Calcolo combinatorio - Quesiti esame di stato

1. Nello sviluppo di $(2a^2-3b^3)^n$ compare il termine $-1080\,a^4b^9$. Qual è il valore di *n*?
[*Q3 2014*]

2. Con le cifre da 1 a 7 è possibile formare 7!=5040 numeri corrispondenti alle permutazioni delle 7 cifre. Ad esempio i numeri 1234567 e 3546712 corrispondono a due di queste permutazioni. Se i 5040 numeri ottenuti dalle permutazioni si dispongono in ordine crescente, qual è il numero che occupa la settima posizione, quale quello che occupa la 5036-esima posizione e quale quello che occupa la 1441-esima posizione? [*Q6 PNI 2013*]

3. Quanti sono i numeri di 5 cifre con almeno una cifra dispari? Quanti quelli con almeno una cifra pari? [*Q3 Com 2014*]

4. Tommaso ha costruito un modello di tetraedro regolare e vuole colorare le 4 facce, ognuna con un colore diverso. In quanti modi può farlo se ha a disposizione 10 colori? E se invece si fosse trattato di un cubo? [*Q8 sup 2013*]

5. Dati nello spazio *n* punti P_1, P_2, P_3, …, P_n, quanti sono i segmenti che li congiungono a due a due? Quanti i triangoli che hanno per vertici questi punti (supposto che nessuna terna sia allineata)? Quanti i tetraedri (se nessuna quaterna è complanare)? [*Q5 PNI 2012*]

6. Un docente deve scegliere 4 studenti cui affidare un compito tra i 10 che ne hanno fatto richiesta. Quante scelte può fare? [*Q1 Ame 2012*]

7. Dato l'insieme A = {1, 2, 5, 8}: determinare quanti numeri a due cifre si possono scrivere con gli elementi di A, considerando che sono ammesse le ripetizioni. [*Q6 Ame 2012*]

8. Quante sono tutte le funzioni iniettive da un insieme A di n elementi in un insieme B di m elementi? [*Q1 Eur 2012*]

9. Quanti sono i numeri di 6 cifre che contengono: 2 volte esatte la cifra 1, 2 volte esatte la cifra 2 e non contengono la cifra 0? [*Q8 Eur 2012*]

10. Il numero delle combinazioni di *n* oggetti a 4 a 4 è uguale al numero delle combinazioni degli stessi oggetti a 3 a 3. Si trovi *n*. [*Q4 PNI 2011*]

11. Si mostri che, nello sviluppo di $(a+b)^n$, il coefficiente del termine $a^k b^{n-k}$ è uguale a:
$$\frac{n!}{k!(n-k)!}.$$
[*Q5 Com 2012*]

12. Se $n>3$ e $\binom{n}{n-1}$, $\binom{n}{n-2}$, $\binom{n}{n-3}$ sono in progressione aritmetica, qual è il valore di *n*? [*Q8 PNI 2010*]

13. In quanti modi 10 persone possono disporsi su dieci sedili allineati? E attorno ad un tavolo

circolare? [*Q3 PNI str 2010*]

14.Dimostra l'identità $\binom{n}{k+1}=\binom{n}{k}\frac{n-k}{k+1}$ con *n* e *k* naturali e $n>k$. [*Q7 PNI 2009*]

15.Quanti sono i numeri di quattro cifre (distinte tra loro) che è possibile scrivere utilizzando le cifre pari, diverse da zero? [*Q6 Ame 2009*]

16.Se $\binom{n}{1}$, $\binom{n}{2}$, $\binom{n}{3}$ con $n>3$, sono in progressione aritmetica, qual è il valore di *n*?

[*Q6 2008*]

17.Quale significato attribuisci al simbolo $\binom{n}{k}$? Esiste un *k* tale che $\binom{12}{k}=\binom{12}{k-3}$?

