4^B - MATEMATICA compito n°2 - 2023-24

1. Risolvi le seguenti equazioni goniometriche:

   a. $tg\,x + \frac{1}{tg\,x} = 2$;

   b. $sen\,x - \sqrt{3}\cos x - 1 = 0$;

   c. $\cos^2 x - 2\,sen\,x\cos x = 0$;

   d. $sen\,x + sen\frac{x}{2} = 0$.

2. In un triangolo ABC gli angoli α, β, γ sono tali che $\alpha = \frac{\pi}{3}$ e $\cos\beta = \frac{1}{3}$.

   Calcola il valore esatto di $\cos\gamma$ e stabilisci se il triangolo è acutangolo o ottusangolo.

3. Verifica la seguente identità: $\frac{\cos^2\alpha(sen^4\alpha - \cos^4\alpha)}{\cos 2\alpha} = \frac{\cos 2\alpha}{tg^2\alpha - 1}$.

4. Determina le funzioni di eq. $y = a\,sen\,x + b\cos x + c$ che verificano le seguenti condizioni:

   - la variabile *y* assume valori compresi tra $y_{min} = 1$ e $y_{max} = 5$;
   - il grafico della funzione passa per il punto di coordinate $P(\pi/2, 2)$.

   Traccia il grafico delle funzioni ottenute nell'intervallo $[0, 2\pi]$.

   Determina i valori di *x* per cui tali funzioni assumono il valore $y_{max} = 5$.

Alunno/a: ________________________________ Classe: **4^B**

Esercizio	*Punteggio*
1	/28 (1x4+3x8)
2	/8
3	/8
4	/16
Totale	/60

Voto approssimato: $\dfrac{punteggio \quad totale}{7,5}+2=$ Voto finale:

Per ogni esercizio, il punteggio viene assegnato sulla base di:

(A) **Completezza**: sviluppo e scelta del procedimento concettuale o dei contenuti teorici;

(B) **Calcolo**: utilizzo degli algoritmi e delle procedure di calcolo;

(C) **Linguaggio**: utilizzo del linguaggio specifico della disciplina (anche grafico e simbolico) adeguato;

(D) **Argomentazione**: giustificare motivare e verificare i procedimenti utilizzati e le soluzioni ottenute.

4^B - *Correzione compito n°2*

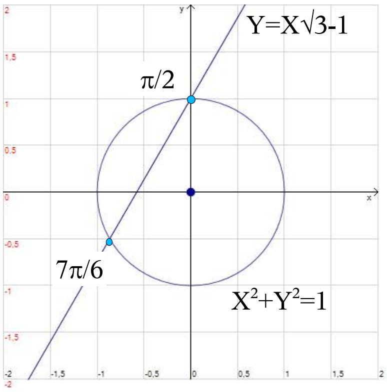
1.

a. $C.E: \begin{cases} tg\,x \neq 0 \;\Rightarrow\; x \neq k\pi \\ \exists\, tg\,x \;\Rightarrow\; x \neq \pi/2 + k\pi \end{cases} \;\Rightarrow\; x \neq k\dfrac{\pi}{2}$.

$$tg\,x + \frac{1}{tg\,x} = 2 \;\Rightarrow\; tg^2 x - 2\,tg\,x + 1 = 0 \;\Rightarrow\; (tg\,x - 1)^2 = 0 \;\Rightarrow\; tg\,x = 1 \;\Rightarrow\; x = \frac{\pi}{4} + k\pi \quad sol.\,acc.$$

b. $sen\,x - \sqrt{3}\cos x - 1 = 0$; eq. lineare non omogenea in $sen\,x$ e $cos\,x$.

Metodo dell'angolo aggiunto.



$$A = \sqrt{1+3} = 2 \quad , \quad \phi = arctg\frac{b}{a} = arctg(-\sqrt{3}) = -\frac{\pi}{3} \quad .$$

$$2\,sen(x - \frac{\pi}{3}) - 1 = 0 \;\Rightarrow\; sen(x - \frac{\pi}{3}) = \frac{1}{2} \;\Rightarrow$$

$$x - \frac{\pi}{3} = \frac{\pi}{6} + 2k\pi \;\Rightarrow\; x_1 = \frac{\pi}{2} + 2k\pi \quad ;$$

$$x - \frac{\pi}{3} = \frac{5}{6}\pi + 2k\pi \;\Rightarrow\; x_2 = \frac{7}{6}\pi + 2k\pi \quad .$$

Metodo grafico.

$$\begin{cases} Y - \sqrt{3}X - 1 = 0 \\ X^2 + Y^2 = 1 \end{cases} \;\Rightarrow\; \begin{cases} Y = \sqrt{3}X + 1 \\ X^2 + (\sqrt{3}X + 1)^2 = 1 \end{cases} \;\Rightarrow\; \begin{cases} Y = \sqrt{3}X + 1 \\ 4X^2 + 2\sqrt{3}X = 0 \end{cases} \;\Rightarrow$$

$$\begin{cases} X_1 = 0 \\ Y_1 = 1 \end{cases} \;\Rightarrow\; x_1 = \frac{\pi}{2} + 2k\pi \quad ; \quad \begin{cases} X_2 = -\sqrt{3}/2 \\ Y_2 = -1/2 \end{cases} \;\Rightarrow\; x_2 = \frac{7}{6}\pi + 2k\pi \quad .$$

c. $cos^2 x - 2\,sen\,x\,cos\,x = 0$; eq. omogenea di secondo grado in $sen\,x$ e $cos\,x$.

