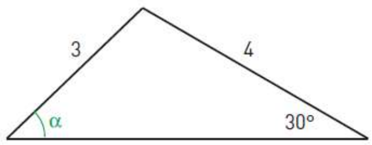
<u>Trigonometria</u> - Quesiti esame di stato

1. Nel triangolo disegnato a lato, qual è la misura, in gradi e primi sessagesimali, di α? [*Q1 PNI 2014*]



2. Un triangolo ha area 3 e due lati che misurano 2 e 3. Qual è la misura del terzo lato? Si giustifichi la risposta. [*Q1 ord e PNI 2013*]
3. E' dato un angolo retto $X\hat{O}Y$ e sulla sua bisettrice un punto P, tale che $P\hat{A}O=2\,P\hat{B}O$, essendo A e B punti rispettivamente di OX e OY.

   Posto $P\hat{B}O=\alpha$, si calcoli il rapporto $\overline{OA}/\overline{OB}$ e lo si esprima in funzione di $x=\tan\alpha$, controllando che risulti: $f(x)=\dfrac{-x^2+2x+1}{2(x+1)}$. [*P1 PNI sup 2013*]
4. Un aereo civile viaggia in volo orizzontale con velocità costante lungo una rotta che lo porta a sorvolare Venezia. Da uno squarcio nelle nuvole il comandante vede le luci della città con un angolo di depressione di 7°. Tre minuti più tardi ricompaiono nuovamente le luci, questa volta però l'angolo di depressione misurato è di 13°. Quanti minuti saranno ancora necessari perché l'aereo venga a trovarsi esattamente sopra la città? [*Q5 PNI sup 2013*]
5. Data la circonferenza di equazione $x^2+y^2=16$, si calcoli la lunghezza dell'arco compreso tra i punti $A(2\sqrt{3},2)$ e $B(2,2\sqrt{3})$. Si scelga poi a caso un punto sulla circonferenza: si determini la probabilità che tale punto giaccia sull'arco AB. [*Q10 PNI sup 2013*]
6. Sia ABC un triangolo equilatero di lato *a*. Dal vertice A, e internamente al triangolo, si conduca una retta *r*, che forma l'angolo α con il lato AB, e siano B' e C', rispettivamente, le proiezioni ortogonali su *r* dei vertici B e C.

   Calcola il rapporto: $\dfrac{BB'^2+CC'^2}{a^2}$, ed esprimilo in funzione di $x=\tan\alpha$.

   Controlla che risulti $f(x)=\dfrac{5x^2-2\sqrt{3}x+3}{4(x^2+1)}$. [*P1 sup 2013*]
7. Del trapezio ABCD si hanno le seguenti informazioni: la base maggiore AB e la base minore DC misurano rispettivamente 4 m e 1 m, l'altezza del trapezio misura 3 m e la tangente dell'angolo $B\hat{A}D$ è uguale a 2/3.

   1. Si calcolino le aree dei quattro triangoli in cui il trapezio è diviso da una sua diagonale e dai segmenti che uniscono il punto medio di questa con gli estremi dell'altra diagonale.

   2. Si determinino, con l'aiuto di una calcolatrice, le misure, in gradi e primi sessagesimali, degli angoli del trapezio. [*P2 sup 2013*]
8. In un libro si legge: "La definizione classica di misura di un angolo per mezzo della lunghezza di

un arco di cerchio è essenzialmente corretta". Si spieghi, eventualmente con qualche esempio, il significato di tale affermazione. [*Q2 Ame 2013*]

9. Un trapezio isoscele è circoscritto ad una semicirconferenza di raggio 1, in modo che la base maggiore contenga il diametro.
   Si calcoli, in funzione dell'ampiezza x del suo angolo acuto, l'area della superficie del trapezio, controllando che risulti: $S(x)=\frac{2-\cos x}{sen\, x}$. [*P1 PNI sup 2012*]
10. Mentre corre con una velocità costante attraverso il deserto, montando il suo fido cammello, un capo tuareg vede la cima di una grande palma e dirige direttamente verso di essa. Al primo avvistamento la cima della palma si presentava con un angolo di elevazione di 4°; venti minuti più tardi l'angolo di elevazione misura 9°. Quanti minuti sono ancora necessari al tuareg per raggiungere l'albero? [*Q5 PNI sup 2012*]
11. La sezione trasversale di un canale di irrigazione ha la forma di un trapezio isoscele con la base maggiore in alto. Sia la base minore che i due lati obliqui misurano 2 metri.
    Se x è l'angolo acuto del trapezio, si dimostri che l'area della sezione trasversale del canale è: $A(x)=4\, sen\, x(1+\cos x)$. [*P1 PNI str 2012*]
12. Alcuni ingegneri si propongono di costruire una galleria rettilinea che colleghi il paese A, situato su un versante di una collina, col paese B, che si trova sul versante opposto. Da una terza località C i progettisti misurano le distanze CA=837 metri, CB=1764 metri e l'angolo $A\hat{C}B=44{,}5°$.
    Si calcoli quale sarà lunghezza della galleria. [*Q1 PNI str 2012*]
13. Un trapezio isoscele è circoscritto ad una semicirconferenza di raggio 1, in modo che la base maggiore contenga il diametro.
    Si calcoli, in funzione dell'ampiezza x del suo angolo acuto, il volume del solido generato dal trapezio in una rotazione di 180° intorno alla congiungente dei punti medi delle basi.
    Controlla che risulti: $V(x)=\frac{\pi}{3}\frac{\cos^2 x-3\cos x+3}{sen^2 x}$. [*P1 sup 2012*]
14. Il triangolo ABC, rettangolo in A, ha l'ipotenusa $BC=2a$; sia P il punto medio di AC, Q la sua proiezione ortogonale su BC e $A\hat{B}C=\alpha$.
    Si calcoli il rapporto: $f(x)=\frac{PQ+QC}{BQ}$ e lo si esprima in funzione di $x=\tan\alpha$.
    Controlla che risulti: $f(x)=\frac{x^2+x}{x^2+2}$. [*P1 str 2012*]
15. Si dimostri che il teorema di Pitagora è un caso particolare del teorema di Carnot.
    [*Q10 str 2012*]
16. E' dato un quadrato ABCD di lato $AB=a$. Da A si conduca una semiretta, che incontra il lato

BC in E e il prolungamento del lato DC in F.

