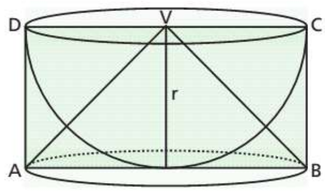
<u>*Geometria dello spazio*</u> - *Quesiti esame di stato*

1. Si spieghi perché non esistono poliedri regolari le cui facce sono esagoni. [*Q2 PNI 2014*]
2. Di un tronco di piramide retta a base quadrata si conoscono l'altezza h e i lati a e b delle due basi. Si esprima il volume V del tronco in funzione di a, b e h, illustrando il ragionamento seguito. (*Quesito proposto in diverse occasioni*) [*Q4 PNI 2013*]
3. Quali sono i poliedri regolari? Perchè sono detti solidi platonici? [*Q2 PNI sup 2013*]
4. Un cubo di legno di pioppo (densità $\rho_1=0{,}385\, g/cm^3$) ed un tetraedro regolare di cristallo (densità $\rho_2=3{,}33\, g/cm^3$) hanno entrambi lo spigolo $l=5\, cm$.
   Quale dei due ha la massa maggiore? [*Q7 sup 2013*]
5. È dato un tetraedro regolare di spigolo l e altezza h. Si determini l'ampiezza dell'angolo α formato da l e da h. [*Q7 PNI 2012*]
6. Dimostrare che il volume del tronco di cono è espresso dalla formula:
   $V=\frac{\pi}{3}h(R^2+Rr+r^2)$, dove R ed r sono i raggi e h l'altezza. [*Q2 2015*]
7. Un tetraedro regolare di rame (densità $\rho=8{,}9\, g/cm^3$), avente lo spigolo $l=6\, cm$, presenta all'interno una cavità di forma sferica. Sapendo che la massa del tetraedro è $m=200\, g$, si calcoli la lunghezza del raggio della cavità. [*Q8 str 2012*]
8. Sia AB un segmento di lunghezza $20\, dm$. Si determini il luogo dei punti C dello spazio tali che $A\hat{B}C$ sia retto e $B\hat{A}C$ misuri 60°. [*Q7 Eur 2012*]
9. Si provi che, nello spazio ordinario a tre dimensioni, il luogo geometrico dei punti equidistanti dai tre vertici di un triangolo rettangolo è la retta perpendicolare al piano del triangolo passante per il punto medio dell'ipotenusa. [*Q9 PNI 2011*]
10. Quale rapporto bisogna stabilire tra lo spigolo dell'ottaedro regolare e lo spigolo del cubo affinché i due solidi abbiano volumi uguali? [*Q7 sup 2011*]
11. Una sfera è inscritta in un cubo; quale è il rapporto fra il volume della sfera e quello del cubo? [*Q6 Ame 2011*]
12. Siano ABC un triangolo rettangolo in A, r la retta perpendicolare in B al piano del triangolo e P un punto di r distinto da B. Si dimostri che i tre triangoli PAB, PBC, PCA sono triangoli rettangoli. [*Q2 PNI 2010*]
13. Siano dati un ottaedro regolare di spigolo l e la sfera in esso inscritta; si scelga a caso un punto all'interno dell'ottaedro. Si determini la probabilità che tale punto risulti interno alla sfera. [*Q9 PNI sup 2010*]
14. Dato il rettangolo ABCD, il cui lato AB è lungo a, conduci per B la perpendicolare alla retta AC

e chiama H ed E i punti in cui essa seca le rette AC e AD nell'ordine. Conduci quindi per H la perpendicolare al piano della figura e su di essa prendi un punto P tale che $HP=6\,AE$.
Esprimi il volume della piramide, avente per vertice P e per base il quadrilatero HDEC, in funzione della lunghezza *x* del segmento BH. [*P2 sup 1994*]

15.«Esiste solo un poliedro regolare le cui facce sono esagoni». Si dica se questa affermazione è vera o falsa e si fornisca una esauriente spiegazione della risposta. [*Q4 PNI 2009*]

