<u>4^F - MATEMATICA</u> compito n°3*a* - 2020-21

1. Risolvi le seguenti disequazioni goniometriche nell'intervallo $[0, 2\pi]$:

   $\sqrt{3}\cos x - \operatorname{sen} x \geq 0$; $2\operatorname{sen}(2x - \frac{\pi}{4}) + 1 \geq 0$; $2\cos^2 x + \cos x - 1 \geq 0$.

2. Data la semicirconferenza di centro O e diametro $\overline{AB} = 10$, conduci per il punto C, posto sul prolungamento di AB dalla parte di A, la semiretta tangente in M alla semicirconferenza.

   Sapendo che $tg\, M\hat{C}O = \frac{3}{4}$, determina:

   a. le misure di MC e di OC;

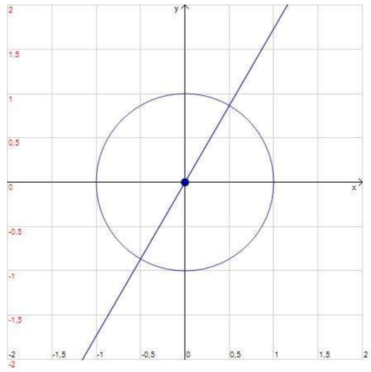
   b. il valore di $\operatorname{sen} M\hat{O}C$;

   c. la misura della corda MB;

   d. la misura del segmento AH, dove H è il piede della perpendicolare condotta da M ad AB.

<u>4^F</u> - Correzione compito n°3a

1.



a. La disequazione è lineare in $sen\,x$ e $cos\,x$, per cui può essere risolta con metodo "grafico", con il cosiddetto "angolo aggiunto", o (al limite) con le formule razionali parametriche. E' vero che la disequazione è anche omogenea, ma non possiamo semplicemente dividerla per $cos\,x$, in quanto si tratta di una quantità che contiene l'incognita, e può assumere sia segno positivo che negativo. Scegliamo, ad esempio, il metodo "grafico" e poniamo $cos\,x=X$, $sen\,x=Y$:

$$\begin{cases}\sqrt{3}X-Y=0\\ X^2+Y^2=1\end{cases} \Rightarrow \begin{cases}Y=\sqrt{3}X\\ X^2+3X^2=1\end{cases} \Rightarrow \begin{cases}X=\pm 1/2\\ Y=\pm\sqrt{3}/2\end{cases} \Rightarrow x_1=\frac{\pi}{3};\; x_2=\frac{4}{3}\pi \quad .$$

Sostituendo le coordinate di un punto (ad esempio $(1,0)$ o $(0,1)$), vediamo che la disequazione data è verificata "sotto" la retta di equazione $Y=\sqrt{3}X$, e quindi:

$$Sol:\; 0\le x\le\frac{\pi}{3} \;\vee\; \frac{4}{3}\pi\le x\le 2\pi \quad .$$

b. $$sen(2x-\frac{\pi}{4})\ge-\frac{1}{2} \Rightarrow -\frac{\pi}{6}+2k\pi\le 2x-\frac{\pi}{4}\le\frac{7}{6}\pi+2k\pi \Rightarrow$$

$$\frac{\pi}{12}+2k\pi\le 2x\le\frac{17}{12}\pi+2k\pi \Rightarrow \frac{\pi}{24}+k\pi\le x\le\frac{17}{24}\pi+k\pi \quad .$$

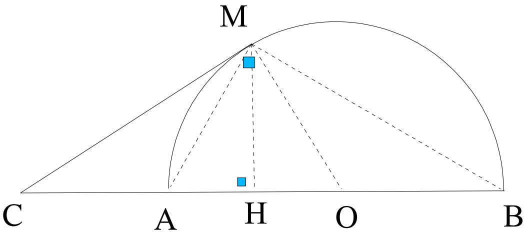
Pertanto, in $[0,2\pi]$: $Sol:\; \frac{\pi}{24}\le x\le\frac{17}{24}\pi \;\vee\; \frac{25}{24}\pi\le x\le\frac{41}{24}\pi$.

c. $$2t^2+t-1=0 \Rightarrow t=\frac{-1\pm\sqrt{1+8}}{4}=\frac{-1\pm 3}{4} \Rightarrow t_1=-1;\; t_2=\frac{1}{2} \;\text{ con }\; t=cos\,x \quad .$$

$$cos\,x\le-1 \Rightarrow x=\pi \;;\; cos\,x\ge\frac{1}{2} \Rightarrow 0\le x\le\frac{\pi}{3} \;\vee\; \frac{5}{3}\pi\le x\le 2\pi \quad .$$

$$Sol:\; 0\le x\le\frac{\pi}{3} \;\vee\; x=\pi \;\vee\; \frac{5}{3}\pi\le x\le 2\pi \quad .$$

2.



a. Il triangolo MCO è rettangolo in M, in quanto la retta CM, tangente alla circonferenza, è perpendicolare al raggio OM per il punto di tangenza.

$$tg\,M\hat{C}O=\frac{OM}{MC} \Rightarrow MC=\frac{OM}{tg\,M\hat{C}O}=\frac{5}{3/4}=\frac{20}{3} \;;$$

$$OC=\sqrt{OM^2+MC^2}=\sqrt{5^2+(\frac{20}{3})^2}=\sqrt{\frac{625}{9}}=\frac{25}{3} \quad .$$

b. $$sen\, M\hat{O}C=\frac{MC}{OC}=\frac{20/3}{25/3}=\frac{4}{5} \quad .$$

c. Osserviamo che: $M\hat{O}B=\pi-M\hat{O}C \;\Rightarrow\; sen\, M\hat{O}B=sen\, M\hat{O}C=\frac{4}{5}$, da cui:

$$cos\, M\hat{O}B=-\sqrt{1-sen^2\, M\hat{O}B}=-\sqrt{1-\frac{16}{25}}=-\frac{3}{5} \quad .$$

Abbiamo scelto il segno negativo in quanto l'angolo $M\hat{O}B$ è ottuso.

Inoltre $M\hat{A}B=M\hat{O}B/2$ in quanto angoli alla circonferenza e al centro che insistono sullo stesso arco, quindi dalle formule di bisezione:

$$sen\, A\hat{M}B=\sqrt{\frac{1-cos\, M\hat{O}B}{2}}=\sqrt{\frac{1+3/5}{2}}=\frac{2}{\sqrt{5}} \quad .$$

Dal teorema della corda: $MB=2\,r\, sen\, A\hat{M}B=10\cdot\frac{2}{\sqrt{5}}=4\sqrt{5}$.

In alternativa, possiamo utilizzare il fatto che il triangolo MOB è isoscele, per cui altezza, mediana e bisettrice relative alla base MB coincidono.

d. Consideriamo (ad esempio) il triangolo rettangolo MOC:

$$OH=OM\cdot cos\, M\hat{O}C=5\cdot\frac{3}{5}=3 \;\Rightarrow\; AH=AO-OH=5-3=2 \quad .$$

1. Risolvi le seguenti disequazioni goniometriche nell'intervallo $[0,2\pi]$:

   $cos\,x+\sqrt{3}\,sen\,x\geq 0$; $2\,cos(2x-\frac{\pi}{4})+1\geq 0$; $2\,sen^2x+sen\,x-1\geq 0$.

2. Considera la semicirconferenza γ di diametro $\overline{AB}=12$ e centro O. Una semiretta di origine A interseca γ in C, e in D la retta tangente in B a γ, in modo che risulti $\overline{AD}=20$. Calcola:

   a. i valori di $sen\,B\hat{A}D$, $sen\,A\hat{B}C$;

   b. la misura della corda AC:

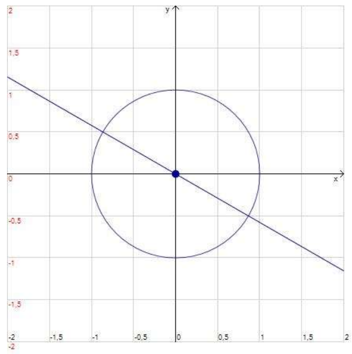
   c. i valori di $cos\,B\hat{A}M$, $cos\,C\hat{M}B$, dove M è il punto medio dell'arco BC;

   d. l'area del quadrilatero AOCN, dove N è il punto medio dell'arco AC.

<u>4^F</u> - *Correzione compito n°3b*

1.

a. La disequazione è lineare in $sen\,x$ e $cos\,x$, per cui può essere risolta con metodo "grafico", con il cosiddetto "angolo aggiunto", o (al limite) con le formule razionali parametriche. E' vero che la disequazione è anche omogenea, ma non possiamo semplicemente dividerla per $cos\,x$, in quanto si tratta di una quantità che contiene l'incognita, e può assumere sia segno positivo che negativo. Scegliamo, ad esempio, il metodo "grafico" e poniamo $cos\,x = X$, $sen\,x = Y$:



$$\begin{cases} X+\sqrt{3}\,Y=0 \\ X^2+Y^2=1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} Y=-X/\sqrt{3} \\ X^2+X^2/3=1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} X=\pm\sqrt{3}/2 \\ Y=\mp 1/2 \end{cases} \Rightarrow x_1=\frac{5}{6}\pi\,;\ \ x_2=\frac{11}{6}\pi \quad .$$

Sostituendo le coordinate di un punto (ad esempio $(1,0)$ o $(0,1)$), vediamo che la disequazione data è verificata "sopra" la retta di equazione $Y=-X/\sqrt{3}$, e quindi:

$$Sol:\ 0\le x\le\frac{5}{6}\pi \ \vee\ \frac{11}{6}\pi\le x\le 2\pi \quad .$$

b. $$cos(2x-\frac{\pi}{4})\ge-\frac{1}{2} \Rightarrow -\frac{2}{3}\pi+2k\pi\le 2x-\frac{\pi}{4}\le\frac{2}{3}\pi+2k\pi \Rightarrow$$

$$-\frac{5}{12}\pi+2k\pi\le 2x\le\frac{11}{12}\pi+2k\pi \Rightarrow -\frac{5}{24}\pi+k\pi\le x\le\frac{11}{24}\pi+k\pi \quad .$$

Pertanto, in $[0,2\pi]$: $Sol:\ 0\le x\le\frac{11}{24}\pi \ \vee\ \frac{19}{24}\pi\le x\le\frac{35}{24}\pi \ \vee\ \frac{43}{24}\pi\le x\le 2\pi$.

c. $$2t^2+t-1=0 \Rightarrow t=\frac{-1\pm\sqrt{1+8}}{4}=\frac{-1\pm 3}{4} \Rightarrow t_1=-1\,;\ t_2=\frac{1}{2} \ \text{ con } \ t=sen\,x \quad .$$

$$sen\,x\le-1 \Rightarrow x=\frac{3}{2}\pi \quad ;\quad sen\,x\ge\frac{1}{2} \Rightarrow \frac{\pi}{6}\le x\le\frac{5}{6}\pi \quad .$$

$$Sol:\ \frac{\pi}{6}\le x\le\frac{5}{6}\pi \ \vee\ x=\frac{3}{2}\pi \quad .$$

2.

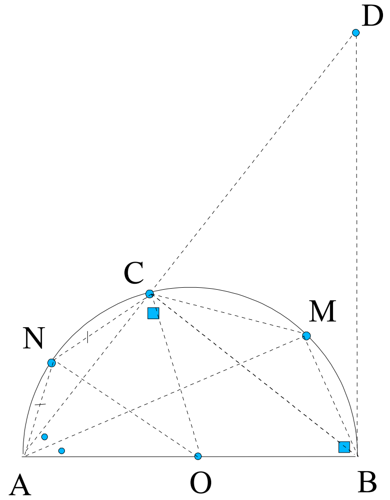
a. Il triangolo ABD è rettangolo in B, in quanto la retta tangente BD è perpendicolare al raggio AB passante per il punto di tangenza:

$$cos\,B\hat{A}D=\frac{AB}{AD}=\frac{12}{20}=\frac{3}{5} \Rightarrow sen\,B\hat{A}D=\sqrt{1-cos^2 B\hat{A}D}=\sqrt{1-\frac{9}{25}}=\frac{4}{5} \quad .$$

Anche il triangolo ABC è rettangolo in C, in quanto insiste su una semicirconferenza:

$$A\hat{B}C=\frac{\pi}{2}-B\hat{A}C \Rightarrow sen\,A\hat{B}C=cos\,B\hat{A}C=\frac{3}{5} \quad .$$

b. Per il teorema della corda: $AC = 2r\,sen\,A\hat{B}C = 12 \cdot \frac{2}{5} = \frac{36}{5}$.



c. Ad archi uguali corrispondono angoli alla circonferenza uguali, per cui:

$$cos\,B\hat{A}M = cos\,\frac{B\hat{A}C}{2} = \sqrt{\frac{1+cos\,B\hat{A}C}{2}} = \sqrt{\frac{1+3/5}{2}} = \frac{2}{\sqrt{5}}\ .$$

Angoli opposti di un quadrilatero inscritto in una circonferenza sono supplementari:

$$cos\,C\hat{M}B = cos(\pi - B\hat{A}C) = -cos\,B\hat{A}C = -\frac{3}{5}\ .$$

d. Il quadrilatero AOCN ha i lati consecutivi uguali a due a due: $AO = OC$ perché raggi della circonferenza e $AN = NC$ perché corde sottese ad archi uguali, per cui le diagonali AC e ON sono perpendicolari:

$$S_{AOCN} = \frac{1}{2} AC \cdot ON = \frac{1}{2} \cdot \frac{36}{5} \cdot 6 = \frac{108}{5}\ .$$

1. In un triangolo ABC abbiamo $a=4$, $b=3$, $\beta=30°$.

   Determina i possibili valori dell'angolo α (sia esatti che approssimati al centesimo di grado).

2. L'area di un triangolo misura $S=3\,cm^2$ e due lati misurano $b=2\,cm$ e $c=3\,cm$.

   Calcola la misura del lato *a*.

3. Dato un triangolo isoscele, dimostra che la somma delle distanze di un punto della base dai lati obliqui è costante (la stessa per tutti i punti della base).

4. Due osservatori A e B, posti al suolo alla distanza $d=500\,m$, seguono con il cannocchiale un aeroplano. Quando questo passa per il piano verticale comune ad A e B ("*dalla stessa parte sia per A che per B*"), essi lo vedono con degli angoli di elevazione $\alpha=80{,}0°$ e $\beta=70{,}0°$ rispettivamente. A quale altezza dal suolo vola l'aeroplano?

5. Da un mazzo di 40 carte da gioco, vengono estratte 6 carte contemporaneamente.
   a. Qual è la probabilità che nessuna delle carte estratte sia rossa?
   b. Qual è la probabilità che, tra le carte estratte, vi siano esattamente 2 assi?

6. Qual è il numero delle cinquine che si possono ottenere completando l'ambo {3, 25}?

   (*Nel gioco del Lotto vengono estratti cinque numeri interi compresi tra 1 e 90*).

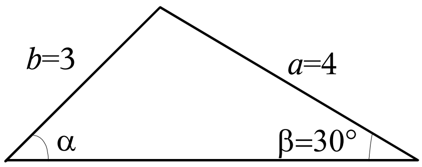
7. Per progettare un sito web è necessario generare dei codici unici di accesso. Si vogliono utilizzare, a tale scopo, due lettere maiuscole dell'alfabeto inglese seguite da una serie di cifre comprese tra 0 e 9. Tutti i codici di accesso dovranno avere lo stesso numero di cifre ed è ammessa la ripetizione di lettere e numeri. Qual è il numero minimo di cifre da impostare in modo da riuscire a generare almeno 5 milioni di codici di accesso diversi?

   (*Una risposta fornita per tentativi viene valutata molto meno di una che contiene il procedimento "formale"*)

8. Una classe è composta da 12 ragazzi e 4 ragazze.

   Tra i 16 allievi se ne scelgono 3 a caso: qual è la probabilità che essi siano tutti maschi?

4^F - Correzione compito n°4a



1. Applichiamo il teorema dei seni al triangolo ABC:

$$\frac{sen\,\alpha}{a}=\frac{sen\,\beta}{b} \;\Rightarrow\; sen\,\alpha=\frac{a}{b}sen\,\beta=\frac{4}{3}\cdot\frac{1}{2}=\frac{2}{3} \;\Rightarrow$$

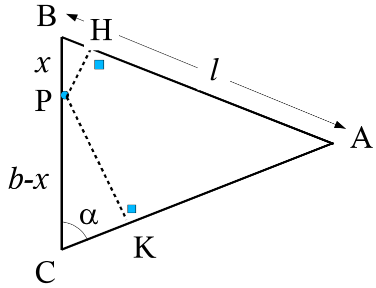
$$\alpha_1=arc\,sen\frac{2}{3}\simeq 41{,}81° \;\;;\;\; \alpha_2=180°-arc\,sen\frac{2}{3}\simeq 138{,}19° \;\;.$$

[*Q1 PNI 2014*]

2. Dalla formula per l'area del triangolo ricaviamo:

$$S=\frac{1}{2}bc\,sen\,\alpha \;\Rightarrow\; sen\,\alpha=\frac{2S}{bc}=\frac{2\cdot 3\,cm^2}{2\,cm\cdot 3\,cm}=1 \;\Rightarrow\; \alpha=90° \;\;.$$

Il triangolo è quindi rettangolo con ipotenusa $a=\sqrt{b^2+c^2}=\sqrt{2^2+3^2}=\sqrt{13}\,cm$. [*Q1 2013*]



3. Se indichiamo con *b* la misura della base del triangolo e con α quella dell'angolo alla base, un punto generico P della base ha distanze *x* e $b-x$ dagli estremi della base, con $0\le x\le b$.

La somma delle distanze del punto P dai lati obliqui è:

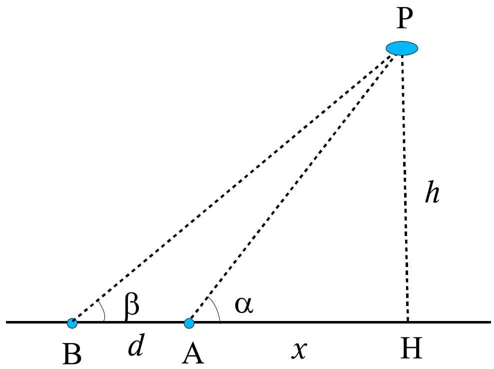
$$\overline{PH}+\overline{PK}=x\,sen\,\alpha+(b-x)\,sen\,\alpha=b\,sen\,\alpha$$

che non dipende da *x* c.v.d.

Oppure, senza utilizzare la trigonometria, esprimiamo l'area del triangolo isoscele:

$$S_{ABC}=A_{PAB}+S_{PAC}=\frac{l\cdot PH}{2}+\frac{l\cdot PK}{2} \;\Rightarrow\; PH+PK=\frac{2S_{ABC}}{l}=cost \;\;.$$

[*Q4 PNI sup 2007*]



4. Indichiamo con P la posizione dell'aeroplano e con H la sua proiezione sul suolo.

Dai triangoli rettangoli APH e BPH ricaviamo:

$$h=x\,tg\,\alpha \;\;;\;\; h=(d+x)\,tg\,\beta \;\;,$$

da cui, eliminando *x*:

$$h=\frac{tg\,\alpha\,tg\,\beta}{tg\,\alpha-tg\,\beta}d\simeq\frac{tg\,80°\,tg\,70°}{tg\,80°-tg\,70°}\cdot 500\,m\simeq 2.665\,m \;\;.$$

In alternativa, possiamo applicare il teorema dei seni al triangolo generico ABP.

Il testo ministeriale lascia aperta la possibilità che l'aeroplano si trovi “tra i due osservatori”, nel qual caso il segno a denominatore sarebbe positivo, ottenendo $h\simeq 925\,m$. [*Q1 Com str 2014*]

5.

a. Calcoliamo la probabilità che vengano estratte successivamente sei carte nere supponendo ogni volta che tutte le precedenti siano nere:

$$p(N_1\wedge\ldots\wedge N_6)=\frac{20}{40}\cdot\frac{19}{39}\cdot\frac{18}{38}\cdot\frac{17}{37}\cdot\frac{16}{36}\cdot\frac{15}{35}\simeq 0{,}0101\simeq 1{,}01\% \;\;.$$

Oppure applicando la def. classica: $p=\frac{C_{20,6}}{C_{40,6}}$.

b. Calcoliamo la probabilità che vengano estratti prima due assi e poi quattro carte diverse dagli assi, e poi moltiplichiamo per il numero di modi di scegliere due assi su sei carte:

$$p(A_1 \wedge A_2 \wedge \overline{A_3} \wedge \ldots \wedge \overline{A_6})=\frac{4}{40}\cdot\frac{3}{39}\cdot\frac{36}{38}\cdot\frac{35}{37}\cdot\frac{34}{36}\cdot\frac{33}{35}\cdot\binom{6}{2}\simeq 0{,}0921\simeq 9{,}21\% \quad .$$

Oppure applicando la def. classica: $p=\frac{C_{4,2}\cdot C_{36,4}}{C_{40,6}}$. [*Q5 str 2019*]

6. Per completare la cinquina, dobbiamo scegliere tre numeri tra 1 e 90 che non siano 3 e 25:

$$C_{88,3}=\frac{88\cdot 87\cdot 86}{3\cdot 2\cdot 1}=109.736 \quad .$$ [*Q10 PNI str 2014*]

7. Dobbiamo scegliere e ordinare due lettere scelte tra 26 ed *n* cifre scelte tra 10 (anche con eventuali ripetizioni), quindi:

$$D'_{26,2}\cdot D'_{10,n}=26^2\cdot 10^n>5\cdot 10^6 \;\Rightarrow\; n>log\frac{5\cdot 10^6}{26^2}=6+log\frac{5}{26^2}\simeq 3{,}87 \quad .$$

Sono quindi necessarie almeno 4 cifre. [*Q5 2^Sim 2015*]

8. Utilizziamo la formula della probabilità composta:

$$p(M_1 \wedge M_2 \wedge M_3)=\frac{12}{16}\cdot\frac{11}{15}\cdot\frac{10}{14}\simeq 0{,}393\simeq 39{,}3\% \quad .$$

Oppure applicando la def. classica: $p=\frac{C_{12,3}}{C_{16,3}}$. [*Q8 PNI 2001*]

<u>4^F - MATEMATICA</u> compito n°4*b* - 2020-21

1. In un triangolo ABC abbiamo $a=3$, $b=4$, $\alpha=30°$.

   Determina i possibili valori dell'angolo β (sia esatti che approssimati al centesimo di grado).

