4^B - MATEMATICA compito n°1 - 2023-24

1. L'area di un settore circolare di raggio $r$ è uguale al doppio dell'area del quadrato costruito sul suo raggio. Calcola il perimetro del settore.

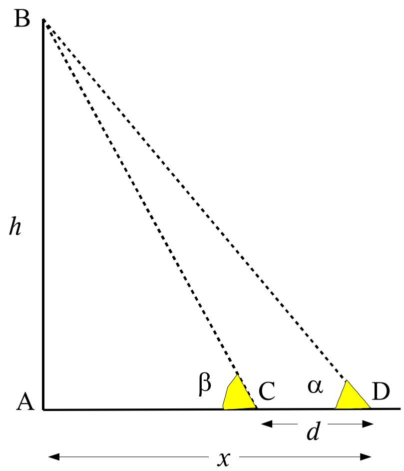
2. In un triangolo acutangolo ABC, indichiamo con α, β, γ gli angoli aventi vertice A, B, C rispettivamente e tracciamo le altezza AE, CD, BF. Conosciamo le misure $\overline{AB}=50a$ , $\overline{AC}=40a\sqrt{2}$ , $CD=40a$ . Calcola $tg\,\alpha$ , $tg\,\beta$ , $tg\,\gamma$ .

3. Verifica le seguenti identità:

   $$\frac{sen\,\alpha}{1+cos\,\alpha}+\frac{1+cos\,\alpha}{sen\,\alpha}=\frac{2}{sen\,\alpha} \quad ; \qquad tg^2\alpha\, sen^2\alpha = tg^2\alpha - sen^2\alpha \quad .$$

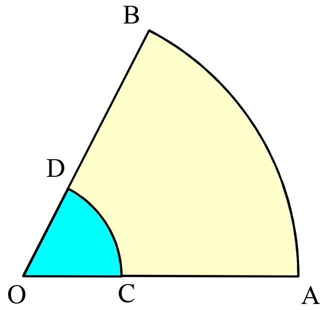
4. In una zona costiera, il livello $h$ dell'acqua del mare varia in un ciclo di alta e bassa marea tramite una funzione del tipo $h(t)=A+B\,sen(\omega t)$ , dove $h$ è l'altezza dell'acqua in metri e $t$ il tempo in ore a partire dalla mezzanotte. Sappiamo che un ciclo completo di alta e bassa marea dura $T=12h$ , che il livello minimo raggiunto dall'acqua durante il ciclo è $h_{min}=1{,}5\,m$ e che alle 6 di sera l'altezza dell'acqua è $h(18)=2{,}75\,m$ .
   a. Determina le costanti A, B, ω e scrivi l'equazione della funzione.
   b. Determina l'altezza dell'acqua alle 7 del mattino.
   c. Traccia il grafico della funzione in un intervallo di 12 ore.

5. Stiamo ammirando un monumento.
   Se ci troviamo ad una distanza $x$ (sconosciuta) dalla base del monumento, lo vediamo sotto un angolo α, mentre, se avanziamo di un tratto $d$, lo vediamo sotto un angolo β.
   a. Esprimi l'altezza $h$ del monumento in funzione di $d$, α, β.
   b. Calcola $h$ nel caso in cui $d=3{,}0\,m$ , $\alpha=47°$ , $\beta=52°$ .




6. I settori circolari OAB e OCD (*vedi retro*) appartengono a due centri concentrici di centro O e tra i loro raggi vale la relazione $OA=3OC$ .

Calcola il rapporto tra le aree della regione ABDC e del settore OCD.