16.Nei «Discorsi e dimostrazioni matematiche intorno a due nuove scienze», Galileo Galilei descrive la costruzione di un solido che si chiama *scodella* considerando una semisfera di raggio *r* e il cilindro a essa circoscritto. La scodella si ottiene togliendo la semisfera dal cilindro. Si dimostri, utilizzando il principio di Cavalieri, che la scodella ha volume pari al cono di vertice V in figura. [*Q9 PNI 2009*]



17.Dati due punti A e B distanti tra loro 5 cm, si dica qual è il luogo dei punti C dello spazio tali che il triangolo ABC sia rettangolo in A ed abbia area uguale a $1\,cm^2$. [*Q6 PNI sup 2009*]

18.Siano dati una sfera di raggio *r*, il cubo in essa inscritto e il cono circolare retto inscritto nel cubo. Si scelga a caso un punto all'interno della sfera: si determini la probabilità che tale punto risulti interno al cono. [*Q4 PNI sup 2009*]

19.Si dia una definizione di poliedro regolare. Si dimostri che i poliedri regolari sono, a meno di similitudini, solo 5 e si dica quali sono. (*Quesito proposto numerose volte, con diverse varianti*).
[*Q5 Ame 2009*]

20.Una piramide di altezza *h* viene secata con un piano α parallelo al piano β della base in modo da ottenere un tronco di piramide il cui volume è 7/8 del volume della piramide. Qual è la distanza tra α e β? [*Q5 Aus 2009*]

21.Un tetraedro regolare e un cubo hanno superfici equivalenti. Calcolare il rapporto dei rispettivi spigoli. [*Q1 Eur 2009*]

22.Un cono equilatero di piombo (densità $\rho=11{,}34\,g/cm^3$), avente il raggio $r=5\,cm$, presenta all'interno una cavità di forma irregolare ed ha la massa $m=2\,kg$. Si scelga a caso un punto all'interno del cono. Si determini la probabilità che tale punto risulti esterno alla cavità.
[*Q9 PNI str 2013*]

23.Un cubo di alluminio (densità $\rho=2{,}7\,g/cm^3$), avente lo spigolo $l=10\,cm$, presenta all'interno una cavità a forma di cilindro equilatero, avente il raggio di lunghezza $r=2{,}5\,cm$. Si calcoli la massa *m* del cubo. [*Q8 str 2013*]

24.Siano dati un cono equilatero e la sfera in esso inscritta. Si scelga a caso un punto all'interno del cono. Si determini la probabilità che tale punto risulti esterno alla sfera. [*Q1 PNI 2008*]

25.I lati di un parallelepipedo rettangolo misurano 8, 9, e 12 cm. Si calcoli, in gradi e primi sessagesimali, l'ampiezza dell'angolo che la diagonale mandata da un vertice forma con ciascuno dei tre spigoli concorrenti al vertice. [*Q6 PNI 2008*]

26.Si consideri la seguente proposizione: "Se due solidi hanno uguale volume, allora, tagliati da un fascio di piani paralleli, intercettano su di essi sezioni di uguale area". Si dica se essa è vera o falsa e si motivi esaurientemente la risposta. [*Q1 2008*]

27.Un meteorite cade sulla Terra; qual è la probabilità che il punto d'incontro si trovi fra l'equatore e il tropico del Cancro (latitudine $\lambda = 23°27'\, nord$)? [*Q2 PNI sup 2008*]

28.Dimostra che il volume del cilindro equilatero inscritto in una sfera di raggio r è medio proporzionale fra il volume del cono equilatero inscritto e il volume della sfera.

[*Q6 PNI sup 2008*]

29.Si sechi il solido di una sfera con un piano, in modo che il circolo massimo sia medio proporzionale fra le superficie appianate delle calotte nelle quali rimane divisa la sfera.

[*Q6 sup 2008*]

30.Si stabilisca per quali valori del parametro reale k esiste una piramide triangolare regolare tale che k sia il rapporto fra il suo apotema e lo spigolo di base. [*Q8 sup 2008*]

31.Considera la seguente proposizione: "Due piani α e β sono tra loro perpendicolari se e solo se ogni retta di α è perpendicolare ad ogni retta di β". Spiega se è vera o falsa, motivando adeguatamente la risposta. [*Q5 str 2008*]

32.Si trovi la capacità in litri della sfera inscritta in un cono di raggio di base 6 *dm* e altezza 9 *dm*.