2. L'area di un triangolo misura $S=3\,cm^2$ e due lati misurano $a=2\,cm$ e $b=3\,cm$.

   Calcola la misura del lato *c*.

3. Dato un triangolo isoscele, dimostra che la somma delle distanze di un punto della base dai lati obliqui è costante (la stessa per tutti i punti della base).

4. Due osservatori A e B, posti al suolo alla distanza $d=600\,m$, seguono con il cannocchiale un aeroplano. Quando questo passa per il piano verticale comune ad A e B ("*dalla stessa parte sia per A che per B*"), essi lo vedono con degli angoli di elevazione $\alpha=70{,}0°$ e $\beta=80{,}0°$ rispettivamente. A quale altezza dal suolo vola l'aeroplano?

5. Da un mazzo di 52 carte da gioco, vengono estratte 5 carte contemporaneamente.

   a. Qual è la probabilità che nessuna delle carte estratte sia rossa?

   b. Qual è la probabilità che, tra le carte estratte, vi siano esattamente 2 assi?

6. Qual è il numero delle cinquine che si possono ottenere completando il terno {3, 25, 72}?

   (*Nel gioco del Lotto vengono estratti cinque numeri interi compresi tra 1 e 90*).

7. Per progettare un sito web è necessario generare dei codici unici di accesso. Si vogliono utilizzare, a tale scopo, due lettere maiuscole dell'alfabeto italiano seguite da una serie di cifre comprese tra 0 e 9. Tutti i codici di accesso dovranno avere lo stesso numero di cifre ed è ammessa la ripetizione di lettere e numeri. Qual è il numero minimo di cifre da impostare in modo da riuscire a generare almeno 4 milioni di codici di accesso diversi?

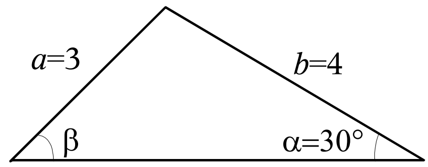
   (*Una risposta fornita per tentativi viene valutata molto meno di una che contiene il procedimento "formale"*)

8. Una classe è composta da 14 ragazzi e 5 ragazze.

   Tra i 19 allievi se ne scelgono 3 a caso: qual è la probabilità che essi siano tutte femmine?

4^F - Correzione compito n°4b

1. Applichiamo il teorema dei seni al triangolo ABC:



$$\frac{sen\,\alpha}{a}=\frac{sen\,\beta}{b} \Rightarrow sen\,\beta=\frac{b}{a}sen\,\alpha=\frac{4}{3}\cdot\frac{1}{2}=\frac{2}{3} \Rightarrow$$

$$\beta_1=arc\,sen\frac{2}{3}\simeq 41{,}81° \;;\; \beta_2=180°-arc\,sen\frac{2}{3}\simeq 138{,}19° \;.$$

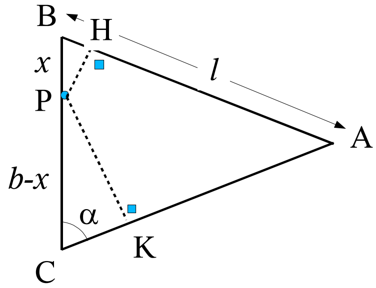
[*Q1 PNI 2014*]

2. Dalla formula per l'area del triangolo ricaviamo:

$$S=\frac{1}{2}ab\,sen\,\gamma \Rightarrow sen\,\gamma=\frac{2S}{ab}=\frac{2\cdot 3\,cm^2}{2\,cm\cdot 3\,cm}=1 \Rightarrow \gamma=90° \;.$$

Il triangolo è quindi rettangolo con ipotenusa $c=\sqrt{a^2+b^2}=\sqrt{2^2+3^2}=\sqrt{13}\,cm$. [*Q1 2013*]

3. Se indichiamo con *b* la misura della base del triangolo e con α quella dell'angolo alla base, un punto generico P della base ha distanze *x* e $b-x$ dagli estremi della base, con $0\le x\le b$.



La somma delle distanze del punto P dai lati obliqui è:

$$\overline{PH}+\overline{PK}=x\,sen\,\alpha+(b-x)\,sen\,\alpha=b\,sen\,\alpha$$

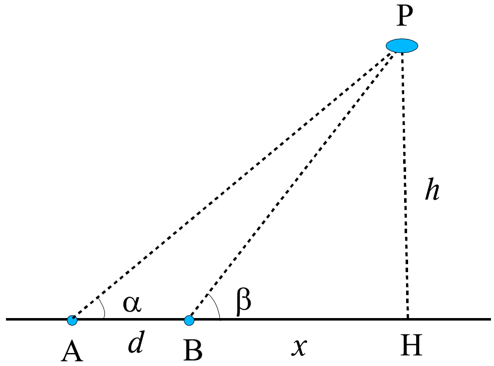
che non dipende da *x* c.v.d.

Oppure, senza utilizzare la trigonometria, esprimiamo l'area del triangolo isoscele:

$$S_{ABC}=A_{PAB}+S_{PAC}=\frac{l\cdot PH}{2}+\frac{l\cdot PK}{2} \Rightarrow PH+PK=\frac{2S_{ABC}}{l}=cost \;.$$

[*Q4 PNI sup 2007*]

4. Indichiamo con P la posizione dell'aeroplano e con H la sua proiezione sul suolo.



Dai triangoli rettangoli APH e BPH ricaviamo:

$$h=x\,tg\,\beta \;;\; h=(d+x)\,tg\,\alpha \;,$$

da cui, eliminando *x*:

$$h=\frac{tg\,\alpha\,tg\,\beta}{tg\,\beta-tg\,\alpha}d\simeq\frac{tg\,70°\,tg\,80°}{tg\,80°-tg\,70°}\cdot 600\,m\simeq 3.198\,m \;.$$

In alternativa, possiamo applicare il teorema dei seni al triangolo generico ABP.

Il testo ministeriale lascia aperta la possibilità che l'aeroplano si trovi "tra i due osservatori", nel qual caso il segno a denominatore sarebbe positivo, ottenendo $h\simeq 1.110\,m$. [*Q1 Com str 2014*]

5.

   a. Calcoliamo la probabilità che vengano estratte successivamente cinque carte nere supponendo ogni volta che tutte le precedenti siano nere:

$$p(N_1\wedge\ldots\wedge N_5)=\frac{26}{52}\cdot\frac{25}{51}\cdot\frac{24}{50}\cdot\frac{23}{49}\cdot\frac{22}{48}\simeq 0{,}0253\simeq 2{,}53\% \;.$$

Oppure applicando la def. classica: $p=\frac{C_{26,5}}{C_{52,5}}$.

b. Calcoliamo la probabilità che vengano estratti prima due assi e poi tre carte diverse dagli assi, e poi moltiplichiamo per il numero di modi di scegliere due assi su cinque carte:

$$p(A_1 \wedge A_2 \wedge \overline{A_3} \wedge \overline{A_4} \wedge \overline{A_5})=\frac{4}{52}\cdot\frac{3}{51}\cdot\frac{48}{50}\cdot\frac{47}{49}\cdot\frac{46}{48}\cdot\frac{5!}{2!3!}\simeq 0{,}0399\simeq 3{,}99\% \quad .$$

Oppure applicando la def. classica: $p=\frac{C_{4,2}\cdot C_{48,3}}{C_{52,5}}$. [*Q5 str 2019*]

6. Per completare la cinquina, dobbiamo scegliere due numeri tra 1 e 90 che non siano 3, 25, 72:

$$C_{87,2}=\frac{87\cdot 86}{2\cdot 1}=3.741 \quad .$$

[*Q10 PNI str 2014*]

7. Dobbiamo scegliere e ordinare due lettere scelte tra 21 ed n cifre scelte tra 10 (anche con eventuali ripetizioni), quindi:

$$D'_{26,2}\cdot D'_{10,n}=21^2\cdot 10^n>4\cdot 10^6 \;\Rightarrow\; n>log\frac{4\cdot 10^6}{21^2}=6+log\frac{4}{21^2}\simeq 3{,}96 \quad .$$

Sono quindi necessarie almeno 4 cifre. [*Q5 2^Sim 2015*]

8. Utilizziamo la formula della probabilità composta:

$$p(F_1 \wedge F_2 \wedge F_3)=\frac{5}{19}\cdot\frac{4}{18}\cdot\frac{3}{17}\simeq 0{,}0103\simeq 1{,}03\% \quad .$$

Oppure applicando la def. classica: $p=\frac{C_{5,3}}{C_{19,3}}$. [*Q8 PNI 2001*]

1. Sui lati OX e OY dell'angolo $X\hat{O}Y=120°$ prendi i punti A e B tali che $\overline{OA}=\overline{OB}=2a$.

   Internamente all'angolo $X\hat{O}Y$ prendi un punto P tale che l'angolo $O\hat{P}A$ sia retto e che il quadrilatero OAPB sia convesso.

   a. Poni $A\hat{O}P=x$ e calcola l'area $S(x)$ del quadrilatero OAPB in funzione di *x*.

   b. Determina le limitazioni geometriche sulla variabile *x* e calcola i valori assunti dalla funzione $S(x)$ agli estremi dell'intervallo determinato.

   c. Scrivi la funzione $S(x)$ nella forma $S(x)=A\,sen(\omega x+\phi)+k$.

      Tracciane il grafico su un intero periodo, e quindi evidenzia la parte del grafico che tiene conto delle limitazioni determinate nel punto *b*.

   d. Spiega quali valori dell'angolo *x* rendono massima o minima la funzione $S(x)$ (*tenendo conto delle limitazioni geometriche*) e calcola i valori massimo e minimo.

2. Un triangolo rettangolo ABC è inscritto in una circonferenza di diametro $\overline{AB}=2r$.

   Traccia la bisettrice dell'angolo $\hat{C}$ che interseca in I il diametro AB e in D la circonferenza.

   Poni $C\hat{A}B=x$ ed esprimi in funzione di *x*:

   a. la lunghezza del lato AC;

   b. la lunghezza della corda CD;

   c. l'area del triangolo ACD;

   d. la lunghezza della bisettrice CI;

   e. l'area del triangolo AIC;

   f. l'area del triangolo AID;

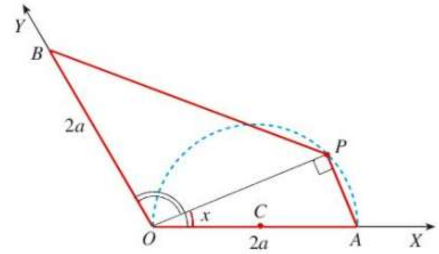
   g. il rapporto tra le aree dei triangoli ACD e AID.

   h. Determina per quali valori di *x* (*tenendo conto delle limitazioni geometriche*) il rapporto tra le aree calcolato nel punto precedente assume valori maggiori o uguali di 3/2.

<u>4^A</u> *- Correzione compito n°4*

1.

a. Per i teoremi dei triangoli rettangoli:



$AP=2a\,sen\,x \quad , \quad OP=2a\cos x \quad ,$

per cui l'area del triangolo rettangolo OAP misura:

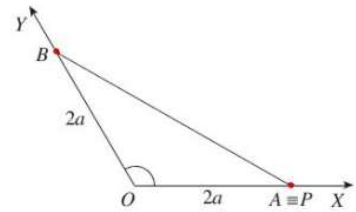
$$S_{OAP}=\frac{1}{2}AP\cdot OP=2a^2 sen\,x\cos x \quad .$$

Poiché $B\hat{O}P=120°-x$, l'area del triangolo generico BOP misura:

$$S_{BOP}=\frac{1}{2}OB\cdot OP\cdot sen\,B\hat{O}P=2a^2\cos x\,sen(120°-x)=a^2(\sqrt{3}\cos^2 x+sen\,x\cos x) \quad .$$

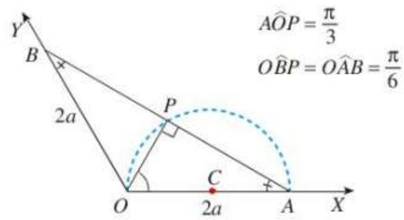
Quindi: $S(x)=S_{OAP}+S_{BOP}=a^2(3\,sen\,x\cos x+\sqrt{3}\cos^2 x) \quad .$

b. L'angolo x assume il valore minimo $x=0°$ quando $P\equiv A$, nel qual caso il quadrilatero OAPB degenera nel triangolo AOB.



Quindi: $S(0°)=\frac{1}{2}OA\cdot OB\,sen\,120°=a^2\sqrt{3} \quad .$

Poiché il testo chiede che il quadrilatero OAPB sia convesso, l'angolo x assume il valore massimo quando i punti A, P, B sono allineati. In questo caso, il quadrilatero OAPB degenera nel triangolo isoscele OAB, $x=60°$ e risulta ancora:



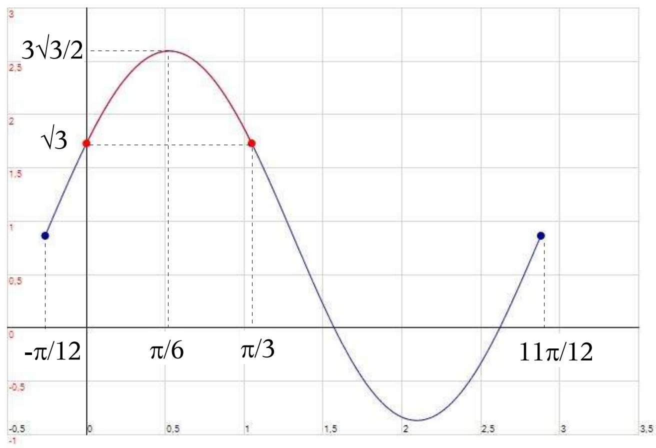
$$S(60°)=\frac{1}{2}OA\cdot OB\,sen\,120°=a^2\sqrt{3} \quad .$$

c. Invertiamo le formule di duplicazione e applichiamo il metodo dell'angolo aggiunto:

$S(x)=a^2(3\,sen\,x\cos x+\sqrt{3}\cos^2 x)=$

$\frac{a^2}{2}(3\,sen\,2x+\sqrt{3}\cos 2x+\sqrt{3})=$

$a^2\sqrt{3}\,sen(2x+30°)+a^2\frac{\sqrt{3}}{2} \quad .$



La funzione ha come grafico una sinusoide di periodo $T=180°$ e ampiezza $A=a^2\sqrt{3}$ che ha subito una traslazione di vettore $\vec{v}\equiv(-15°,a^2\sqrt{3}/2) \quad .$

Per semplicità, per tracciare il grafico è stato posto $a=1$ *.*

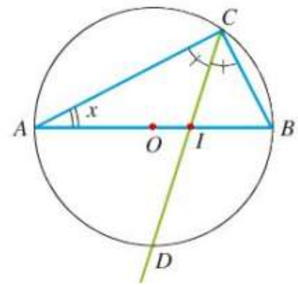
La parte di grafico che rispetta le limitazioni geometriche del problema è evidenziata in rosso.

d. La funzione $S(x)$ assume il valore minimo $S_{min}=a^2\sqrt{3}$ in corrispondenza dei casi limite studiati in precedenza, e quindi per $x=0°$ e $x=60°$.

Invece, $S(x)$ assume il valore massimo quando il seno è uguale ad 1, e quindi quando:

$2x+30°=90° \Rightarrow x=30°$, ed abbiamo $S_{max}=3a^2\sqrt{3}/2$.

2. L'angolo $A\hat{C}B=90°$ perché insiste su una semicirconferenza, per cui la bisettrice CD lo divide in due parti congruenti: $B\hat{C}D=A\hat{C}D=45°$.



a. Per i teoremi sui triangoli rettangoli: $AC=AB\cos\hat{A}=2r\cos x$.

b. $B\hat{A}D=B\hat{C}D=45°$ in quanto angoli alla circonferenza che insistono sullo stesso arco BD. Per il teorema della corda:

$CD=2r\,sen\,C\hat{A}D=2r\,sen(x+45°)=r\sqrt{2}(sen\,x+\cos x)$.

c. $S_{ACD}=\frac{1}{2}AC\cdot CD\cdot sen\,A\hat{C}D=\frac{1}{2}\cdot 2r\cos x\cdot r\sqrt{2}(sen\,x+\cos x)\cdot\frac{\sqrt{2}}{2}=r^2\cos x(senx+\cos x)$.

d. Applichiamo il teorema dei seni al triangolo ACI:

$\frac{CI}{sen\,\hat{A}}=\frac{AC}{sen\,A\hat{I}C} \Rightarrow CI=\frac{sen\,x}{sen(135°-x)}\cdot 2r\cos x=\frac{2\sqrt{2}r\,sen\,x\cos x}{sen\,x+\cos x}$.

e. $S_{AIC}=\frac{1}{2}AC\cdot CI\cdot sen\,A\hat{I}C=\frac{1}{2}\cdot 2r\cos x\cdot\frac{2\sqrt{2}r\,sen\,x\cos x}{sen\,x+\cos x}\cdot sen\,45°=\frac{2r^2 sen\,x\cos^2 x}{sen\,x+\cos x}$.

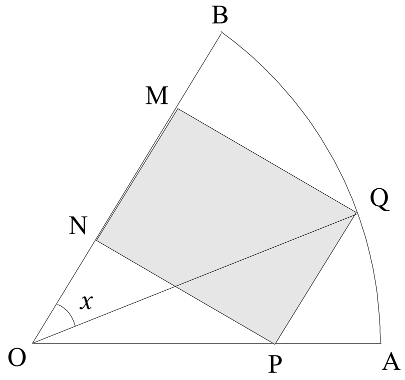
f. $S_{AID}=S_{ACD}-S_{AIC}=r^2\cos x[(sen\,x+\cos x)-\frac{2\,sen\,x\cos x}{sen\,x+\cos x}]=$

$r^2\cos x\frac{(sen\,x+\cos x)^2-2\,sen\,x\cos x}{sen\,x+\cos x}=r^2\frac{\cos x}{sen\,x+\cos x}$.

g. $\frac{S_{ACD}}{S_{AID}}=r^2\cos x(senx+\cos x)\cdot\frac{sen\,x+\cos x}{r^2\cos x}=(sen\,x+\cos x)^2=1+2\,sen\,x\cos x$.

h. Il problema è definito per $0°\le x\le 90°$ (*con i casi limite di dubbia accettabilità*).

$\frac{S_{ACD}}{S_{AID}}=1+sen\,2x\ge\frac{3}{2} \Rightarrow sen\,2x\ge\frac{1}{2} \Rightarrow 30°\le 2x\le 150° \Rightarrow 15°\le x\le 75°$.



1. Nel settore circolare OAB di ampiezza $\alpha=60°$ e raggio $r=1$ è inscritto il rettangolo MNPQ (*vedi figura*).
   a. Determina l'area del rettangolo in funzione dell'angolo $P\hat{O}Q=x$ e scrivila come $S(x)=A\,sen(\omega x+\phi)+k$.
   b. Determina per quale valore di x l'area è massima e calcola tale valore massimo.
2. Considera l'insieme A delle sequenze di sei cifre. Ad esempio: 272348 e 003714 sono elementi di A.
   Determina utilizzando le proprietà del calcolo combinatorio ed esponendo i tuoi ragionamenti:
   a. il numero di elementi di A;
   b. il numero di elementi di A che sono numeri naturali di sei cifre;
   c. il numero di elementi di A che contengono sei cifre diverse;
   d. il numero di elementi di A che hanno <u>solo</u> due cifre uguali;
   e. il numero di elementi di A che hanno <u>almeno</u> due cifre uguali;
   f. il numero di elementi di A che non contengono lo zero.
   g. In Italia le targhe dei ciclomotori vengono formate da sequenze di sei caratteri, che possono essere cifre o lettere dell'alfabeto inglese (26 caratteri) secondo le seguenti regole:
      - il primo carattere può essere una cifra tra 2 e 9 o una lettera tra X, Y, Z;
      - i cinque caratteri rimanenti possono essere una cifra tra 2 e 9 o una consonante (esclusa la Q), e sono ammesse ripetizioni.

      Quale percentuale delle sequenze possibili è costituita dalle targhe che contengono sei cifre?
3. Una azienda produce dei componenti elettronici, e la probabilità che un componente prodotto sia difettoso è $p=0{,}002$. Per un controllo della qualità, viene estratto un campione di 20 componenti. Calcola:
   a. la probabilità che il campione estratto non contenga alcun pezzo difettoso;
   b. la probabilità che il campione estratto contenga esattamente due pezzi difettosi;
   c. la probabilità che il campione estratto contenga almeno un pezzo difettoso.
   d. Da quanti componenti al massimo può essere costituito uno stock di vendita, se si vuole che la probabilità che esso non contenga alcun pezzo difettoso sia superiore al 95%?

