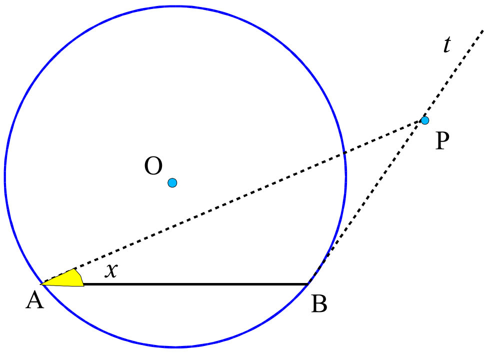
1. In una circonferenza di centro O e raggio r, la corda AB è uguale al lato del triangolo equilatero inscritto. Traccia la semiretta t tangente alla circonferenza in B e posta nel semipiano di origine AB contenente il centro. Prendi un punto P sulla semiretta t. Poni $P\hat{A}B=x$.



   a. Dimostra che $AB=r\sqrt{3}$ e che $A\hat{B}P=120°$.

   b. Esprimi in funzione di x i rapporti $\frac{BP}{AP}$ e $\frac{AB}{AP}$.

   c. Scrivi la funzione $f(x)=\frac{BP}{AP}+\frac{AB}{AP}$ nella forma $f(x)=A\,sen(x+\phi)$.

   d. Determina quali valori può assumere la variabile x al variare del punto P sulla semiretta t e quali valori assume $f(x)$ in corrispondenza dei casi limite.

   e. Traccia il grafico della funzione $f(x)$ su un periodo; evidenzia la parte corrispondente all'intervallo in cui è difinita la variabile x nel problema; indica le coordinate dei punti di massimo e di minimo di $f(x)$ in tale intervallo.

2. Uno studente della 4^B risponde correttamente ad un quesito di matematica con probabilità $p(m)=0{,}4$ e ad un quesito di fisica con probabilità $p(f)=0{,}25$.

   Calcola la probabilità che lo studente:

   a. risponda correttamente ad entrambi i quesiti;

   b. risponda correttamente ad almeno uno dei due quesiti;

   c. risponda correttamente ad uno solo dei due quesiti;

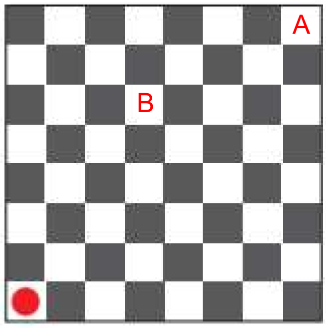
   d. non risponda correttamente a nessuno dei due quesiti;

   e. abbia risposto correttamente al quesito di fisica, sapendo che ha risposto correttamente ad uno solo dei due quesiti;

   f. risponda in maniera corretta ad <u>esattamente</u> sette quesiti di matematica su dieci;

   g. risponda correttamente ad <u>almeno</u> un quesito di fisica su cinque.

h. Qual è il minimo numero n di quesiti di matematica tale che la probabilità che lo studente risponda correttamente a <u>tutti</u> sia minore di 10^{-6} ?



3. Una pedina è collocata nella casella in basso a sinistra di una scacchiera (*punto rosso in figura*).

   Ad ogni mossa, la pedina può essere spostata o nella casella alla sua destra o nella casella sopra di essa. Calcola:

   a. quanti sono i percorsi di 14 mosse che portano la pedina nella casella d'angolo opposta (*con la* A *rossa in figura*);

   b. quanti tra tali percorsi passano per la casella indicata con B;

   c. qual è la probabilità che, nello spostamento verso A, la pedina passi per la casella B.

Alunno/a: ________________________________ Classe: **4^B**

Esercizio	*Punteggio*	*Esercizio*	*Punteggio*
1a	/3	2d	/2
1b	/5	2e	/2
1c	/5	2f	/3
1d	/3	2g	/3
1/e	/5	2h	/4
2a	/2	3a	/3
2b	/2	3b	/3
2c	/2	3c	/1
Totale			/48

Voto approssimato: $\frac{punteggio\ \ totale}{5,5}+2=$ Voto finale:

Per ogni esercizio, il punteggio viene assegnato sulla base di:

(A) **Completezza**: sviluppo e scelta del procedimento concettuale o dei contenuti teorici;

(B) **Calcolo**: utilizzo degli algoritmi e delle procedure di calcolo;

(C) **Linguaggio**: utilizzo del linguaggio specifico della disciplina (anche grafico e simbolico) adeguato;

(D) **Argomentazione**: giustificare motivare e verificare i procedimenti utilizzati e le soluzioni ottenute.

