4^A - MATEMATICA compito n°3 – 2018-19

Risolvi le seguenti equazioni goniometriche nell'insieme dei numeri reali e le seguenti disequazioni goniometriche nell'intervallo $[0, 2\pi]$, imponendo le opportune condizioni di esistenza.

(*Se nella soluzione non compare un angolo noto, approssimala al centesimo di grado*)

a. $2\,sen^2\frac{x}{2}+cos\,x=3\,tg^2\,x$;

b. $4\,cos^2(2x-\frac{\pi}{3})-1=0$;

c. $sen\,2x-\sqrt{3}\,cos\,2x+\sqrt{3}=0$;

d. $5\,sen^2\,x-\sqrt{3}\,sen\,2x-cos^2\,x=2$;

e. $\frac{3}{cos\,x+1}-\frac{3}{cos\,x-1}=8$;

f. $6\,sen^2\,x+sen\,x-1=0$;

g. $2\,cos(2x-\frac{\pi}{4})-\sqrt{2}\leq 0$;

h. $2\,sen^2\,x+4\,cos^2\,x\geq 5\,cos\,x$;

i. $cos\,3x\,cos\,2x+sen\,3x\,sen\,2x=1$;

j. $\frac{sen\,x}{2\,cosx-1}\geq 0$;

k. $sen\,x+2\,cos\,x-2\geq 0$;

l. $|sen\,x|=|cos\,x|$.

<u>4^A</u> - *Correzione compito n°3*

a. $2\cdot\frac{1-\cos x}{2}+\cos x=3tg^2x \;\Rightarrow\; tg^2x=\frac{1}{3} \;\Rightarrow\; tg\,x=\pm\frac{\sqrt{3}}{3} \;\Rightarrow\; x=\pm\frac{\pi}{6}+k\pi$.

b. $\cos(2x-\frac{\pi}{3})=\pm\frac{1}{2} \;\Rightarrow\; 2x-\frac{\pi}{3}=\pm\frac{\pi}{3}+k\pi \;\Rightarrow\; x_1=\frac{\pi}{3}+k\frac{\pi}{2};\; x_2=k\frac{\pi}{2}$.

c. Metodo dell'angolo aggiunto: $a=\sqrt{1+3}=2$; $\phi=arc\,tg(-\sqrt{3})=-\pi/3$.

$2\,sen(2x-\frac{\pi}{3})=-\sqrt{3} \;\Rightarrow\; 2x-\frac{\pi}{3}=-\frac{\pi}{3}+2k\pi \;\vee\; 2x-\frac{\pi}{3}=-\frac{2}{3}\pi+2k\pi \;\Rightarrow$

$x_1=k\pi$; $x_2=-\frac{\pi}{6}+k\pi$.

d. L'eq. è riconducibile ad omogenea di secondo grado:

$5\,sen^2x-2\sqrt{3}\,sen\,x\cos x-\cos^2x=2(\cos^2x+sen^2x) \;\Rightarrow$

$3\,sen^2x-2\sqrt{3}\,sen\,x\cos x-3\cos^2x=0 \;\Rightarrow\; 3tg^2x-2\sqrt{3}\,tg\,x-3=0 \;\Rightarrow$

$tg\,x=\frac{\sqrt{3}\pm2\sqrt{3}}{3} \;\Rightarrow\; tg\,x=-\frac{\sqrt{3}}{3} \;\vee\; tg\,x=\sqrt{3} \;\Rightarrow\; x_1=-\frac{\pi}{6}+k\pi;\; x_2=\frac{\pi}{3}+k\pi$.

e. $\frac{3}{\cos x+1}-\frac{3}{\cos x-1}=8$; $C.E: \cos x\neq\pm1 \;\Rightarrow\; x\neq k\pi$.

$3\cos x-3-3\cos x-3=8\cos^2x-8 \;\Rightarrow\; \cos^2x=\frac{1}{4} \;\Rightarrow\; \cos x=\pm\frac{1}{2} \;\Rightarrow\; x=\pm\frac{\pi}{3}+k\pi$ *sol. acc.* .

f. $6\,sen^2x+sen\,x-1=0 \;\Rightarrow\; sen\,x=\frac{-1\pm\sqrt{1+24}}{12} \;\Rightarrow\; senx=-\frac{1}{2} \;\vee\; sen\,x=\frac{1}{3} \;\Rightarrow$

$x_1=-\frac{\pi}{6}+2k\pi$; $x_2=\frac{7}{6}\pi+2k\pi$;

$x_3=arc\,sen\frac{1}{3}+2k\pi\simeq19{,}47°+k\,360°$; $x_4=\pi-arc\,sen\frac{1}{3}+2k\pi\simeq160{,}53°+k\,360°$.

g. $\cos(2x-\frac{\pi}{4})\leq\frac{\sqrt{2}}{2} \;\Rightarrow\; \frac{\pi}{4}+2k\pi\leq2x-\frac{\pi}{4}\leq\frac{7}{4}\pi+2k\pi \;\Rightarrow\; \frac{\pi}{2}+2k\pi\leq2x\leq2\pi+2k\pi \;\Rightarrow$

$\frac{\pi}{4}+k\pi\leq x\leq\pi+k\pi$. *Sol:* $x=0 \;\vee\; \frac{\pi}{4}\leq x\leq\pi \;\vee\; \frac{5}{4}\pi\leq x\leq2\pi$.

h. $2(1-\cos^2x)+4\cos^2x\geq5\cos x \;\Rightarrow\; 2\cos^2x-5\cos x+2\geq0$.

Sol. eq. associata: $\cos x=\frac{5\pm\sqrt{25-16}}{4} \;\Rightarrow\; \cos x=\frac{1}{2} \;\vee\; \cos x=2$.