[*Q6 Ame 2014*]

33.Si determini, se esiste, un cono circolare retto tale che il suo volume e la sua superficie totale abbiano lo stesso valore numerico. [*Q1 Eur 2014*]

34.Si spieghi perchè le facce di un poliedro regolare sono tutti triangoli, tutti quadrati o tutti pentagoni. [*Q6 Eur 2014*]

35.Per orientarsi sulla Terra si fa riferimento a *meridiani* e *paralleli*, a *latitudini* e *longitudini*. Supponendo che la Terra sia una sfera S e che l'asse di rotazione terrestre sia una retta r passante per il centro di S, come si può procedere per definire in termini geometrici meridiani e paralleli e introdurre un sistema di coordinate geografiche terrestri? [*Q10 PNI 2007*]

36.Si consideri la seguente proposizione: «Il luogo dei punti dello spazio equidistanti da due punti distinti è una retta». Si dica se è vera o falsa e si motivi esaurientemente la risposta.

[*Q6 sup 2007*]

37.Si consideri la seguente preposizione: "Una piramide è retta se la verticale calata dal vertice cade entro il poligono di base". Si dica se è vera o falsa e si motivi esaurientemente la risposta.

[*Q4 PNI str 2007*]

38.Si consideri una sfera di volume V e superficie S. Si dimostri che il tasso di variazione di V rispetto al raggio è uguale a S. [*Q3 Aus 2007*]

39.Dato un tetraedro regolare, si costruisca il tetraedro regolare avente per vertici i centri delle facce del primo. Si dimostri che ogni faccia di un tetraedro è parallela ad una faccia dell'altro. [*Q6 Aus 2007*]

40.Quando due rette si dicono sghembe? Come si definisce la distanza tra due rette sghembe? [*Q2 Ame 2007*]

41.Considera un cubo e l'ottaedro regolare avente per vertici i centri delle sue facce. Calcola il rapporto tra i loro volumi e il rapporto tra le loro aree. [*Q8 Eur 2007*]

42.I poliedri regolari - noti anche come solidi platonici - sono, a meno di similitudini, solo cinque: il tetraedro, il cubo, l'ottaedro, il dodecaedro e l'icosaedro. Sai dimostrarlo? [*Q2 PNI 2006*]

43.La capacità di un serbatoio è pari a quella del cubo inscritto in una sfera di un metro di diametro. Quanti sono, approssimativamente, i litri di liquido che può contenere il serbatoio? [*Q4 2006*]

44.Calcolare l'ampiezza dell'angolo diedro formato da due facce di un tetraedro regolare, espressa in gradi sessagesimali e approssimata al «primo». [*Q5 sup 2006*]

45.Una piramide quadrangolare regolare è tale che la sua altezza è il doppio dello spigolo di base. Calcolare il rapporto fra il volume del cubo inscritto nella piramide e il volume della piramide stessa. [*Q2 PNI str 2006*]

46.Si indichi con α l'angolo che una diagonale di un cubo forma con una faccia. La misura di α, espressa in radianti, è:

A. $arc\sin\sqrt{3}/3$; B. $arc\cos\sqrt{3}/6$; C. $arc\,tg\sqrt{6}/3$; D. un valore diverso.

Una sola alternativa è corretta: individuarla e fornire una spiegazione esauriente della scelta operata. [*Q3 Ame 2006*]

47.I centri delle facce di un cubo sono i vertici di un ottaedro. È un ottaedro regolare? Quale è il rapporto tra i volumi dei due solidi? [*Q8 2005*]

48.Una piramide ha per base il triangolo ABC, isoscele e rettangolo in A, ed ha per altezza il segmento AV . Inoltre la faccia V BC forma un angolo di 45° col piano della base e lo spigolo VB è lungo $2h\sqrt{3}$, dove h è una lunghezza nota. Calcolare la distanza del vertice A dal piano della faccia VBC e trovare per quale valore di *h* tale distanza vale $4\sqrt{2}$. Verificato che questo valore di *h* è 4, con riferimento ad esso secare la piramide con un piano parallelo alla base ABC e, proiettato ortogonalmente il triangolo sezione sulla base stessa, esprimere il volume del prisma triangolare così ottenuto in funzione della sua altezza *x*. [*P2 1994*]

49.Sono dati una piramide triangolare regolare e il prisma retto inscritto in essa in modo che una base sia la sezione della piramide con il piano equidistante dal suo vertice e dalla sua base.