Si calcoli il rapporto: $f(x)=\dfrac{BE+DF}{AB}$ in funzione di $x=B\hat{A}E$.

Controlla che risulti: $f(x)=\tan x+\cot x$. [*P1 PNI sup 2011*]

17. Si sa che certi uccelli, durante la migrazione, volano ad un'altezza media di 260 metri. Un'ornitologa osserva uno stormo di questi volatili, mentre si allontana da lei in linea retta, con un angolo di elevazione di 30°. Se un minuto più tardi tale angolo si è ridotto a 20°, con che velocità si stanno spostando gli uccelli? [*Q1 PNI sup 2011*]

18. Data una semicirconferenza di diametro $AB=2$, si prenda su di essa un punto P e sia M la proiezione di P sulla retta perpendicolare in B ad AB.

    Si esprima la somma $AP+PM$ in funzione di $x=P\hat{A}B$. [*P1 sup 2011*]

19. In una semicirconferenza di diametro AB di lunghezza 2, è inscritto un quadrilatero convesso ABCD avente il lato CD uguale al raggio. I prolungamenti dei lati AD e BC si incontrano in un punto E.

    1. Si dimostri che, qualunque sia la posizione dei punti C e D sulla semicirconferenza, si ha: $D\hat{A}C=D\hat{B}C=\pi/6$ e $A\hat{E}B=\pi/3$.
    2. Se $x=D\hat{A}B$, si provi che la somma CE+DE in funzione di *x* è data da: $f(x)=\cos x+\sqrt{3}\,sen\,x$. Quale è l'intervallo di variabilità della *x*? Quale il valore massimo assunto da CE+DE?
    3. Posto $g(x)=k\,sen(x+\phi)$, si trovino *k* e ϕ di modo che $g(x)=f(x)$.
    4. Traccia, a prescindere dai limiti geometrici, il grafico di $f(x)$. [*P2 Ame 2011*]

20. Angelo siede in un punto A della piazza del suo paese e vi osserva un albero in B, una fontana in F e un lampione in L. Stima l'ampiezza dell'angolo sotto cui vede la congiungente B e F pari a 30° e l'ampiezza dell'angolo sotto cui vede FL pari a 45°. Sapendo che $BF=12\,m$, $FL=20\,m$ e che $B\hat{F}L=155°$, spiega ad Angelo come procedere per calcolare AB, AF e AL. Sono attendibili i risultati $AB=AF\simeq 23{,}18\,m$ e $AL\simeq 27{,}85\,m$? [*Q2 Ame 2011*]

21. Si dimostri che, in un triangolo, il rapporto tra ciascun lato e il seno dell'angolo ad esso opposto è uguale al diametro del cerchio circoscritto al triangolo. [*Q7 Ame 2011*]

22. In una circonferenza di centro O e raggio *r* sono date due corde prive di punti comuni $AB=r$ e $CD=r\sqrt{3}$. Si dimostri che il quadrilatero ABCD ha le diagonali perpendicolari.

    [*Q5 Eur 2011*]

23. Si provi che non esiste un triangolo ABC, con AB=3, AC=2 e $A\hat{B}C=45°$. Si provi altresì che se AB=3, AC=2 e $A\hat{B}C=30°$, allora esistono due triangoli che soddisfano queste condizioni.

    [*Q9 PNI 2010*]

24. In cima ad una roccia a picco sulla riva di un fiume è stata costruita una torretta d'osservazione alta 11 metri. Le ampiezze degli angoli di depressione per un punto situato sulla riva opposta del fiume, misurate rispettivamente dalla base e dalla sommità della torretta, sono pari a 18° e 24°. Si determini la larghezza del fiume in quel punto. [*Q1 PNI sup 2010*]

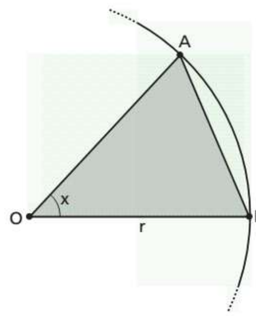
25. Data una circonferenza di centro O e raggio unitario, si prendano su di essa tre punti A, B, C, tali che AB = BC. Si calcoli, in funzione dell'angolo AÔB = x, la quantità: $AB^2+BC^2+CA^2$, controllando che risulti: $f(x)=-4\cos^2 x-4\cos x+8$. [*P1 sup 2010*]

26. Data una semicirconferenza di centro O e diametro $AB=2$, indica con t la tangente parallela al diametro. Prolunga i raggi OA e OB di due segmenti uguali AP e BQ e dai punti P e Q conduci le tangenti alla semicirconferenza, che intersecano la retta t rispettivamente nei punti M ed N. Ponendo $M\hat{P}H=x$, dimostra che l'area del solido generato in una rotazione completa del trapezio PQMN attorno alla retta PQ è: $S(x)=2\pi\dfrac{3-2\cos x}{sen\, x}$. [*P1 PNI str 2010*]

27. Due osservatori si trovano ai lati opposti di un grattacielo, a livello del suolo. La cima dell'edificio dista 1600 metri dal primo osservatore, che la vede con un angolo di elevazione di 15°. Se il secondo osservatore si trova a 650 metri dalla cima del grattacielo, qual è la distanza tra i due osservatori? [*Q1 PNI str 2010*]