<u>Non</u> possiamo dividere per $cos^2 x$ perché perderemmo sol, quindi raccogliamo:

$$cos\,x(cos\,x - 2\,sen\,x) = 0 \;\Rightarrow\; \left[\begin{array}{l} cos\,x = 0 \;\Rightarrow\; x_1 = \pi/2 + k\pi \\ tg\,x = 1/2 \;\Rightarrow\; x_2 = arctg(1/2) + k\pi \simeq 26{,}6° + k\,180° \end{array}\right. \quad .$$

d. $sen\,x + sen\dfrac{x}{2} = 0$. Applichiamo la formula di duplicazione del seno e raccogliamo:

$$2\,sen\frac{x}{2}cos\frac{x}{2} + sen\frac{x}{2} = 0 \;\Rightarrow\; sen\frac{x}{2}(2\,cos\frac{x}{2} + 1) = 0 \;\Rightarrow$$

$$\left[\begin{array}{l} sen\,x/2 = 0 \;\Rightarrow\; x/2 = k\pi \;\Rightarrow\; x_1 = 2k\pi \\ cos\dfrac{x}{2} = -\dfrac{1}{2} \;\Rightarrow\; \dfrac{x}{2} = \pm\dfrac{2}{3}\pi + 2k\pi \;\Rightarrow\; x_2 = \pm\dfrac{4}{3}\pi + 4k\pi \end{array}\right. \quad .$$

2. Indipendentemente dal fatto che β sia acuto o ottuso, abbiamo:

$sen\,\beta=\sqrt{1-cos^2\beta}=\sqrt{1-\frac{1}{9}}=\frac{2}{3}\sqrt{2}$.

Per la somma degli angoli interni di un triangolo:

$$cos\,\gamma=cos[\pi-(\alpha+\beta)]=-cos(\alpha+\beta)=-cos\,\alpha\,cos\,\beta+sen\,\alpha\,sen\,\beta=-\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{3}+\frac{\sqrt{3}}{2}\cdot\frac{2}{3}\sqrt{2}=\frac{2\sqrt{6}-1}{6} \quad .$$

Poiché $cos\,\beta$ e $cos\,\gamma$ sono positivi, anche gli angoli β e γ (oltre ad α) sono acuti, per cui il triangolo è acutangolo.

3. Svolgiamo separatamente primo e secondo membro:

$$\frac{cos^2\alpha(sen^4\alpha-cos^4\alpha)}{cos\,2\alpha}=\frac{cos^2\alpha(sen^2\alpha+cos^2\alpha)(sen^2\alpha-cos^2\alpha)}{cos^2\alpha-sen^2\alpha}=-cos^2\alpha \quad ;$$

$$\frac{cos\,2\alpha}{tg^2\alpha-1}=(cos^2\alpha-sen^2\alpha):\frac{sen^2\alpha-cos^2\alpha}{cos^2\alpha}=-cos^2\alpha \quad \text{c.v.d.}$$

4. Utilizzando la “formula dell'angolo aggiunto”, possiamo scrivere la funzione come:

$y=A\,sen(x+\phi)+c$ con $A=\sqrt{a^2+b^2}$.

Poiché il seno assume valori compresi tra $+1$ e -1 , avremo:

$$\begin{cases} y_{min}=-A+c=1 \\ y_{max}=A+c=5 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} c=3 \\ A=2 \end{cases} \quad .$$

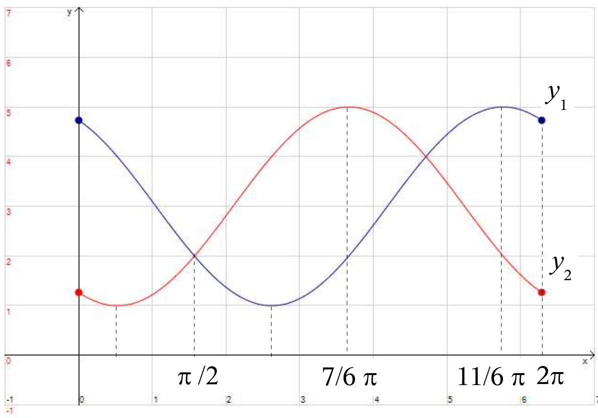
Imponiamo anche il passaggio per il punto P:

$$\begin{cases} a^2+b^2=4 \\ a\,sen\,\pi/2+b\,cos\,\pi/2+c=2 \;\Rightarrow\; a+c=2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a=-1 \\ b=\pm\sqrt{3} \end{cases} \quad .$$

Le funzioni hanno quindi eq. $y=-sen\,x\pm\sqrt{3}\,cos\,x+3$, ovvero: $y=2\,sen(x\pm\frac{2}{3}\pi)+3$.

I relativi grafici si ottengono da quello della funzione $y=sen\,x$ applicando nell'ordine:

- una traslazione verso sx (o dx) di $2\pi/3$ unità;
- una dilatazione verticale di un fattore 2;
- una traslazione verso l'alto di 3 unità.



Imponiamo $y=2\,sen(x\pm\frac{2}{3}\pi)+3=5 \Rightarrow$

$sen(x+\frac{2}{3}\pi)=1 \Rightarrow x\pm\frac{2}{3}\pi=\frac{\pi}{2}+2k\pi \Rightarrow$

$x_1=-\frac{\pi}{6}+2k\pi$; $x_2=\frac{7}{6}\pi+2k\pi$.