A)Ammesso di conoscere il volume della piramide, dire se è possibile calcolare il volume del prisma e fornire una esauriente spiegazione della risposta.

B) Posto che lo spigolo della base ABC della piramide sia lungo 4 cm:

1) calcolare la misura dello spigolo della base MNP del prisma, complanare ad ABC;

2) supposto che gli spigoli AB e MN siano paralleli, riferire il piano dei triangoli ABC e MNP a un sistema di assi cartesiani avente l'origine in A e l'asse delle ascisse coincidente con la retta AB e trovare le coordinate dei vertici di tali triangoli;

3) determinare quindi l'equazione della parabola avente l'asse perpendicolare alla retta AB e passante per i punti A, B, M; verificare che passa pure per N;

4) dopo aver spiegato perché la trasformazione che muta il triangolo ABC nel triangolo MNP è una similitudine, trovarne le equazioni;

5) spiegare esaurientemente, col metodo preferito, com'è posizionata la circonferenza circoscritta al triangolo MNP rispetto al triangolo ABC. [*P1 PNI sup 2005*]

50.Siano AB, AC, AD tre spigoli di un cubo. Sapendo che uno spigolo è lungo s, calcolare la distanza del vertice A dal piano dei punti B, C, D. [*Q2 PNI sup 2005*]

51.Si considerino un tronco di piramide quadrangolare regolare, la cui base maggiore abbia area quadrupla della minore, e un piano α equidistante dalle basi del tronco. Dire se i dati sono sufficienti per calcolare il rapporto fra i volumi dei due tronchi in cui il tronco dato è diviso dal piano α. [*Q1 PNI str 2005*]

52.Una piramide ha la base quadrata e l'altezza uguale a 10cm. Quanti piani paralleli alla base dividono la piramide in due parti i cui volumi sono nel rapporto 7:3? Quali sono le distanze di tali piani dal vertice della piramide? [*Q3 Aus 2005*]

53.Si provi che la superficie totale di un cilindro equilatero sta alla superficie della sfera ad esso circoscritta come 3 sta a 4. [*Q2 PNI 2004*]

54.Descrivere tutte le isometrie dirette che mutano un tetraedro regolare in sé. [*Q7 PNI sup 2004*]

55.Una piramide ha per base il quadrato ABCD di lato lungo 7 cm. Anche l'altezza VH della piramide è lunga 7 cm e il suo piede H è il punto medio del lato AB. Condurre per la retta AB il piano α che formi con il piano della base della piramide un angolo ϕ tale che $\cos\phi = 3/5$ e indicare con EF la corda che il piano α intercetta sulla faccia VCD della piramide.

a) Spiegare perché il quadrilatero convesso ABEF è inscrivibile in una circonferenza γ.

b) Tale quadrilatero è anche circoscrivibile a una circonferenza?

c) Calcolare i volumi delle due parti in cui la piramide data è divisa dal piano α.

d) Dopo aver riferito il piano α a un conveniente sistema di assi cartesiani (Oxy), determinare l'equazione della circonferenza γ. [*P2 sup 2004*]

56. Calcolare l'ampiezza dell'angolo diedro formato da due facce consecutive di un ottaedro regolare, espressa in gradi sessagesimali e approssimata al secondo. [*Q1 PNI str 2004*]

57. Dimostrare che, se due piani sono perpendicolari, ogni retta perpendicolare a uno di essi è parallela all'altro o è contenuta in esso.