28. In un triangolo ABC, l'angolo $\hat{B}$ è doppio dell'angolo $\hat{C}$ e inoltre è $BC=a$.
Dette BH e CL, rispettivamente, le altezze del triangolo uscenti dai vertici B e C, si calcoli il rapporto: $\dfrac{BH^2+CL^2}{a^2}$ espresso in funzione di $x=A\hat{B}C$. [*P1 str 2010*]

29. È assegnato il settore circolare AOB di raggio r e ampiezza x (r e x sono misurati, rispettivamente, in metri e radianti). Si provi che l'area S compresa fra l'arco e la corda AB è espressa, in funzione di x, da:
$S(x)=1/2\, r^2(x-sen\, x)$ con $x\in[0,2\pi]$. [*P1 2009*]



30. Le lunghezze dei lati di un triangolo sono numeri interi consecutivi e l'angolo di maggiore ampiezza è il doppio di quello di ampiezza minore. Calcola la lunghezza del lato minore e il coseno dell'angolo minore. [*Q8 PNI sup 2009*]

31. Un turista, che osserva un lago scozzese dalla cima di un fiordo alto 100 metri, vede spuntare la testa di un mostro acquatico in un punto per il quale misura un angolo di depressione di 18,45°. Il mostro, che nuota in linea retta allontanandosi dall'osservatore, si immerge, per riemergere cinque minuti più tardi in un punto per cui l'angolo di depressione vale 14,05°. Con che velocità, in metri all'ora, sta nuotando il mostro? [*Q10 PNI sup 2009*]

32. I due segmenti adiacenti OA, AB sono uguali ed hanno una lunghezza data a. Nel medesimo

semipiano rispetto alla retta OB si descrivano due semicirconferenze di diametri rispettivi OA ed OB, e per il punto O si conduca la semiretta tangente comune, sulla quale si prenda il segmento $OC=a$. Con origine O, si conduca una semiretta, che forma con OB un angolo α e interseca in P e Q le semicirconferenze.

Si calcoli il rapporto: $\frac{CP^2+PQ^2+QC^2}{2a^2}$ e lo si esprima in funzione di $x=\tan\alpha$.

Controlla che risulti: $f(x)=\frac{x^2-3x+4}{x^2+1}$. [*P1 sup 2009*]

33. Il comandante di una nave decide di raggiungere il porto B partendo dal punto A e seguendo un percorso rettilineo. A causa di un errore, però, la nave inizia la sua navigazione lungo una rotta leggermente diversa da quella prevista. Dopo 5 ore ci si accorge dello sbaglio e il comandante ordina di virare di un angolo di 23° in modo da dirigere ora esattamente verso il porto B, che viene raggiunto dopo 3 ore. Se l'imbarcazione ha mantenuto sempre una velocità costante, quanto tempo si è perso a causa dell'errore? [*Q7 sup 2009*]

34. Data la semicirconferenza di centro O e diametro $AB=2r$, si prenda su di essa un punto P e si tracci il raggio OQ parallelo ad AP.

Posto $P\hat{A}B=\alpha$, calcoli il rapporto: $\frac{AP+PQ}{QB+BA}$ e lo si esprima in funzione di $x=sen\,\alpha/2$.

Controlla che risulti: $f(x)=\frac{-2x^2+x+1}{x+1}$. [*P1 PNI str 2013*]

35. Un ufficiale della guardia di finanza, in servizio lungo un tratto rettilineo di costa, avvista una motobarca di contrabbandieri che dirige in linea retta, perpendicolarmente alla costa, verso un vecchio faro abbandonato. L'angolo tra la direzione della costa e il raggio visivo dell'ufficiale che guarda la motobarca è di 34,6°; il natante si trova a 6 miglia marine dal faro e si muove con una velocità di 18 nodi (miglia marine all'ora). L'ufficiale ordina di salire immediatamente in macchina, in modo da raggiungere il faro, percorrendo una strada parallela alla spiaggia, 10 minuti prima che vi approdino i contrabbandieri, per coglierli con le mani nel sacco. A che velocità media, in km/h, deve muoversi l'automezzo della guardia di finanza per arrivare nei tempi previsti? (Un miglio marino = 1853,182 m). [*Q1 PNI str 2013*]

36. I lati di un parallelepipedo rettangolo misurano 8, 9, e 12 cm. Si calcoli, in gradi e primi sessagesimali, l'ampiezza dell'angolo che la diagonale mandata da un vertice descrive con ciascuno dei tre spigoli concorrenti al vertice. [*Q6 PNI 2008*]

37. E' dato un cerchio di raggio *r* ed una sua corda AB uguale al lato del quadrato in esso inscritto. Chiama P un generico punto della circonferenza, giacente sull'arco maggiore di estremi A e B.