4. La diagnosi di un'infezione è effettuata mediante un test clinico a cui risulta positivo il 98% dei soggetti infetti e il 4% dei soggetti non infetti. Possiamo stimare che nella popolazione un soggetto su mille abbia l'infezione. Considera gli eventi:

   - I = "il soggetto è infetto";
   - S = "il soggetto è sano";
   - N = "il soggetto è negativo al test";
   - P = "il soggetto è positivo al test".

   Calcola (*con almeno tre cifre significative*):

   a. la probabilità che un soggetto sia positivo al test;

   b. la probabilità che un soggetto sia negativo al test;

   c. la probabilità che un soggetto sia positivo al test e che sia sano;

   d. la probabilità che un soggetto risulti negativo al test sapendo che è infetto;

   e. la probabilità che un soggetto sia infetto sapendo che è risultato positivo al test;

   f. la probabilità che un soggetto sia sano sapendo che è risultato negativo al test.

   g. Spiega se gli eventi P ed S sono incompatibili.

   h. Spiega se gli eventi I e P sono indipendenti.

   i. In base ai risultati che hai ottenuto nei punti e ed f, spiega come dovrebbe comportarsi un medico che analizza l'esito del test.

4^A - Correzione compito n°5

1.

a. Dal triangolo rettangolo OQM ricaviamo: $MQ = OQ\, sen\, x = senx$.

Nel triangolo generico OPQ abbiamo:

- $O\hat{Q}P = Q\hat{O}B = x$ perché angoli alterni interni formati dalle rette PQ e OB (parallele perché contenenti i lati opposti di un rettangolo) tagliate dalla trasversale OQ;
- $Q\hat{O}P = B\hat{O}P - B\hat{O}Q = 60° - x$ e $Q\hat{P}O = 180° - O\hat{Q}P - Q\hat{O}P = 120°$

  o, più semplicemente: $O\hat{P}Q = O\hat{P}N + N\hat{O}Q = 30° + 90° = 120°$.

Applichiamo quindi il teorema dei seni al triangolo OPQ:

$$\frac{PQ}{sen(60° - x)} = \frac{OQ}{sen\, 120°} \Rightarrow PQ = \frac{\sqrt{3}/2\, cos\, x - 1/2\, sen\, x}{\sqrt{3}/2} = cos\, x - \frac{1}{\sqrt{3}} sen\, x \quad .$$

Oppure dal triangolo rettangolo OQM ricaviamo: $OM = OQ\, cos\, x = cos\, x$; dal triangolo rettangolo OPN ricaviamo: $ON = NP\, tg\, 30° = sen\, x / \sqrt{3}$ e facciamo la differenza.

L'area del rettangolo misura quindi: $S(x) = MQ \cdot PQ = sen\, x\, cos\, x - \frac{1}{\sqrt{3}} sen^2 x$.

Applichiamo prima le formule di duplicazione e poi il metodo dell'angolo aggiunto:

$$S(x) = \frac{1}{2} sen\, 2x + \frac{1}{2\sqrt{3}} cos\, 2x - \frac{1}{2\sqrt{3}} = \frac{1}{\sqrt{3}} sen(2x + 30°) - \frac{1}{2\sqrt{3}} \quad .$$

A causa delle limitazioni del problema, la funzione è definita per $0° \leq x \leq 60°$.

b. La funzione $S(x)$ assume il valore massimo quando il seno è uguale ad 1, e quindi quando:

$2x + 30° = 90° \Rightarrow x = 30°$, nel qual caso $S_{max} = 1/(2\sqrt{3})$.

2.

a. Devo scegliere e ordinare sei cifre in un insieme che ne comprende dieci, e sono ammesse ripetizioni: $D'_{10,6} = 10^6 = 1.000.000$.

b. La prima cifra deve essere diversa da zero, mentre le cifre successive possono essere comprese tra zero e nove e possono ammettere ripetizioni: $D_{9,1} \cdot D'_{10,5} = 9 \cdot 10^5 = 900.000$.

c. Come la risposta *a*, ma non sono ammesse ripetizioni: $D_{10,6} = 10 \cdot 9 \cdot 8 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 5 = \frac{10!}{4!} = 151.200$.

d. Un possibile ragionamento è il seguente:

- scelgo la cifra che verrà ripetuta: $C_{10,1}$;
- scelgo quattro cifre diverse tra le rimanenti nove: $C_{9,4}$;
- permuto le sei cifre scelte, di cui due sono uguali: P_6 / P_2 .

In conclusione: $C_{10,1} \cdot C_{9,4} \cdot \frac{P_6}{P_2} = 10 \cdot \frac{9 \cdot 8 \cdot 7 \cdot 6}{4 \cdot 3 \cdot 2} \cdot \frac{6!}{2!} = 453.600$.

Un ragionamento lievemente diverso può essere il seguente:

- scelgo la prima cifra: $D_{10,1}$;
- impongo che la seconda cifra sia uguale alla prima: $D_{1,1}$;
- scelgo le successive quattro cifre in modo che siano diverse dalla prima e tra loro: $D_{9,4}$;
- scelgo quali posizioni sono occupate dalle due cifre uguali: $C_{6,2}$.

e. Il numero di sequenze che hanno almeno due cifre uguali è dato dalla differenza tra il numero totale di sequenze ed il numero di sequenze aventi sei cifre diverse, e, quindi, dalla differenza tra i risultati dei punti *a* e *c*: $1.000.000 - 151.200 = 848.800$.

f. Come la risposta *a*, ma l'insieme comprende nove elementi: $D'_{9,6} = 190^6 = 531.441$.

g. Per le targhe possibili ho 11 possibilità di scelta (8 cifre e 3 lettere) per il primo carattere e 28 possibilità di scelta (8 cifre e 20 consonanti) per i caratteri successivi, con possibilità di ripetizione:

$$D_{11,1} \cdot D'_{28,5} = 11 \cdot 28^5 = 189.314.048$$.

Per le targhe con sei cifre: $D'_{8,6} = 8^6 = 262.144$.

La percentuale richiesta è quindi: $\frac{D'_{8,6}}{D_{11,1} \cdot D'_{28,5}} \cdot 100 = \frac{262.144}{189.314.048} \cdot 100 \simeq 0{,}138\,\%$.

In alternativa, possiamo osservare che la probabilità che la targa sia formata da sei cifre è:

$$p(6\,cifre) = p(1^a\,cifra) \cdot p(2^a - 6^a\,cifra) = \frac{8}{11} \cdot \left(\frac{8}{28}\right)^5 \simeq 0{,}138\,\%$$.

3.

a. La probabilità che un pezzo non sia difettoso è $1-p$.

Supponendo che la probabilità che un dato pezzo sia difettoso non sia influenzata da quella che un altro pezzo sia difettoso, ovvero supponendo di avere 20 eventi indipendenti, la probabilità richiesta è: $p(funz_1 \wedge \ldots \wedge funz_{20}) = (1-p)^{20} = (0{,}998)^{20} \simeq 0{,}961 \simeq 96{,}1\,\%$.

b. Moltiplichiamo la probabilità di avere due pezzi difettosi e 18 funzionanti per il numero di modi in cui possiamo scegliere due pezzi difettosi su 20:

$$p(2\,dif) = \binom{20}{2} \cdot p^2 \cdot (1-p)^{18} = \frac{20 \cdot 19}{2} \cdot 0{,}002^2 \cdot 0{,}998^{18} \simeq 7{,}33 \cdot 10^{-4} \simeq 0{,}0733\,\%$$.

c. Si tratta dell'evento contrario a quello considerato nel punto *a*, quindi:

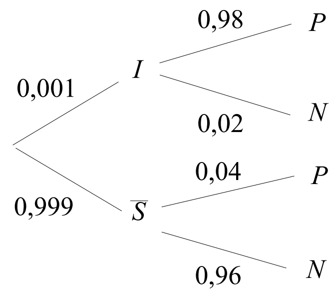
$$p(almeno\,1\,dif) = 1 - p(20\,funz) \simeq 1 - 0{,}961 \simeq 0{,}039 \simeq 3{,}9\,\%$$.

d. Se indichiamo con *n* il numero di componenti dello stock, avremo:

$$p(n\,funz) = (1-p)^n > 0{,}95 \;\Rightarrow\; n < log_{1-p} 0{,}95 \;\Rightarrow\; n < \frac{log\,0{,}95}{log\,0{,}998} \simeq 25{,}6$$.

Quindi lo stock può essere costituito al massimo da 25 componenti.

4. Osserviamo (se non fosse ovvio) che $N=\overline{P}$ e $S=\overline{I}$.



   a. $p(P)=p(I)\cdot p(P/I)+p(S)\cdot p(P/S)=0{,}001\cdot 0{,}98+0{,}999\cdot 0{,}04=0{,}040\,94$;

   b. $p(N)=1-p(P)=1-0{,}040\,94=0{,}959\,06$;

   c. $p(P\wedge S)=p(S)\cdot p(P/S)=0{,}999\cdot 0{,}04=0{,}039\,96$;

   d. $p(N/I)=0{,}02$ (*fornita dal testo del problema*);

   e. $p(I/P)=\dfrac{p(I)\cdot p(P/I)}{p(P)}=\dfrac{0{,}001\cdot 0{,}98}{0{,}040\,94}\simeq 0{,}023\,937$;

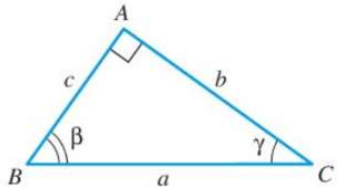
   f. $p(S/N)=\dfrac{p(S)\cdot p(N/S)}{p(N)}=\dfrac{0{,}999\cdot 0{,}96}{0{,}959\,06}\simeq 0{,}999\,979$;

   g. Gli eventi P ed S non sono incompatibili, in quanto $p(P\wedge S)=0{,}039\,96\neq 0$, come calcolato nel punto *c*.

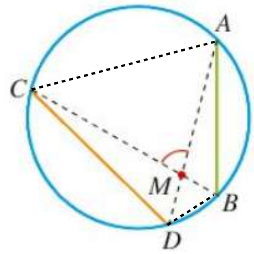
   h. Gli eventi I e P non sono indipendenti, in quanto $p(I/P)\simeq 0{,}023\,937\neq p(I)$, come calcolato nel punto *e*.

   i. Dal punto *f* sappiamo che, se il test ha dato esito negativo, siamo ragionevolmente certi che il paziente sia sano, per cui non dovrebbe essere opportuno sottoporlo ad ulteriori esami.

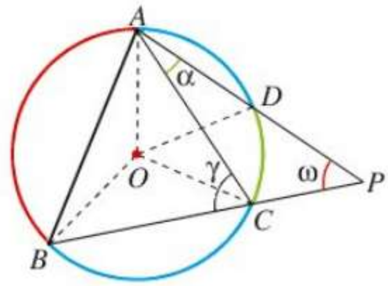
      Dal punto *e*, invece, vediamo che, anche se il test ha dato esito positivo, la probabilità che il paziente sia realmente infetto è relativamente bassa (poco superiore al 2%), per cui, prima di intraprendere un percorso di terapia, potrebbe essere utile sottoporlo ad ulteriori esami.



1. Dato il triangolo rettangolo in figura, esprimi $cos(\beta-\gamma)$ in funzione delle misure *a*, *b*, *c* dei lati.
2. Calcola la misura degli angoli di un rombo sapendo che la sua area misura $A=1\,m^2$ e che i suoi lati misurano $l=\sqrt[4]{2}$.



3. Nella circonferenza in figura, AB è il lato del quadrato inscritto e CD il lato del triangolo equilatero inscritto. Calcola $ctg(2\,A\hat{M}C)$.
4. Dato il triangolo isoscele ABC di base $BC=2a$ e altezza $AM=h$, indica con H l'ortocentro (*punto di intersezione delle altezze*) e calcola $tg\,B\hat{H}C$.
5. In una circonferenza di raggio $r=5\,cm$, calcola la lunghezza *l (approssimata alla seconda cifra decimale)* della corda sottesa da un angolo al centro di ampiezza $\alpha=1\,rad$.



6. La circonferenza in figura ha raggio $OA=3\,cm$ e gli angoli al centro $A\hat{O}B=3/4\pi$ e $C\hat{O}D=\pi/4$.

   Calcola: il valore di $ctg\,\omega$, la lunghezza della corda AB ed il rapporto tra le aree dei triangoli AOB e COD.
7. Risolvi le seguenti disequazioni goniometriche nell'intervallo $[0,2\pi]$:

   a. $\sqrt{2}\,sen(2x+\frac{\pi}{8})\geq 1$;

   b. $2\,sen^2 x - sen\,x - 1 \geq 0$;

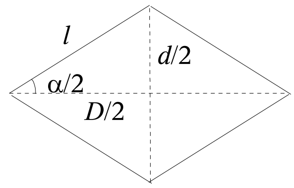
   c. $\sqrt{3}\,sen\,x - cos\,x \geq -\sqrt{3}$;

   d. $\frac{sen\,x}{2\,sen\,x-1}\geq 0$.

4^C - Correzione compito n°3

1. $cos(\beta-\gamma)=cos\,\beta\,cos\,\gamma+sen\,\beta\,sen\,\gamma=\frac{c}{a}\cdot\frac{b}{a}+\frac{b}{a}\cdot\frac{c}{a}=\frac{2bc}{a^2}$.

2. Indichiamo con α l'ampiezza di uno degli angoli del rombo e con *l* la misura dei suoi lati. Ricordando che le diagonali del rombo sono perpendicolari e sono bisettrici degli angoli da cui hanno origine, ricaviamo le loro misure: $d=2l\,sen\,\alpha/2$, $D=2l\,cos\,\alpha/2$.



   Imponiamo la condizione sull'area:

   $$A=\frac{d\,D}{2}=2l^2\,sen\frac{\alpha}{2}\,cos\frac{\alpha}{2}=l^2\,sen\,\alpha \Rightarrow (\sqrt[4]{2})^2\,sen\,\alpha=1 \Rightarrow sen\,\alpha=\frac{\sqrt{2}}{2} \Rightarrow \alpha=45°$$.

   Quindi, due degli angoli del rombo misurano 45° e gli altri due 135°.

3. Indicando con *r* il raggio della circonferenza, sappiamo che il lato del quadrato inscritto misura $r\sqrt{2}$ ed il lato del triangolo equilatero inscritto misura $r\sqrt{3}$.

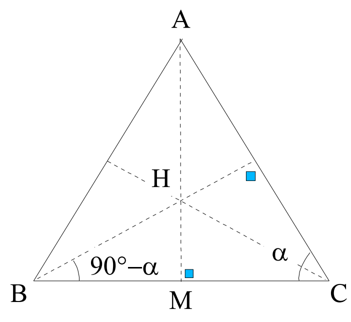
   Se non conosciamo o non ricordiamo i precedenti risultati, possiamo ricavarli applicando il teorema della corda:

   - l'angolo alla circonferenza sotteso dal lato del quadrato inscritto misura 45°, per cui:
     $l_4=2r\,sen\,45°=r\sqrt{2}$;
   - l'angolo alla circonferenza sotteso dal lato del triangolo equilatero inscritto misura 60°, per cui:
     $l_3=2r\,sen\,60°=r\sqrt{3}$.

   Per il risultato precedente, e per il teorema che afferma che tutti gli angoli alla circonferenza che insistono sullo stesso arco (o che sono sottesi dalla stessa corda) sono congruenti, possiamo affermare che: $A\hat{C}B=45°$, $C\hat{A}D=60°$. Per la somma degli angoli interni di un triangolo: $A\hat{M}C=180°-A\hat{C}B-C\hat{A}D=75°$. Quindi: $ctg(2\,A\hat{M}C)=ctg\,150°=-\sqrt{3}$.

4. Se indichiamo con α gli angoli alla base del triangolo isoscele, abbiamo $C\hat{B}H=90°-\alpha$, e quindi $B\hat{H}M=\alpha$ per differenza.

   Quindi: $tg\,B\hat{H}C=tg\,2\alpha=\frac{2\,tg\,\alpha}{1-tg^2\alpha}=\frac{2\,h/a}{1-h^2/a^2}=\frac{2ah}{a^2-h^2}$.



5. Per il teorema della corda:
   $l=2r\,sen\,\alpha/2\simeq 10\,sen\,1/2\simeq 4{,}79\,cm$.

6. Sappiamo che un angolo alla circonferenza ha ampiezza uguale alla metà di quella del corrispondente angolo al centro (che insiste sullo stesso arco), per cui:

   $$\alpha=D\hat{A}C=\frac{1}{2}D\hat{O}C=\frac{\pi}{8} \quad ; \quad \gamma=A\hat{C}B=\frac{1}{2}A\hat{O}B=\frac{3}{8}\pi \Rightarrow A\hat{C}P=\pi-\gamma=\frac{5}{8}\pi$$.

   Per differenza: $\omega=A\hat{P}C=\pi-\alpha-A\hat{C}P=\frac{\pi}{4} \Rightarrow ctg\,\omega=1$.

Per il teorema della corda: $AB=2r\,sen\,\gamma=6\,sen\,\frac{3}{8}\pi=3\sqrt{2+\sqrt{2}}\,cm$.

Il triangolo AOB ha base $AB=2r\,sen\,3/8\pi$ e altezza $OH=r\,sen\,3/8\pi$, per cui:

$$Area_{AOB}=r^2\,sen\frac{3}{8}\pi\,cos\frac{3}{8}\pi=\frac{1}{2}r^2\,sen\frac{3}{4}\pi \quad .$$

In maniera analoga: $CD=2r\,sen\,\pi/8$, altezza $OK=r\,sen\,\pi/8$, per cui:

$$Area_{COD}=r^2\,sen\frac{\pi}{8}\,cos\frac{\pi}{8}=\frac{1}{2}r^2\,sen\frac{\pi}{4} \quad .$$

Poiché $sen\frac{\pi}{4}=sen\frac{3}{4}\pi$, i due triangoli sono equivalenti, per cui: $\frac{Area_{AOB}}{Area_{COD}}=1$.

7.

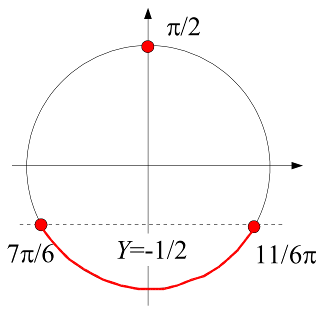
a. $sen(2x-\frac{\pi}{8})\geq\frac{\sqrt{2}}{2} \Rightarrow \frac{\pi}{4}+2k\pi\leq 2x-\frac{\pi}{8}\leq\frac{3}{4}\pi+2k\pi \Rightarrow \frac{\pi}{8}+2k\pi\leq 2x\leq\frac{3}{8}\pi+2k\pi \Rightarrow$

$\frac{\pi}{16}+k\pi\leq x\leq\frac{3}{16}\pi+k\pi$. $Sol:\ \frac{\pi}{16}\leq x\leq\frac{3}{16}\pi \vee \frac{17}{16}\pi\leq x\leq\frac{19}{16}\pi$.

b. $2\,sen^2 x-sen\,x-1=0 \Rightarrow sen\,x=\frac{1\pm\sqrt{1+8}}{4} \Rightarrow$

$sen\,x=-\frac{1}{2} \vee sen\,x=1$.

$Sol:\ x=\frac{\pi}{2} \vee \frac{7}{6}\pi\leq x\leq\frac{11}{6}\pi$.



c. Applicando il metodo dell'angolo “aggiunto”, riscriviamo la disequazione nella forma:

$sen(x-\frac{\pi}{6})\geq-\frac{\sqrt{3}}{2} \Rightarrow -\frac{\pi}{3}+2k\pi\leq x-\frac{\pi}{6}\leq\frac{4}{3}\pi+2k\pi \Rightarrow -\frac{\pi}{6}+2k\pi\leq x\leq\frac{3}{2}\pi+2k\pi$.

$Sol:\ 0\leq x\leq\frac{3}{2}\pi \vee \frac{11}{6}\pi\leq x\leq 2\pi$.

d. $sen\,x\geq 0 \Rightarrow 0\leq x\leq\pi$;

$2\,sen\,x-1\geq 0 \Rightarrow \frac{\pi}{6}\leq x\leq\frac{5}{6}\pi$.

0		π/6		5/6π		π		2π	
o	+	+	+	+	+	o	-	o	$sen\,x$
-	-	o	+	o	-	-	-	-	$2\,sen\,x$ -1
o	-	●	+	●	-	o	+	o	$f(x)$

$Sol:\ x=0 \vee \frac{\pi}{6}<x<\frac{5}{6}\pi \vee \pi\leq x\leq 2\pi$.

4^C - MATEMATICA compito n°4 - 2017-18

1. Nel triangolo ABC, rettangolo in A, il punto I è il centro della circonferenza inscritta.

   Calcola $tg\, B\hat{I}C$.

2. Un poligono regolare di *n* lati è inscritto in un cerchio di raggio *r*.

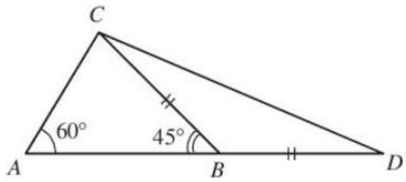
   Esprimi perimetro ed area del poligono in funzione di *n* e di *r*.

3. Le diagonali di un parallelogramma misurano 6 *m* e 8 *m* e formano un angolo di 60°.

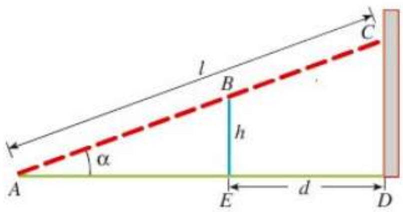
   Calcola perimetro ed area del parallelogramma (*valori esatti*).