    Si può concludere che ogni retta parallela a uno dei due piani è perpendicolare all'altro? Fornire una esauriente spiegazione della risposta. [*Q2 PNI str 2004*]

58. Si consideri un tetraedro regolare T di vertici A, B, C, D e spigolo s.

    a) Indicati rispettivamente con V ed S il volume e l'area totale di T e con r il raggio della sfera inscritta in T, trovare una relazione che leghi V, S ed r.

    b) Considerato il tetraedro regolare T′ avente per vertici i centri delle facce di T, calcolare il rapporto fra le lunghezze degli spigoli di T e T′ e il rapporto fra i volumi di T e T′.

    c) Condotto il piano α, contenente la retta AB e perpendicolare alla retta CD nel punto E, calcolare la distanza di E dalla retta AB.

    d) Considerata nel piano α la parabola p avente l'asse perpendicolare alla retta AB e passante per i punti A, B ed E, riferire questo piano ad un conveniente sistema di assi cartesiani ortogonali e trovare l'equazione di p.

    e) Determinare per quale valore di s la regione piana delimitata dalla parabola p e dalla retta EA ha area $\sqrt{2}/3\,cm^2$. [*P1 2003*]

59. Dopo aver fornito la definizione di "rette sghembe", si consideri la seguente proposizione: «Comunque si prendano nello spazio tre rette x, y, z, due a due distinte, se x ed y sono sghembe e, così pure, se sono sghembe y e z allora anche x e z sono sghembe». Dire se è vera o falsa e fornire un'esauriente spiegazione della risposta. [*Q1 2003*]

60. Un piano interseca tutti gli spigoli laterali di una piramide quadrangolare regolare: descrivere le caratteristiche dei possibili quadrilateri sezione a seconda della posizione del piano rispetto alla piramide. [*Q2 2003*]

61. Nello spazio ordinario sono dati due piani α e β e una retta r. Si sa che r è parallela ad α e perpendicolare a β. Cosa si può concludere circa la posizione reciproca di α e β? Fornire un'esauriente spiegazione della risposta. [*Q2 PNI sup 2003*]

62. Nel cubo di vertici A, B, C, D, E, F, G, H le facce ABCD e EFGH sono opposte ed i segmenti AE, BF, CG sono spigoli. Inoltre gli spigoli del cubo hanno lunghezza unitaria.

    Sullo spigolo BF prendere un punto P tale che $BP = x$.

    Verificare che la distanza y di P dalla diagonale AG è espressa dalla seguente funzione:

$y=\sqrt{\frac{2}{3}(x^2-x+1)}$. [*P2 1995*]

63.È data una piramide retta a base quadrata. Seziona la piramide con un piano parallelo alla base e si indichino con a, b $a>b$ e h rispettivamente le misure degli spigoli delle basi e l'altezza del tronco che ne risulta. Esprimi in funzione di a, b, h il volume del tronco di piramide illustrando il ragionamento seguito. [*P2 sup 2003*]

64.Dare un esempio di un solido la cui superficie laterale è 24 π. [*Q3 sup 2003*]

65.Nell'insieme delle rette dello spazio si consideri la relazione così definita: «due rette si dicono parallele se sono complanari e non hanno punti comuni». Dire se è vero o falso che gode della proprietà transitiva e fornire un'esauriente spiegazione della risposta. [*Q1 PNI str 2003*]

66.Si considerino le lunghezze seguenti: $a+2x$; $a-x$; $2a-x$, dove a è una lunghezza nota non nulla ed x è una lunghezza incognita.

a) Determinare per quali valori di x le lunghezze date si possono considerare quelle dei lati di un triangolo non degenere.

c) Verificato che per $x=a/4$ i valori dati rappresentano le lunghezze dei lati di un triangolo, descriverne la costruzione geometrica con riga e compasso.

d) Indicato con ABC il triangolo di cui al precedente punto c, in modo che BC sia il lato maggiore, si conduca per A la retta perpendicolare al piano del triangolo e si prenda su di essa un punto D tale che AD sia lungo a: calcolare un valore approssimato a meno di un grado dell'ampiezza dell'angolo formato dai due piani DBC e ABC. [*P2 2002*]