Alunno/a: ________________________________ Classe: **4^B**

| *Esercizio* | *A* | *B* | *C* | *D* | *Punteggio* |
|---|---|---|---|---|---|
| 1 | | | | | /8 |
| 2 | | | | | /20 |
| 3 | | | | | /20 |
| 4 | | | | | /20 |
| 5 | | | | | /20 |
| 6 | | | | | /8 |
| *Totale* | | | | | /96 |

Voto approssimato: $\frac{punteggio\ \ totale}{12}+2=$ Voto finale:

(A) **Completezza**: sviluppo e scelta del procedimento concettuale o dei contenuti teorici;

(B) **Calcolo**: utilizzo degli algoritmi e delle procedure di calcolo;

(C) **Linguaggio**: utilizzo del linguaggio specifico della disciplina (anche grafico e simbolico) adeguato;

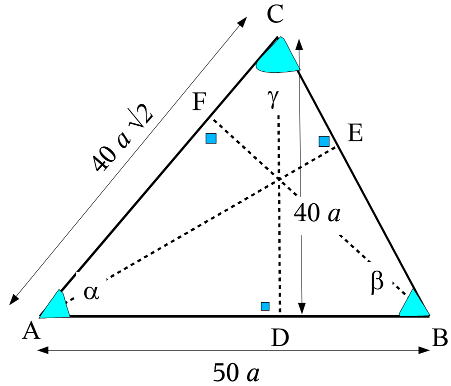
(D) **Argomentazione**: giustificare motivare e verificare i procedimenti utilizzati e le soluzioni ottenute.

4^B - *Correzione compito n°1*

1. Imponiamo: $A_{sett}=2A_{quadr} \Rightarrow \frac{\alpha}{2}r^2=2r^2 \Rightarrow \alpha=4\,rad$ .

   Quindi il perimetro del settore circolare misura: $2p_{sett}=\alpha r+2r=6r$ .

2. Consideriamo il triangolo rettangolo ACD:




   $$sen\,\alpha=\frac{CD}{AC}=\frac{40a}{40a\sqrt{2}}=\frac{1}{\sqrt{2}}\ ;$$

   $$cos\,\alpha=\sqrt{1-sen^2\alpha}=\sqrt{1-\frac{1}{2}}=\frac{1}{\sqrt{2}} \Rightarrow tg\,\alpha=\frac{sen\,\alpha}{cos\,\alpha}=1\ .$$

   Naturalmente $\alpha=\pi/4\,rad$ , ma non è necessario utilizzare questo risultato.

   $$AD=AC\,cos\,\alpha=40a \Rightarrow BD=AB-AD=10a\ ;$$

   $$BF=AB\,sen\,\alpha=25a\sqrt{2}\ .$$

   Consideriamo il triangolo rettangolo BCD:

   $$tg\,\beta=\frac{CD}{BD}=\frac{40a\sqrt{2}}{10a}=4\ .$$

   Consideriamo il triangolo rettangolo ABF:

   $$AF=AB\,cos\,\alpha=25a\sqrt{2} \Rightarrow CF=AC-AF=15a\sqrt{2}\ .$$

   Consideriamo il triangolo rettangolo BCF: $tg\,\gamma=\frac{BF}{CF}=\frac{25a\sqrt{2}}{15a\sqrt{2}}=\frac{5}{3}$ .

3.

   a. Operiamo sul primo membro: $\frac{sen\,\alpha}{1+cos\,\alpha}+\frac{1+cos\,\alpha}{sen\,\alpha}=\frac{sen^2\alpha+(1+cos\,\alpha)^2}{sen\,\alpha(1+cos\,\alpha)}=$

   $$\frac{sen^2\alpha+1+2cos\,\alpha+cos^2\alpha}{sen\,\alpha(1+cos\,\alpha)}=\frac{2+2cos\,\alpha}{sen\,\alpha(1+cos\,\alpha)}=\frac{2(1+cos\,\alpha)}{sen\,\alpha(1+cos\,\alpha)}=\frac{2}{sen\,\alpha}$$ c.v.d;

   b. Operiamo sul secondo membro:

   $$tg^2\alpha-sen^2\alpha=\frac{sen^2\alpha}{cos^2\alpha}-sen^2\alpha=\frac{sen^2\alpha(1-cos^2\alpha)}{cos^2\alpha}=tg^2\alpha\,sen^2\alpha$$ c.v.d.