Sol. diseq: $\cos x\leq\frac{1}{2} \;\Rightarrow\; \frac{\pi}{3}+2k\pi\leq x\leq\frac{5}{3}\pi+2k\pi$; $\cos x\geq2 \;\Rightarrow\; \emptyset$. *Sol:* $\frac{\pi}{3}\leq x\leq\frac{5}{3}\pi$.

i. $\cos3x\cos2x+sen3x\,sen2x=1 \;\Rightarrow\; \cos(3x-2x)=1 \;\Rightarrow\; \cos x=1 \;\Rightarrow\; x=2k\pi$.

j. $\dfrac{sen\,x}{2cos x-1}\geq 0$

0		$\pi/3$		π		$5/3\pi$		2π	
o	+	+	+	o	-	-	-	o	$sen\,x$
+	+	o	-	-	-	o	+	+	$2\,cos\,x$ -1
o	+	●	-	o	+	●	-	o	$f(x)$

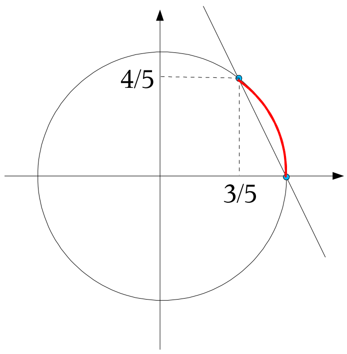
$Sol:\ 0\leq x<\dfrac{\pi}{3}\ \vee\ \pi\leq x<\dfrac{5}{3}\pi\ \vee\ x=2\pi$.

k. Risolviamo l'eq. associata ponendo $cos\,x=X$ e $sen\,x=Y$:

$$\begin{cases} Y=2-2X \\ X^2+Y^2=1 \end{cases} \Rightarrow X^2+4-8X+4X^2=1 \Rightarrow 5X^2-8X+3=0 \Rightarrow X=\frac{4\pm\sqrt{16-15}}{5} \Rightarrow$$

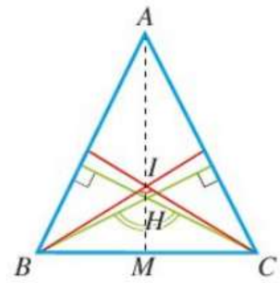
$$\begin{cases} X_1=3/5 \\ Y_1=4/5 \end{cases} \Rightarrow x_1=arc\,sen\frac{4}{5}+2k\pi\simeq 53{,}13°+k\,360° \ ; \ \begin{cases} X_2=1 \\ Y_2=0 \end{cases} \Rightarrow x_2=2k\pi \ .$$

Osserviamo che le coordinate dell'origine non verificano la disequazione $Y+2X-2\geq 0$, per cui le sol. della diseq. corrispondono all'arco della circonferenza goniometrica che ha per estremi i due punti le cui coordinate sono sol. dell'eq. associata, e che si trova nel semipiano non contenente l'origine:

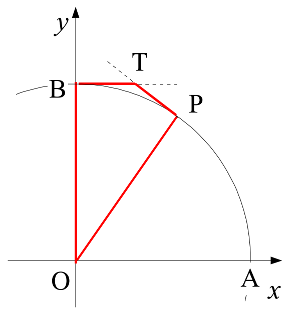


$Sol:\ 0\leq x\leq arc\,sen\dfrac{4}{5}\ \vee\ x=2\pi$.

l. $|sen\,x|=|cos\,x| \Rightarrow sen\,x=\pm cos\,x \Rightarrow tg\,x=\pm 1 \Rightarrow x=\dfrac{\pi}{4}+k\dfrac{\pi}{2}$.



1. Nel triangolo isoscele ABC si ha $tg\, A\hat{B}C = tg\, A\hat{C}B = 2$, I è l'incentro (*punto di intersezione delle bisettrici*) ed H è l'ortocentro (*punto di intersezione delle altezze*). Calcola $cos\, B\hat{I}C$ e $sen\, B\hat{H}C$.



2. Dato il punto $P(cos\,\alpha, sen\,\alpha)$ nel primo quadrante, traccia la tangente in P alla circonferenza goniometrica fino ad incontrare in T la tangente alla circonferenza in $B(0,1)$.

   Calcola il perimetro del quadrilatero OPTB sapendo che $cos\,\alpha = 3/5$.

3. Sapendo che $sen\frac{x}{4} = \frac{1}{\sqrt{6}}$, calcola $cos\, x$.

4. Un corpo si muove di moto armonico secondo la legge oraria $x(t) = sen(2\pi t) + \sqrt{3}\, cos(2\pi t)$, dove il tempo *t* è espresso in secondi e la posizione *x* in metri.

   Scrivi la legge oraria nella forma $x(t) = A\, sen(\omega t + \phi)$, precisando l'ampiezza *A*, la pulsazione ω ed il periodo *T* del moto (con le rispettive unità di misura). Determina:

   a. in quali istanti di tempo il corpo passa per la posizione di equilibrio $x = 0\, m$;

   b. in quali istanti di tempo il corpo passa per la posizione $x = 1\, m$;

   c. in quali istanti di tempo il corpo ha velocità nulla.

   Traccia il grafico della funzione $x(t)$ fornendo le opportune spiegazioni.

5. Risolvi le seguenti equazioni goniometriche nell'insieme dei numeri reali.

   (*Se nella soluzione non compare un angolo noto, approssimala al centesimo di grado*)

   a. $3\, sen^2 x + 2\, cos^2 x - 2 = sen\, x$;

   b. $sen\, x - 2\, cos\, x - 1 = 0$;

   c. $\sqrt{3}\, sen\, x\, cos\, x - cos^2 x = 0$;

   d. $sen\, 2x = \sqrt{2}\, cos\, x$.

4^C - Correzione compito n°2

1. Se poniamo $A\hat{B}C = A\hat{C}B = \beta$, abbiamo $I\hat{B}C = I\hat{C}B = \beta/2$ per definizione di bisettrice e $B\hat{I}C = \pi - 2\cdot\beta/2 = \pi - \beta$ per la somma degli angoli interni di un triangolo.