67.Considerato il rettangolo ABCD, il cui lato AD è lungo 8a, dove a è una lunghezza nota, sia M il punto medio del lato AB. Sulla perpendicolare al piano del rettangolo condotta per M, prendere un punto V in modo che il piano del triangolo VCD formi col piano del rettangolo un angolo α tale che $tg\,\alpha=3/4$. Mostrare che la superficie laterale della piramide di vertice V e base ABCD è costituita da due triangoli rettangoli e da due triangoli isosceli. Sapendo che l'area di tale superficie laterale è $92\,a^2$, verifica che la lunghezza di AB è 5a. [*P3 1996*]

68.Due tetraedri regolari hanno rispettivamente aree totali A′ e A″ e volumi V′ e V″.
Si sa che $A'/A''=2$. Calcolare il valore del rapporto V'/V'' . [*Q2 2002*]

69.Una piramide di vertice V, avente per base il trapezio rettangolo ABCD, è tale che:

– il trapezio di base è circoscritto a un semicerchio avente come diametro il lato AB perpendicolare alle basi del trapezio;

– lo spigolo VAè perpendicolare al piano di base della piramide;

– la faccia VBC della piramide forma un angolo di 45° con il piano della base.

a) Indicato con E il punto medio del segmento AB, dimostrare che il triangolo CED è rettangolo.

b) Sapendo che l'altezza della piramide è lunga $2a$, dove a è una lunghezza assegnata, e che $BC=2\,AD$, calcolare l'area e il perimetro del trapezio ABCD. [*P2 sup 2002*]

70.Dato un tetraedro regolare, si consideri il quadrilatero avente per vertici i punti medi degli spigoli di due facce. Dimostrare che si tratta di un quadrato. [*Q9 sup 2002*]

71.Di due rette a, b – assegnate nello spazio ordinario – si sa soltanto che entrambe sono perpendicolari a una stessa retta p.

a) È possibile che le rette a, b siano parallele?

b) È possibile che le rette a, b siano ortogonali?

c) Le rette a, b sono comunque parallele?

d) Le rette a, b sono comunque ortogonali?

Per ciascuna delle quattro domande motivare la relativa risposta. [*Q10 sup 2002*]

72.Una piramide si dice retta:

A) se gli spigoli che concorrono nel suo vertice propriamente detto sono due a due perpendicolari;

B) se almeno un angolo del poligono di base è retto;

C) se l'altezza è perpendicolare alla base;

D) per una ragione diversa dalle precedenti.

Una sola risposta è corretta: individuarla. [*Q1 Lat sup 2002*]

73.Calcolare il volume di un ottaedro regolare, conoscendo la lunghezza s di un suo spigolo.

[*Q2 Lat sup 2002*]

74.Si consideri il cubo di spigoli AA′, BB′, CC′, DD′ in cui due facce opposte sono i quadrati ABCD e A′B′D′C′. Sia E il punto medio dello spigolo AB. I piani ACC′ e D′DE dividono il cubo in quattro parti. Dimostrare che la parte più estesa è il quintuplo di quella meno estesa.

[*Q3 2001*]

75.Un tronco di piramide ha basi di aree B e b ed altezza h. Dimostrare, col metodo preferito, che il suo volume è espresso dalla seguente formula: $V=\frac{1}{3}h\left(B+\sqrt{Bb}+b\right)$.

In ogni caso esplicitare ciò che si ammette ai fini della dimostrazione. [*Q4 2001*]

76.Di due rette a,b dello spazio ordinario si sa soltanto che sono perpendicolari ad una stessa retta c. Elencare tutte le possibili posizioni reciproche delle rette a,b. [*Q2 Lat 2001*]

77.Sia T il tetraedro regolare di lato 1,20 m.

1. Si calcoli il volume, espresso come capacità in litri, di T.

2. Quanti piani paralleli alla base dividono T in due parti i cui volumi sono nel rapporto 2:3? Quali sono le distanze di tali piani dal vertice di T? [*P2 Eur 2006*]

78. Nello spazio si considerino tre rette *a*, *b*, *c*, comunque scelte ma alle seguenti condizioni: la retta *a* è strettamente parallela alla retta *b* e la retta *b* è strettamente parallela alla retta *c*.

Si può concludere che le rette *a*, *c* non hanno punti in comune? Fornire una esauriente motivazione della risposta. [*Q1 Bor 2005*]

79. Un piano γ interseca i due piani α e β, paralleli in senso stretto, rispettivamente secondo le rette *a* e *b*. Si può concludere qualcosa circa le posizioni reciproche di queste due rette?