4. Nei triangoli ABC e BCD sappiamo che: $AB=\sqrt{2/3}$, $\hat{A}=60°$, $A\hat{B}C=45°$, $BC=BD$.

   Calcola BC (*valore esatto*) e CD (*approssimato al centesimo*).

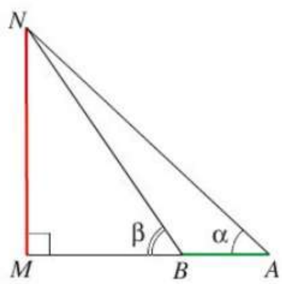


5. La scala AB tocca il muro CD nel punto C, è appoggiata al sostegno verticale BE nel punto E ed è inclinata di un angolo α sul piano orizzontale. Conoscendo $\overline{BE}=h$ e $\overline{DE}=d$, esprimi la lunghezza $\overline{AC}=l$ della scala in funzione di α, *h*, *d*.



6. Calcola poi la misura di *l* (approssimata al *cm*) nel caso in cui $h=2\,m$, $d=4\,m$, $\alpha=30°$.

7. Una nave posta nel punto A vede la scogliera MN sotto un angolo α. Dopo che la nave si è avvicinata di un tratto $AB=d$, l'angolo sotto il quale la nave vede la scogliera assume il valore β. Determina una formula che esprima l'altezza $\overline{MN}=h$ della scogliera in funzione di α, β, *d*. Calcola il valore di *h* (*approssimato al metro*) nel caso in cui $\alpha=35°$, $\beta=50°$, $d=1700\,m$.



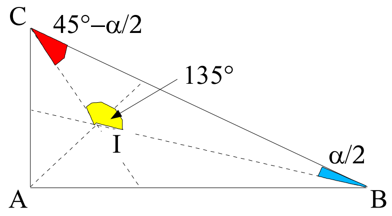
8. Dato un quadrato ABCD di lato *l*, conduci dal vertice A una semiretta che incontra il lato BC in E ed il prolungamento del lato DC in F.

   Poni $B\hat{A}E=x$ ed esprimi il rapporto $f(x)=\dfrac{BE+DF}{AB}$ in funzione di *x*.

   Determina per quali valori di *x* si ha $f(x)\geq 2$.

<u>4^C</u> - *Correzione compito n°4*

1. L'incentro di un triangolo è il punto di intersezione delle sue bisettrici.

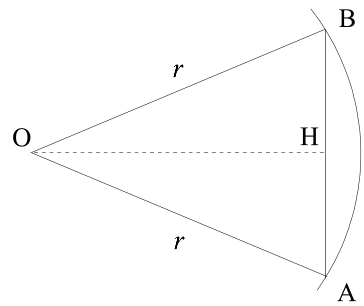


   Se poniamo $A\hat{B}C=\alpha$, abbiamo quindi:

   $A\hat{C}B=90°-\alpha$, $I\hat{B}C=\alpha/2$, $I\hat{C}B=45°-\alpha/2$ e $B\hat{I}C=135°$

   per differenza. Quindi $tg\,B\hat{I}C=-1$.

2. Indichiamo con O il centro della circonferenza e con AB il lato del poligono regolare inscritto.

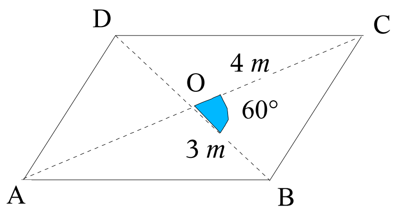


   Il poligono regolare ha n lati congruenti, che sono corde della circonferenza circoscritta al poligono. Ad essi corrispondono n archi congruenti ed n angoli al centro congruenti, per cui $A\hat{O}B=2\pi/n$. Il triangolo AOB è isoscele, in quanto due lati sono raggi della circonferenza, per cui altezza. mediana e bisettrice relative alla base coincidono.

   Quindi: $A\hat{O}H=\dfrac{\pi}{n} \Rightarrow OH=OA\cos A\hat{O}H=r\cos\dfrac{\pi}{n};\quad AB=2\,OA\,sen\,A\hat{O}H=2r\,sen\dfrac{\pi}{n}$.

   Infine: $2p_{pol}=n\,AB=2nr\,sen\dfrac{\pi}{n}$; $S_{pol}=\dfrac{n}{2}AB\cdot OH=nr^2\,sen\dfrac{\pi}{n}\cos\dfrac{\pi}{n}=\dfrac{n}{2}r^2\,sen\dfrac{2\pi}{n}$.

3. Per il teorema di Carnot:



   $BC=\sqrt{OB^2+OC^2-2\,OB\cdot OC\cos B\hat{O}C}=\sqrt{9+16-2\cdot 3\cdot 4\cdot 1/2}=\sqrt{13}$;

   $AB=\sqrt{OB^2+OA^2-2\,OB\cdot OC\cos B\hat{O}C}=\sqrt{9+16+2\cdot 3\cdot 4\cdot 1/2}=\sqrt{37}$.

   Quindi: $2p_{ABCD}=2(\sqrt{13}+\sqrt{37})m$.

   $S_{BOC}=\dfrac{1}{2}OB\cdot OC\cdot sen\,B\hat{O}C=\dfrac{1}{2}\cdot 3\cdot 4\cdot\dfrac{\sqrt{3}}{2}=3\sqrt{3}\,m^2 \Rightarrow 4S_{ABCD}=4S_{BOC}=12\sqrt{3}\,m^2$.

   Infatti, i quattro triangoli che compongono un parallelogramma sono tutti equivalenti in quanto due angoli supplementari hanno lo stesso seno (oltre alla spiegazione sintetica).

4. Applichiamo il teorema dei seni al triangolo ABC:

   $\dfrac{BC}{sen\,\hat{A}}=\dfrac{AB}{sen\,A\hat{B}C} \Rightarrow BC=\dfrac{\sqrt{3}/2}{(\sqrt{6}+\sqrt{2})/4}\cdot\sqrt{\dfrac{2}{3}}=\dfrac{2}{\sqrt{3}+1}=\sqrt{3}-1$.

   Poiché il triangolo BCD è isoscele, viene diviso dall'altezza relativa a CD in due triangoli rettangoli congruenti, per cui: $CD=2\,BC\,sen\,B\hat{C}D/2=2(\sqrt{3}-1)sen(135°/2)\simeq 1{,}35$.

5. Ponendo $AE=x$, ricaviamo dal triangolo rettangolo ABE: $tg\,\alpha=\dfrac{BE}{AE} \Rightarrow x=\dfrac{h}{tg\,\alpha}$.

   Dal triangolo rettangolo ACD ricaviamo poi: $\cos\alpha=\dfrac{AD}{AC} \Rightarrow l=\dfrac{x+d}{\cos\alpha}=\dfrac{h}{sen\,\alpha}+\dfrac{d}{\cos\alpha}$.

Nel caso particolare: $l = \dfrac{2}{1/2} + \dfrac{4}{\sqrt{3}/2} \simeq 8{,}62\,m$.

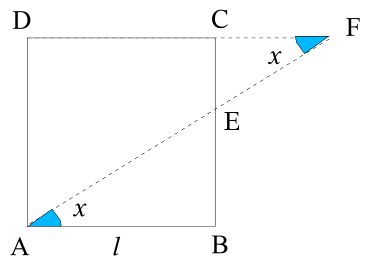
6. Poniamo $BM = x$. Dal triangolo rettangolo ABM ricaviamo: $tg\,\alpha = \dfrac{MN}{MA} = \dfrac{h}{x+d} \Rightarrow x = \dfrac{h}{tg\,\alpha} - d$.

Dal triangolo rettangolo BMN: $tg\,\beta = \dfrac{MN}{BM} = \dfrac{h}{x} \Rightarrow x = \dfrac{h}{tg\,\beta}$.

Ricaviamo quindi: $\dfrac{h}{tg\,\alpha} - d = \dfrac{h}{tg\,\beta} \Rightarrow h\,tg\,\beta - h\,tg\,\alpha = d\,tg\,\alpha\,tg\,\beta\,h \Rightarrow h = \dfrac{tg\,\alpha\,tg\,\beta}{tg\,\beta - tg\,\alpha} d$.

Nel caso particolare: $h = \dfrac{tg\,35°\,tg\,50°}{tg\,50° - tg\,35°} \cdot 1700\,m \simeq 2886\,m$.

7. Consideriamo il triangolo rettangolo ABE: $tg\,x = \dfrac{BE}{AB} \Rightarrow BE = l\,tg\,x$.



Osserviamo che $C\hat{F}E = B\hat{A}E$ in quanto angoli alterni interni formati dalle rette parallele AB e DF tagliate dalla trasversale AF.

Consideriamo il triangolo rettangolo ADF: $tg\,x = \dfrac{AD}{DF} \Rightarrow DF = \dfrac{l}{tg\,x}$.

Quindi $f(x) = \dfrac{BE + DF}{AB} = tg\,x + \dfrac{1}{tg\,x}$.

Poniamo $f(x) = tg\,x + \dfrac{1}{tg\,x} \geq 2 \Rightarrow \dfrac{tg^2 x - 2\,tg\,x + 1}{tg\,x} \geq 0 \Rightarrow \dfrac{(tg\,x - 1)^2}{tg\,x} \geq 0$.

La disequazione è verificata per tutti i valori di x per cui il problema è definito, ovvero per $0° < x \leq 45°$, in quanto il numeratore è un quadrato, e quindi maggiore o uguale a zero, mentre il denominatore è strettamente positivo nell'intervallo considerato.

Casi limite: per $x = 0°$, il punto E coincide con B, mentre F non è definito (*non accettabile*); per $x = 45°$, i punti E ed F coincidono con C (*accettabile*).

4^C - MATEMATICA compito n°5 - 2017-18

1. Dimostra che la misura dell'altezza di un triangolo relativa al lato a è $h_a = \frac{sen\,\beta\, sen\,\gamma}{sen\,\alpha} a$.

   Distingui i casi in cui l'altezza h_a è interna o esterna al triangolo.

2. Data la semicirconferenza di diametro AB, centro O e raggio r, traccia le corde $AD=r$ e $BC=r/2$. Calcola la lunghezza della corda CD.

3. Sono date le sei cifre 2, 3, 4, 5, 7, 9 e non sono permesse ripetizioni. Calcola:

   a. quanti numeri di cinque cifre si possono formare;

   b. quanti di questi numeri sono maggiori di 50.000;

   c. quanti di questi numeri sono pari;

   d. quanti di questi numeri sono multipli di 5.

   e. Scrivendo tali numeri in ordine crescente, determina quale numero occupa la 241^ posizione.

4. Nel piano sono dati sei punti "rossi", chiamati A, B, C, D, E, F, e quattro punti "neri", detti G, H, I, L. Tra tali punti, non ce ne sono tre allineati. Calcola:

   a. quanti segmenti hanno come vertici due dei punti dati;

   b. quanti segmenti hanno un vertice "rosso" ed uno "nero";

   c. quanti triangoli hanno come vertici tre dei punti dati;

   d. quanti triangoli hanno due vertici "rossi" ed uno "nero";

   e. quanti triangoli non contengono come lato il segmento AB.

5. Un treno arriva in ritardo nel 70% dei casi se nevica e nel 15% dei casi se non nevica.

   Sapendo che la probabilità che oggi nevichi è del 60%, calcola:

   a. la probabilità che il treno arrivi in ritardo;

   b. la probabilità che abbia nevicato, sapendo che il treno è arrivato in ritardo;

   c. la probabilità che non abbia nevicato, sapendo che il treno è stato puntuale.

6. Un tiratore colpisce il bersaglio con una probabilità del 95%. Calcola:

a. la probabilità che faccia cinque centri su cinque tiri;

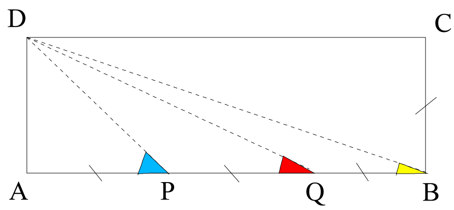
b. la probabilità che faccia almeno un centro su cinque tiri;

c. la probabilità che faccia esattamente tre centri su cinque tiri;

d. il numero *n* di tiri tale che la probabilità di fare *n* centri sia minore dell'1%.

7. Nel rettangolo in figura abbiamo: $AP = PQ = QB = BC$.

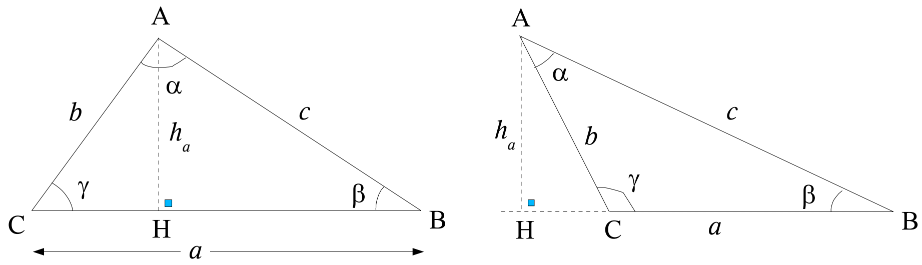
   Dimostra che $A\hat{P}D = A\hat{Q}D + A\hat{B}D$.



4^C - Correzione compito n°5

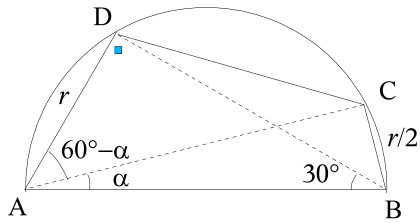
1. Se l'altezza h_a è interna al triangolo ABC (*figura a sx*), allora dal triangolo rettangolo ACH: $h_a = b\,sen\,\gamma$, mentre dal teorema dei seni: $\dfrac{b}{sen\,\beta} = \dfrac{a}{sen\,\alpha} \Rightarrow b = \dfrac{sen\,\beta}{sen\,\alpha}a$.

   Mettendo a sistema queste due relazioni, ricaviamo la formula del testo.



   Se, invece, l'altezza h_a è esterna al triangolo ABC (*figura a dx*), allora dal triangolo rettangolo ACH ricaviamo: $h_a = b\,sen(\pi - \gamma) = b\,sen\,\gamma$, ottenendo lo stesso risultato del caso precedente.

2. Per il teorema della corda (ponendo $B\hat{A}C = \alpha$):



   $AD = r = 2r\,sen\,A\hat{B}D \Rightarrow A\hat{B}D = 30° \Rightarrow B\hat{A}D = 60°$;

   $BC = \dfrac{r}{2} = 2r\,sen\,\alpha \Rightarrow sen\,\alpha = \dfrac{1}{4} \Rightarrow cos\,\alpha = \dfrac{\sqrt{15}}{4}$;

   $CD = 2r\,sen(60° - \alpha) = 2r(sen\,60°\,cos\,\alpha - cos\,60°\,sen\,\alpha) =$

   $2r\left(\dfrac{\sqrt{3}}{2}\cdot\dfrac{\sqrt{15}}{4} - \dfrac{1}{2}\cdot\dfrac{1}{4}\right) = \dfrac{3\sqrt{5}-1}{4}r$.

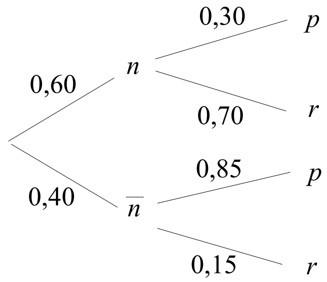
3.
   a. Dobbiamo <u>scegliere</u> e <u>ordinare</u> 5 cifre su 6: $D_{6,5} = 6\cdot5\cdot4\cdot3\cdot2 = 720$.
   b. La prima cifra può essere 5, 7, 9: $D_{3,1}\cdot D_{5,4} = 3\cdot5\cdot4\cdot3\cdot2 = 360$.
   c. L'ultima cifra può essere 2 o 4: $D_{5,4}\cdot D_{2,1} = 5\cdot4\cdot3\cdot2\cdot2 = 240$.
   d. L'ultima cifra deve essere 5: $D_{5,4}\cdot D_{1,1} = 5\cdot4\cdot3\cdot2\cdot1 = 120$.
   e. Osserviamo che $241 = 2\cdot120 + 1$. Disponendo i numeri in ordine crescente, avremo quindi $D_{5,4} = 120$ numeri che iniziano con la cifra 2 e $D_{5,4} = 120$ numeri che iniziano con la cifra 3.
   Il numero richiesto sarà quindi il primo che inizia per 4, ovvero: 42357.

4.
   a. Dobbiamo <u>scegliere</u> (ma non ordinare) due dei dieci punti dati: $C_{10,2} = \binom{10}{2} = \dfrac{10\cdot9}{2} = 45$.
   b. Scegliamo un punto rosso su sei ed un punto nero su quattro: $C_{6,1}\cdot C_{4,1} = 6\cdot4 = 24$.
   c. Scegliamo tre dei dieci punti dati: $C_{10,3} = \binom{10}{3} = \dfrac{10\cdot9\cdot8}{3\cdot2} = 120$.

d. Scegliamo due punti rossi su sei ed un punto nero su quattro: $C_{6,2}\cdot C_{4,1}=15\cdot 4=60$.

e. I triangoli che <u>contengono</u> come lato il segmento AB si ottengono scegliendo uno degli otto punti rimasti: $C_{8,1}=8$. Per differenza, quelli che <u>non</u> lo contengono sono: $120-8=112$.

5. Indichiamo con r l'evento “il treno è in ritardo”, con n l'evento “oggi nevica”, etc.



a. $p(r)=p(n)\cdot p(r/n)+p(\overline{n})\cdot p(r/\overline{n})=0{,}6\cdot 0{,}7+0{,}4\cdot 0{,}15=0{,}48$.

b. $p(n/r)=\dfrac{p(n)\cdot p(r/n)}{p(r)}=\dfrac{0{,}6\cdot 0{,}7}{0{,}48}=0{,}875$.

c. $p(\overline{n}/p)=\dfrac{p(\overline{n})\cdot p(p/\overline{n})}{p(p)}=\dfrac{0{,}4\cdot 0{,}85}{0{,}52}\simeq 0{,}654$.

6. Indichiamo con $p(c)$ la probabilità che il tiratore faccia centro.

a. $p(c_1\wedge\ldots\wedge c_5)=p(c)^5=0{,}95^5\simeq 0{,}774\simeq 77{,}4\%$.

b. $p(almeno\,1\,c)=1-p(0\,c)=1-p(\overline{c})^5=1-0{,}05^5\simeq 1-3{,}125\cdot 10^{-7}$.

c. Applichiamo la distribuzione binomiale: $p(3\,c)=\binom{5}{3}\cdot 0{,}95^3\cdot 0{,}05^2\simeq 2{,}14\cdot 10^{-3}$.

d. $p(c)^n=(0{,}95)^n<0.01 \;\Rightarrow\; n>\dfrac{log\,0{,}01}{log\,0{,}95}\simeq 89{,}8 \;\Rightarrow\; n\geq 90$.

7. *Primo metodo*. Consideriamo i triangoli rettangoli APD, AQD, ABD:

$$tg\,A\hat{P}D=\frac{AD}{AP}=1 \;\;;\;\; tg\,A\hat{Q}D=\frac{AD}{AQ}=\frac{1}{2} \;\;;\;\; tg\,A\hat{B}D=\frac{AD}{AB}=\frac{1}{3} \;.$$

Osserviamo che: $tg(A\hat{Q}D+A\hat{B}D)=\dfrac{tg\,A\hat{Q}D+tg\,A\hat{B}D}{1-tg\,A\hat{Q}D\,tg\,A\hat{B}D}=\dfrac{1/2+1/3}{1-1/2\cdot 1/3}=\dfrac{5/6}{5}/6=1$.

Gli angoli acuti $A\hat{P}D$ e $A\hat{Q}D+A\hat{B}D$ hanno la stessa tangente, e quindi sono uguali c.v.d.

Secondo metodo. Dagli stessi triangoli rettangoli, ponendo $AB=l$, ricaviamo con Pitagora:

$PD=l\sqrt{2}$, $QD=l\sqrt{5}$, $BD=l\sqrt{10}$, per cui:

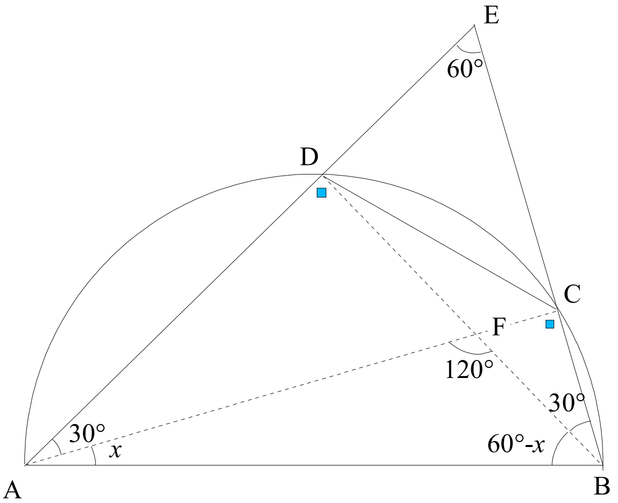
$$sen\,A\hat{P}D=\frac{1}{\sqrt{2}} \;;\; sen\,A\hat{Q}D=\frac{1}{\sqrt{5}} \;;\; sen\,A\hat{B}D=\frac{1}{\sqrt{10}} \;;\; cos\,A\hat{Q}D=\frac{2}{\sqrt{5}} \;;\; cos\,A\hat{B}D=\frac{3}{\sqrt{10}} \;.$$

$$sen(A\hat{Q}D+A\hat{B}D)=sen\,A\hat{Q}D\,cos\,A\hat{B}D+cos\,A\hat{Q}D\,sen\,A\hat{B}D=\frac{1}{\sqrt{5}}\cdot\frac{3}{\sqrt{10}}+\frac{2}{\sqrt{5}}\cdot\frac{1}{\sqrt{10}}=\frac{5}{\sqrt{50}}=\frac{1}{\sqrt{2}} \;.$$

Gli angoli acuti $A\hat{P}D$ e $A\hat{Q}D+A\hat{B}D$ hanno lo stesso seno, e quindi sono uguali c.v.d.