[*Q3 Ame 2008*]

18.Quanti sono i numeri di quattro cifre (distinte tra loro) che è possibile scrivere utilizzando le cifre dispari? [*Q5 Aus 2008*]

19.Quanti sono i numeri di 5 cifre con almeno una cifra dispari? Quanti quelli con almeno una cifra pari? [*Q3 Com 2014*]

20.È possibile che nello sviluppo della potenza $(2a^2-3b^3)^7$ compaia il monomio $ka^{10}b^6$?
E il monomio $k\,a^8b^8$? (*k* numero reale). Nel caso affermativo si trovi il valore di *k* motivando esaurientemente la risposta. [*Q3 Ame 2014*]

21.Quanti colori si possono formare mediante le combinazioni dei sette colori fondamentali dello spettro? (contando, cioè, i colori presi separatamente, a 2 a 2, a 3 a 3,...,a 7 a 7). [*Q8 Ame 2014*]

22.Lo sviluppo della potenza $(x^3+y^k)^{20}$ contiene il termine la cui parte letterale è: $x^{21}y^{26}$.
Si trovi il valore di *k*. [*Q4 Eur 2014*]

23.Si risolva l'equazione: $4\binom{n}{4}=15\binom{n-2}{3}$. [*Q8 2007*]

24.Si risolva la disequazione $5\binom{x}{3}\le\binom{x+2}{3}$. [*Q10 PNI sup 2007*]

25.Si risolva la disequazione $\binom{x}{3}>\frac{15}{2}\binom{x}{2}$. [*Q10 sup 2007*]

26.Si illustrino il significato e l'ambito di utilizzo del simbolo $\binom{m}{n}$.

Si risolva l'equazione: $2\binom{x}{2}=3\binom{x-1}{2}$. [*Q4 Aus 2007*]

27.Si dimostri che la somma dei coefficienti dello sviluppo di $(a+b)^n$ è uguale a 2^n per ogni $n\in\mathbb{N}$. (*Quesito riproposto in varie occasioni*) [*Q5 PNI 2006*]

28.Cinque ragazzi sono contrassegnati con i numeri da 1 a 5. Altrettante sedie, disposte attorno a un tavolo, sono contrassegnate con gli stessi numeri. La sedia «1», posta a capotavola, è riservata al ragazzo «1», che è il caposquadra, mentre gli altri ragazzi si dispongono sulle sedie rimanenti in maniera del tutto casuale. Calcolare in quanti modi i ragazzi si possono mettere seduti attorno al tavolo. [*Q10 sup 2006*]

29. Quanti sono i numeri di tre cifre (distinte tra loro) che è possibile scrivere utilizzando le cifre pari, diverse da zero? [*Q2 Aus sup 2006*]

30. Come si definisce $n!$ (n fattoriale) e quale ne è il significato nel calcolo combinatorio? Quale è il suo legame con i coefficienti binomiali? Perché? [*Q7 PNI 2005*]

31. Elenca i coefficienti che compaiono nello sviluppo del binomio $(a+b)^{10}$ e giustifica in modo esauriente la risposta. [*Q9 sup 2005*]

32. Una classe è formata da 27 alunni: 15 femmine e 12 maschi. Quante sono le possibili delegazioni di 5 alunni, di cui 3 femmine e 2 maschi? [*Q10 sup 2005*]

33. Dimostrare la seguente formula: $\binom{n}{k}=\binom{n-1}{k}+\binom{n-1}{k-1}$,

dove n, k sono numeri naturali tali che $0<k<n$. Essa spiega una delle regole sulle quali è basata la costruzione del «triangolo di Tartaglia» (da Niccolò Fontana, detto Tartaglia, 1505 ca. - 1557): enunciarla. (*Quesito riproposto in varie occasioni*) [*Q9 str 2005*]

34. Calcola quante sono le possibili «cinquine» che si possono estrarre da un'urna contenente i numeri naturali da 1 a 90, ognuna delle quali comprenda i numeri 1, 2 e 3. [*Q10 str 2005*]

35. Dati gli insiemi A={1, 2, 3, 4} e B={a, b, c} quante sono le applicazioni (o funzioni) di A in B? [*Q4 PNI 2004*]

36. In una classe di 25 alunni bisogna estrarre a sorte una rappresentanza di 3 elementi. Calcolare quante sono le possibili terne di rappresentanti. [*Q9 str 2004*]

