,2)$.

f. Quando P appartiene ad r: $CD^2 = \frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{4} = \frac{x^2}{4} + \frac{(4-x)^2}{4} = \frac{x^2 - 4x + 8}{2}$.

Poiché la retta FC ha equazione $2x+y-2=0$, la distanza del punto D dalla retta FC è:

$$DH = \frac{|x+2+y/2-2|}{\sqrt{5}} = \frac{x+y/2}{\sqrt{5}} \text{ che, quando P}$$

appartiene ad r, diventa: $DH = \frac{2+x/2}{\sqrt{5}}$.

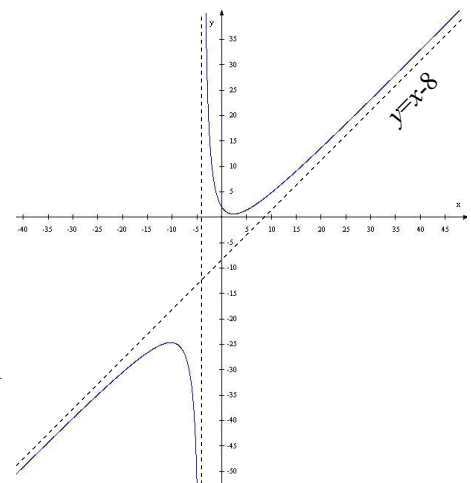
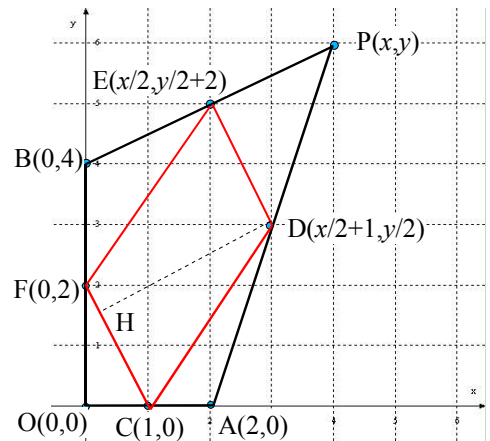
L'area del parallelogrammo CDEF è:

$$FC \cdot DH = \sqrt{5} \cdot \frac{2+x/2}{\sqrt{5}} = \frac{4+x}{2} , \text{ da cui ricavo } z(x) .$$

g. Prescindendo dalle limitazioni geometriche, il grafico di $z(x)$ è un'iperbole con asintoti di equazione $x=-4$ (dalle C.E.) e $y=x-8$ (dalla divisione tra num. e den.).

Si ha: $z(x) > 0 \Rightarrow x > -4$.

2. Deduciamo dal testo che gli eventi "A colpisce il bersaglio" e "B colpisce il bersaglio" sono indipendenti.



$$a. \quad p(A \wedge B) = p(A) \cdot p(B) = \frac{3}{4} \cdot \frac{2}{3} = \frac{1}{2} \quad ;$$

$$b. \quad p(A \vee B) = p(A) + p(B) - p(A \wedge B) = \frac{3}{4} + \frac{2}{3} - \frac{1}{2} = \frac{11}{12} \quad ;$$

$$c. \quad p(A \text{ exor } B) = p(A \vee B) - p(A \wedge B) = \frac{11}{12} - \frac{1}{2} = \frac{5}{12} \quad , \text{ oppure:}$$

$$p(A \wedge \overline{B}) + p(B \wedge \overline{A}) = \frac{3}{4} \cdot \frac{1}{3} + \frac{2}{3} \cdot \frac{1}{4} = \frac{5}{12} \quad ;$$

$$d. \quad p(\overline{A} \wedge \overline{B}) = 1 - p(A \vee B) = 1 - \frac{11}{12} = \frac{1}{12} \quad , \text{ oppure: } p(\overline{A}) \cdot p(\overline{B}) = \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{3} = \frac{1}{12} \quad .$$

e. Con Bayes o, più semplicemente, con un diagramma ad albero, ricavo:

$$p(B/1 \text{ centro}) = \frac{p(B) \cdot p(1 \text{ centro}/B)}{p(B) \cdot p(1 \text{ centro}/B) + p(A) \cdot p(1 \text{ centro}/A)} = \frac{2/3 \cdot 1/4}{2/3 \cdot 1/4 + 3/4 \cdot 1/3} = \frac{2}{5} \quad ;$$

$$f. \quad [p(A \wedge B)]^{10} = \left(\frac{1}{2}\right)^{10} \simeq 9,77 \cdot 10^{-4} \quad ;$$

$$g. \quad p(A \text{ 7 centri}) = \binom{10}{7} \cdot \left(\frac{3}{4}\right)^7 \cdot \left(\frac{1}{4}\right)^3 \simeq 120 \cdot 0,133 \cdot 0,0156 \simeq 0,250 \quad ;$$

$$h. \quad p(A \text{ primi 7} \wedge B \text{ primi 4}) = \left(\frac{3}{4}\right)^7 \cdot \left(\frac{1}{4}\right)^3 \cdot \left(\frac{2}{3}\right)^4 \cdot \left(\frac{1}{3}\right)^6 \simeq 0,133 \cdot 0,0156 \cdot 0,198 \cdot 1,37 \cdot 10^{-3} \simeq 5,65 \cdot 10^{-7} \quad ;$$

$$i. \quad p(B \text{ almeno 1 c}) = 1 - [p(\neg B)]^{10} = 1 - \left(\frac{1}{3}\right)^{10} \simeq 0,99998 \quad ;$$

$$j. \quad p(A1^\circ) + p(\overline{A}1^\circ \wedge \overline{B}1^\circ \wedge A2^\circ) + p(\overline{A}1^\circ \wedge \overline{B}1^\circ \wedge \overline{A}2^\circ \wedge \overline{B}2^\circ \wedge A3^\circ) = \\ = \frac{3}{4} + \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{3} \cdot \frac{3}{4} + \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{3} \cdot \frac{3}{4} \cdot \frac{1}{3} \cdot \frac{3}{4} \simeq 0,75 + 0,0625 + 5,21 \cdot 10^{-3} \simeq 0,818 \quad ;$$

$$k. \quad \text{La probabilità che B vinca con la sua n-sima freccia è } p(B n^\circ) = \left(\frac{1}{12}\right)^{n-1} \cdot \frac{2}{3} \quad .$$

Si tratta di una progressione geometrica di ragione $q = \frac{1}{12}$ e primo termine $p(B) = \frac{2}{3}$.

$$\text{La somma dei suoi termini è: } p(B) = \frac{2/3}{1 - 1/12} = \frac{8}{11} \simeq 0,727 \quad .$$

$$\text{La probabilità che vinca A è } p(A) = 1 - p(B) \simeq 0,273 \quad .$$