1. (*Il disegno deve essere molto grande; ti consiglio di prendere la misura del raggio della circonferenza compresa tra 12 e 18 quadretti*). In una semicirconferenza di diametro $AB = 10$ è inscritto il quadrilatero ABCD tale che $D\hat{A}C = 30°$. Le rette AD e BC si intersecano nel punto E, mentre le rette AC e BD si intersecano nel punto F.
   a. Calcola le ampiezze degli angoli $D\hat{B}E$, $A\hat{C}E$, $A\hat{E}B$, $A\hat{D}B$.
   b. Ponendo $B\hat{A}C = x$, calcola l'ampiezza dell'angolo $A\hat{F}B$.
   c. Esprimi in funzione di $\cos x$ e $\operatorname{sen} x$ le lunghezze dei seguenti segmenti: AC, BC, AD, BD, AE, BE, AF, BF.
   d. Determina le limitazioni geometriche sui valori assunti dalla variabile x.
   e. Traccia i disegni (*contenenti tutti i punti considerati nel problema*) corrispondenti ai casi limite (*che qui sono il minimo ed il massimo valore assunto dalla variabile x*).
   f. Ponendo $f(x) = \overline{CE} + \overline{DE}$, verifica che $f(x) = 5(\sqrt{3}\cos x + \operatorname{sen} x)$.
   g. Dai disegni del punto *e*, determina i valori assunti dalla quantità $\overline{CE} + \overline{DE}$ nei casi limite, e verifica che coincidano con i corrispondenti valori di $f(x)$.
   h. Traccia il grafico della funzione $y = f(x)$ in un periodo, descrivine le caratteristiche ed evidenzia l'arco corrispondente alle limitazioni geometriche.
   i. Tenendo conto delle limitazioni geometriche, determina per quali valori di x la funzione assume il suo valore minimo ed il suo valore massimo, e calcola questi ultimi valori.
2. Un aereo viaggia (in volo orizzontale con velocità costante) verso un'isola su cui si trovano dei naufraghi. Ad un certo momento, il pilota vede l'isola con un angolo di depressione $\alpha = 8{,}32°$. Dopo cinque minuti, l'isola viene vista sotto un angolo di depressione $\beta = 11{,}2°$. Quanti minuti saranno ancora necessari perché l’aereo venga a trovarsi esattamente sopra l'isola?

1.



a. $D\hat{B}E = D\hat{A}C = 30°$ perché angoli alla circonferenza che insistono sull'arco CD;

$A\hat{C}B = 90°$ perché insiste su una semicirconferenza;

$A\hat{C}E = 90°$ supplementare di $A\hat{C}B$;

$A\hat{E}B = 60°$ per la somma degli angoli interni del triangolo ACE;

$A\hat{D}B = 90°$ perché angolo alla circonferenza che insiste su una semicirconferenza.

b. $A\hat{B}D = 60° - x$ per la somma degli angoli interni del triangolo ABD;

$A\hat{F}B = 180° - B\hat{A}F - A\hat{B}F = 120°$ per la somma degli angoli interni del triangolo ABF.

c. $AC = AB\cos x = 10\cos x$; $BC = AB\,sen\,x = 10\,sen\,x$;

$$AD = AB\cos(30° + x) = 10\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\cos x - \frac{1}{2}sen\,x\right) = 5(\sqrt{3}\cos x - sen\,x) \quad ;$$

$$BD = AB\,sen(30° + x) = 10\left(\frac{1}{2}\cos x + \frac{\sqrt{3}}{2}sen\,x\right) = 5(\cos x + \sqrt{3}\,sen\,x) \quad ;$$

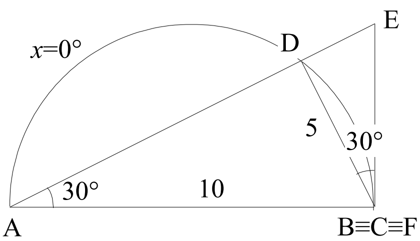
$$AE = \frac{AC}{\cos 30°} = \frac{20}{\sqrt{3}}\cos x \quad ; \quad BE = \frac{BD}{\cos 30°} = \frac{10}{\sqrt{3}}(\cos x + \sqrt{3}\,sen\,x) \quad ;$$

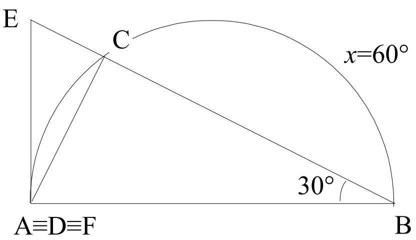
$$AF = \frac{AD}{\cos 30°} = \frac{10}{\sqrt{3}}(\sqrt{3}\cos x - sen\,x) \quad ; \quad BF = \frac{BC}{\cos 30°} = \frac{20}{\sqrt{3}}sen\,x \quad .$$

In alternativa, possiamo applicare il teorema dei seni al triangolo ABF: $\dfrac{AF}{sen(60° - x)} = \dfrac{BF}{sen\,x} = \dfrac{AB}{sen\,120°}$.

d. Deve essere: $0° \le B\hat{A}D \le 90° \Rightarrow 0° \le x \le 60°$.

e. Se x tende a 0°, il punto C tende a B sulla circonferenza, e quindi la retta BC tende alla tangente alla circonferenza in B. In maniera analoga, se x tende a 60°, il punto D tende ad A sulla circonferenza, e quindi la retta AD tende alla tangente alla circonferenza in A.





f. $CE = AC\,tg\,30° = 10\dfrac{\sqrt{3}}{3}\cos x$; $DE = BD\,tg\,30° = 5\dfrac{\sqrt{3}}{3}(\cos x + \sqrt{3}\,sen\,x)$, da cui segue la relazione del testo.

g. Per $x=0°$: $CE=AB\,tg\,30°=10\frac{\sqrt{3}}{3}$; $DE=DB\,tg\,30°=5\frac{\sqrt{3}}{3}$ $\Rightarrow$ $CE+DE=5\sqrt{3}$.

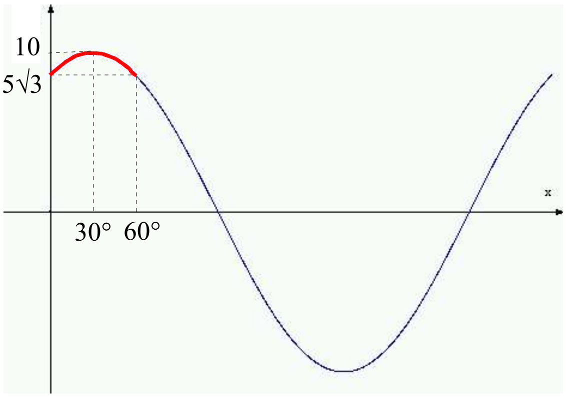
Per $x=60°$, si scambiano i valori di CE e DE, ma il risultato è lo stesso.

Verifica: $f(0)=5\sqrt{3}$, $f(60°)=5(\frac{\sqrt{3}}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2})=5\sqrt{3}$ c.v.d.

h. Per tracciare il grafico della funzione, applichiamo il metodo dell'angolo "aggiunto", riscrivendola come:

$f(x)=5(\sqrt{3}\,cos\,x+sen\,x)=10\,sen(x+60°)$.

Si tratta di una sinusoide di ampiezza $A=10$ e periodo $T=360°$ che ha subito una traslazione di 60° verso sinistra.



L'arco corrispondente alle limitazioni geometriche è evidenziato in rosso.

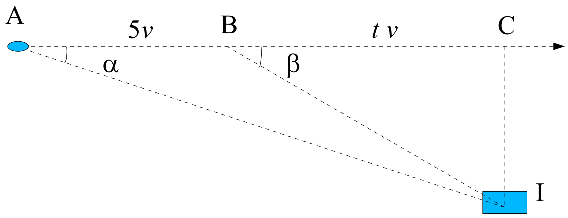
i. Vediamo che la funzione assume il suo valore minimo per $x=0°$ o $x=60°$, e tale valore minimo è $f_{min}=5\sqrt{3}$ (*già calcolato nel punto g*).

La funzione assume valore massimo quando: $x+60°=90°$ $\Rightarrow$ $x=30°$, ed il valore massimo è: $f_{max}=10$.

2. Indichiamo con *v* la velocità dell'aereo (in *km*/*min*) e con *t* il tempo richiesto (in minuti).

Dalla legge oraria del moto uniforme:

$AB=5v$, $BC=tv$.



Dai triangoli rettangoli ACI e BCI ricaviamo:

$CI=AC\,tg\,\alpha=(5+t)v\,tg\,\alpha$,

$CI=BC\,tg\,\beta=tv\,tg\,\beta$.

Uguagliamo le due espressioni e dividiamo per *v*:

$$tv\,tg\,\beta=(5+t)v\,tg\,\alpha \;\Rightarrow\; t=\frac{5\,tg\,\alpha}{tg\,\beta-tg\,\alpha}\simeq\frac{5\,tg\,8{,}32°}{tg\,11{,}2°-tg\,8{,}32°}\simeq 14{,}1\,min \quad .$$

4^A - MATEMATICA compito n°5 - 2015-2016

1. Su una circonferenza di raggio r è data la corda $AB=r\sqrt{3}$.

   Prendi un punto C sul minore degli archi AB ed un punto D sul maggiore degli archi AB in modo che le corde BC e AD giacciano su rette parallele. Poni $A\hat{B}C=x$.

   a. Determina le ampiezze degli angoli $B\hat{A}D$, $A\hat{D}B$, $A\hat{C}B$.

   b. Esprimi le lunghezze dei lati del quadrilatero ACBD in funzione di $cos\, x$ e $sen\, x$.

   c. Verifica che il perimetro del quadrilatero ACBD misura $f(x)=r(2\sqrt{3}cos\, x+4\, sen\, x)$.

   d. Scrivi il perimetro nella forma $f(x)=k\, sen(x+\phi)$ determinando il valore di ϕ con l'approssimazione del centesimo di grado.

   e. Determina le limitazioni geometriche e descrivi i casi limite.

   f. Traccia il grafico della funzione $y=f(x)$ tenendo conto delle limitazioni geometriche e calcolando i valori agli estremi e le coordinate del punto di massimo.

   g. Determina il valore di x per cui il perimetro del quadrilatero ACBD misura $2p=5r$.

   (*Applica il metodo dell'angolo aggiunto, utilizzando la calcolatrice per determinare il risultato*).

2.

   a. Dati gli insiemi A e B di cardinalità (*numero di elementi*) $card\, A=4$, $card\, B=5$, determina il numero di funzioni e quello di funzioni iniettive da A in B.

   b. Dato l'insieme A di cardinalità $card\, A=10$, determina il numero di sottoinsiemi di A formati da 6 elementi ed il numero complessivo di sottoinsiemi di A.

   c. La tua classe è formata da 27 alunni, di cui 12 donne. Determina in quanti modi si può scegliere una squadra di pallavolo (composta da 6 persone) nei seguenti casi:

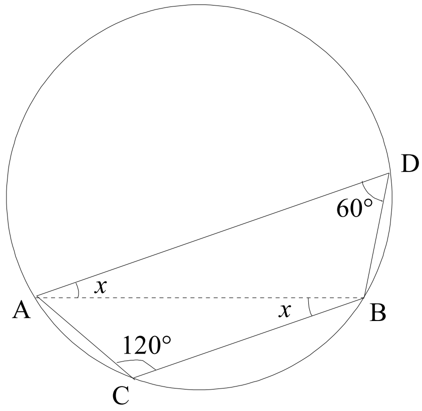
      - la squadra comprende esattamente due donne;
      - la squadra comprende almeno una donna;
      - la squadra comprende quattro donne, due delle quali sono “titolari fisse” (devono comparire in tutte le formazioni possibili).

   d. Dimostra le seguenti proprietà dei coefficienti binomiali e spiega quali proprietà del triangolo di Tartaglia esse esprimono:

   $\binom{n}{k}=\binom{n-1}{k-1}+\binom{n-1}{k}$; $\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}=2^n$.

<u>4^A</u> - Correzione compito n°5

1.



a. $B\hat{A}D = A\hat{B}C = x$ perché angoli alterni interni formati dalle rette BC e AD, parallele per costruzione, tagliate dalla trasversale AB.

Per il teorema della corda:

$AB = 2r\,sen\,A\hat{D}B \Rightarrow sen\,A\hat{D}B = \sqrt{3}/2 \Rightarrow A\hat{D}B = 60°$.

$A\hat{C}B = 180° - A\hat{D}B = 120°$ perché un quadrilatero inscritto in una circonferenza ha gli angoli opposti supplementari.

b. Per il teorema della corda (o per quello dei seni): $AC = BD = 2r\,sen\,x$;

$BC = 2r\,sen(60° - x) = r(\sqrt{3}\cos x - sen\,x)$;

$AD = 2r\,sen(120° - x) = r(\sqrt{3}\cos x + sen\,x)$.

c. $2p_{ACBD} = 4r\,sen\,x + r(\sqrt{3}\cos x - sen\,x) + r(\sqrt{3}\cos x + sen\,x) = r(2\sqrt{3}\cos x + 4\,sen\,x)$ c.v.d.

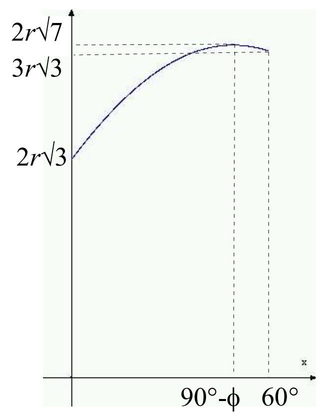
d. Per il metodo dell'angolo aggiunto:

$$k = \sqrt{a^2 + b^2} = \sqrt{12 + 16} = 2\sqrt{7} \quad ; \quad \phi = arc\,tg\frac{b}{a} = arc\,tg\frac{\sqrt{3}}{2} \simeq 40{,}89°$$.

e. Limitazioni geometriche:

- se il punto C coincide con A, allora $x = 0°$, e il quadrilatero ACBD degenera in due segmenti coincidenti con la corda AB;
- se il punto C tende a B lungo la circonferenza, allora la corda BC tende alla tangente in B, e quindi $x \to 60°$, e il quadrilatero ACBD degenera un triangolo equilatero di lato AB.

In conclusione: $0° \le x \le 60°$.



f. Valori agli estremi: $f(0°) = 2r\sqrt{3}$, $f(60°) = 3r\sqrt{3}$

(in accordo con i casi limite descritti nel punto *e*).

La sinusoide assume il valore massimo quando:

$x + \phi = 90° \Rightarrow x = 90° - \phi \simeq 49{,}11° \Rightarrow f_{max} = k = 2\sqrt{7}$.

g. Impostiamo l'equazione $2\sqrt{7}\,sen(x + \phi) = 5r \Rightarrow$.

Poiché $arc\,sen\frac{5}{2\sqrt{7}} \simeq 70{,}89°$, possiamo avere:

- $x + \phi \simeq 70{,}89° \Rightarrow x \simeq 30{,}00°$ (soluzione accettabile);
- $x + \phi \simeq 180° - 70{,}89° \Rightarrow x \simeq 68{,}22°$ (non accettabile per le limitazioni geometriche).

Sostituendo il valore $x = 30°$ nell'equazione di partenza, oppure risolvendo la stessa con un metodo differente (grafico o con l'uso delle formule parametriche), possiamo verificare che tale soluzione è esatta.

2.

a. In una funzione generica, ognuno dei 4 elementi di A deve avere un corrispondente, che può essere uno qualunque dei 5 elementi di B: $D'_{5,4}=5^4=625$.

   In una funzione iniettiva, una volta scelto il corrispondente di un elemento di A, gli altri devono essere distinti da esso: $D_{5,4}=5\cdot 4\cdot 3\cdot 2=120$.

b. Il numero di sottoinsiemi di A formati da 6 elementi è il numero di modi in cui possiamo scegliere (indipendentemente dall'ordine) 6 oggetti su 10 possibili:

   $$C_{10,6}=\binom{10}{6}=\binom{10}{4}=\frac{10\cdot 9\cdot 8\cdot 7}{4\cdot 3\cdot 2\cdot 1}=210 \quad .$$

   Il numero complessivo di sottoinsiemi di A è: $\sum_{k=0}^{10}\binom{10}{k}=2^{10}=1.024$.

c. Se la squadra comprende due donne, scegliamo 4 maschi tra 15 e 2 donne tra 12:

   $$C_{15,4}\cdot C_{12,2}=\binom{15}{4}\cdot\binom{12}{2}=\frac{15\cdot 14\cdot 13\cdot 12}{4\cdot 3\cdot 2\cdot 1}\cdot\frac{12\cdot 11}{2\cdot 1}=90.090 \quad .$$

   Se la squadra comprende almeno una donna, dobbiamo sottrarre a tutte le formazioni possibili quelle che sono formate da 6 maschi:

   $$C_{27,6}-C_{15,6}=\binom{27}{6}-\binom{15}{6}=\frac{27\cdot 26\cdot 25\cdot 24\cdot 23\cdot 22-15\cdot 14\cdot 13\cdot 12\cdot 11\cdot 10}{6\cdot 5\cdot 4\cdot 3\cdot 2\cdot 1}=291.005 \quad .$$

   Se la squadra comprende quattro donne, due delle quali non possono variare, rimangono da scegliere 2 maschi su 15 e 2 donne su 10:

   $$C_{15,2}\cdot C_{10,2}=\binom{15}{2}\cdot\binom{10}{2}=\frac{15\cdot 14}{2\cdot 1}\cdot\frac{10\cdot 9}{2\cdot 1}=4.725 \quad .$$

d. $$\binom{n-1}{k}+\binom{n-1}{k-1}=\frac{(n-1)!}{(n-k-1)!\,k!}+\frac{(n-1)!}{(n-k)!\,(k-1)!}=\frac{(n-k)(n-1)!+k(n-1)!}{(n-k)!\,k!}=$$

   $$=\frac{(n-1)!\,(n-k+k)}{(n-k)!\,k!}=\frac{n!}{(n-k)!\,k!}=\binom{n}{k} \quad \text{c.v.d.}$$

   Esprime il fatto che ogni elemento del triangolo di Tartaglia è la somma dei due elementi della riga precedente che si trovano a destra e a sinistra dell'elemento da calcolare.

   Sostituiamo $a=b=1$ nell'identità che definisce il binomio di Newton:

   $$(a+b)^n=\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}a^{n-k}b^k \;\Rightarrow\; \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}=2^n \quad .$$

   La proprietà esprime il fatto che le somme dei coefficienti delle righe del triangolo di Tartaglia sono date dalle successive potenze di 2.

4^A - MATEMATICA compito n°5 - 2015-2016

1. Su una circonferenza di raggio r è data la corda $AB=r\sqrt{3}$.

   Prendi un punto C sul minore degli archi AB ed un punto D sul maggiore degli archi AB in modo che le corde BC e AD giacciano su rette parallele. Poni $A\hat{B}C=x$.

   a. Determina le ampiezze degli angoli $B\hat{A}D$, $A\hat{D}B$, $A\hat{C}B$.

   b. Esprimi le lunghezze dei lati del quadrilatero ACBD in funzione di $cos\,x$ e $sen\,x$.

   c. Verifica che il perimetro del quadrilatero ACBD misura $f(x)=r(2\sqrt{3}\,cos\,x+4\,sen\,x)$.

   d. Scrivi il perimetro nella forma $f(x)=k\,sen(x+\phi)$ determinando il valore di ϕ con l'approssimazione del centesimo di grado.

   e. Determina le limitazioni geometriche e descrivi i casi limite.

   f. Traccia il grafico della funzione $y=f(x)$ tenendo conto delle limitazioni geometriche e calcolando i valori agli estremi e le coordinate del punto di massimo.

   g. Determina il valore di x per cui il perimetro del quadrilatero ACBD misura $2p=5r$.

   (*Applica il metodo dell'angolo aggiunto, utilizzando la calcolatrice per determinare il risultato*).