Esprimi il rapporto: $\frac{PA^2+PB^2}{AB^2}$ in funzione di $x=\tan P\hat{A}B$. [*P1 PNI sup 2008*]

38. Dato un quadrante AOB di cerchio, di centro O e raggio 2, si consideri sull'arco AB un punto P. Si esprima in funzione di $t=tg(x/2)$ (con $x=B\hat{O}P$) l'area del quadrilatero OMPN, essendo M ed N i punti medi dei raggi OA e OB. [*P1 sup 2008*]

39. Un segmento AB di lunghezza costante *a* scorre con i suoi estremi sopra due rette ortogonali fisse *x*, *y*. Dimostra che un punto qualsiasi P del segmento descrive una ellisse avente gli assi sopra *x*, *y*. Che cosa succede se P è il punto medio di AB? [*Q10 PNI str 2008*]

40. Una strada rettilinea in salita supera un dislivello di 150 m con un percorso di 3 km. Quale è la sua inclinazione? [*Q1 Ame 2008*]

41. Le misure dei lati di un triangolo sono 10, 24 e 26 cm. Si calcolino, con l'aiuto di una calcolatrice, le ampiezze degli angoli del triangolo approssimandole in gradi e primi sessagesimali. (*Quesito proposto numerose volte, cambiando solo le misure dei lati del triangolo*) [*Q1 Aus 2008*]

42. La circonferenza γ passa per B (0, -4) ed è tangente in O (0, 0) alla retta di coefficiente angolare –4; la parabola λ passa per A(4, 0) ed è tangente in O a γ.
Si disegnino γ e λ e se ne determinino le rispettive equazioni cartesiane.
Sia α l'angolo sotto cui è visto il segmento OB da un punto dell'arco di γ appartenente al quarto quadrante. Si dia una misura di α approssimandola in gradi e primi. [*P1 Eur 2008*]

43. Le misure dei lati di un triangolo sono 12, 16 e 20 cm. Si calcolino, con l'aiuto di una calcolatrice, le ampiezze degli angoli del triangolo approssimandole in gradi e primi sessagesimali. [*Q2 Eur 2008*]

44. Un osservatore posto sulla riva di un lago a 236 m sopra il livello dell'acqua, vede un aereo sotto un angolo di elevazione α di 42,4° e la sua immagine riflessa sull'acqua sotto un angolo di depressione β di 46,5°. Si trovi l'altezza dell'aereo rispetto all'osservatore. [*Q5 PNI sup 2014*]

45. Sono dati un quarto di cerchio AOB e la tangente *t* ad esso in A. Dal punto O si mandi una semiretta che intersechi l'arco AB e la tangente *t*, rispettivamente, in M ed N.
Posto $A\hat{O}M=\alpha$, si calcoli il rapporto MN/MA e lo si esprima in funzione di $x=sen\,\alpha/2$.
Controlla che risulti: $f(x)=\frac{x}{1-2x^2}$. [*P1 sup 2014*]

46. I lati di un triangolo rettangolo misurano *k* , 2*k* 2 e $\sqrt{5}k$, essendo *k* un numero reale positivo.
1. Si calcoli, in gradi e primi sessagesimali, l'ampiezza degli angoli acuti del triangolo. Si determini *k* in modo che l'altezza relativa all'ipotenusa abbia lunghezza uguale a 2 e si determinino le misure delle proiezioni dei due cateti sull'ipotenusa.

2. Una retta parallela all'ipotenusa, avente distanza x dal vertice dell'angolo retto, divide il triangolo in un triangolo T e un quadrilatero Q.

Si mostri che il rapporto tra l'area di T e l'area di Q, in funzione di x, è uguale a:

$f(x)=\dfrac{x^2}{4-x^2}$. [*P2 Ame 2014*]

47.Si calcolino, con l'aiuto di una calcolatrice, le ampiezze, in gradi e primi sessagesimali, degli angoli di un triangolo i cui lati misurano 10, 24 e 26 decimetri. [*Q7 Eur 2014*]

48.Si considerino i triangoli la cui base è AB=1 e il cui vertice C varia in modo che l'angolo $C\hat{A}B$ si mantenga doppio dell'angolo $A\hat{B}C$.

1. Riferito il piano ad un conveniente sistema di coordinate, si determini l'equazione del luogo geometrico γ descritto da C.

2. Si rappresenti γ, tenendo conto delle prescritte condizioni geometriche.

4. Si provi che se $A\hat{B}C=36°$ allora è $AC=\dfrac{\sqrt{5}-1}{2}$. [*P2 PNI 2007*]

49.Si consideri un cerchio C di raggio *r*.

2. Si denoti con S_n l'area del poligono regolare di *n* lati inscritto in C.

Si dimostri che $S_n=\dfrac{n}{2}r^2 sen\dfrac{2\pi}{n}$ e si trovi un'analoga espressione per l'area del poligono regolare di *n* lati circoscritto a C. [*P2 2007*]

50.Si consideri la seguente proposizione: «In ogni triangolo isoscele la somma delle distanze di un punto della base dai due lati uguali è costante». Si dica se è vera o falsa e si motivi esaurientemente la risposta. [*Q4 PNI sup 2007*]

51.Data una semicirconferenza di diametro $AB=2r$, si prenda sul prolungamento di AB, dalla parte di B, un punto C tale che sia BC = AB.

Essendo P un punto della semicirconferenza, si esprima per mezzo di *r* e dell'ampiezza dell'angolo $x=A\hat{P}B$ il rapporto $y=\dfrac{CP^2}{AP\cdot PB}$. [*P2 PNI str 2007*]

52.È dato il triangolo ABC in cui: $AB=25/2$, $AC=5\sqrt{5}$, $tg\,\hat{A}=2$.

Determinare l'altezza del triangolo relativa al lato AB e tracciare la circonferenza *k* avente centro in C e tangente al lato AB.

Dopo aver riferito il piano della figura ad un conveniente sistema di assi cartesiani ortogonali, in modo, però, che uno degli assi di riferimento sia parallelo alla retta AB:

a) scrivere l'equazione della circonferenza *k*;

b) trovare le coordinate dei vertici del triangolo e del punto D in cui la circonferenza *k* interseca il segmento BC;

c) determinare l'equazione della parabola *p*, avente l'asse perpendicolare alla retta AB, tangente in D alla circonferenza *k* e passante per A;

e) trova le coordinate dei punti comuni alla circonferenza *k* ed alla parabola *p*.

