4^B - MATEMATICA compito n°3 - 2023-24

1. Risolvi le seguenti disequazioni nell'intervallo $[0, 2\pi]$:

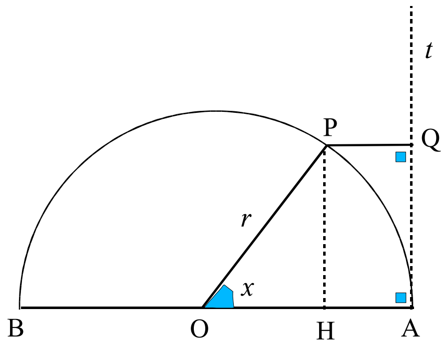
   a. $\cos(2x-\frac{\pi}{3})\le -\frac{1}{2}$;

   b. $2\,sen^2 x - sen\,x \ge 1$;

   c. $\frac{sen\,x}{2\cos x - 1} \ge 0$;

   d. $sen\,x \ge \sqrt{3}\cos x$.

2. Sulla semicirconferenza di centro O e diametro $AB=2r$, considera un angolo al centro $A\hat{O}P=x$ tale che $0\le x\le \pi/2$. Dal punto A traccia la retta *t* tangente alla circonferenza e indica con Q la proiezione del punto P sulla tangente *t*.



   a. Scrivi la funzione $f(x)$ che esprime il perimetro del trapezio OAQP in funzione dell'angolo *x*.

   b. Spiega perché la funzione $f(x)$ è la stessa anche nel caso in cui $\pi/2 < x \le \pi$.

   c. Calcola il perimetro del trapezio nei casi limite o particolari in cui $x=0$, $x=\pi/2$, $x=\pi$, e verifica che i valori trovati coincidano con quelli di $f(0)$, $f(\pi/2)$, $f(\pi)$.

   d. Traccia, giustificando la risposta, il grafico della funzione $f(x)$ nell'intervallo $0\le x\le\pi$.

   e. Determina per quali valori di x nell'intervallo $0\le x\le\pi$ la funzione $f(x)$ assume il valore massimo ed il valore minimo, e quali sono tali valori massimo e minimo.

   f. Risolvi la disequazione $f(x)\ge r(3+\frac{\sqrt{2}}{2})$ nell'intervallo $0\le x\le\pi$.

Alunno/a: ______________________________ Classe: **4^B**

Esercizio	*Punteggio*
1a	/8
1b	/8
1c	/8
1d	/8
2a	/6
2b	/2
2c	/3
2d	/8
2e	/3
2f	/10
Totale	/64

Voto approssimato: $\frac{punteggio \quad totale}{8}+2=$ Voto finale:

Per ogni esercizio, il punteggio viene assegnato sulla base di:

(A) **Completezza**: sviluppo e scelta del procedimento concettuale o dei contenuti teorici;

(B) **Calcolo**: utilizzo degli algoritmi e delle procedure di calcolo;

(C) **Linguaggio**: utilizzo del linguaggio specifico della disciplina (anche grafico e simbolico) adeguato;

(D) **Argomentazione**: giustificare motivare e verificare i procedimenti utilizzati e le soluzioni ottenute.

<u>4^B</u> - *Correzione compito n°3*

1.

a. $\cos(2x-\frac{\pi}{3})\le-\frac{1}{2} \;\Rightarrow\; \frac{2}{3}\pi+2k\pi\le 2x-\frac{\pi}{3}\le\frac{4}{3}\pi+2k\pi \;\Rightarrow$

$\pi+2k\pi\le 2x\le\frac{5}{3}\pi+2k\pi \;\Rightarrow\; Sol:\; \frac{\pi}{2}+k\pi\le x\le\frac{5}{6}\pi+k\pi$.

$Sol.\in[0,2\pi]:\; \frac{\pi}{2}\le x\le\frac{5}{6}\pi \;\vee\; \frac{3}{2}\pi\le x\le\frac{11}{6}\pi$.

b. $2\,sen^2x-sen\,x-1\ge 0 \;\Rightarrow\; sen\,x\le-\frac{1}{2} \;\vee\; sen\,x\ge 1$.

$Sol.\in[0,2\pi]:\; x=\frac{\pi}{2} \;\vee\; \frac{7}{6}\pi\le x\le\frac{11}{6}\pi$.

c. $\frac{sen\,x}{2\cos x-1}\ge 0$.

$sen\,x\ge 0 \;\Rightarrow\; 0\le x\le\pi \;\vee\; x=2\pi$;

$\cos x\ge\frac{1}{2} \;\Rightarrow\; 0\le x\le\frac{\pi}{3} \;\vee\; \frac{5}{3}\pi\le x\le 2\pi$.

0		π/3		π		5/3π		2π	
o	+	+	+	o	-	-	-	o	*sen x*
+	+	o	-	-	-	o	+	+	*2 cos x -1*
o	+	●	-	o	+	●	-	o	*f(x)*

$Sol\in[0,2\pi]:\; 0\le x<\frac{\pi}{3} \;\vee\; \pi\le x<\frac{5}{3}\pi \;\vee\; x=2\pi$.

d. *"Metodo dell'angolo aggiunto".*

$sen\,x-\sqrt{3}\cos x\ge 0 \;\Rightarrow\; 2\,sen(x-\frac{\pi}{3})\ge 0 \;\Rightarrow\; 2k\pi\le x-\frac{\pi}{3}\le\pi+2k\pi \;\Rightarrow$

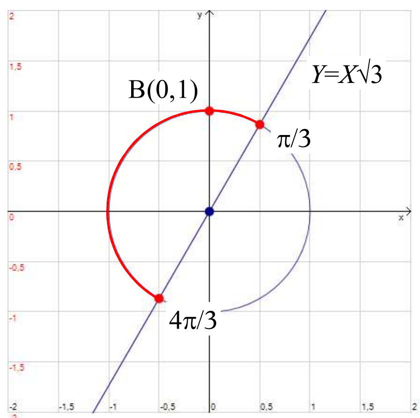
$Sol:\; \frac{\pi}{3}+2k\pi\le x\le\frac{4}{3}\pi+2k\pi \;\Rightarrow\; Sol\in[0,2\pi]:\; \frac{\pi}{3}\le x\le\frac{4}{3}\pi$.