Fornire esaurienti spiegazioni della risposta. [*Q2 Bor 2005*]

80. Calcolare l'ampiezza dell'angolo diedro formato da due facce consecutive di un tetraedro regolare, misurata in gradi sessagesimali e approssimata al secondo. [*Q4 Eur 2004*]

81. La retta *r* è perpendicolare nel vertice A al piano del quadrato ABCD. Indicato con E un qualsiasi punto di *r*, distinto da A, dimostrare che le facce laterali della piramide di vertice E e base ABCD sono triangoli rettangoli, a due a due congruenti. [*Q5 Eur 2004*]

82. Una piramide è divisa da un piano parallelo alla base in due parti: una piramide e un tronco di piramide. Il piano sezione divide l'altezza della piramide in due parti, di cui quella che contiene il vertice della piramide è doppia dell'altra. Stabilire se i dati sono o no sufficienti per calcolare il rapporto fra il volume della piramide recisa e quello del tronco di piramide. [*Q2 Spe 2002*]

83. Calcolare il rapporto tra la superficie totale di un cilindro equilatero e la superficie della sfera ad esso circoscritta. [*Q8 PNI sup 2001*]

84. Una piramide retta, di vertice V, ha per base il triangolo ABC, rettangolo in A, la cui area è $24a^2$, dove *a* è una lunghezza assegnata.

Si sa inoltre che $\frac{AB}{BC}=\frac{3}{5}$ e che il piano della faccia VAB della piramide forma con il piano della base ABC un angolo f tale che $sen\phi=12/13$.

a) Calcolare l'altezza della piramide.

b) Controllato che essa è $24/5a$, calcolare la distanza del vertice C dal piano della faccia VAB. [*P2 sup 2001*]

85. Si consideri il cubo di spigoli AA′, BB′, CC′, DD′, in cui due facce opposte sono i quadrati ABCD e A′B′C′D′. Indicato con E il punto medio dello spigolo AB, sia CF la retta perpendicolare a DE condotta per C. I piani D′DE e C′CF dividono il cubo in quattro parti. Calcolare a quale frazione del cubo equivale ciascuna di esse. [*Q2 sup 2001*]

86. Esprimere in funzione dello spigolo *s* l'altezza di un tetraedro regolare. [*Q1 Spe sup 2002*]

87. Una piramide di vertice V ha per base il triangolo ABC rettangolo in B. Lo spigolo VA è perpendicolare al piano della base e il piano della faccia VBC forma con lo stesso piano di base un angolo di 60°. Inoltre lo spigolo BC è lungo $5/2a$, dove a è una lunghezza data, e il

volume della piramide è uguale a $5/\sqrt{3}a^3$.

(a) Calcolare la lunghezza dello spigolo VA.

(b) Controllato che essa è $2a\sqrt{3}$, calcolare la distanza del vertice B dal piano della faccia VAC. [*P2 Lat 2001*]

88. Nel triangolo ABC, rettangolo in A, si ha: $AB=2AC$, $BC=a$, essendo a una lunghezza nota.

i. Stabilire se la bisettrice AD e la mediana CE del triangolo sono perpendicolari o no e darne esauriente spiegazione.

ii. Dopo aver riferito il piano del triangolo ABC ad un conveniente sistema di assi cartesiani, trovare le coordinate dei punti A,B,C e del punto in cui si secano le rette AD e CE.

iii. Preso un punto F sulla retta condotta per E perpendicolarmente al piano del triangolo ABC in modo che sia $EF=4/\sqrt{5}$, calcolare la distanza del punto A dal piano BCF.

iv. Dell'angolo formato dai due piani BCF e ABC calcolare l'ampiezza espressa in gradi sessagesimali e approssimata a meno di un grado. [*P1 Mag PNI 2001*]

89. Il rettangolo ABCD è tale che la retta che congiunge i punti medi dei suoi lati più lunghi, AB e CD, lo divide in due rettangoli simili a quello dato. Tali lati hanno lunghezza assegnata a.

a. Determinare la lunghezza dei lati minori del rettangolo.

b. Sulla retta condotta perpendicolarmente al piano del rettangolo nel punto medio del lato AD prendere un punto V in modo che il piano dei punti V, B, C formi col piano del rettangolo dato un angolo di coseno $2/\sqrt{13}$.