(*I calcoli dei punti c, e sono estremamente laboriosi*). [*P1 PNI str 2006*]

53. È assegnato un pentagono regolare di lato lungo L. Recidendo opportunamente, in esso, cinque triangoli congruenti, si ottiene un decagono regolare: calcolarne la lunghezza del lato. (Si lascino indicate le funzioni goniometriche degli angoli coinvolti). [*Q1 PNI str 2006*]

54. Si consideri la seguente proposizione: "Condizione necessaria e sufficiente affinché due triangoli siano congruenti è che abbiano due lati congruenti e i seni degli angoli fra essi compresi uguali". Dire se è vera o falsa e spiegare in modo esauriente la risposta data. [*Q2 Ame 2006*]

55. Il triangolo ABC, rettangolo in C, ha l'altezza relativa all'ipotenusa uguale a 1. Posto $x = C\hat{A}B$ e $t = tg\, x/2$, esprimi il perimetro del triangolo in funzione di *t*.

[*P1 Aus sup 2006*]

56. Si dimostri che il lato del decagono regolare inscritto in un cerchio è sezione aurea del raggio e si utilizzi il risultato per calcolare sen 18°, sen 36°. [*Q1 PNI 2005*]

57. Considerato un triangolo ABC, acutangolo e isoscele sulla base BC, si chiami D il piede della sua altezza condotta per C e si costruisca, dalla stessa parte di A rispetto a BC, il punto E in modo che il triangolo ECD sia simile ad ABC.

a) Dimostrare che:

1) EC è perpendicolare a CB;

2) i triangoli EFC e AFD – dove F è il punto comune ai segmenti ED e AC – sono simili e, di conseguenza, anche i triangoli EFA e CFD sono simili e gli angoli $A\hat{E}F$ e $F\hat{C}D$ sono congruenti;

3) EA è parallela a CB;

4) il quadrilatero AECD è inscrivibile in una circonferenza.

b) Ammesso che le misure di BC e CD, rispetto a un'assegnata unità di misura, siano 6 e 24/5, dopo aver riferito il piano della figura a un conveniente sistema di assi cartesiani, determinare il seno e il coseno dell'angolo $B\hat{C}D$. [*P1 PNI str 2005*]

58. Sia ABC un qualsiasi triangolo. Sui suoi lati ed esternamente a esso si costruiscano i tre quadrati ABDE, BCFG e CAHL. Dimostrare, col metodo preferito, che i triangoli AHE, BDG e CFL sono equivalenti al triangolo ABC. [*Q2 PNI str 2005*]

59. Il triangolo ABC ha il lato BC che è il doppio di CA di lunghezza *k*, mentre il triangolo rettangolo ABD, con D dalla parte opposta di C rispetto ad AB, ha il cateto AB che è il doppio di BD. Esprimi l'area del quadrilatero ADBC in funzione dell'angolo ACB. [*P2 Aus 2005*]

60. Due lati di un triangolo misurano a e b. Determina il terzo lato in modo che l'area sia massima. [*Q5 Aus 2005*]

61. Spiega come utilizzeresti il teorema di Carnot per trovare la distanza tra due punti accessibili ma separati da un ostacolo. [*Q7 Aus 2005*]

62. Data una circonferenza γ di raggio unitario e centro O, tracciare una semiretta s uscente da O ed intersecante γ in un punto Q. Indicato con P un generico punto di s esterno alla circonferenza, tracciare da esso le due tangenti alla circonferenza: siano A e B i punti di tangenza.

    Posto $x=PQ$, calcola il rapporto $\frac{AQ+QB}{AB}$. [*P3 Slo 2005*]

63. Un triangolo ha due lati e l'angolo da essi compreso che misurano rispettivamente a, b e γ. Quale è il valore di γ che massimizza l'area del triangolo? [*Q7 2004*]

64. Di triangoli non congruenti, di cui un lato è lungo 10 cm e i due angoli interni adiacenti ad esso, a e b sono tali che $sen\,\alpha=3/5$ e $sen\,\beta=24/25$, ne esistono:

    A) 0; B) 1; C) 2; D) 3.

    Una sola risposta è corretta. Individuarla e fornire una spiegazione esauriente della scelta operata. [*Q10 sup 2004*]

65. Dal punto A, al quale è possibile accedere, è visibile il punto B, al quale però non si può accedere in alcun modo, così da impedire una misura diretta della distanza AB. Dal punto A si può però accedere al punto P, dal quale, oltre ad A, è visibile B in modo che, pur rimanendo impossibile misurare direttamente la distanza PB, è tuttavia possibile misurare la distanza AP. Disponendo degli strumenti di misura necessari e sapendo che P non è allineato con A e B, spiega come si utilizza il teorema dei seni per calcolare la distanza AB. [*Q3 2003*]

66. Nota la lunghezza di una corda di un cerchio di dato raggio, calcolare quella della corda sottesa dall'angolo al centro uguale alla metà di quello che sottende la corda data.

    (La risoluzione del problema è stata usata da Tolomeo, II sec. d.C., per la costruzione di una tavola trigonometrica in maniera equivalente alla nostra formula di bisezione del seno.)