   Sostituendo $tg\,\beta = \dfrac{sen\,\beta}{cos\,\beta} = 2 \Rightarrow sen\,\beta = 2\,cos\,\beta$ nella prima relazione fondamentale, ricaviamo:

   $$sen^2\beta + cos^2\beta = 1 \Rightarrow 4\,cos^2\beta + cos^2\beta = 1 \Rightarrow cos^2\beta = \frac{1}{5} \Rightarrow cos\,\beta = +\frac{1}{\sqrt{5}} \Rightarrow sen\,\beta = +\frac{2}{\sqrt{5}} \quad .$$

   Il segno del coseno deve essere positivo in quanto il triangolo isoscele deve avere gli angoli alla base acuti.

   Quindi $cos\,B\hat{I}C = cos(\pi - \beta) = -cos\,\beta = -1/\sqrt{5}$.

   Se poi indichiamo con K il piede dell'altezza BH, abbiamo:

   $H\hat{B}C = H\hat{C}B = \pi - \pi/2 - \beta = \pi/2 - \beta$, da cui: $B\hat{H}C = \pi - 2\,H\hat{B}C = 2\beta$.

   Di conseguenza: $sen\,B\hat{H}C = sen\,2\beta = 2\,sen\,\beta\,cos\,\beta = 2\cdot\dfrac{2}{\sqrt{5}}\cdot\dfrac{1}{\sqrt{5}} = \dfrac{4}{5}$.

2. Il testo ci informa che $A\hat{O}P = \alpha$, per cui $P\hat{O}B = \pi/2 - \alpha$. Sappiamo poi dalla geometria sintetica che OT è bisettrice di $P\hat{O}B$, per cui: $P\hat{O}T = B\hat{O}T = \pi/4 - \alpha/2$, e che $PT = BT$.

   Per definizione di tangente: $tg\,P\hat{O}T = \dfrac{PT}{OP} \Rightarrow PT = OP\cdot tg\left(\dfrac{\pi}{4} - \dfrac{\alpha}{2}\right) = \dfrac{tg\,\pi/4 - tg\,\alpha/2}{1 + tg\,\pi/4\cdot tg\,\alpha/2}$.

   Usando una qualunque delle formule di bisezione per la tangente, ricaviamo:

   $tg\,\dfrac{\alpha}{2} = \dfrac{1 - cos\,\alpha}{sen\,\alpha} = \dfrac{1 - 3/5}{4/5} = \dfrac{1}{2}$, da cui: $PT = BT = \dfrac{1 - 1/2}{1 + 1/2} = \dfrac{1}{3}$.

   Quindi: $2\,p_{OPTB} = 2\,OP + 2\,PT = 2 + 2/3 = 8/3$.

3. Applichiamo due volte la formula di duplicazione del coseno:

   $$cos\,2x = 1 - 2\,sen^2 x \Rightarrow cos\,\frac{x}{2} = 1 - 2\,sen^2\frac{x}{4} = 1 - 2\cdot\frac{1}{6} = \frac{2}{3} \quad ;$$

   $$cos\,2x = 2\,cos^2 x - 1 \Rightarrow cos\,x = 2\,cos^2\frac{x}{2} - 1 = 2\cdot\frac{4}{9} - 1 = -\frac{1}{9} \quad .$$

4. Il testo fornisce direttamente la pulsazione $\omega = 2\pi\,\dfrac{rad}{s}$ ed il periodo $T = \dfrac{2\pi}{\omega} = 1\,s$.

   Dalla formula dell'angolo aggiunto ricaviamo l'ampiezza $A = \sqrt{a^2 + b^2} = \sqrt{1 + 3} = 2\,m$ e la fase:

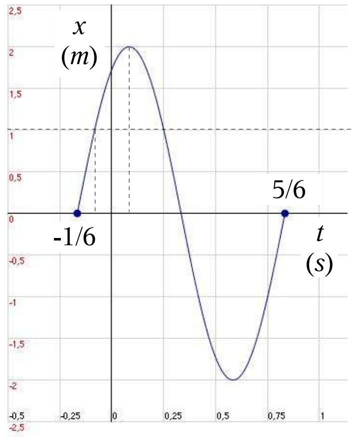
   $\phi = arc\,tg\,\dfrac{b}{a} = arc\,tg\,\sqrt{3} = \dfrac{\pi}{3}$. Abbiamo quindi: $x(t) = 2\,sen(2\pi t + \pi/3)$.

   a. $x(t) = 2\,sen(2\pi t + \pi/3) = 0 \Rightarrow 2\pi t + \dfrac{\pi}{3} = k\pi \Rightarrow t = \left(-\dfrac{1}{6} + \dfrac{k}{2}\right)s$.

   b. $x(t) = 2\,sen(2\pi t + \pi/3) = 1 \Rightarrow sen(2\pi t + \pi/3) = 1/2$. Abbiamo quindi:

$$2\pi t+\frac{\pi}{3}=\frac{\pi}{6}+2k\pi \ \Rightarrow\ 2\pi t=-\frac{\pi}{6}+2k\pi \ \Rightarrow\ t_1=(-\frac{1}{12}+k)s \ ;$$

$$2\pi t+\frac{\pi}{3}=\frac{5}{6}\pi+2k\pi \ \Rightarrow\ 2\pi t=\frac{\pi}{2}+2k\pi \ \Rightarrow\ t_1=(\frac{1}{4}+k)s \ .$$



c. La velocità è data dalla pendenza del grafico posizione-tempo, per cui si annulla nei punti di massimo o minimo spostamento dalla posizione di equilibrio:

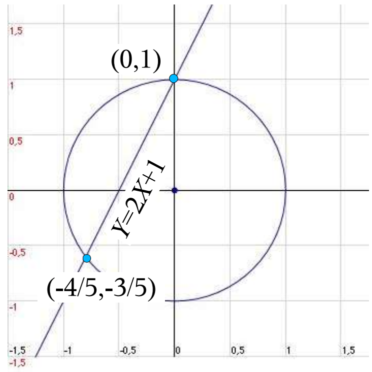
$$x(t)=2\,sen(2\pi t+\pi/3)=\pm 2 \ \Rightarrow\ sen(2\pi t+\pi/3)=\pm 1 \ \Rightarrow$$

$$2\pi t+\frac{\pi}{3}=\frac{\pi}{2}+k\pi \ \Rightarrow\ 2\pi t=\frac{\pi}{6}+k\pi \ \Rightarrow\ t=(\frac{1}{12}+\frac{k}{2})s \ .$$

