

Goniometria - Quesiti esame di stato

1. Si verifichi l'identità $2 \cot(2\alpha) + \tan \alpha = \cot \alpha$. [Q3 Eur 2013]
2. Si verifichi l'identità $\tan(45^\circ + \alpha) = \frac{1 + \sin 2\alpha}{\cos 2\alpha}$. [Q8 Ame 2013]
3. Sia $t \in [0, 2\pi]$; quale è la curva rappresentata dalle equazioni $x = a \cos t$ e $y = b \sin t$?
(Quesito proposto in diverse occasioni con minime varianti). [Q8 Ame 2011]
4. Si dica se $f(x) = \sin(x - \pi) + \cos(3x)$ è una funzione periodica ed in caso affermativo se ne determini il periodo. [Q7 Bra 2011]
5. Data la funzione $y = a \sin x + b \cos x$, si determinino i coefficienti a, b in modo che per $x = 2/3\pi$ sia $y = 1$ e che i valori estremanti di y siano -2 e 2.
Se ne disegni il grafico nell'intervallo $0 \leq x \leq 2\pi$.
Posto $y = c \sin(x + \phi)$, calcola c, ϕ in modo che questa funzione coincida con quella assegnata.
Fatte le sostituzioni $y = s$, $x = 2\pi t$, dove s rappresenta lo spostamento dall'origine di un punto P che si muova su di una retta nel tempo t , descrivi il moto di P, determinando, in particolare, gli istanti nei quali la velocità è nulla e quelli nei quali è massima. [P3 1977]
6. Si dica se esistono numeri reali per i quali vale la seguente uguaglianza:
$$2 + 2^x = \sin^4 x + \cos^4 x + 6 \sin^2 x \cos^2 x$$
 [Q6 str 2010]
7. Disegna nell'intervallo $[-\pi, \pi]$ il grafico della funzione $f(x) = \frac{1}{2} |\cos x| - 1$. [Q7 Ame 2010]
8. Si determini il periodo della funzione $f(x) = \cos 5x$. [Q10 2009]
(Quesito proposto in numerose occasioni con diverse varianti).
9. Sono dati un angolo α di π^2 radianti e un angolo β di 539 gradi. Si verifichi che sono entrambi maggiori di un angolo giro e minori di due angoli giro. Si dica quale dei due è il maggiore. Si dica inoltre se è più grande il seno di α o il seno di β . [Q6 sup 2009]
10. Si risolva la seguente equazione: $\sin^4 x + 2 \sin^2 x \cos^2 x + \cos^4 x = 3^x$. [Q1 Aus 2009]
11. Dopo avere illustrato il significato di funzione inversa, spiega, motivando la risposta, se è vero che $\arcsin(\sin 2\pi/3) = 2\pi/3$. [Q2 Aus 2009]
12. Determina, motivando la risposta, il periodo della funzione $y = \sin(2x + 3)$. [Q7 Aus 2009]
13. Si studi la funzione $y = \sin(x + \pi/3) + \cos(x - \pi/6)$ e se ne disegni il grafico.
Utilizzando il grafico, si studi la funzione $y = e^{f(x)}$, dove $f(x)$ è la funzione precedentemente studiata. [P3 1983]
14. Nel piano riferito a coordinate cartesiane, ortogonali e monometriche, si considerino i triangoli ABC con A(1; 0), B(3; 0) e C variabile sulla retta di equazione $y = 2x$.

Si provi che i punti $(1; 2)$ e $(3/5, 6/5)$ corrispondono alle due sole posizioni di C per cui è

$$\widehat{ACB} = \pi/4 \quad . \quad [P1 PNI 2008]$$

15. Ricordando che il lato del decagono regolare inscritto in un cerchio è sezione aurea del raggio, si

provi che $\operatorname{sen} \frac{\pi}{10} = \frac{\sqrt{5}-1}{4}$. [Q2 PNI 2008]

16. Secondo il codice della strada il segnale di “salita ripida” preavverte di un tratto di strada con pendenza tale da costituire pericolo. La pendenza vi è espressa in percentuale e nell’esempio è 10%. Se si sta realizzando una strada rettilinea che, con un percorso di 1,2 km, supera un dislivello di 85 m, qual è la sua inclinazione (in gradi sessagesimali)?



Quale la percentuale da riportare sul segnale? [Q10 2008]

17. Si provi che le espressioni $y = 2 \operatorname{sen}(x + \pi/6)$ e $y = 3 \sin(x) + \cos(x)$ definiscono la stessa funzione f . Di f si precisi: dominio, codominio e periodo. [Q8 Aus 2008]

18. Si provi l'identità: $\operatorname{arctg} x + \operatorname{arctg} y = \operatorname{arctg} \frac{x+y}{1-xy}$. [Q5 Ame 2014]

19. Rispetto a un sistema di assi cartesiani ortogonali (Oxy) si consideri il punto $A(2; 0)$.

1. Si scriva l'equazione del luogo dei punti del piano che verificano la condizione:

$PO^2 + 2PA^2 = 8$ controllando che si tratta di una circonferenza di cui si chiedono le coordinate del centro e il raggio.