2.

   a. Dati gli insiemi A e B di cardinalità (*numero di elementi*) $card\,A=4$, $card\,B=5$, determina il numero di funzioni e quello di funzioni iniettive da A in B.

   b. Dato l'insieme A di cardinalità $card\,A=10$, determina il numero di sottoinsiemi di A formati da 6 elementi ed il numero complessivo di sottoinsiemi di A.

   c. La tua classe è formata da 27 alunni, di cui 12 donne. Determina in quanti modi si può scegliere una squadra di pallavolo (composta da 6 persone) nei seguenti casi:

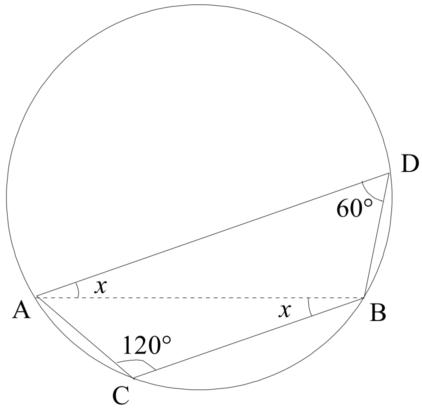
      - la squadra comprende esattamente due donne;
      - la squadra comprende almeno una donna;
      - la squadra comprende quattro donne, due delle quali sono “titolari fisse” (devono comparire in tutte le formazioni possibili).

   d. Dimostra le seguenti proprietà dei coefficienti binomiali e spiega quali proprietà del triangolo di Tartaglia esse esprimono:

   $$\binom{n}{k}=\binom{n-1}{k-1}+\binom{n-1}{k} \quad ; \qquad \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}=2^n \ .$$

4^A - *Correzione compito n°5*

1.



a. $B\hat{A}D = A\hat{B}C = x$ perché angoli alterni interni formati dalle rette BC e AD, parallele per costruzione, tagliate dalla trasversale AB.

Per il teorema della corda:

$AB = 2r\, sen\, A\hat{D}B \Rightarrow sen\, A\hat{D}B = \sqrt{3}/2 \Rightarrow A\hat{D}B = 60°$.

$A\hat{C}B = 180° - A\hat{D}B = 120°$ perché un quadrilatero inscritto in una circonferenza ha gli angoli opposti supplementari.

b. Per il teorema della corda (o per quello dei seni): $AC = BD = 2r\, sen\, x$;

$BC = 2r\, sen(60° - x) = r(\sqrt{3}\cos x - sen\, x)$;

$AD = 2r\, sen(120° - x) = r(\sqrt{3}\cos x + sen\, x)$.

c. $2p_{ACBD} = 4r\, sen\, x + r(\sqrt{3}\cos x - sen\, x) + r(\sqrt{3}\cos x + sen\, x) = r(2\sqrt{3}\cos x + 4\, sen\, x)$ c.v.d.

d. Per il metodo dell'angolo aggiunto:

$k = \sqrt{a^2+b^2} = \sqrt{12+16} = 2\sqrt{7}$; $\phi = arc\,tg\frac{b}{a} = arc\,tg\frac{\sqrt{3}}{2} \simeq 40{,}89°$.

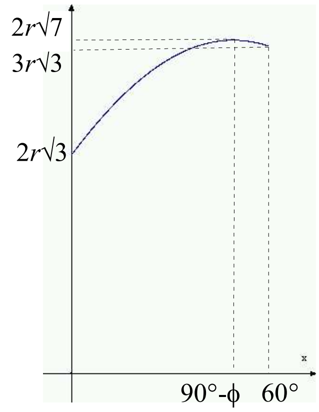
e. Limitazioni geometriche:

- se il punto C coincide con A, allora $x = 0°$, e il quadrilatero ACBD degenera in due segmenti coincidenti con la corda AB;
- se il punto C tende a B lungo la circonferenza, allora la corda BC tende alla tangente in B, e quindi $x \to 60°$, e il quadrilatero ACBD degenera un triangolo equilatero di lato AB.

In conclusione: $0° \le x \le 60°$.

f. Valori agli estremi: $f(0°) = 2r\sqrt{3}$, $f(60°) = 3r\sqrt{3}$

(in accordo con i casi limite descritti nel punto *e*).



La sinusoide assume il valore massimo quando:

$x + \phi = 90° \Rightarrow x = 90° - \phi \simeq 49{,}11° \Rightarrow f_{max} = k = 2\sqrt{7}$.

g. Impostiamo l'equazione $2\sqrt{7}\, sen(x+\phi) = 5r \Rightarrow$.

Poiché $arc\, sen\frac{5}{2\sqrt{7}} \simeq 70{,}89°$, possiamo avere:

- $x + \phi \simeq 70{,}89° \Rightarrow x \simeq 30{,}00°$ (soluzione accettabile);
- $x + \phi \simeq 180° - 70{,}89° \Rightarrow x \simeq 68{,}22°$ (non accettabile per le limitazioni geometriche).

Sostituendo il valore $x = 30°$ nell'equazione di partenza, oppure risolvendo la stessa con un metodo differente (grafico o con l'uso delle formule parametriche), possiamo verificare che tale soluzione è esatta.

2.

a. In una funzione generica, ognuno dei 4 elementi di A deve avere un corrispondente, che può essere uno qualunque dei 5 elementi di B: $D'_{5,4}=5^4=625$.

In una funzione iniettiva, una volta scelto il corrispondente di un elemento di A, gli altri devono essere distinti da esso: $D_{5,4}=5\cdot 4\cdot 3\cdot 2=120$.

b. Il numero di sottoinsiemi di A formati da 6 elementi è il numero di modi in cui possiamo scegliere (indipendentemente dall'ordine) 6 oggetti su 10 possibili:

$$C_{10,6}=\binom{10}{6}=\binom{10}{4}=\frac{10\cdot 9\cdot 8\cdot 7}{4\cdot 3\cdot 2\cdot 1}=210 \quad .$$

Il numero complessivo di sottoinsiemi di A è: $\sum_{k=0}^{10}\binom{10}{k}=2^{10}=1.024$.

c. Se la squadra comprende due donne, scegliamo 4 maschi tra 15 e 2 donne tra 12:

$$C_{15,4}\cdot C_{12,2}=\binom{15}{4}\cdot\binom{12}{2}=\frac{15\cdot 14\cdot 13\cdot 12}{4\cdot 3\cdot 2\cdot 1}\cdot\frac{12\cdot 11}{2\cdot 1}=90.090 \quad .$$

Se la squadra comprende almeno una donna, dobbiamo sottrarre a tutte le formazioni possibili quelle che sono formate da 6 maschi:

$$C_{27,6}-C_{15,6}=\binom{27}{6}-\binom{15}{6}=\frac{27\cdot 26\cdot 25\cdot 24\cdot 23\cdot 22-15\cdot 14\cdot 13\cdot 12\cdot 11\cdot 10}{6\cdot 5\cdot 4\cdot 3\cdot 2\cdot 1}=291.005 \quad .$$

Se la squadra comprende quattro donne, due delle quali non possono variare, rimangono da scegliere 2 maschi su 15 e 2 donne su 10:

$$C_{15,2}\cdot C_{10,2}=\binom{15}{2}\cdot\binom{10}{2}=\frac{15\cdot 14}{2\cdot 1}\cdot\frac{10\cdot 9}{2\cdot 1}=4.725 \quad .$$

d. $$\binom{n-1}{k}+\binom{n-1}{k-1}=\frac{(n-1)!}{(n-k-1)!\,k!}+\frac{(n-1)!}{(n-k)!\,(k-1)!}=\frac{(n-k)(n-1)!+k(n-1)!}{(n-k)!\,k!}=$$

$$=\frac{(n-1)!\,(n-k+k)}{(n-k)!\,k!}=\frac{n!}{(n-k)!\,k!}=\binom{n}{k} \quad \text{c.v.d.}$$

Esprime il fatto che ogni elemento del triangolo di Tartaglia è la somma dei due elementi della riga precedente che si trovano a destra e a sinistra dell'elemento da calcolare.

Sostituiamo $a=b=1$ nell'identità che definisce il binomio di Newton:

$$(a+b)^n=\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}a^{n-k}b^k \;\Rightarrow\; \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}=2^n \quad .$$

La proprietà esprime il fatto che le somme dei coefficienti delle righe del triangolo di Tartaglia sono date dalle successive potenze di 2.

1. Dato l'angolo retto $A\hat{O}B$, conduci internamente ad esso una semiretta OC.

   Prendi su OA un punto M tale che $OM=1$ e su OB un punto N tale che $ON=\sqrt{3}$.

   Chiama J e K le proiezioni di M ed N su OC e P il punto medio di JK. Poni $A\hat{O}C=x$.

   a. Esprimi in funzione di *x* le misure dei segmenti OJ, OK, OP, MJ, NK.

   b. Verifica che l'area del triangolo NOP misura $f(x)=\frac{\sqrt{3}}{4}(cos^2 x+\sqrt{3}\,sen\,x\cos x)$.

   c. Esprimi tale area in funzione di $cos\,2x$ e $sen\,2x$.

   d. Scrivi poi l'area nella forma $f(x)=r\,sen(2x+\phi)+k$.

   e. Traccia le figure nei casi limite e calcola il valore di $f(x)$ in tali casi.

   f. Traccia il grafico della funzione $y=f(x)$ tenendo conto delle limitazioni geometriche.

      Descrivi la funzione e determina le coordinate del suo punto di massimo.

   g. Determina i valori di *x* per cui l'area assume il valore $f(x)=\sqrt{3}/4$.

2. Uno studente va a scuola con l'autobus nel 65% dei giorni feriali e con la bicicletta negli altri giorni feriali. Egli arriva a scuola in orario con probabilità 0,55 quando utilizza l'autobus e con probabilità 0,85 quando usa la bicicletta. Calcola:

   a. la probabilità che lo studente arrivi in orario;

   b. la probabilità che lo studente arrivi in ritardo;

   c. sapendo che è in orario, quale è stata la probabilità che abbia utilizzato l'autobus;

   d. sapendo che ha fatto ritardo, quale è stata la probabilità che abbia utilizzato la bicicletta.

   e. Se l'anno scolastico dura 200 giorni, quanti giorni (*circa*) lo studente sarà in orario?

   f. Gli eventi “lo studente utilizza l'autobus” e “lo studente arriva in orario” sono indipendenti?

   g. Gli eventi “lo studente utilizza l'autobus” e “lo studente utilizza la bicicletta” sono indipendenti?

   Un lunedì lo studente prende l'autobus, mentre martedì prende la bicicletta.

Calcola la probabilità che lo studente:

h. sia in ritardo entrambi i giorni;

i. sia in ritardo almeno uno dei due giorni;

j. sia in ritardo solo lunedì;

k. sia in ritardo martedì sapendo che lunedì era in orario.

Lo studente prende la bicicletta per dieci giorni feriali di seguito.

Calcola la probabilità che egli:

l. sia sempre in orario;

m. sia in orario otto giorni su dieci;

n. sia in orario nei sei giorni compresi tra il terzo e l'ottavo;

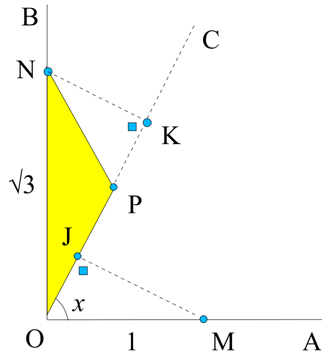
o. sia in orario almeno in un giorno.

Giunto al quinto anno, lo studente prende la bicicletta ogni giorno.

p. Calcola dopo quanti giorni la probabilità che egli sia stato sempre in orario è minore dell'1%.

4^A - Correzione compito n°6

1.



a. $OJ=\cos x$; $OK=\sqrt{3}\,sen\,x$; $MJ=sen\,x$; $NK=\sqrt{3}\cos x$;

$$OP=\frac{OJ+OK}{2}=\frac{1}{2}(\sqrt{3}\,sen\,x+\cos x) \quad .$$

b. Consideriamo OP come base ed NK come altezza:

$$f(x)=\frac{OP\cdot NK}{2}=\frac{\sqrt{3}}{4}(\cos^2 x+\sqrt{3}\,sen\,x\cos x) \quad \text{c.v.d.}$$

c. Ricordiamo che: $\cos^2 x=\frac{1+\cos 2x}{2}$; $sen\,x\cos x=\frac{1}{2}sen\,2x$ e sostituiamo:

$$f(x)=\frac{\sqrt{3}}{4}\left(\frac{1}{2}\cos 2x+\frac{\sqrt{3}}{2}sen\,2x+\frac{1}{2}\right) \quad .$$

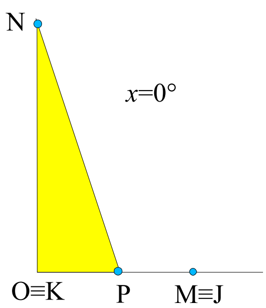
d. Applichiamo il metodo dell'angolo aggiunto: $\sqrt{(1/2)^2+(\sqrt{3}/2)^2}=1$; $arc\,tg\sqrt{3}=30°$.

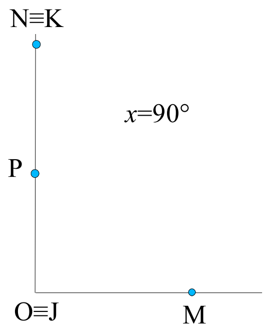
Quindi: $f(x)=\frac{\sqrt{3}}{4}sen(2x+30°)+\frac{\sqrt{3}}{8}$.

e. $C.E.:\ 0°\le x\le 90°$.

Per $x=0°$, il triangolo NOP diventa rettangolo, mentre, per $x=90°$, degenera in due segmenti coincidenti. Vediamo dai disegni a fianco che:

$f(0°)=\sqrt{3}/4$, $f(90°)=0$.



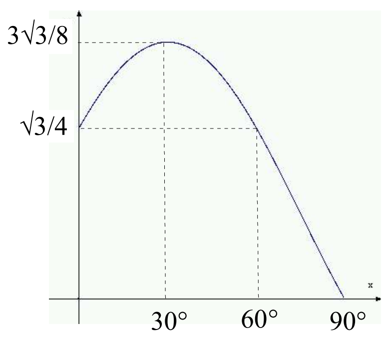


Tali risultati sono in accordo con quelli che otteniamo sostituendo $x=0°$ e $x=90°$ nell'espressione analitica di $f(x)$.

f. Si tratta di un arco di sinusoide avente pulsazione $\omega=2$, periodo $T=180°$, ampiezza $A=\sqrt{3}/4$, che ha subito una traslazione di vettore $\vec{v}\equiv(-15°,\sqrt{3}/8)$.

Otteniamo il massimo se: $2x+30°=90° \Rightarrow x=30°$.

L'ordinata del massimo è: $f(30°)=\frac{3}{8}\sqrt{3}$.



g. $\frac{\sqrt{3}}{4}sen(2x+30°)+\frac{\sqrt{3}}{8}=\frac{\sqrt{3}}{4} \Rightarrow sen(2x+30°)=\frac{1}{2} \Rightarrow$

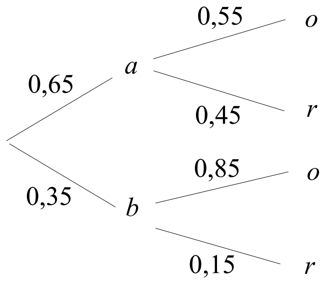
$2x+30°=30° \Rightarrow x_1=0 \quad \vee \quad 2x+30°=150° \Rightarrow x_2=60°$.

2. Indichiamo con *o* l'evento “lo studente è in orario”, con *a* l'evento “lo studente utilizza l'autobus”, etc.

a. $p(o)=p(a)\cdot p(o/a)+p(b)\cdot p(o/b)=0{,}65\cdot 0{,}55+0{,}35\cdot 0{,}85=0{,}655$;

b. $p(r)=1-p(o)=1-0{,}655=0{,}345$;

Per i punti *c*, *d* applichiamo il teorema di Bayes o ragioniamo sul grafo ad albero:



c. $p(a/o)=\dfrac{p(a)\cdot p(o/a)}{p(o)}=\dfrac{0{,}65\cdot 0{,}55}{0{,}655}\simeq 0{,}546$;

d. $p(b/r)=\dfrac{p(b)\cdot p(r/b)}{p(r)}=\dfrac{0{,}35\cdot 0{,}15}{0{,}345}\simeq 0{,}152$;

e. Supponiamo che l'anno scolastico sia abbastanza lungo perché la frequenza relativa sia una "buona" approssimazione della probabilità: $N(o)=p(o)\cdot N(tot)=0{,}655\cdot 200=131$.

f. Ricordiamo che due eventi A e B sono *indipendenti* se $p(A/B)=p(A)$, o $p(B)=p(B/A)$.

   Poiché $p(o/a)=0{,}55$, mentre $p(o)=0{,}655$, gli eventi *o* ed *a* sono *dipendenti*.

g. Poiché gli eventi *a* e *b* sono *incompatibili*, non possono essere indipendenti.

   Infatti: $p(a)=0{,}65$, mentre $p(a/b)=0$.

h. $p(r_1\wedge r_2)=p(r_1)\cdot p(r_2)=0{,}45\cdot 0{,}15=0{,}0675$;

i. $p(r_1\vee r_2)=p(r_1)+p(r_2)-p(r_1\wedge r_2)=0{,}45+0{,}15-0{,}0675=0{,}5325$;

j. $p(r_1\wedge o_2)=p(r_1)\cdot p(o_2)=0{,}45\cdot 0{,}85=0{,}3825$ (anche $p(r_1)-p(r_1\wedge r_2)$);

k. $p(r_2/o_1)=p(r_2)=0{,}15$, in quanto gli eventi o_1 ed r_2 sono indipendenti;

l. $p(10\,o)=0{,}85^{10}\simeq 0{,}197$;

m. $p(6\,o)=\begin{pmatrix}10\\8\end{pmatrix}\cdot 0{,}85^8\cdot 0{,}15^2\simeq 0{,}276$;

n. $p(6\,o\ \ dati)=0{,}85^6\simeq 0{,}377$;

o. $p(almeno\,1\,o)=1-p(10\,r)=1-0{,}15^{10}\simeq 1-5{,}76\cdot 10^{-9}$;

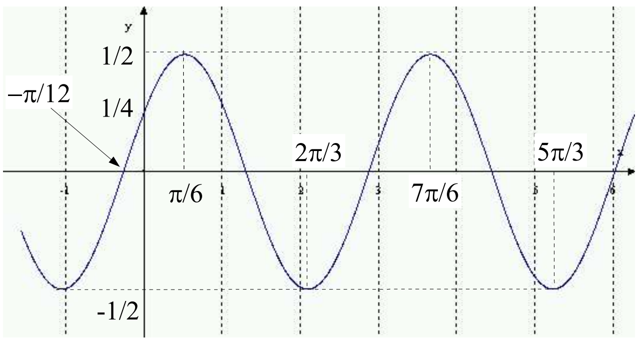
p. $p(sempre\ \ o)=0{,}85^n<0{,}01\ \Rightarrow\ n>\dfrac{log\,0{,}01}{log\,0{,}85}\simeq 28{,}3\ \Rightarrow\ n\geq 29$.

<u>4^A</u> - *Verifica goniometria*

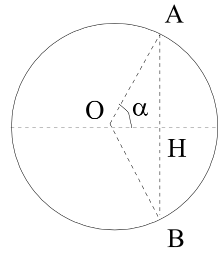
1. In una circonferenza di raggio $r=1\,cm$, la corda AB che sottende l'angolo al centro convesso di ampiezza 2α misura $1{,}6\,cm$. Calcola $\cos\alpha$.
2. Scrivi l'equazione della retta passante per il punto $B(0,1)$ e che forma un angolo di 60° con il semiasse positivo delle ascisse.
3. Sapendo che $sen\,\alpha=\cos\beta$, determina le possibili relazioni tra gli angoli α e β.
4. Sapendo che $sen\,\alpha=0{,}6$ e che $\pi/2<\alpha<\pi$, calcola $\cos\alpha/2$.
5. Determina il periodo della funzione $y=1+\cos^2 x$.
6. In un triangolo isoscele, l'angolo alla base misura α e l'angolo al vertice β.

   Sapendo che $sen\,\alpha=\sqrt{15}/4$, calcola $sen\,\beta$.
7. Determina il dominio della funzione $y=arc\cos(1-\sqrt{x})$.
8. Determina un intervallo in cui sia invertibile la funzione $y=sen(3x-\frac{\pi}{3})$.
9. Determina l'inversa della funzione $y=\frac{1}{2}sen(\frac{3}{2}x-\frac{\pi}{4})+1$.

   (*Puoi tralasciare le restrizioni che sarebbero necessarie*).
10. Determina le soluzioni dell'equazione $sen\,2x=\frac{1}{2}$ nell'intervallo $[0,2\pi]$.
11. Determina le soluzioni dell'equazione $sen^3 x+sen^2 x+sen\,x+1=0$ nell'intervallo $[0,2\pi]$.
12. Scrivi una possibile equazione della funzione il cui grafico è rappresentato in figura.



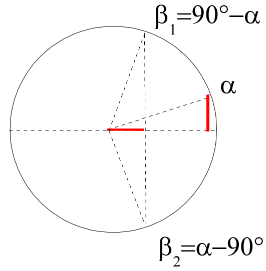
4^A - *Correzione verifica goniometria*



1. $OH=\sqrt{OA^2-AH^2}=\sqrt{1-0{,}8^2}=0{,}6\,cm$. $\cos\alpha=\dfrac{OH}{OA}=\dfrac{0{,}6\,cm}{1\,cm}=0{,}6$.

2. $q=y_B=1$; $m=tg\,60°=\sqrt{3}$. Eq. retta: $y=x\sqrt{3}+1$.

3. Dalle relazioni degli archi associati: $\beta=\pm(90°-\alpha)+2k\pi$ (vedi figura).



4. $sen\,\alpha=0{,}6 \Rightarrow \cos\alpha=-\sqrt{1-sen^2\alpha}=-0{,}8 \Rightarrow \cos\dfrac{\alpha}{2}=\sqrt{\dfrac{1+\cos\alpha}{2}}=\sqrt{0{,}1}$.

5. Applichiamo le formule di bisezione: $y=1+\cos^2 x=\dfrac{3}{2}+\dfrac{1}{2}\cos 2x$.

   Il periodo è quindi: $T=\dfrac{2\pi}{\omega}=\dfrac{2\pi}{2}=\pi$.