5.

a. $3\,sen^2 x+2(1-sen^2 x)-2=sen\,x \ \Rightarrow\ sen^2 x-sen\,x=0 \ \Rightarrow\ sen\,x(sen\,x-1)=0 \ \Rightarrow$

- $sen\,x=0 \ \Rightarrow\ x_1=k\pi \ ;$
- $sen\,x=1 \ \Rightarrow\ x_2=\frac{\pi}{2}+2k\pi \ .$



b. $\begin{cases} Y-2X-1=0 \\ X^2+Y^2=1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} Y=2X+1 \\ X^2+4X^2+4X+1=1 \ \Rightarrow\ 5X^2+4X=0 \end{cases} \Rightarrow$

- $\begin{cases} X_1=0 \\ Y_1=1 \end{cases} \Rightarrow\ x_1=\frac{\pi}{2}+2k\pi \ ;$
- $\begin{cases} X_2=-4/5 \\ Y_2=-3/5 \end{cases} \Rightarrow\ x_2=arc\,sen\frac{3}{5}+\pi+2k\pi\simeq 216{,}87°+k\,360° \ .$

c. $\sqrt{3}\,sen\,x\cos x-\cos^2 x=0 \ \Rightarrow\ cox\,x(\sqrt{3}\,sen\,x-\cos x)=0 \ \Rightarrow$

- $\cos x=0 \ \Rightarrow\ x_1=\frac{\pi}{2}+k\pi \ ;$
- $\sqrt{3}\,sen\,x-\cos x=0 \ \Rightarrow\ \sqrt{3}\,tg\,x-1=0 \ \Rightarrow\ tg\,x=\frac{\sqrt{3}}{3} \ \Rightarrow\ x_2=\frac{\pi}{6}+k\pi \ .$

d. $2\,sen\,x\cos x-\sqrt{2}\cos x=0 \ \Rightarrow\ \cos x(2\,sen\,x-\sqrt{2})=0 \ \Rightarrow$

- $\cos x=0 \ \Rightarrow\ x_1=\frac{\pi}{2}+k\pi \ ;$
- $sen\,x=\frac{\sqrt{2}}{2} \ \Rightarrow\ x_2=\frac{\pi}{4}+2k\pi \,;\ x_3=\frac{3}{4}\pi+2k\pi \ .$

4^F - MATEMATICA compito n°3 - 2015-2016

Risolvi le seguenti equazioni goniometriche nell'insieme dei numeri reali e le seguenti disequazioni goniometriche nell'intervallo $[0, 2\pi]$, imponendo le opportune condizioni di esistenza.

(*Se la soluzione non contiene un angolo noto, approssimala al centesimo di grado*)

a. $tg(45°+x)=2+3\,tg\,x$;

b. $cos\,x-sen\,x=-1$;

c. $sen\,x=sen\,2x$;

d. $tg\,x\,sen\,x=\sqrt{3}\,sen\,x$;

e. $4\,sen^2x\,cos^2x-4\,cos^4x=0$;

f. $sen^2x+2\,sen\,x\,cos\,x-3\,cos^2x=0$;

g. $4\,cos^4 2x-cos^2 2x=\frac{3}{2}$;

h. $2\,cos(2x-\frac{\pi}{6})-1\geq 0$;

i. $2\,cos^2x+3\,cos\,x+1\leq 0$;

j. $2\,cos^2x-\sqrt{3}\,cos\,x\leq 0$;

k. $cos\,x-sen\,x\geq 1$;

l. $\frac{sen\,x}{2\,sen\,x-1}\geq 0$.

4^F - Correzione compito n°3

a. $\dfrac{1+tg\,x}{1-tg\,x}=2+3\,tg\,x$. $C.E:\begin{cases} x\neq\pi/2+k\pi \\ x\neq\pi/4+k\pi \end{cases}$. $1+tg\,x=2+3\,tg\,x-2\,tg\,x-3\,tg^2 x \Rightarrow$

$3\,tg^2 x=1 \Rightarrow tg\,x=\pm\dfrac{\sqrt{3}}{3} \Rightarrow x=\pm\dfrac{\pi}{6}+k\pi$ *sol. acc.* .

b. $cos\,x-sen\,x=-1 \Rightarrow \sqrt{2}\,sen(x+\dfrac{3}{4}\pi)=-1 \Rightarrow sen(x+\dfrac{3}{4}\pi)=-\dfrac{\sqrt{2}}{2} \Rightarrow$

- $x+\dfrac{3}{4}\pi=\dfrac{5}{4}\pi+2k\pi \Rightarrow x_1=\dfrac{\pi}{2}+2k\pi$;
- $x+\dfrac{3}{4}\pi=\dfrac{7}{4}\pi+2k\pi \Rightarrow x_2=\pi+2k\pi$.

c. $sen\,x=2\,sen\,x\,cos\,x \Rightarrow sen\,x(2\,cos\,x-1)=0 \Rightarrow$

- $sen\,x=0 \Rightarrow x_1=k\pi$;
- $cos\,x=\dfrac{1}{2} \Rightarrow x_2=\pm\dfrac{\pi}{3}+2k\pi$.

d. $tg\,x\,sen\,x=\sqrt{3}\,sen\,x$. $C.E:\ x\neq\dfrac{\pi}{2}+k\pi$. $\dfrac{sen^2 x}{cos\,x}=\sqrt{3}\,sen\,x \Rightarrow sen\,x(sen\,x-\sqrt{3}\,cos\,x)=0 \Rightarrow$

- $sen\,x=0 \Rightarrow x_1=k\pi$ *sol. acc.* ;
- $tg\,x=\sqrt{3} \Rightarrow x=\dfrac{\pi}{3}+k\pi$ *sol. acc.* .