<u>*4^B*</u> *- Correzione compito n°4*

1.

a. Applichiamo il teorema della corda: $AB=2r\,sen\,60°=r\sqrt{3}$.

In alternativa, utilizziamo la geometria sintetica (proprietà del baricentro di dividere le mediane in due parti di cui l'una doppia dell'altra e teorema di Pitagora).

$A\hat{B}P$ è un caso particolare di angolo alla circonferenza, e quindi:

$A\hat{B}P=A\hat{O}P_{conc}:2=240°:2=120°$.

b. Applichiamo il teorema dei seni al triangolo generico ABP:

$$\frac{BP}{AP}=\frac{sen\,\hat{A}}{sen\,\hat{B}}=\frac{sen\,x}{r\sqrt{3}/2}=\frac{2}{\sqrt{3}}sen\,x \quad ;$$

$$\frac{AB}{AP}=\frac{sen\,\hat{P}}{sen\,\hat{B}}=\frac{sen(60°-x)}{r\sqrt{3}/2}=\frac{2}{\sqrt{3}}\left(\frac{\sqrt{3}}{2}cos\,x-\frac{1}{2}sen\,x\right)=cos\,x-\frac{1}{\sqrt{3}}sen\,x \quad .$$

c. $f(x)=\frac{2}{\sqrt{3}}sen\,x+cos\,x-\frac{1}{\sqrt{3}}sen\,x=\frac{1}{\sqrt{3}}sen\,x+cos\,x$.

Applichiamo il “metodo dell'angolo aggiunto”:

$$A=\sqrt{a^2+b^2}=\sqrt{\frac{1}{3}+1}=\frac{2}{\sqrt{3}} \quad ; \quad tg\,\phi=\frac{b}{a}=\sqrt{3} \Rightarrow \phi=60° \quad .$$

Quindi $f(x)=\frac{2}{\sqrt{3}}sen(x+60°)$.

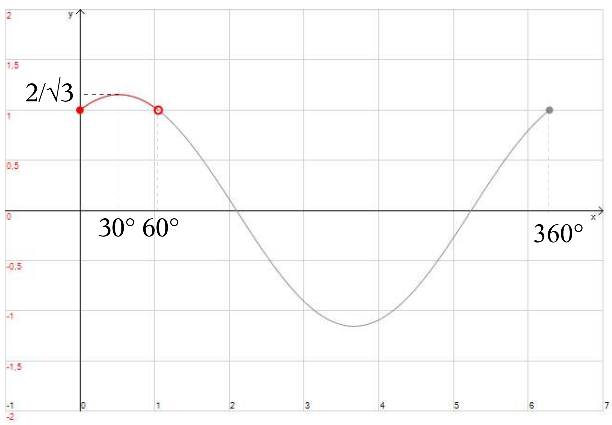
d. Quando $x=0°$, il punto P coincide con B e $\frac{BP}{AP}=0$ e $\frac{AB}{AP}=1$.

Questo è in accordo con il fatto che $f(0)=\frac{2}{\sqrt{3}}sen\,60°=1$.

Invece, quando $x=60°$, la semiretta *t* e la retta per A sono parallele, per cui il punto P non esiste.

In conclusione $0\leq x<60°$.

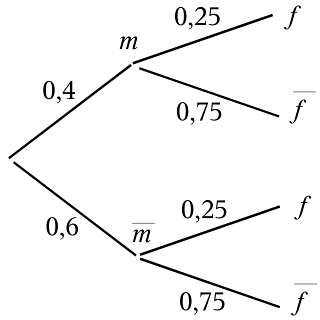
e. Si tratta di una funzione sinusoidale di ampiezza $A=2/\sqrt{3}\simeq 1{,}15$, periodo $T=360°$, traslata di $\phi=60°$ verso sx.