Metodo grafico.

$\begin{cases} Y=X\sqrt{3} \\ X^2+Y^2=1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} Y=X\sqrt{3} \\ 4X^2=1 \end{cases} \Rightarrow$

$\begin{cases} X_1=-1/2 \\ Y_1=-\sqrt{3}/2 \end{cases} \Rightarrow\; x_1=\frac{4}{3}\pi$;

$\begin{cases} X_2=1/2 \\ Y_2=\sqrt{3}/2 \end{cases} \Rightarrow\; x_2=\frac{\pi}{3}$.



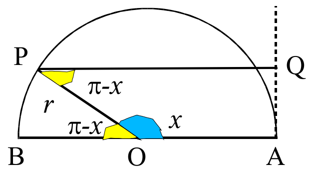
Per decidere quali dei semipiani contiene le sol. cercate, possiamo ad esempio osservare che le coordinate del punto $B(0,1)$ rendono vera la diseq. assegnata, per cui le sol. sono le stesse trovate con il precedente metodo.

2.

a. Sappiamo che $OA = OP = r$. Applichiamo i teoremi sui triangoli rettangoli:

$PH = QA = r\,sen\,x$; $OH = r\cos x \Rightarrow PQ = AH = r(1-\cos x)$.

Quindi $f(x) = 2r + r\,sen\,x + r(1-\cos x) = r(sen\,x - \cos x + 3)$.



b. Se l'angolo x è ottuso o piatto, abbiamo:

$PQ = r + r\cos(\pi - x) = r - r\cos x$, come nel caso precedente.

c. Se $x = 0$, il trapezio degenera nel segmento OA contato due volte, per cui $2p = 2r$.

Se $x = \pi/2$, il trapezio degenera nel quadrato di lato OA, per cui $2p = 4r$.

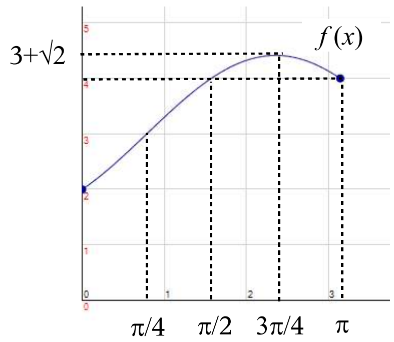
Se $x = \pi$, il trapezio degenera nel segmento AB contato due volte, per cui $2p = 4r$.

Sostituendo tali valori di x nella funzione $f(x) = r(sen\,x - \cos x + 3)$, ricaviamo:

$f(0) = 2r$, $f(\pi/2) = 4r$, $f(\pi) = 4r$ c.v.d.

d. Per la "formula dell'angolo aggiunto":

$$f(x) = r[\sqrt{2}\,sen(x - \frac{\pi}{4}) + 3] \ .$$



Si tratta di una sinusoide di ampiezza $A = r\sqrt{2}$, periodo $T = 2\pi$, che oscilla attorno al valore $y = 3$ ed ha subito una traslazione di $\pi/4$ verso dx.

In figura abbiamo posto $r = 1$ per semplicità.

e. Nell'intervallo considerato, la funzione assume valore minimo $f_{min} = 2$ per $x = 0$.

Essa assume valore massimo $f_{max} = 3 + \sqrt{2}$ quando $x - \pi/4 = \pi/2 \Rightarrow x = 3\pi/4$.

f. *"Metodo dell'angolo aggiunto"*.

$$r[\sqrt{2}\,sen(x - \frac{\pi}{4}) + 3] \geq r(3 + \frac{\sqrt{2}}{2}) \Rightarrow sen(x - \frac{\pi}{4}) \geq \frac{1}{2} \Rightarrow$$

$$\frac{\pi}{6} \leq x - \frac{\pi}{4} \leq \frac{5}{6}\pi \Rightarrow \frac{5}{12}\pi \leq x \leq \frac{13}{12}\pi \ .$$

Quindi nell'intervallo $0 \leq x \leq \pi$, la diseq. è verificata per: $Sol: \frac{5}{12}\pi \leq x \leq \pi$.

Metodo grafico. $r(sen\,x - cos\,x + 3) \geq r(3 + \frac{\sqrt{2}}{2}) \Rightarrow$

$$\begin{cases} Y = X + \sqrt{2}/2 \\ X^2 + Y^2 = 1 \end{cases} \Rightarrow X^2 + X^2 + X\sqrt{2} + \frac{1}{2} = 1 \Rightarrow 4X^2 + 2X\sqrt{2} - 1 = 0 \Rightarrow$$

$$X = \frac{-\sqrt{2} \pm \sqrt{6}}{4} \Rightarrow \begin{cases} X_1 = -(\sqrt{2} + \sqrt{6})/2 \\ Y_1(\sqrt{2} - \sqrt{6})/2 \end{cases} ; \begin{cases} X_2 = (-\sqrt{2} + \sqrt{6})/2 \\ Y_2(\sqrt{2} + \sqrt{6})/2 \end{cases}$$

da cui, con l'aiuto di un formulario, ricaviamo le stesse soluzioni.