e. $4\,sen^2 x\,cos^2 x-4\,cos^4 x=0 \Rightarrow 4\,cos^2 x(sen^2 x-cos^2 x)=0 \Rightarrow$

- $4\,cos^2 x=0 \Rightarrow cos\,x=0 \Rightarrow x_1=\dfrac{\pi}{2}+k\pi$;
- $tg^2 x=1 \Rightarrow tg\,x=\pm 1 \Rightarrow x_2=\pm\dfrac{\pi}{4}+k\pi$.

f. $tg^2 x+2\,tg\,x-3=0 \Rightarrow (tg\,x-1)(tg\,x+3)=0 \Rightarrow$

- $tg\,x=1 \Rightarrow x_1=\dfrac{\pi}{4}+k\pi$;
- $tg\,x=-3 \Rightarrow x_2=-arc\,tg\,3+k\pi\simeq-71{,}57°+k\,180°$.

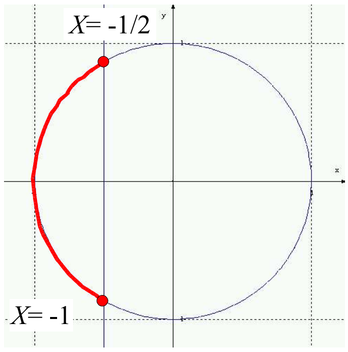
g. Poniamo $cos^2 2x=t$: $8t^2-2t-3=0 \Rightarrow t=\dfrac{1\pm\sqrt{1+24}}{8} \Rightarrow t_1=-\dfrac{1}{2};\ t_2=\dfrac{3}{4}$.

- $cos^2 2x=-\dfrac{1}{2} \Rightarrow \emptyset$;
- $cos^2 2x=\dfrac{3}{4} \Rightarrow cos\,2x=\pm\dfrac{\sqrt{3}}{2} \Rightarrow 2x=\pm\dfrac{\pi}{6}+k\pi \Rightarrow x=\pm\dfrac{\pi}{12}+k\dfrac{\pi}{2}$.

h. $cos(2x-\dfrac{\pi}{6})\geq\dfrac{1}{2} \Rightarrow -\dfrac{\pi}{3}+2k\pi\leq 2x-\dfrac{\pi}{6}\leq\dfrac{\pi}{3}+2k\pi \Rightarrow -\dfrac{\pi}{6}+2k\pi\leq 2x\leq\dfrac{\pi}{2}+2k\pi \Rightarrow$

$$-\frac{\pi}{12}+k\pi\le x\le\frac{\pi}{4}+k\pi \quad . \quad Sol:\ 0\le x\le\frac{\pi}{4} \ \vee \ \frac{11}{12}\pi\le x\le\frac{5}{4}\pi \ \vee \ \frac{23}{12}\pi\le x\le 2\pi \quad .$$

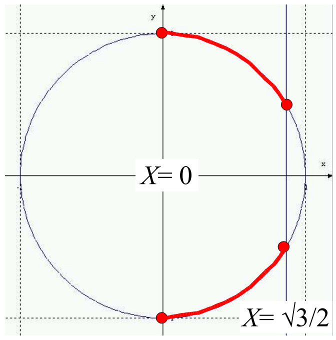
i. $2\cos^2 x+3\cos x+1=0 \ \Rightarrow \ \cos x=\dfrac{-3\pm\sqrt{9-8}}{4} \ \Rightarrow$.



$$\cos x=-1 \ \vee \ \cos x=-\frac{1}{2} \quad .$$

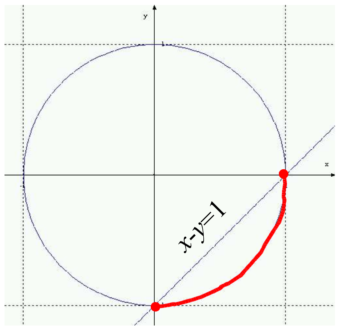
$$Sol:\ \frac{2}{3}\pi\le x\le\frac{4}{3}\pi \quad .$$

j. $\cos x(2\cos x-\sqrt{3})\le 0 \ \Rightarrow \ 0\le\cos x\le\dfrac{\sqrt{3}}{2}$.



$$Sol:\ \frac{\pi}{6}\le x\le\frac{\pi}{2} \ \vee \ \frac{3}{2}\pi\le x\le\frac{11}{6}\pi \quad .$$

k. $\begin{cases} X-Y=1 \\ X^2+Y^2=1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} X=1+Y \\ (1+Y)^2+Y^2=1 \ \Rightarrow \ 2Y^2+2Y=0 \end{cases} \Rightarrow$



- $\begin{cases} X_1=1 \\ Y_1=0 \end{cases} \Rightarrow \ x_1=2k\pi$;
- $\begin{cases} X_1=0 \\ Y_2=-1 \end{cases} \Rightarrow \ x_2=\dfrac{3}{2}\pi+2k\pi$;

Osserviamo che le coordinate dell'origine <u>non</u> verificano la disequazione data.

$$Sol:\ x=0 \ \vee \ \frac{3}{2}\pi\le x\le 2\pi \quad .$$

l. $\dfrac{sen\,x}{2\,sen\,x-1}\ge 0$

0		π/6		5π/6		π		2π	
o	+	+	+	+	+	o	-	o	*sen x*
-	-	o	+	o	-	-	-	-	2 *sen x* -1
o	-	●	+	●	-	o	+	o	*f (x)*

- $sen\,x\ge 0 \ \Rightarrow \ 2k\pi\le x\le\pi+2k\pi$;
- $sen\,x\ge\dfrac{1}{2} \ \Rightarrow \ \dfrac{\pi}{6}+2k\pi\le x\le\dfrac{5}{6}\pi+2k\pi$.

$$Sol:\ x=0 \ \vee \ \frac{\pi}{6}<x<\frac{5}{6}\pi \ \vee \ \pi\le x\le 2\pi \quad .$$

Risolvi le seguenti equazioni goniometriche nell'insieme dei numeri reali e le seguenti disequazioni goniometriche nell'intervallo $[0, 2\pi]$, imponendo le opportune condizioni di esistenza.