4.

   a. Dall'informazione sul periodo ricaviamo: $\omega=\frac{2\pi}{T}=\frac{2\pi}{12}=\frac{\pi}{6}\frac{rad}{h}$ .

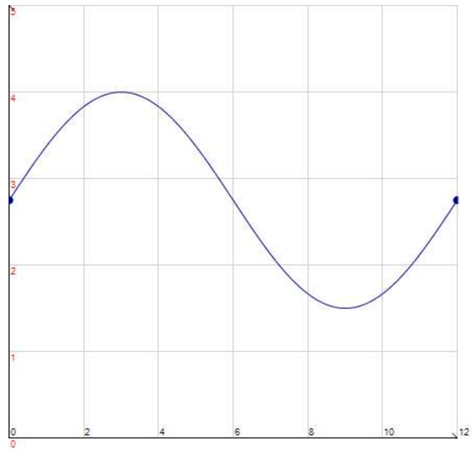
   Dalla condizione sul livello dell'acqua alle 6 ricaviamo:

   $$h(18)=A+B\,sen(\omega 18)=A+B\,sen\,3\pi=A=2{,}75\,m\ .$$

   L'acqua raggiunge il livello minimo quando $sen(\omega t)=-1$ , da cui:

   $$h_{min}=A-B=1{,}5\,m \Rightarrow B=A-1{,}5\,m=2{,}75-1{,}5=1{,}25\,m\ .$$

L'equazione della funzione è $h(t)=2{,}75+1{,}25\,sen(\frac{\pi}{6}t)$ .



b. $h(7)=2{,}75+1{,}25\,sen(\frac{7}{6}\pi)=2{,}75+1{,}25\cdot(-\frac{1}{2})=2{,}125\,m$ .

c. Tracciamo il grafico richiesto e controlliamo che esso verifichi tutte le condizioni esposte nel testo.

5.

a. Consideriamo i triangoli rettangoli ABC e ABD:

$$tg\,\alpha=\frac{AB}{AD}=\frac{h}{x}\ \Rightarrow\ x=\frac{h}{tg\,\alpha}\ ;$$

$$tg\,\beta=\frac{AB}{AC}=\frac{h}{x-d}\ \Rightarrow\ x=\frac{h}{tg\,\beta}+d\ .$$

Uguagliamo le due espressioni ricavate per $x$:

$$\frac{h}{tg\,\alpha}=\frac{h}{tg\,\beta}+d\ \Rightarrow\ h\,tg\,\beta=h\,tg\,\alpha+d\,tg\,\alpha\,tg\,\beta\ \Rightarrow\ h=\frac{tg\,\alpha\,tg\,\beta}{tg\,\beta-tg\,\alpha}d\ .$$

b. Sostituiamo i valori riportati dal testo:

$$h=\frac{tg\,\alpha\,tg\,\beta}{tg\,\beta-tg\,\alpha}d=\frac{tg\,47°\,tg\,52°}{tg\,52°-tg\,47°}\cdot 3\,m\simeq 19{,}84\,m\ .$$

6. I settori circolari OAB e ACD sono figure simili con rapporto di similitudine $k=3$ , pertanto il rapporto delle loro aree è $k^2=9$ , e quindi $S_{ABCD}=8\,S_{OCD}$ .

Se non ricordiamo questo concetto, dobbiamo svolgere qualche calcolo:

$$S_{OCD}=\frac{1}{2}C\hat{O}D\cdot\overline{OC}^2=\frac{1}{2}\alpha\,r^2\ ;\ S_{OAB}=\frac{1}{2}A\hat{O}B\cdot\overline{OA}^2=\frac{9}{2}\alpha\,r^2\ ;$$

$$S_{ABDC}=S_{OAB}-S_{OCD}=4\,\alpha\,r^2\ \Rightarrow\ \frac{S_{ABDC}}{S_{OCD}}=8\ .$$