    [*Q1 PNI sup 2003*]

67. Del triangolo ABC si hanno le seguenti informazioni: AB=3 cm; AC=2 cm; $C\hat{A}B=60°$.

    Si tracci la bisettrice di $C\hat{A}B$ e se ne indichi con D l'intersezione con il lato BC.

    a) Si calcoli la lunghezza del lato BC e delle parti in cui esso risulta diviso dal punto D.

    b) Si determinino il coseno dell'angolo in B, la misura di AD e le misure approssimate degli altri due angoli interni di vertici B e C. [*P1 sup 2003*]

68. Le ampiezze degli angoli di un triangolo sono α, β, γ. Sapendo che $\cos\alpha=5/13$ e $\cos\beta=5/12$, calcolare il valore esatto di $\cos\gamma$, specificando se il triangolo è rettangolo,

acutangolo o ottusangolo. [*Q1 Ame 2003*]

69. Si considerino le lunghezze seguenti: $a+2x$; $a-x$; $2a-x$, dove a è una lunghezza nota non nulla ed x è una lunghezza incognita.

a) Determinare per quali valori di x le lunghezze date si possono considerare quelle dei lati di un triangolo non degenere.

c) Verificato che per $x=a/4$ i valori dati rappresentano le lunghezze dei lati di un triangolo, descriverne la costruzione geometrica con riga e compasso.

d) Indicato con ABC il triangolo di cui al precedente punto c, in modo che BC sia il lato maggiore, si conduca per A la retta perpendicolare al piano del triangolo e si prenda su di essa un punto D tale che AD sia lungo a: calcolare un valore approssimato a meno di un grado dell'ampiezza dell'angolo formato dai due piani DBC e ABC. [*P2 2002*]

70. Sia AB un segmento di lunghezza 2a e C il suo punto medio. Fissato un conveniente sistema di coordinate cartesiane monometriche (*Oxy*):

a) si verifichi che il luogo dei punti P tali che $PA/PB=k$ (k costante positiva assegnata) è una circonferenza (circonferenza di Apollonio) e si trovi il valore di k per cui la soluzione degenera in una retta;

b) si determini il luogo geometrico γ dei punti X che vedono AC sotto un angolo di 45°;

c) posto X appartenente a γ in uno dei due semipiani di origine la retta per A e per B e indicato con α l'angolo $X\hat{A}C$, determina la funzione:

$y=f(x)$ con $f(x)=\left(\frac{XB}{XA}\right)^2$ e $x=tg\,\alpha$. [*P1 PNI 2001*]

71. È dato il triangolo ABC, rettangolo in C, tale che AC e BC sono lunghi rispettivamente e 3a, essendo a una lunghezza assegnata. Indicato con H il piede dell'altezza relativa all'ipotenusa, siano P un generico punto dell'ipotenusa AB e z la misura, in radianti, dell'angolo $H\hat{C}P$.

a) Determinare in funzione di z la somma delle distanze di P dai vertici del triangolo.

c) Detta D la posizione di P per cui il triangolo PBC è isoscele, calcola la lunghezza di DC.

d) Riferito il piano della figura ad un conveniente sistema di riferimento cartesiano (*Oxy*), trovare l'equazione della circonferenza k avente il centro in D e passante per C, e stabilire come sono posizionati i punti A, B rispetto a k. [*P1 Spe 2002*]

72. Assegnato il segmento AB di lunghezza unitaria, si disegni la circonferenza avente il centro C sull'asse di AB e passante per A e per B. In tale contesto, denotata con P la proiezione ortogonale di B sulla retta AC, si esprima la somma BC^2+BP^2 in funzione dell'angolo $B\hat{A}C=x$.

[*P1 Lat sup 2001*]

73. N el triangolo ABC, rettangolo in A, si ha che $AB=2AC$, $BC=a$, essendo a una lunghezza

nota.

a) Stabilire se la bisettrice AD e la mediana CE del triangolo sono perpendicolari o no e darne esauriente spiegazione.

b) Dopo aver riferito il piano del triangolo ABC ad un conveniente sistema di assi cartesiani, trovare le coordinate dei punti A, B, C e del punto in cui si secano le rette AD e CE.

c) Preso un punto F sulla retta condotta per E perpendicolarmente al piano del triangolo ABC in modo che sia $EF = 4a/\sqrt{5}$, calcolare la distanza del punto A dal piano BCF.

d) Dell'angolo formato dai due piani BCF e ABC calcolare l'ampiezza espressa in gradi sessagesimali e approssimata a meno di 1 grado. [P1 Mag PNI 2001]

74. Il rettangolo ABCD è tale che la retta che congiunge i punti medi dei suoi lati più lunghi, AB e CD, lo divide in due rettangoli simili a quello dato. Tali lati hanno lunghezza assegnata a.

a. Determinare la lunghezza dei lati minori del rettangolo.

b. Sulla retta condotta perpendicolarmente al piano del rettangolo nel punto medio del lato AD prendere un punto V in modo che il piano dei punti V, B, C formi col piano del rettangolo dato un angolo di coseno $2/\sqrt{13}$.

Calcolare il volume della piramide di vertice V e base ABCD.

c. Condotto il piano α parallelo al piano della faccia VAD della piramide, ad una distanza x da questo, in modo però che α sechi la piramide stessa, esprimere in funzione di x l'area del poligono sezione. [*P2 2000*]

75. Considerato il quadrato ABCD, sull'arco di circonferenza di centro A e raggio AB, contenuto nel quadrato, si prenda un punto T in modo che l'angolo $T\hat{A}B$ misuri $2x$ radianti. Si conduca quindi per T la retta tangente alla circonferenza e si chiamino P e Q i punti in cui essa seca le rette BC e CD rispettivamente.

i. Esprimere in funzione di x il rapporto: $f(x) = \dfrac{CP + CQ}{AT}$.

iv. Verificare che il rapporto $f(x)$ può essere scritto nella seguente forma:

$$f(x) = 2\frac{sen\,2x + \cos 2x}{sen\,2x + \cos 2x + 1}$$

v. Stabilire che risulta: $\tan\frac{\pi}{8} = \sqrt{2} - 1$. [*P3 1999*]

76. Data una semicirconferenza di centro O e di diametro AB = 2, si assuma su di essa un punto C in modo che l'angolo $A\hat{O}C$ sia acuto. Indicata con φ l'ampiezza di tale angolo, siano:

- x = tan φ/2
- y= raggio della circonferenza tangente tanto al diametro quanto, nel punto C, alla

semicirconferenza.