(*Se nella soluzione non compare un angolo noto, approssimala al centesimo di grado*)

a. $\cos x = \cos 2x$;

b. $tg\, x + 2\, ctg\, x = 3$;

c. $2\, sen\, x \cos x - \sqrt{3} \cos x - 2\, sen^2 x + \sqrt{3}\, sen\, x = 0$;

d. $\cos x - 2\, sen\, x = 1$;

e. $tg\, 2x - 3\, tg\, x = 0$;

f. $2\, sen^2 x + \sqrt{3}\, sen\, x \cos x - \cos^2 x = 2$;

g. $\sqrt{3} \cos \frac{x}{2} - 1 = \cos x$;

h. $2\, sen(2x - \frac{\pi}{3}) - 1 \geq 0$;

i. $2\, sen^2 x - 3\, sen\, x + 1 \geq 0$;

j. $2\, sen^2 x - sen\, x \leq 0$;

k. $sen\, x + \cos x \leq 1$;

l. $\frac{tg\, x - 1}{tg\, x} \leq 0$.

4^A - Correzione compito n°3

a. $cos\,x = cos\,2x \;\Rightarrow\; cos\,x = 2cos^2 x - 1 \;\Rightarrow\; 2cos^2 x - cos\,x - 1 = 0 \;\Rightarrow$

- $cos\,x = -\frac{1}{2} \;\Rightarrow\; x_1 = \pm\frac{2}{3}\pi + 2k\pi$;
- $cos\,x = 1 \;\Rightarrow\; x_2 = 2k\pi$.

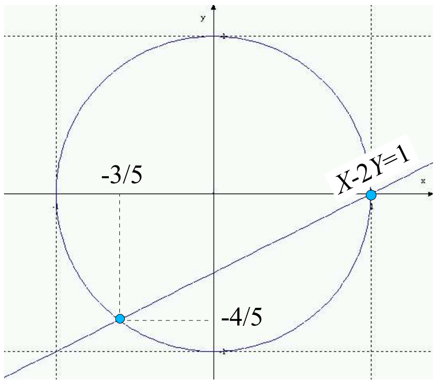
b. $tg\,x + \frac{2}{tg\,x} = 3$. $C.E.:\; x \neq k\pi/2$. $tg^2 x - 3\,tg\,x + 2 = 0 \;\Rightarrow\; (tg\,x - 1)(tg\,x - 2) = 0 \;\Rightarrow$

- $tg\,x = 1 \;\Rightarrow\; x_1 = \frac{\pi}{4} + k\pi$ *sol. acc.* ;
- $tg\,x = 2 \;\Rightarrow\; x_2 = arc\,tg\,2 + k\pi$, con $arc\,tg\,2 \simeq 63{,}43°$ *sol. acc.* .

c. $cos\,x(2\,sen\,x - \sqrt{3}) - sen\,x(2\,sen\,x - \sqrt{3}) = 0 \;\Rightarrow\; (2\,sen\,x - \sqrt{3})(cos\,x - sen\,x) = 0 \;\Rightarrow$

- $sen\,x = \frac{\sqrt{3}}{2} \;\Rightarrow\; x_1 = \frac{\pi}{3} + 2k\pi;\; x_2 = \frac{2}{3}\pi + 2k\pi$;
- $cos\,x - sen\,x = 0 \;\Rightarrow\; tg\,x = 1 \;\Rightarrow\; x_3 = \frac{\pi}{4} + k\pi$.

d. $\begin{cases} X - 2Y = 1 \\ X^2 + Y^2 = 1 \end{cases} \;\Rightarrow\; \begin{cases} X = 2Y + 1 \\ (2Y+1)^2 + Y^2 = 1 \;\Rightarrow\; 4Y^2 + 5Y = 0 \end{cases} \;\Rightarrow$



- $\begin{cases} X_1 = 1 \\ Y_1 = 0 \end{cases} \;\Rightarrow\; x_1 = 2k\pi$;
- $\begin{cases} X_1 = -3/5 \\ Y_2 = -4/5 \end{cases} \;\Rightarrow\; x_2 = arc\,sen\frac{4}{5} + \pi + 2k\pi \simeq 233{,}13° + k\,360°$.

e. $tg\,2x - 3\,tg\,x = 0$. $C.E.: \begin{cases} 2x \neq \pi/2 + k\pi \;\Rightarrow\; x \neq \pi/4 + k\pi/2 \\ x \neq \pi/2 + k\pi \end{cases}$.

$\frac{2\,tg\,x}{1 - tg^2 x} - 3\,tg\,x = 0 \;\Rightarrow\; 2\,tg\,x - 3\,tg\,x + 3\,tg^3 x = 0 \;\Rightarrow\; tg\,x(3\,tg^2 x - 1) = 0 \;\Rightarrow$

- $tg\,x = 0 \;\Rightarrow\; x = k\pi$ *sol. acc.* ;
- $tg\,x = \pm\frac{\sqrt{3}}{3} \;\Rightarrow\; x = \pm\frac{\pi}{6} + k\pi$ *sol. acc.* .

f. $2\,sen^2 x + \sqrt{3}\,sen\,x\,cos\,x - cos^2 x = 2\,sen^2 x + 2\,cos^2 x \;\Rightarrow\; cos\,x(3\,cos\,x - \sqrt{3}\,sen\,x) = 0 \;\Rightarrow$

- $cos\,x = 0 \;\Rightarrow\; x = \pi/2 + k\pi$;
- $tg\,x = \sqrt{3} \;\Rightarrow\; x = \frac{\pi}{3} + k\pi$.

g. $\sqrt{3}\,cos\frac{x}{2} - 1 = cos\,x \;\Rightarrow\; \sqrt{3}\,cos\frac{x}{2} - 1 = 2\,cos^2\frac{x}{2} - 1 \;\Rightarrow\; cos\frac{x}{2}\left(2\,cos\frac{x}{2} - \sqrt{3}\right) = 0 \;\Rightarrow$