2. Si determini l'ampiezza dell'angolo acuto formato dalla retta OB con la tangente alla circonferenza in B , essendo B il punto della curva avente la stessa ascissa di A e ordinata positiva. [P2 PNI sup 2007]

20. Si trovi per quali valori di k ammette soluzione l'equazione trigonometrica: $\operatorname{sen} x + \cos x = k$.

[Q10 PNI str 2007]

21. Il numero delle soluzioni dell'equazione $\operatorname{sen} 2x \cos x = 2$ nell'intervallo reale $[0; 2\pi]$ è:

A. 0. B. 2. C. 3. D. 5.

Una sola alternativa è corretta: individuarla e fornire un'esauriente spiegazione della scelta operata. [Q2 PNI sup 2006]

22. Considerata l'equazione: $\cos(x/2) \operatorname{sen}(2x) = 12$, spiegare in maniera esauriente se ammette soluzioni reali o se non ne ammette. [Q9 str 2006]

23. Si calcoli, senza l'aiuto della calcolatrice, il valore di: $\operatorname{sen}^2(35^\circ) + \operatorname{sen}^2(55^\circ)$, dove le misure degli angoli sono in gradi sessagesimali. [Q9 2005]

24. Alberto e Gianna sono chiamati a risolvere la seguente equazione: $\operatorname{sen} x \cos x = 1/4$.

Alberto ottiene come soluzione gli angoli x tali che: $x = \pi/12 + k\pi$ oppure $x = 5\pi/12 + k\pi$

(k intero qualsiasi); Gianna trova la seguente soluzione: $x = (-1)^k \pi/12 + k \pi/2$ (k intero qualsiasi). È vero o è falso che Alberto ha risolto correttamente e Gianna no? Fornire una risposta esauriente. [Q3 PNI sup 2005]

25. Dimostrare che ogni funzione del tipo $y = a \sin^2 x + b \sin x \cos x + c \cos^2 x$, dove a, b, c sono numeri reali non contemporaneamente nulli, ha di regola per grafico una sinusoidale. C'è qualche eccezione? [Q4 PNI str 2005]

26. Dimostrare che la funzione $f(x) = \cos(1/x)$ ha infiniti punti di massimo e minimo relativo in $]0;1]$. In quali punti la funzione assume valore 1 e in quali -1 ? [Q5 Aus sup 2005]

27. Trovare il periodo della funzione: $y = \sin\left(\frac{2}{3}x\right) + \sin\left(\frac{1}{4}x\right)$. [Q7 Est 2005]

28. La misura degli angoli viene fatta adottando una unità di misura. Le più comuni sono i gradi sessagesimali, i radianti, i gradi centesimali. Quali ne sono le definizioni? [Q1 PNI 2004]

29. Se $\tan \alpha$ e $\tan \beta$ sono radici di $x^2 - px + q = 0$ e $\cotg \alpha$ e $\cotg \beta$ sono radici di $x^2 - rx + s = 0$, quanto vale il prodotto rs espresso in funzione di p e q ? [Q7 Ame 2004]

30. Cosa si intende per «funzione periodica»? Qual è il periodo della funzione $f(x) = \sin x - 2 \cos x$? [Q2 sup 2003]

31. Dare una giustificazione delle formule: $\cos 2\alpha = 2 \cos^2 \alpha - 1$ e $\cos 2\alpha = 1 - 2 \sin^2 \alpha$ e utilizzarle per provare che: $\cos 4\alpha = 8 \cos^4 \alpha - 8 \cos^2 \alpha + 1$. [Q5 sup 2003]

32. Sia APB un angolo la cui misura in radianti è data dal numero e di Nepero, base dei logaritmi naturali. Quale è la misura in gradi sessagesimali di APB e quale quella in gradi centesimali? Motivate la vostra risposta. [Q6 Lat 2003]

33. Cosa si intende per funzione periodica? Quale è il periodo della funzione $f(x) = \tan(2x) + \cos(2x)$? [Q1 Aus 2003]

34. Quale è la lunghezza di un arco di un cerchio di raggio 10 m se l'angolo al centro che lo sottende misura $4\pi/5$? E se l'angolo misura 110° ? [Q7 Lat sup 2001]

35. In un piano cartesiano, le due rette a, b hanno coefficienti angolari rispettivamente -1 e $1/2$. Calcolare il coseno dell'angolo orientato $(a; b)$. [Q3 Lat 2001]

36. Data la funzione $\begin{cases} x = \sin t \\ y = \sin 2t \end{cases}$, esprimila nella forma $y = \pm f(x)$. [P3 1993]