Dopo aver dimostrato che il centro di tale circonferenza appartiene al raggio OC, determina la funzione $y=f(x)$. [*P1 sup 1999*]

77. In una semicirconferenza è inscritto un triangolo rettangolo ABC di base $AB=2$. Si tracci la semiretta parallela alla base AB passante per C e che non interseca la circonferenza. Sia D il punto su tale semiretta per cui è $CD=AC$.

Trovare la funzione $f(x)$ che esprime la differenza tra le aree dei triangoli ABC e BCD in funzione dell'angolo $B\hat{A}C=x$. [*P2 PNI sup 1999*]

78. Un cateto di un triangolo rettangolo è lungo 2*a*, dove *a* è una lunghezza nota, e l'angolo acuto adiacente ad esso ha coseno uguale a 4/5.

i. condotta per il vertice dell'angolo retto una retta *t* che non attraversa il triangolo e indicata con *x* la misura dell'angolo che questa retta forma con il cateto maggiore, esprimere in funzione di *x* il volume $V(x)$ del solido generato dal triangolo quando compie una rotazione completa intorno alla retta *t*.

ii. Verificato che risulta: $V(x)=\frac{1}{2}\pi a^3(4\,sen\,x+3\cos x)$, con *x* appartenente a un determinato intervallo, studiare la funzione $V(x)$ nell'intervallo stabilito e disegnarne il grafico in un piano cartesiano.

iii. Utilizzare il grafico disegnato per determinare *x* in modo che il volume del solido di rotazione descritto sopra sia $k\pi a^3$, dove *k* è un parametro reale assegnato. [*P3 1998*]

79. In una circonferenza di diametro $AB=2r$ è inscritto un triangolo rettangolo ABC, retto in C ed avente il cateto CB uguale al doppio del cateto AC. Sia P un punto dell'arco di estremi A e B, che non contiene C.

i. determina i cateti del triangolo ABC ed i valori di sinα e cosα, essendo $\alpha=C\hat{A}B$;

ii. indicato con θ l'angolo $C\hat{A}P$, esprima in funzione di $x=\cot\theta$ il rapporto:

$R(x)=\frac{4\,AB^2-4\,CP^2}{5\,PB^2+3\,CP^2}$. [*P3 sup 1998*]

80. Nel triangolo ABC, rettangolo in A, risulta: $AB=a$, $sen\,A\hat{B}C=4/5$, dove *a* è una lunghezza nota.

Indicato con D un punto della semicirconferenza di diametro BC, non contenente A, esprimi l'area *S* del triangolo ABD in funzione dell'ampiezza *x* dell'angolo $B\hat{A}D$.

Verificato che $S(x)=\frac{a^2}{6}(4\,sen^2x+3\,sen\,x\cos x)$, studia questa funzione e tracciane il grafico, con riferimento alla questione geometrica.

Utilizza il grafico ottenuto al fine di calcolare per quali valori di x l'area risulta uguale a ka^2, dove k è un parametro reale. [*P3 sup 1996*]

81. Le tre semirette complanari r, s, t hanno la stessa origine O e s è interna all'angolo delle altre due che è retto. Su r e t sono presi, rispettivamente, due punti A e B tali che $OA=1$ e $OB=\sqrt{3}$, mentre con A' e B' si denotano le loro rispettive proiezioni su s.

    Riferito il piano ad un sistema di coordinate cartesiane ortogonali e monometriche, si determini, al variare di s: l'equazione cartesiana del luogo dei punti P medi di A'B'. [*P2 Spe sup 2002*]

82. Dato un sistema di assi cartesiani ortogonali di centro O, traccia la circonferenza γ di raggio unitario e centro O. Detto A il punto di coordinate $(1,0)$, indica con α l'angolo formato da una generica semiretta uscente dall'origine con il semiasse positivo delle x e con P il punto in cui tale semiretta interseca γ ($P\hat{O}A=\alpha$). Determina in funzione di α l'ordinata y del punto appartenente al semiasse positivo delle y tale che $PQ=2$. [*P2 1993*]

83. In una semicirconferenza di diametro $AB=2r$, inscrivi il triangolo ABD retto in D. Traccia la bisettrice dell'angolo $D\hat{A}B$; tale bisettrice intersechi il segmento BD in E.

    Indicato con x l'angolo $B\hat{A}E$, determina il rapporto y tra la lunghezza del segmento BE e quella del segmento BD. Calcola il valore di y per x che tende a zero e rappresenta la funzione $y=f(x)$. [*P2 sup 1992*]

84. Detta $A(n)$ l'area del poligono regolare di n lati inscritto in un cerchio di raggio r, verificare che $A(n)=\frac{n}{2}r^2 sen\frac{2\pi}{n}$. [*Q7 2015*]

85. Data una semicirconferenza di diametro AB, traccia una semiretta uscente da A e formante con il diametro AB un angolo x e una semiretta uscente da B e formante con il diametro AB un angolo uguale al precedente. Le due semirette si intersechino in un punto P e intersechino la semicirconferenza nei due punti rispettivamente C e D. Calcola il rapporto tra il perimetro del triangolo PCD e il perimetro del triangolo ABP. [*P3 Est 1992*]

86. In un piano sono assegnati una circonferenza di centro O e raggio r ed un punto A tale che $OA=2r$; si conducano per A due rette a e b tali che siano a perpendicolare alla retta OA ed $\hat{ab}=\pi/4$. Prendi sulla circonferenza un punto P; conduci per esso la parallela alla retta a, che incontra la retta b nel punto M, e la parallela alla retta b, che incontra la retta a nel punto N.