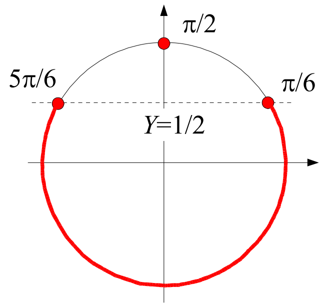
- $cos\frac{x}{2} = 0 \;\Rightarrow\; \frac{x}{2} = \frac{\pi}{2} + k\pi \;\Rightarrow\; x = \pi + 2k\pi$;

- $cos\frac{x}{2}=\frac{\sqrt{3}}{2} \Rightarrow \frac{x}{2}=\pm\frac{\pi}{6}+2k\pi \Rightarrow x=\pm\frac{\pi}{3}+4k\pi$.

h. $sen(2x-\frac{\pi}{3})\geq\frac{1}{2} \Rightarrow \frac{\pi}{6}+2k\pi\leq 2x-\frac{\pi}{3}\leq\frac{5}{6}\pi+2k\pi \Rightarrow \frac{\pi}{2}+2k\pi\leq 2x\leq\frac{7}{6}\pi+2k\pi \Rightarrow$

$\frac{\pi}{4}+k\pi\leq x\leq\frac{7}{12}\pi+k\pi$. $Sol:\ \frac{\pi}{4}\leq x\leq\frac{7}{12}\pi \ \vee\ \frac{5}{4}\pi\leq x\leq\frac{19}{12}\pi$.

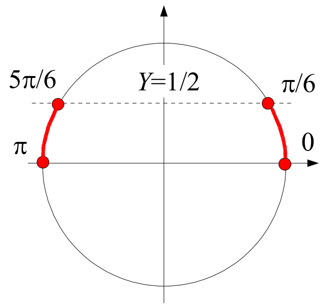
i. $2sen^2x-3senx+1=0 \Rightarrow senx=\frac{3\pm\sqrt{9-8}}{4} \Rightarrow senx=\frac{1}{2}\ \vee\ senx=1$



- $senx=\frac{1}{2} \Rightarrow x=\frac{\pi}{6}\ \vee\ x=\frac{5}{6}\pi$;
- $senx=1 \Rightarrow x=\frac{\pi}{2}$;

$Sol:\ 0\leq x\leq\frac{\pi}{6}\ \vee\ x=\frac{\pi}{2}\ \vee\ \frac{5}{6}\pi\leq x\leq 2\pi$.

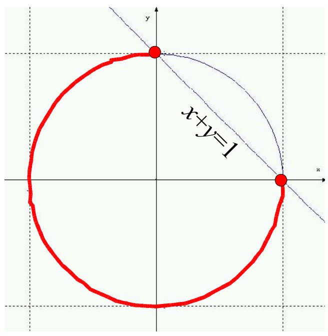
j. $senx(2senx-1)=0 \Rightarrow senx=0\ \vee\ senx=\frac{1}{2}$



- $senx=0 \Rightarrow x=0\ \vee\ x=\pi$;
- $senx=\frac{1}{2} \Rightarrow x=\frac{\pi}{6}\ \vee\ x=\frac{5}{6}\pi$.

$Sol:\ 0\leq x\leq\frac{\pi}{6}\ \vee\ \frac{5}{6}\pi\leq x\leq\pi\ \vee\ x=2\pi$.

k. $\begin{cases} X+Y=1 \\ X^2+Y^2=1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} X=1-Y \\ (1-Y)^2+Y^2=1 \Rightarrow 2Y^2-2Y=0 \end{cases} \Rightarrow$



- $\begin{cases} X_1=1 \\ Y_1=0 \end{cases} \Rightarrow x_1=2k\pi$;
- $\begin{cases} X_1=0 \\ Y_2=1 \end{cases} \Rightarrow x_2=\frac{\pi}{2}+2k\pi$;

Osserviamo che le coordinate dell'origine verificano la disequazione data.

$Sol:\ x=0\ \vee\ \frac{\pi}{2}\leq x\leq 2\pi$.

l. $\frac{tg\,x-1}{tg\,x}\leq 0$

- $tg\,x\geq 1 \Rightarrow \frac{\pi}{4}+k\pi\leq x<\frac{\pi}{2}+k\pi$;
- $tg\,x\geq 0 \Rightarrow k\pi\leq x<\frac{\pi}{2}+k\pi$.

0		π/4		π/2		π	
-	-	o	+	●	-	-	*tg x* -1
o	+	+	+	●	-	o	*tg x*
●	-	o	+	●	+	●	*f (x)*

$Sol:\ 0<x\leq\frac{\pi}{4}\ \vee\ \pi<x\leq\frac{5}{4}\pi$.

3^C PNI – MATEMATICA compito n°8 - 2011-2012

Risolvi le seguenti equazioni goniometriche nell'insieme dei numeri reali e le seguenti disequazioni goniometriche nell'intervallo $[0, 2\pi]$, imponendo le opportune condizioni di esistenza. (*Se nella soluzione non compare un angolo noto, approssimala al centesimo di grado sessagesimale*).

a. $8\cos^2 x - 2\,sen\,x = 5$

b. $1 - \cos 2x + sen\,x = 0$

c. $2\,sen^2 \frac{x}{2} = \frac{1-\cos x}{2(1+\cos x)}$

d. $sen\,x - \sqrt{3}\cos x = \sqrt{3}$

e. $\sqrt{3}\cos^2 x + 3\cos x\,sen\,x = 0$

f. $sen^2 x - 3\,sen\,x\cos x + 6\cos^2 x = 2$

g. $2\,sen^2 x + 3\,sen\,x + 1 < 0$

h. $\cos^2 x - \cos x \geq 0$

i. $2\,sen\,x \leq tg\,x$

j. $sen\,x + \cos x \leq 1$

k. $sen^2 x - 3\,sen\,x\cos x + 2\cos^2 x > 0$

l. $2\cos^2 x + 4\,sen^2 x = \frac{1}{2} + tg^2 x$

m. $sen\,x + sen\,\frac{x}{2} = 0$

n. $4\,sen\,x\cos x = \sqrt{3}$

o. $sen(2x + \frac{\pi}{4}) \leq \frac{\sqrt{2}}{2}$

<u>3^C</u> - Correzione compito n°8

a. $8\cos^2 x-2\,sen\,x=5 \;\Rightarrow\; 8\,sen^2 x+2\,sen\,x-3=0 \;\Rightarrow\; sen\,x=\frac{-1\pm 5}{8}$;