Calcolare il volume della piramide di vertice V e base ABCD.

c. Condotto il piano α parallelo al piano della faccia VAD della piramide, ad una distanza x da questo, in modo però che α sechi la piramide stessa, esprimere in funzione di x l'area del poligono sezione.

d. Calcolare infine i volumi delle due parti in cui il piano α divide la piramide nel caso in cui $x=a/2$. [*P2 2000*]

90. Dato il rettangolo ABCD, il cui lato AB è lungo a, conduci per B la perpendicolare alla retta AC e chiama H ed E i punti in cui essa seca le rette AC e AD nell'ordine. Conduci quindi per H la perpendicolare al piano della figura, e su di essa prendi un punto P tale che $HP=6AE$.

Esprimi il volume della piramide, avente per vertice P e per base il quadrilatero HDEC, in funzione della lunghezza x del segmento BH. [*P2 PNI sup 2000*]

91. In un piano α è assegnato il triangolo ABC, retto in B, i cui cateti AB e BC misurano rispettivamente 4 e 3. Conduci per il punto A la perpendicolare al piano α e sia V un punto di questa per cui VA=AB.

a. dimostra, geometricamente o algebricamente, che, come tutte le altre facce del tetraedro VABC, anche la faccia VBC è un triangolo rettangolo, il cui angolo retto è $V\hat{B}C$;

b. calcola il volume e la superficie totale del tetraedro;

c. detto M il punto medio di VA e P un punto dello stesso segmento a distanza x da V, esprimi in funzione di x il volume del tetraedro MPQR, essendo Q ed R le rispettive intersezioni degli spigoli VB e VC con il piano β parallelo ad α e passante per P. [*P2 PNI 1999*]

92. Sia S una semisfera di centro O e raggio 1 e Γ la sua circonferenza massima. sulla semiretta di origine O perpendicolare al piano di Γ e che interseca S, considera il punto B tale che $OB=\sqrt{3}$.

a. Individua il punto C del segmento OB che sia il centro dell'ulteriore cerchio di intersezione di S con il cono Σ di base Γ e vertice B;

b. detto P un punto del segmento OC la cui distanza da O sia x, scrivi in funzione di x i volumi dei coni di vertice O e di base rispettivamente i cerchi Γ_1 e Γ_2 ottenuti dall'intersezione con S e con Σ del piano per P, perpendicolare ad OC;

c. considerata la corona circolare W delimitata da Γ_1 e Γ_2, determina il volume del solido delimitato da W e dalle superfici laterali dei coni anzidetti. [*P2 sup 1998*]

93. Considera in un piano α un rettangolo ABCD i cui lati BC e AB misurano rispettivamente a e $2a$. Sia AEF, con $E\in AB$ ed $F\in CD$, un triangolo isoscele la cui base AE misura $2r$.

a. dimostra che una retta s parallela ad AB, a distanza x da essa, interseca i triangoli AEF e AEC secondo segmenti uguali;

b. detta C_1 la circonferenza di diametro AE e appartenente al piano γ passante per AB e perpendicolare ad α, e detti T_1 e T_2 i coni di base C_1 e vertici rispettivamente nei punti F e C, dimostra che le sezioni C_1' e C_2' di detti coni con il piano γ' passante per la retta s e parallelo al piano γ sono circonferenze;

d. determina, per via sintetica o analitica, il valore di x per il quale C_1' e C_2' sono tangenti esternamente. [*P3 PNI 1997*]

94. Dato un trapezio rettangolo ABCD avente altezza $AD=1$ e basi $AB=2$ e $CD=x$, determina il volume del parallelepipedo retto a base quadrata il cui lato di base sia uguale al lato obliquo BC del trapezio e la cui altezza sia uguale alla base CD del trapezio stesso. Esprimi in funzione di x il lato del cubo avente lo stesso volume del parallelepipedo. [*P2 PNI sup 1997*]