Nell'intervallo $0\leq x<60°$ la funzione possiede un punto di massimo di coordinate $(30°, 2/\sqrt{3})$ ed un punto di minimo di coordinate $(0, 1)$.

Il punto di coordinate $(60°, 1)$ non è di minimo, in quanto il valore $x=60°$ non appartiene all'intervallo in cui è definita la funzione.

2. Nei quesiti da *a* ad *e* può essere utile tracciare un diagramma ad albero.



   a. $p(m \wedge f) = p(m) \cdot p(f) = 0{,}4 \cdot 0{,}25 = 0{,}1$;

   b. $p(m \vee f) = p(m) + p(f) - p(m \wedge f) = 0{,}4 + 0{,}25 - 0{,}1 = 0{,}55$;

   c. $p(1q) = p[(m \wedge \overline{f}) \vee (\overline{m} \wedge f)] = p(m) \cdot p(\overline{f}) + p(\overline{m}) \cdot p(f) =$
   $0{,}4 \cdot 0{,}75 + 0{,}6 \cdot 0{,}25 = 0{,}45$;

   d. $p(\overline{m} \wedge \overline{f}) = p(\overline{m}) \cdot p(\overline{f}) = 0{,}6 \cdot 0{,}75 = 0{,}45$;

   e. Dal teorema di Bayes: $p(f/1q) = \dfrac{p(f) \cdot p(1q/f)}{p(1q)} = \dfrac{0{,}25 \cdot 0{,}6}{0{,}45} = \dfrac{1}{3} \simeq 0{,}33$.

   Oppure, in maniera più semplice, dal diagramma ad albero considerando come "eventi possibili" il secondo ed il terzo ramo e come "eventi favorevoli" solo il terzo.

   f. Applichiamo la distribuzione di Bernouilli ("schema delle prove ripetute"):

   $$p_{(7,10)} = \binom{10}{7} p^7 (1-p)^3 = \frac{10 \cdot 9 \cdot 8}{3 \cdot 2 \cdot 1} \cdot 0{,}4^7 \cdot 0{,}6^3 \simeq 4{,}25 \cdot 10^{-2} \quad .$$

   g. Idem, applicando la probabilità dell'evento complementare:

   $$p(almeno\, 1\, f) = 1 - p(nessun\, f) = 1 - \binom{5}{0} \cdot 0{,}25^0 \cdot 0{,}75^5 \simeq 0{,}762 \simeq 76{,}2\% \quad .$$

   h. $p^n = 0{,}4^n < 10^{-6} \;\Rightarrow\; n > log_{0,4} 10^{-6} \;\Rightarrow\; n > \dfrac{-6}{log\, 0{,}4} \simeq 15{,}08$.

   Sono quindi necessari almeno 16 lanci.

3. [*Esame di Stato 2016*]

   a. Dobbiamo scegliere, tra le 14 mosse possibili, 7 che spostino la pedina a destra (ovvero 7 che la spostino in alto):

   $$C_{14,7} = \binom{14}{7} = \frac{14!}{7! \cdot 7!} = 3432 \quad .$$

   b. Questa volta dobbiamo scegliere, tra le prime 8 mosse, 3 che spostino la pedina a destra (ovvero 5 che la spostino in alto), in modo che la pedina passi per B, <u>e</u> (congiunzione logica), tra le rimanenti 6 mosse, 4 che spostino la pedina a destra (ovvero 2 che la spostino in alto):

   $$C_{8,3} \cdot C_{6,4} = \binom{8}{3} \cdot \binom{6}{4} = \frac{8!}{3! \cdot 5!} \cdot \frac{6!}{4! \cdot 2!} = 840 \quad .$$

   c. Applichiamo la definizione classica di probabilità:

   $$p = \frac{C_{8,3} \cdot C_{6,4}}{C_{14,7}} = \frac{840}{3432} = \frac{35}{143} \simeq 0{,}245 \simeq 24{,}5\% \quad .$$

Al posto delle combinazioni, possiamo utilizzare, in maniera del tutto equivalente, le permutazioni con ripetizione.

Ad esempio, nel punto *a* abbiamo 14 elementi, di cui 7 ripetuti (gli spostamenti verso destra) e 7altri 7 ripetuti (gli spostamenti verso l'alto). Otteniamo quindi la stessa formula scritta in precedenza.