    Esprimi la somma $s=PM+PN$. [*P3 1989*]

87. Dato il triangolo ABC avente i lati $CA=a$ e $CB=2a$, costruisci, da parte opposta a C rispetto alla retta AB, il triangolo rettangolo ABD il cui cateto BD sia uguale alla metà del cateto AB. Esprimi l'area del quadrangolo ADBC in funzione dell'angolo $A\hat{C}B$. [*P3 1988*]

88. Si considerino una semicirconferenza di centro O e diametro $AB=2r$ e la retta t parallela alla

retta AB e tangente alla semicirconferenza nel punto C.

Detti D, E, F i punti d'intersezione di una perpendicolare al diametro AB rispettivamente con la semicirconferenza, con la retta *t* e con lo stesso diametro, esprimi il rapporto delle aree dei triangoli OFD e DCE in funzione dell'angolo $D\hat{O}C$. [*P3 sup 1988*]

89. In un sistema di assi cartesiani ortogonali sono assegnate l'ellisse di equazione $x^2+4y^2=1$ e la circonferenza di equazione $x^2+y^2=1$. Siano A il punto comune alle due curve di ascissa negativa, B un punto della circonferenza di ordinata positiva, H la proiezione di B sull'asse delle ascisse e P il punto d'intersezione del segmento BH con l'ellisse. Indicato con α l'angolo $B\hat{A}H$, si esprimano in funzione di esso le coordinate di B, H e P. [*P4 sup 1987*]

90. Sui lati opposti AB e CD del rettangolo ABCD ed esternamente ad esso si costruiscano due triangoli isosceli APB e CQD aventi gli angoli alla base di ampiezza α. Sapendo che il perimetro dell'esagono APBCQD è $2p$, si determinino le lunghezze dei lati del rettangolo in modo che l'area dell'esagono risulti massima. Per quali valori di α tale esagono è inscrivibile in una circonferenza? [*P1 1980*]

91. Dato in una circonferenza di raggio *r* l'angolo al centro AOB, si costruisca sulla corda AB, da parte opposta al centro O, il triangolo isoscele ABC avente per base AB e per altezza $CH=2k\,AB$. Esprimi l'area del quadrilatero OACB in funzione dell'angolo $A\hat{O}B$.

[*P2 1979*]

92. I punti A, B, C, non allineati, sono vertici di un triangolo i cui lati BC e CA sono lunghi rispettivamente *a*, *b*. Esprimi la somma dei quadrati delle altezze del triangolo, relative ai lati BC e CA, diminuita del quadrato del lato AB in funzione dell'angolo acuto $A\hat{C}B=\gamma$.

[*P2 1977*]

93. Dato l'angolo $a\hat{O}b=\gamma$, si fissino sulla semiretta O*b* i punti P e Q tali che $OP=1$, $OQ=2$; preso sulla semiretta O*a* un punto A, esprimi la funzione $y=\dfrac{AP^2-AQ^2}{AP^2+AQ^2}$. [*P3 sup 1977*]

94. Si conduca internamente ad un angolo retto AOB una semiretta OC che forma con OA un angolo $A\hat{O}C=x$; presi rispettivamente su OA ed OB due punti M ed N tali che $OM=1$, $ON=\sqrt{3}$, siano M' ed N' le rispettive proiezioni di M ed N su OC. Detto P il punto medio di M'N', esprimi l'area del triangolo NOP in funzione di *x*. [*P3 1975*]

95. In una semicirconferenza di diametro $AB=2r$, si consideri una corda AC tale che sia $C\hat{A}B=2x$. Detto D il punto medio dell'arco BC, si determini *x* in modo che l'area del quadrilatero ACDB risulti massima. [*P3 sup 1975*]

96.Data una circonferenza di diametro $AB=2r$, si prendano su di essa, da parte opposta di AB, due punti C e D tali che $A\hat{B}C=\pi/3$, $A\hat{B}D=\alpha$.

Esprimi la funzione: $y=\frac{AD^2-CD^2}{BC^2}$ per mezzo di $x=tg\,\alpha$. [*P2 1972*]

97.E' dato il triangolo AOB, rettangolo in O, del quale sia *h* l'altezza relativa all'ipotenusa. Detta *x* l'ampiezza dell'angolo $O\hat{A}B$ e posto $tg\,x/2=t$, si esprima per mezzo di *h* e di *t* il perimetro del triangolo. [*P1 1971*]

98.Un bagnino è seduto su un'alta piattaforma, di modo che i suoi occhisi trovano a 7 metri sopra il livello del mare. Improvvisamente emerge in superficie la pinna di un grande squalo bianco. Se l'angolo di depressione è di 4°, si stimi la distanza orizzontale tra la piattaforma e lo squalo, arrotondando il risultato all'unità. [*Q6 2009 str*]

99.Un gruppo di attivisti antinucleari ha organizzato una marcia di protesta verso un sito scelto per la costruzione di una centrale termonucleare. Essi camminano, in pianura, con velocità costante, dirigendosi in linea retta verso le torri di raffreddamento dell'impianto, che sono già state costruite. Alle 7 uno degli organizzatori della marcia antinucleare vede la cima della torre di raffreddamento con un angolo di elevazione di 2°; 30 minuti più tardi l'ampiezza dell'angolo è pari a 5°. Si calcoli a che ora il gruppo raggiungerà il cantiere, arrotondando il risultato al minuto. [*Q1 PNI str 2014*]

100.Due osservatori A e B, posti in un campo orizzontale, alla distanza di 500 m, seguono con il cannocchiale di un teodolite, alto 1,50 m, un aeroplano. Quando questo passa per il piano verticale comune di A e B, gli angoli di elevazione sono, rispettivamente, in A di 80,33° e in B di 70°. A quale altezza dal suolo vola l'aeroplano? [*Q1 Com str 2014*]