6. $sen\,\alpha=\dfrac{\sqrt{15}}{4} \Rightarrow \cos\alpha=\sqrt{1-\dfrac{15}{16}}=\dfrac{1}{4} \Rightarrow sen\,\beta=sen(\pi-2\alpha)=sen\,2\alpha=2\,sen\,\alpha\cos\alpha=\dfrac{\sqrt{15}}{8}$.

7. $\begin{cases} x\geq 0 \\ 1-\sqrt{x}\geq -1 \Rightarrow \sqrt{x}\leq 2 \Rightarrow x\leq 4 \\ 1-\sqrt{x}\leq 1 \Rightarrow \sqrt{x}\geq 0 \Rightarrow x\geq 0 \end{cases} \Rightarrow C.E.:\ 0\leq x\leq 4$.

8. Scegliamo un intervallo in cui la funzione seno cresca dal valore $y=-1$ ad $y=1$:

   $3x-\dfrac{\pi}{3}=-\dfrac{\pi}{2} \Rightarrow 3x=-\dfrac{\pi}{6} \Rightarrow x=-\dfrac{\pi}{18}$; $3x-\dfrac{\pi}{3}=\dfrac{\pi}{2} \Rightarrow 3x=\dfrac{5}{6}\pi \Rightarrow x=\dfrac{5}{18}\pi$.

   Quindi, un intervallo in cui la funzione è invertibile è: $[-\pi/18, 5\pi/18]$.

9. $y=\dfrac{1}{2}sen(\dfrac{3}{2}x-\dfrac{\pi}{4})+1 \Rightarrow \dfrac{1}{2}sen(\dfrac{3}{2}x-\dfrac{\pi}{4})=y-1 \Rightarrow sen(\dfrac{3}{2}x-\dfrac{\pi}{4})=2(y-1) \Rightarrow$

   $\dfrac{3}{2}x-\dfrac{\pi}{4}=arc\,sen[2(y-1)] \Rightarrow \dfrac{3}{2}x=arc\,sen[2(y-1)]+\dfrac{\pi}{4} \Rightarrow x=\dfrac{2}{3}\{arc\,sen[2(y-1)]+\dfrac{\pi}{4}\}$.

   Per rispettare la convenzione abituale, sarebbe preferibile "scambiare" tra loro le variabili x ed y.

10. $2x=\dfrac{\pi}{6}+2k\pi \Rightarrow x=\dfrac{\pi}{12}+k\pi \Rightarrow x_1=\dfrac{\pi}{12};\ x_2=\dfrac{13}{12}\pi$;

    $2x=\dfrac{5}{6}\pi+2k\pi \Rightarrow x=\dfrac{5}{12}\pi+k\pi \Rightarrow x_3=\dfrac{5}{12}\pi;\ x_4=\dfrac{17}{12}\pi$.

11. $sen^2x(sen\,x+1)+1(sen\,x+1)=0 \Rightarrow (sen\,x+1)(sen^2x+1)=0 \Rightarrow$

    - $sen\,x=-1 \Rightarrow x_1=3\pi/2$;
    - $sen^2x=-1 \Rightarrow non\,ha\,sol.$

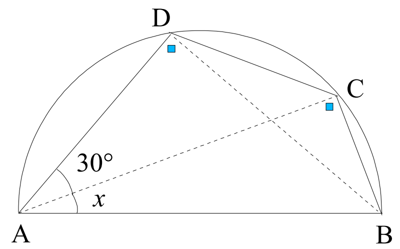
12. Vediamo dalla figura che l'ampiezza è $A=1/2$, il periodo $T=\pi$, quindi la pulsazione è $\omega=2\pi/T=2$, il valore massimo è assunto per $x_1=\pi/6$, lo zero per $x_0=-\pi/12$.

    La funzione può pertanto essere scritta: $y=\dfrac{1}{2}\cos[2(x-\dfrac{\pi}{6})]$, ovvero: $y=\dfrac{1}{2}sen[2(x+\dfrac{\pi}{12})]$.

1. In una semicirconferenza di diametro $AB=6$ è inscritto un quadrilatero ABCD tale che la diagonale AC formi con il lato AD un angolo di 30°.
   a. Ponendo $B\hat{A}C=x$, verifica che la misura del perimetro del quadrilatero ABCD è espressa dalla funzione $f(x)=3\sqrt{3}\cos x+3\,sen\,x+9$.
   b. Traccia il grafico della funzione $y=f(x)$ in un periodo, descrivine le caratteristiche ed evidenzia l'arco corrispondente alle limitazioni geometriche.
   c. Tenendo conto delle limitazioni geometriche, determina per quali valori di x la funzione assume il suo valore minimo ed il suo valore massimo, e calcola questi ultimi valori.
2. Determina se esistono dei triangoli che verificano le seguenti condizioni. In caso affermativo, spiega quanti sono (*a meno di isometrie*) e calcolane gli elementi mancanti (*approssima gli angoli al centesimo di grado e i lati con tre cifre significative*):
   a. $c=21{,}0\,cm$, $b=14{,}0\,cm$, $\beta=30°$;
   b. $c=15{,}0\,m$, $b=10{,}0\,m$, $\beta=45°$;
   c. $a=3{,}00\,km$, $b=7{,}00\,km$, $c=12{,}0\,km$;
   d. $a=11{,}0\,m$, $b=22{,}0\,m$, $c=26{,}0\,m$.
3. Un turista che visita Parigi si dirige (con moto rettilineo uniforme) verso la Tour Eiffel. Ad un certo momento, la cima della torre è visibile con un angolo di elevazione $\alpha=13{,}5°$; mentre dopo 12,0 minuti l'angolo di elevazione diventa $\beta=17{,}3°$. Quanti minuti sono ancora necessari al turista per raggiungere la torre?

<u>4^F</u> - *Correzione compito n°4*

1.



a. $BC = AB\, sen\, x = 6\, sen\, x$; $CD = AB\, sen\, 30° = 3$

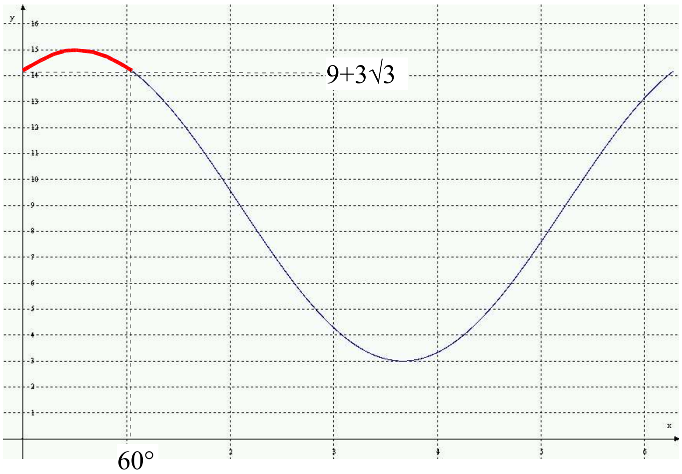
per il teorema della corda.

Il triangolo ADB è rettangolo in D perché l'angolo in D insiste su una semicirconferenza:

$$AD = AB\cos(x+30°) = 6\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\cos x - \frac{1}{2} sen\, x\right) = 3\sqrt{3}\cos x - 3\, sen\, x \quad .$$

Quindi: $f(x) = 2\, p_{ABCD} = 3\sqrt{3}\cos x + 3\, sen\, x + 9$ c.v.d.

b. Per tracciare il grafico della funzione, applichiamo il metodo dell'angolo "aggiunto":



$A = \sqrt{(3\sqrt{3})^2 + 3^2} = 6$,

$tg\,\phi = \frac{3\sqrt{3}}{3} = \sqrt{3}$. Quindi:

$f(x) = 6\, sen(x+60°) + 9$.

Si tratta di una sinusoide di ampiezza $A=6$ e periodo $T=360°$ che ha subito una traslazione di 60° verso sinistra e di 9 unità verso l'alto.

Osserviamo che deve essere: $0° \le B\hat{A}D \le 90° \Rightarrow 0° \le x \le 60°$, ed evidenziamo in rosso l'arco corrispondente alle limitazioni geometriche.

c. Vediamo che la funzione assume il suo valore minimo per $x=0°$ o $x=60°$.

Tale valore minimo è $f(0°) = f(60°) = 6\cdot\frac{\sqrt{3}}{2} + 9 = 9 + 3\sqrt{3} \simeq 14{,}2$.

La funzione assume valore massimo quando: $x + 60° = 90° \Rightarrow x = 30°$, ed il valore massimo è: $f(30°) = 6 + 9 = 15$.

Arriviamo alle stesse conclusioni disegnando i quadrilateri corrispondenti ai casi $x=0°$, $x=30°$, $x=60°$. Nel primo e nel terzo caso la figura degenera in un triangolo.

2.

a. Applichiamo il teorema dei seni: $\frac{sen\,\gamma}{c} = \frac{sen\,\beta}{b} \Rightarrow sen\,\gamma = \frac{c}{b} sen\,\beta = \frac{21}{14}\cdot\frac{1}{2} = \frac{3}{4} \Rightarrow$

$\gamma_1 = arc\,sen\frac{3}{4} \simeq 48{,}59°$; $\gamma_2 = 180° - \gamma_1 \simeq 131{,}41°$;

$\alpha_1 = 180° - \beta - \gamma_1 \simeq 101{,}41°$; $\alpha_2 = 180° - \beta - \gamma_2 \simeq 18{,}59°$;

$$a_1 = \frac{sen\,\alpha_1}{sen\,\beta} b \simeq \frac{0{,}980}{1/2} \cdot 14 \simeq 27{,}5\,cm \quad ; \quad a_2 = \frac{sen\,\alpha_2}{sen\,\beta} b \simeq \frac{0{,}319}{1/2} \cdot 14 \simeq 8{,}93\,cm \quad .$$

Nel caso *a* esistono quindi due distinti triangoli che verificano le condizioni date.

b. Dal teorema dei seni: $\frac{sen\,\gamma}{c} = \frac{sen\,\beta}{b} \Rightarrow sen\,\gamma = \frac{c}{b} sen\,\beta = \frac{15}{10} \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} \simeq 1{,}06$.

L'equazione non ha soluzioni, per cui non esistono triangoli che verificano le condizioni date.

c. Poiché $c > a + b$, non è verificata la diseguaglianza triangolare, per cui non esistono triangoli che verificano le condizioni date.

Anche dal teorema di Carnot: $a^2 + b^2 - 2ab\cos\gamma = c^2 \Rightarrow \cos\gamma = \frac{a^2 + b^2 - c^2}{2ab} = \frac{3^2 + 7^2 - 12^2}{2 \cdot 3 \cdot 7} \simeq 2{,}05 \Rightarrow \emptyset$.

d. Applichiamo il teorema di Carnot:

$$\cos\gamma = \frac{a^2 + b^2 - c^2}{2ab} = \frac{11^2 + 22^2 - 26^2}{2 \cdot 11 \cdot 22} \simeq -0{,}147 \Rightarrow \gamma \simeq 98{,}44\,° \quad .$$

Applichiamo il teorema dei seni: $sen\,\beta = \frac{b}{c} sen\,\gamma \simeq \frac{22}{26} \cdot 0{,}989 \simeq 0{,}837 \Rightarrow \beta \simeq 56{,}82\,°$.

In maniera analoga: $sen\,\alpha = \frac{a}{c} sen\,\gamma \simeq \frac{11}{26} \cdot 0{,}989 \simeq 0{,}418 \Rightarrow \beta \simeq 24{,}74\,°$.

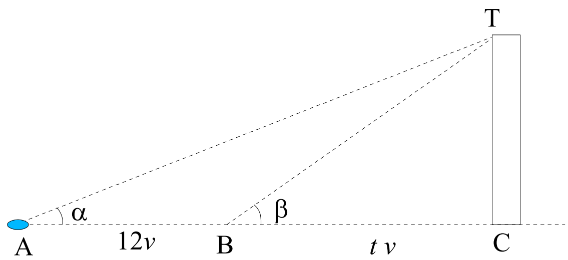
Nel caso *d* esiste quindi un solo triangolo che verifica le condizioni date.

Possiamo verificare che $\alpha + \beta + \gamma = 180\,°$ nei limiti della precisione utilizzata.

3. Indichiamo con *v* la velocità del turista (in *m/min*) e con *t* il tempo richiesto (in minuti).

Dalla legge oraria del moto uniforme:

$AB = 12v$, $BC = tv$.



Dai triangoli rettangoli ACT e BCT ricaviamo:

$CT = AC\,tg\,\alpha = (12 + t)\,v\,tg\,\alpha$,

$CT = BC\,tg\,\beta = tv\,tg\,\beta$.

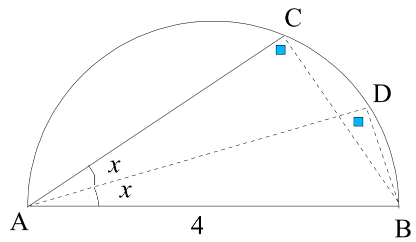
Uguagliamo le due espressioni e dividiamo per *v*:

$$tv\,tg\,\beta = (12 + t)\,v\,tg\,\alpha \Rightarrow t = \frac{12\,tg\,\alpha}{tg\,\beta - tg\,\alpha} \simeq \frac{12\,tg\,13{,}5\,°}{tg\,17{,}3\,° - tg\,13{,}5\,°} \simeq 40{,}4\,min \quad .$$

1. Data la semicirconferenza di diametro $AB=4$, traccia la corda AC e la bisettrice AD dell'angolo $B\hat{A}C$ (che interseca la semicirconferenza in D). Determina con l'approssimazione del centesimo di grado la misura dell'angolo $B\hat{A}D=x$ in modo che $AC+AD=4$.
2. Indiana Jones cerca di raggiungere un tempio nascosto nella foresta seguendo una linea retta. Egli, però, si dirige per sbaglio in una direzione leggermente diversa da quella corretta.
   Dopo tre ore (*esatte*) si accorge dell'errore e compie una deviazione verso destra di un angolo di 13,5° (*esatto*), in modo da dirigersi verso il tempio, che viene raggiunto dopo altre due ore (*esatte*).
   Se l'esploratore ha mantenuto sempre una velocità costante, quanti minuti ha perso a causa dell'errore? (*Fornisci il risultato con tre cifre significative corrette*).
3. Calcola perimetro ed area del poligono regolare di 12 lati inscritto in una circonferenza di raggio 1.
4.
   a. Calcola il numero di stringhe di 6 lettere che si possono formare con le 21 lettere dell'alfabeto italiano nei seguenti casi:
      - le lettere vengono scelte liberamente, senza nessun vincolo;
      - le lettere non possono essere ripetute;
      - le stringhe non possono contenere delle "doppie" (due o più lettere uguali consecutive);
      - le stringhe devono contenere almeno una vocale;
      - le stringhe devono contenere esattamente una vocale.
   b. Uno sciagurato studente deve sostenere un test che contiene 12 quesiti di matematica e 8 di fisica, e deve rispondere a 10 quesiti. In quanti modi può scegliere i quesiti a cui rispondere se:
      - i quesiti possono essere scelti liberamente;
      - deve rispondere a 6 quesiti di matematica e 4 di fisica;
      - deve rispondere a 6 quesiti di matematica e 4 di fisica, ma 4 dei quesiti di matematica e 2 di quelli di fisica sono obbligatori.

<u>4^F</u> *- Correzione compito n°5*

1. I triangoli ABC e ABD sono rettangoli rispettivamente in C e in D, in quanto gli angoli aventi tali vertici insistono su una semicirconferenza. Per il teo. dei triangoli rettangoli:



$AD = AB\cos x = 4\cos x \quad , \quad AD = AB\cos 2x = 4\cos 2x \quad .$

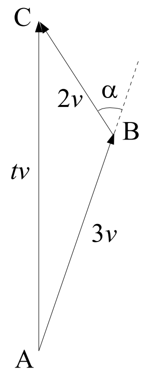
Impostiamo l'equazione: $AC + AD = 5 \;\Rightarrow$

$$4\cos x + 4(2\cos^2 x - 1) = 4 \;\Rightarrow\; 2\cos^2 x + \cos x - 2 = 0 \;\Rightarrow\; \cos x = \frac{-1 \pm \sqrt{17}}{4} \quad .$$

Ricaviamo quindi: $x = \arccos\frac{\sqrt{17}-1}{4} \simeq 38{,}67°$, accettabile perché $0° \le x \le 45°$.

Invece, l'equazione $\cos x = -(1+\sqrt{17})/4$ non ha soluzioni, perché $-1 \le \cos x \le 1$.

2. Se indichiamo con v la velocità dell'esploratore, avremo:



$AB = 3v$ (distanza percorsa prima di accorgersi dell'errore);

$BC = 2v$ (distanza percorsa dopo essersi accorto dell'errore);

$AC = tv$ (distanza in linea d'aria tra punto di partenza e tempio).

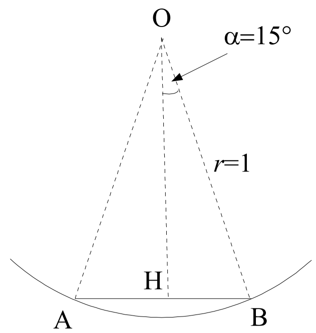
Applichiamo il teorema di Carnot al triangolo ABC:

$AC^2 = AB^2 + BC^2 - 2\,AB \cdot BC\cos(180° - \alpha) \;\Rightarrow$

$t^2 v^2 = 9v^2 + 4v^2 - 2\cdot 3v\cdot 2v\cdot\cos 166{,}5° \;\Rightarrow\; t = \sqrt{13 + 12\cos 13{,}5°} \simeq 4{,}9667\,h \quad .$

Il tempo perso a causa dell'errore è quindi: $\Delta t \simeq (5 - 4{,}9667)\cdot 60 \simeq 2{,}00\,min \quad .$

3. I lati del poligono regolare sono corde della circonferenza in cui esso è inscritto. A tali corde uguali corrispondono archi uguali e angoli al centro uguali. Pertanto, l'angolo al centro sotteso da ciascun lato misura: $A\hat{O}B = 360°/12 = 30°$. Poiché $OA = OB$ in quanto raggi della circonferenza, il triangolo OAB è isoscele di base AB, per cui l'altezza OH è anche mediana e bisttrice, quindi: $B\hat{O}H = 30°/2 = 15°$.



Per il teorema dei triangoli rettangoli: $AB = 2\,BH = 2\,OB\,sen\,15° \quad ; \quad OH = OB\cos 15° \quad .$

Perimetro ed area del poligono misurano quindi:

$2\,p_{pol} = 12\,AB = 24\,sen\,15° \simeq 6{,}21 \quad ; \quad S_{pol} = 6\,AB\cdot OH = 12\,sen\,15°\cos 15° = 6\,sen\,30° = 3 \quad .$

4.

a. Se non abbiamo alcun vincolo, dobbiamo scegliere e ordinare 6 elementi in un insieme che ne contiene 21, ammettendo la possibilità di ripetizioni, e quindi abbiamo 21 scelte possibili per ognuna delle 6 lettere: $D'_{21,6} = 21^6 = 85.766.121 \quad .$

Se le lettere non possono essere ripetute, ogni scelta diminuisce di una unità le possibilità nella scelta successiva: $D_{21,6}=21\cdot 20\cdot 19\cdot 18\cdot 17\cdot 16=39.070.080$.

Se non possiamo avere delle “doppie”, ogni lettera dovrà essere diversa da quella precedente, quindi, a parte per il primo elemento, avremo 20 scelte possibili:

$D_{21,1}\cdot(D_{20,1})^5=21\cdot 20^5=67.200.000$.

Per calcolare il numero di stringhe che contengono almeno una vocale, sottraiamo da tutte le stringhe possibili (calcolate in precedenza) quelle che contengono solo consonanti:

$D'_{21,6}-D'_{16,6}=21^6-16^6=68.988.905$.