37. Alla finale dei 200 *m* piani partecipano 8 atleti, fra i quali figurano i nostri amici Antonio e Pietro. Calcolare il numero dei possibili ordini di arrivo che registrino i nostri due amici fra i primi tre classificati. [*Q10 str 2004*]

38. Un professore interroga i suoi alunni a due per volta. Stabilire quante possibili coppie diverse può interrogare, sapendo che la classe è di 20 studenti. [*Q8 Ame 2004*]

39. Quante partite di calcio della serie A vengono disputate complessivamente (andata e ritorno) nel campionato italiano a 18 squadre? [*Q1 PNI 2003*]

40. Si consideri una data estrazione in una determinata Ruota del Lotto. Calcolare quante sono le possibili cinquine che contengono i numeri 1 e 90. [*Q9 2003*]

41. Dimostrare la formula che esprime il numero delle combinazioni semplici di n oggetti presi a k a k in funzione del numero delle disposizioni semplici degli stessi oggetti presi a k a k e delle

permutazioni semplici su *k* oggetti. [*Q6 PNI str 2002*]

42. Considerati i 90 numeri del gioco del Lotto, calcolare quante sono le cinquine che, in una data estrazione, realizzano un determinato terno. [*Q9 str 2002*]

43. Risolvere l'equazione: $5\binom{n+1}{5}=21\binom{n-1}{4}$. [*Q3 Com 2015*]

44. In una fabbrica lavorano 35 operai e 25 operaie. Si deve formare una delegazione comprendente 3 operai e 2 operaie. Quante sono le possibili delegazioni? [*Q5 Bor 2005*]

45. Una classe è formata da 30 alunni, fra i quali Aldo e il suo amico fidato Giacomo. Si deve formare una delegazione costituita da 4 studenti della classe. Calcolare quante sono le possibili quaterne comprendenti Aldo e Giacomo. [*Q7 Eur 2004*]

46. Calcola il numero naturale *n* per il quale risulta: $\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}=1048576$. [*Q3 sup 2001*]

47. Ricava la formula del numero di combinazioni semplici di *n* elementi a *k* a *k*. [*Q5 Est 2001*]

48. Considera la successione di termine generale $a_n=\frac{f(n)}{3^n}$, dove:

$$f(n)=\binom{n}{0}+\binom{n}{1}+\binom{n}{2}+\ldots+\binom{n}{n} \quad .$$

a. Dimostra che $f(n)=2^n$.

b. Determina il più piccolo valore di *n* per cui risulta $a_n<10^{-10}$.

c. Spiega perché, se n è dispari, risulta: $f(n)=2\left[\binom{n}{0}+\binom{n}{1}+\binom{n}{2}+\ldots+\binom{n}{(n-1)/2}\right]$,

fornendo la dimostrazione di ogni eventuale formula a cui si fa ricorso.

Scrivi un'espressione equivalente di $f(n)$ quando *n* è pari. [*P3 sup 2000*]

49. Si dimostri che $\binom{n+1}{k+1}=\binom{n}{k+1}+\binom{n}{k}$. [*P4 1976*]

50. Per progettare un sito web è necessario generare dei codici unici di accesso. Si vogliono utilizzare, a tale scopo, due lettere maiuscole dell'alfabeto inglese seguite da una serie di cifre comprese tra 0 e 9. Tutti i codici di accesso dovranno avere lo stesso numero di cifre ed è ammessa la ripetizione di lettere e numeri. Qual è il numero minimo di cifre da impostare in modo da riuscire a generare almeno 5 milioni di codici di accesso diversi? Giustificare la risposta. [*Q5 2^Sim 2015*]

51. Si risolva l'equazione $6\left[\binom{x}{2}+\binom{x}{3}\right]=x(x+11)$. [*Q8 2009 str*]

52. Spiega se è possibile che sia: $\binom{n}{k}=\binom{n+1}{k+1}$. [*Q8 PNI str 2014*]

53.Qual è il numero delle cinquine che si possono ottenere completando l'ambo $\{3,25\}$?

[*Q10 PNI str 2014*]