Nel calcolare il numero delle stringhe che contengono esattamente una vocale abbiamo tre fattori: scelta di una vocale (su 5), scelta del posto che tale vocale occupa nella stringa (su 6), scelta e ordinamento delle altre cinque lettere, che saranno consonanti:

$C_{5,1}\cdot C_{6,1}\cdot D'_{16,5}=5\cdot 6\cdot 16^5=31.457.280$.

b. Se non ci sono vincoli, lo studente deve scegliere 10 quesiti in un insieme che ne contiene 20 (non ha importanza l'ordine nel quale li risolve, né la distinzione tra matematica e fisica):

$$C_{20,10}=\binom{20}{10}=\frac{20!}{10!\cdot 10!}=184.756 \quad .$$

Se deve scegliere 6 quesiti di matematica su 12 e 4 di fisica su 8:

$$C_{12,6}\cdot C_{8,4}=\binom{12}{6}\cdot\binom{8}{4}=\frac{12!}{6!\cdot 6!}\cdot\frac{8!}{4!\cdot 4!}=924\cdot 70=64.680 \quad .$$

Se 4 dei quesiti di matematica e 2 di quelli di fisica sono obbligatori, gli restano da scegliere due quesiti di matematica su 8 e due quesiti di fisica su 6:

$$C_{8,2}\cdot C_{6,2}=\binom{8}{2}\cdot\binom{6}{2}=\frac{8\cdot 7}{2}\cdot\frac{6\cdot 5}{2}=420 \quad .$$

1. Data una circonferenza di diametro $AB=2r$, prendi su di essa, da parti opposte rispetto ad AB, due punti C e D tali che $A\hat{B}C=60°$, $A\hat{B}D=x$.
   a. Esprimi (anche in funzione di $cos\,x$ e $sen\,x$) le misure dei segmenti AD, BD, AC, BC, CD.
   b. Verifica che: $f(x)=\frac{AD^2-CD^2}{BC^2}=3\,sen^2x-2\sqrt{3}\,sen\,x\,cos\,x-3\,cos^2x$.
   c. Determina le limitazioni geometriche e calcola i valori di $f(x)$ nei casi limite.
   d. Risolvi la disequazione $f(x)\geq 0$ tenendo conto delle linitazioni geometriche.
   e. Esprimi la quantità $f(x)$ utilizzando $cos\,2x$ e $sen\,2x$.
   f. Scrivi la stessa quantità nella forma $f(x)=-A\,sen(2x+\phi)+k$.
   g. Traccia il grafico della funzione $y=f(x)$ tenendo conto delle limitazioni geometriche.
      Descrivi la funzione ottenuta e determina le coordinate del suo punto di minimo.
   h. Risolvi l'equazione $f(x)=\sqrt{3}$.
2. La 4^F affronta una partita di calcetto ed una di basket. Le probabilità di vittoria sono rispettivamente $p(c)=0{,}35$ e $p(b)=0{,}75$. Calcola le probabilità che la 4^F:
   a. vinca entrambe le partite;
   b. perda entrambe le partite;
   c. vinca almeno una partita;
   d. vinca solo la partita di calcetto;

   Sapendo che il torneo di calcetto si articola in sette partite, calcola la probabilità che la 4^F:
   e. vinca tutte le partite;
   f. perda tutte le partite;
   g. vinca almeno una partita;
   h. vinca esattamente quattro partite.
3. Una casa farmaceutica prepara un test per riconoscere se una persona ha l'influenza.

Il test risulta positivo ("dice che hai l'influenza") nel 90% dei soggetti malati e nel 7% dei soggetti sani. La probabilità che una persona abbia l'influenza è $p(i)=0{,}08$.

Dopo avere tracciato un diagramma ad albero, calcola:

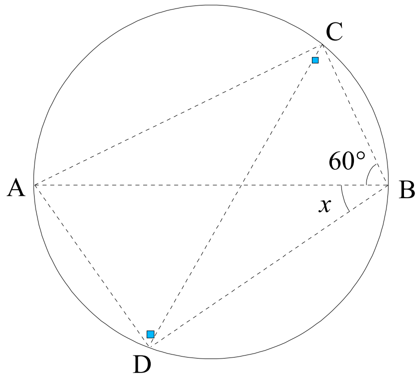
a. la probabilità che un soggetto sia positivo al test;

b. la probabilità che un soggetto sia negativo al test;

c. la probabilità che un soggetto sia un *falso positivo*, ovvero che il soggetto sia sano, sapendo che è risultato positivo al test;

d. la probabilità che un soggetto sia un *falso negativo*, ovvero che il soggetto abbia l'influenza, sapendo che è risultato negativo al test.

4^F - Correzione compito n°6



1. Sappiamo che $A\hat{C}B=A\hat{D}B=90°$ perché angoli alla circonferenza che insistono su una semicirconferenza.

   Osserviamo che, invece, in generale $C\hat{B}D$ non è un angolo retto, perché la sua ampiezza dipende dalla posizione scelta per D, che varia sulla semicirconferenza. Quindi CD non è un diametro.

   a. Applichiamo il teorema della corda o, quando possibile, quelli dei triangoli rettangoli:

   $AD=AB\,sen\,x=2r\,sen\,x$; $BD=AB\,cos\,x=2r\,cos\,x$; $AC=AB\,sen\,60°=r\sqrt{3}$;

   $BC=AB\,cos\,60°=r$; $CD=AB\,sen(60°+x)=r(\sqrt{3}\,cos\,x+sen\,x)$.

   b. $$f(x)=\frac{AD^2-CD^2}{BC^2}=\frac{4r^2sen^2x-3r^2cos^2x-2r\sqrt{3}\,sen\,x\,cos\,x-r^2sen^2x}{r^2}=$$

   $3\,sen^2x-2\sqrt{3}\,sen\,x\,cos\,x-3\,cos^2x$ c.v.d.

   c. Poiché D varia sulla semicirconferenza tra A e B: $0°\le x\le 90°$.

   $f(0°)=-3$; $f(90°)=+3$.

   d. $3\,sen^2x-2\sqrt{3}\,sen\,x\,cos\,x-3\,cos^2x\ge 0 \Rightarrow 3\,tg^2x-2\sqrt{3}\,tg\,x-3\ge 0 \Rightarrow$

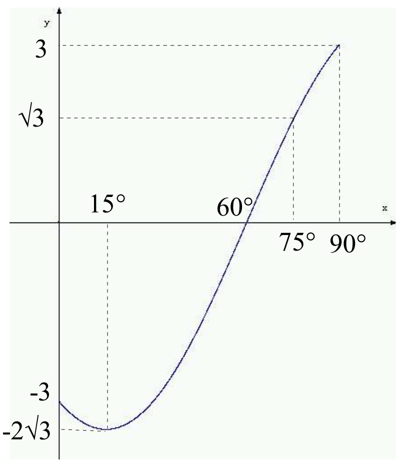
   $tg\,x\le-\sqrt{3}/3 \lor x\ge\sqrt{3} \Rightarrow 60°\le x\le 90°$.

   Abbiamo diviso la disequazione per cos^2x in quanto si tratta di una quantità generalmente positiva ed abbiamo tenuto conto delle limitazioni geometriche.

   e. $$f(x)=\frac{3}{2}-\frac{3}{2}cos\,2x-\sqrt{3}\,sen\,2x-\frac{3}{2}-\frac{3}{2}cos\,2x=-\sqrt{3}\,sen\,2x-3\,cos\,2x$$.

   f. $A=\sqrt{9+3}=2\sqrt{3}$; $tg\,\phi=\sqrt{3} \Rightarrow \phi=60°$; $k=0$.

   $f(x)=-2\sqrt{3}\,sen(2x+60°)$.

   g. Si tratta di un arco di sinusoide avente pulsazione $\omega=2$, periodo $T=180°$, ampiezza $A=2\sqrt{3}$, che ha subito una traslazione di 30° verso sinistra ed una simmetria rispetto all'asse delle ascisse.

   Otteniamo il minimo se: $2x+60°=90° \Rightarrow x=15°$.

   L'ordinata del minimo è: $f(15°)=-2\sqrt{3}$.

   h. $-2\sqrt{3}\,sen(2x+60°)=\sqrt{3} \Rightarrow sen(2x+60°)=-1/2 \Rightarrow$

   $2x+60°=210°+k\,360° \Rightarrow x=75°+k\,180°$;

   $2x+60°=330°+k\,360° \Rightarrow x=135°+k\,180°$.

   L'unica soluzione che rispetta le limitazioni geometriche è $x=75°$ (*vedi grafico*).

2. Supponiamo che gli eventi c e b siano indipendenti:

a. $p(c \wedge b) = p(c) \cdot p(b) = 0{,}35 \cdot 0{,}75 = 0{,}2625$;

b. $p(\bar{c} \wedge \bar{b}) = p(\bar{c}) \cdot p(\bar{b}) = 0{,}65 \cdot 0{,}25 = 0{,}1625$;

c. $p(c \vee b) = p(c) + p(b) - p(c \wedge b) = 0{,}35 + 0{,}75 - 0.2625 = 0{,}8375$;

d. $p(c \wedge \bar{b}) = p(c) \cdot p(\bar{b}) = 0{,}35 \cdot 0{,}25 = 0{,}0875$;

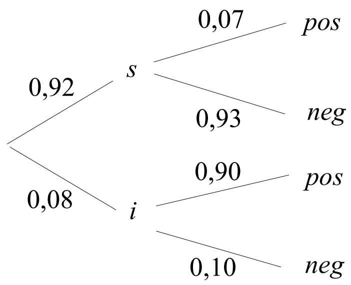
e. $p(7c) = (0{,}35)^7 \simeq 6{,}43 \cdot 10^{-4}$;

f. $p(7\bar{c}) = (0{,}65)^7 \simeq 0{,}0490$;

g. $p(almeno\, 1\, c) = 1 - p(7\bar{c}) \simeq 0{,}9510$;

h. $p(4c) = \binom{7}{4} \cdot (0{,}35)^4 \cdot (0{,}65)^3 \simeq 0{,}1442$.

3. Indichiamo con s l'evento “il soggetto è sano”.



a. $p(pos) = p(s) \cdot p(pos/s) + p(i) \cdot p(pos/i) =$

$0{,}92 \cdot 0{,}07 + 0{,}08 \cdot 0{,}90 = 0{,}1364$;

b. $p(neg) = 1 - p(pos) \simeq 0{,}8636$;

c. $p(s/pos) = \dfrac{p(s) \cdot p(pos/s)}{p(pos)} = \dfrac{0{,}92 \cdot 0{,}07}{0{,}1364} \simeq 0{,}472$;

d. $p(i/neg) = \dfrac{p(i) \cdot p(neg/i)}{p(neg)} = \dfrac{0{,}08 \cdot 0{,}10}{0{,}8636} \simeq 9{,}26 \cdot 10^{-3}$.

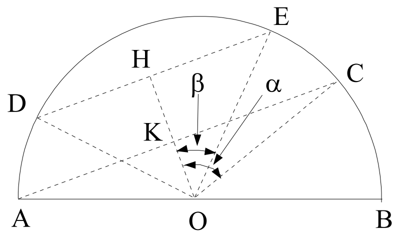
3^C PNI – MATEMATICA compito n°9 - 2011-2012

1. In una semicirconferenza di centro O e diametro AB, sono date la corda $\overline{AC}=32\,cm$ e la corda $\overline{DE}=24\,cm$, parallela ad AC e alla distanza da questa di 4 *cm*. Calcola la tangente dell'angolo al centro $C\hat{O}E$ che sottende uno dei due archi compresi tra le due corde.
2. Nel triangolo rettangolo ABC conosciamo la misura del cateto $\overline{AB}=2a$ e indichiamo con T il punto dell'ipotenusa BC tale che $\overline{BT}=\overline{AB}$. Calcola la misura dell'angolo $A\hat{C}B$ sapendo che vale la relazione $\overline{AC}^2+2\cdot\overline{CT}^2=5\cdot\overline{AB}^2$.
3. Del triangolo ABC conosciamo il lato $\overline{AB}=11\,cm$, l'angolo $B\hat{A}C=\alpha$ tale che $\cos\alpha=4/5$ e l'angolo $A\hat{B}C=\beta$ tale che $\cos\beta=-5/13$. Calcola perimetro ed area del triangolo.
4. Data una circonferenza di diametro $\overline{AB}=2r$, prendi su di essa, da parti opposte rispetto ad AB, due punti C e D tali che $A\hat{B}C=\pi/3$ e $A\hat{B}D=x$. Calcola il valore di *x* per cui si ha: $\overline{AD}^2+\overline{CD}^2=5\,\overline{BC}^2$.
5. Conduci internamente ad un angolo retto $A\hat{O}B$ una semiretta OC che forma con A un angolo $A\hat{O}C=x$. Prendi rispettivamente su OA ed OB due punti M ed N tali che $\overline{OM}=1$, $\overline{ON}=\sqrt{3}$. Indica con M' ed N' le proiezioni di M ed N su OC. Detto P il punto medio di M'N', determina *x* in modo che l'area del triangolo NOP assuma il valore $3\sqrt{3}/8$.

   Facoltativo: spiega perché questo è il massimo valore che può assumere l'area del triangolo.
6. Considera un triangolo ABC avente i lati $\overline{AC}=a$ e $\overline{BC}=2a$. Costruisci, dalla parte opposta a C rispetto alla retta AB, un triangolo rettangolo ABD il cui cateto BD sia uguale alla metà del cateto AB. Trova per quale valore dell'angolo $A\hat{C}B=x$ l'area del quadrilatero ABCD assume il valore massimo e calcola tale valore.

<u>3^C</u> *- Correzione compito n°9*

1. L'asse OH comune alle due corde passa per il centro.



Ponendo $OK=x$, abbiamo: $OK^2+KC^2=OH^2+HE^2$,

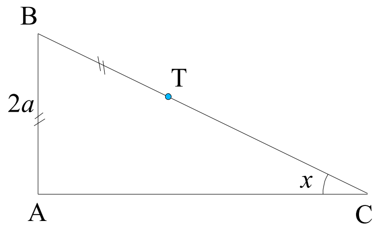
in quanto entrambi uguali ad r^2 . Pertanto:

$x^2+16^2=(x+4)^2+12^2 \Rightarrow 8x=96 \Rightarrow x=12\,cm$.

Indichiamo poi: $C\hat{O}H=\alpha$ e $E\hat{O}H=\beta$. Abbiamo quindi:

$$tg\,\alpha=\frac{CK}{OK}=\frac{16}{12}=\frac{4}{3} \quad , \quad tg\,\beta=\frac{EH}{OH}=\frac{12}{16}=\frac{3}{4} \quad , \quad tg(\alpha-\beta)=\frac{tg\,\alpha-tg\,\beta}{1+tg\,\alpha\, tg\,\beta}=\frac{\frac{4}{3}-\frac{3}{4}}{1+\frac{4}{3}\cdot\frac{3}{4}}=\frac{7}{24} \quad .$$

2. Poniamo $A\hat{C}B=x$. Per i teoremi sui triangoli rettangoli:



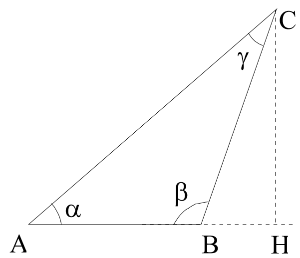
$AC=\dfrac{AB}{tg\,x}=2a\dfrac{cos\,x}{sen\,x}$, $CT=CB-BT=\dfrac{2a}{sen\,x}-2a$.

Otteniamo quindi: $4a^2\left(\dfrac{cos^2 x}{sen^2 x}+2\left(\dfrac{1}{sen\,x}-1\right)^2\right)=20a^2 \Rightarrow$

$cos^2 x+2(1-2\,sen\,x+sen^2 x)=5\,sen^2 x \Rightarrow 4\,sen^2 x+4\,sen\,x-3=0$.

L'equazione $sen\,x=-\dfrac{3}{2}$ non ha soluzioni, mentre $sen\,x=\dfrac{1}{2} \Rightarrow x=\dfrac{\pi}{6}$ (poiché $0<x<\dfrac{\pi}{2}$).

3. Conoscendo solo la lunghezza di un lato, dobbiamo applicare il teorema dei seni:



$sen\,\alpha=\sqrt{1-cos^2\alpha}=3/5$, $sen\,\beta=\sqrt{1-cos^2\beta}=12/13$,

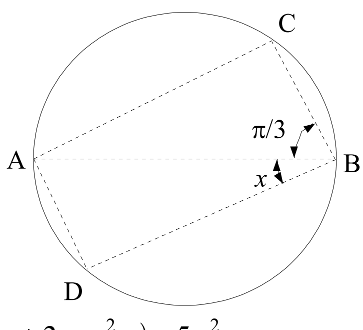
$sen\,\gamma=sen(\alpha+\beta)=sen\,\alpha\,cos\,\beta+sen\,\beta\,cos\,\alpha=-\dfrac{3}{5}\cdot\dfrac{5}{13}+\dfrac{12}{13}\cdot\dfrac{4}{5}=\dfrac{33}{65}$.

$\dfrac{AC}{sen\,\beta}=\dfrac{AB}{sen\,\gamma} \Rightarrow AC=\dfrac{sen\,\beta}{sen\,\gamma}AB=\dfrac{12/13}{33/65}\cdot 11=20\,cm$.

$BC=\dfrac{sen\,\alpha}{sen\,\gamma}AB=\dfrac{3/5}{33/65}\cdot 11=13\,cm$. $2p=44\,cm$. $CH=BC\,sen\,\beta=\dfrac{13\cdot 12}{13}=12\,cm$.

$Area=\dfrac{AB\cdot CH}{2}=\dfrac{11\cdot 12}{2}=66\,cm^2$.

4. Ricordando che i triangoli ABC e ABD sono rettangoli in C e D rispettivamente, ricavo: $AD=2r\,sen\,x$, $BC=2r\,cos\,\pi/3=r$.



Per il teorema della corda:

$CD=2r\,sen(x+\pi/3)=r(sen\,x+\sqrt{3}\,cos\,x)$.

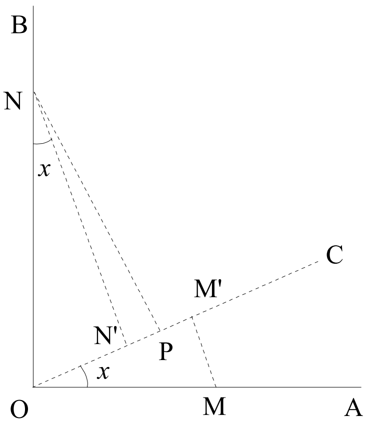
La relazione del testo diventa: $4r^2 sen^2 x+r^2(sen^2 x+2\sqrt{3}\,sen\,x\,cos\,x+3\,cos^2 x)=5r^2$.

La riporto ad una equazione omogenea di 2° grado: $\sqrt{3}\,sen\,x\,cos\,x-cos^2 x=0$.

Il caso $cos\,x=0$ ci fornirebbe la soluzione $x=\pi/2$, che è di accettabilità estremamente dubbia (rappresenta il caso limite in cui $D\equiv B$).

Il caso $\sqrt{3}\,sen\,x - cos\,x = 0 \;\Rightarrow\; tg\,x = \frac{\sqrt{3}}{3}$ fornisce invece la soluzione accettabile $x = \pi/6$.

5. Per i teoremi dei triangoli rettangoli, abbiamo:



$OM' = OM\,cos\,x = cos\,x$; $ON' = ON\,sen\,x = \sqrt{3}\,sen\,x$;

$NN' = ON\,cos\,x = \sqrt{3}\,cos\,x$. Poiché P è il punto medio di N'M':

$OP = \frac{OM' + ON'}{2} = \frac{1}{2}(cos\,x + \sqrt{3}\,sen\,x)$. L'area del triangolo è:

$Area = \frac{OP \cdot NN'}{2} = \frac{\sqrt{3}}{4} cos\,x(cos\,x + \sqrt{3}\,sen\,x)$.

L'equazione del testo è quindi:

$\frac{\sqrt{3}}{4} cos\,x(cos\,x + \sqrt{3}\,sen\,x) = \frac{3\sqrt{3}}{8} \;\Rightarrow\; cos^2 x + \sqrt{3}\,sen\,x\,cos\,x = \frac{3}{2}$

che può essere ricondotta ad una equazione omogenea di secondo grado:

$3\,sen^2 x - 2\sqrt{3}\,sen\,x\,cos\,x + cos^2 x = 0 \;\Rightarrow\; 3\,tg^2 x - 2\sqrt{3}\,tg\,x + 1 = 0 \;\Rightarrow\; tg\,x = \frac{\sqrt{3}}{3} \;\Rightarrow\; x = \frac{\pi}{6}$

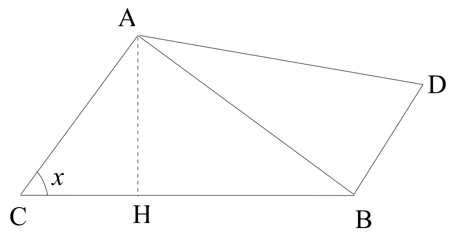
(in quanto $0 < x < \pi/6$). Per vedere che si tratta del valore massimo, posso applicare prima le formule di duplicazione e poi quella dell'angolo “aggiunto” per scrivere l'area come:

$A(x) = \frac{\sqrt{3}}{4} cos^2 x + \frac{3}{4} sen\,x\,cos\,x = \frac{\sqrt{3}}{8}(1 + cos\,2x) + \frac{3}{8} sen\,2x = \frac{\sqrt{3}}{4} sen(2x + \frac{\pi}{6}) + \frac{\sqrt{3}}{8}$.

La funzione seno assume il suo valore massimo (che è 1) quando: $2x + \frac{\pi}{6} = \frac{\pi}{2} \;\Rightarrow\; x = \frac{\pi}{6}$.

Il massimo valore dell'area è quindi: $A_{max} = \frac{\sqrt{3}}{4} + \frac{\sqrt{3}}{8} = \frac{3\sqrt{3}}{8}$.

6. Dai teoremi sui triangoli rettangoli ricavo: $AH = a\,sen\,x$.



L'area del triangolo ABC è quindi:

$A_{ABC} = \frac{BC \cdot AH}{2} = a^2\,sen\,x$. Dal teorema di Carnot:

$AB^2 = AC^2 + BC^2 - 2\,AC \cdot BC\,cos\,x = 5a^2 - 4a^2\,cos\,x$.

L'area del triangolo rettangolo ABD è: $A_{ABD} = \frac{AB \cdot BD}{2} = \frac{AB^2}{4} = \frac{5}{4}a^2 - a^2\,cos\,x$.

L'area del quadrilatero è perciò:

$A_{ACBD} = A_{ABC} + A_{ABD} = \frac{5}{4}a^2 + a^2\,sen\,x - a^2\,cos\,x = a^2[\sqrt{2}\,sen(x - \frac{\pi}{4}) + \frac{5}{4}]$.

L'area è massima quando il seno è uguale a 1, ovvero per $x - \frac{\pi}{4} = \frac{\pi}{2} \;\Rightarrow\; x = \frac{3}{4}\pi$.

Il suo valore massimo è $A_{max} = a^2(\sqrt{2} + \frac{5}{4})$.