$sen\,x=\frac{1}{2} \;\Rightarrow\; x=\frac{\pi}{6}+2k\pi \;\vee\; x=\frac{5}{6}\pi+2k\pi$; pongo $\alpha=arc\,sen\frac{3}{4}\simeq 48{,}59°$;

$sen\,x=-\frac{3}{4} \;\Rightarrow\; x=-\alpha+2k\pi \;\vee\; \pi+\alpha+2k\pi\simeq -48{,}59°+k\,360° \;\vee\; 228{,}59°+k\,360°$.

b. $1-\cos 2x+sen\,x=0 \;\Rightarrow\; 1-(1-2\,sen\,x)+sen\,x=0 \;\Rightarrow\; sen\,x(2\,sen\,x+1)=0$;

$sen\,x=0 \;\Rightarrow\; x=k\pi$; $sen\,x=-\frac{1}{2} \;\Rightarrow\; x=\frac{7}{6}\pi+2k\pi \;\vee\; x=\frac{11}{6}\pi+2k\pi$.

c. $2\,sen^2\frac{x}{2}=\frac{1-\cos x}{2(1+\cos x)} \;\Rightarrow\; 1-\cos x-\frac{1-\cos x}{2(1+\cos x)}=0 \;\Rightarrow\; (1-\cos x)(2+2\cos x-1)=0 \;\Rightarrow$

$\Rightarrow\; (\cos x-1)(2\cos x+1)=0$; *C.E.* $\cos x\neq -1 \;\Rightarrow\; x\neq \pi+2k\pi$;

Sol: $\cos x=1 \;\Rightarrow\; x=2k\pi$ *acc.* ; $\cos x=-\frac{1}{2} \;\Rightarrow\; x=\pm\frac{2}{3}\pi+2k\pi$ *acc.*

d. $sen\,x-\sqrt{3}\cos x=\sqrt{3} \;\Rightarrow\; 2\,sen(x-\frac{\pi}{3})=\sqrt{3} \;\Rightarrow\; sen(x-\frac{\pi}{3})=\frac{\sqrt{3}}{2}$;

$x-\frac{\pi}{3}=\frac{\pi}{3}+2k\pi \;\Rightarrow\; x=\frac{2}{3}\pi+2k\pi \;\vee\; x-\frac{\pi}{3}=\frac{2}{3}\pi+2k\pi \;\Rightarrow\; x=\pi+2k\pi$.

e. $\sqrt{3}\cos^2 x+3\cos x\,sen\,x=0 \;\Rightarrow\; \cos x(\sqrt{3}\cos x+3\,sen\,x)=0$;

$\cos x=0 \;\Rightarrow\; x=\frac{\pi}{2}+k\pi$; $3\,tg\,x+\sqrt{3}=0 \;\Rightarrow\; tg\,x=-\frac{\sqrt{3}}{3} \;\Rightarrow\; x=-\frac{\pi}{6}+k\pi$.

f. $sen^2 x-3\,sen\,x\cos x+6\cos^2 x=2(sen^2 x+\cos^2 x) \;\Rightarrow\; sen^2 x+3\,sen\,x\cos x-4\cos^2 x=0 \;\Rightarrow$

$tg^2 x+3\,tg\,x-4=0 \;\Rightarrow\; tg\,x=\frac{-3\pm\sqrt{9+16}}{2}=\frac{-3\pm 5}{2} \;\Rightarrow\; tg\,x=-4 \;\vee\; tg\,x=1$;

$tg\,x=-4 \;\Rightarrow\; x=arc\,tg(-4)+k\pi\simeq -75{,}96°+k\,180°$; $tg\,x=1 \;\Rightarrow\; x=\frac{\pi}{4}+k\pi$.

g. $2\,sen^2 x+3\,sen\,x+1=0 \;\Rightarrow\; sen\,x=\frac{-3\pm\sqrt{9-8}}{4} \;\Rightarrow\; sen\,x=-1 \;\vee\; sen\,x=-\frac{1}{2}$;

$2\,sen^2 x+3\,sen\,x+1\leq 0 \;\Rightarrow\; -1<sen\,x<-\frac{1}{2} \;\Rightarrow\; \frac{7}{6}\pi<x<\frac{11}{6}\pi \;\wedge\; x\neq\frac{3}{2}\pi$.

h. $\cos^2 x-\cos x=0 \;\Rightarrow\; \cos x(\cos x-1)=0 \;\Rightarrow\; \cos x=0 \;\vee\; \cos x=1$;

$\cos^2 x-\cos x\geq 0 \;\Rightarrow\; \cos x\leq 0 \;\vee\; \cos x\geq 1 \;\Rightarrow\; x=0 \;\vee\; \frac{\pi}{2}\leq x\leq\frac{3}{2}\pi \;\vee\; x=2\pi$.

i. $2\,sen\,x-tg\,x\leq 0 \;\Rightarrow\; 2\,sen\,x-\frac{sen\,x}{\cos x}\leq 0 \;\Rightarrow\; \frac{2\,sen\,x\cos x-sen\,x}{\cos x}\leq 0 \;\Rightarrow\; \frac{sen\,x(2\cos x-1)}{\cos x}\leq 0$.

Studio il segno dei singoli fattori: $sen\,x>0 \;\Rightarrow\; 0<x<\pi$;

$$cos\,x>\frac{1}{2} \ \Rightarrow \ 0\le x<\frac{\pi}{3} \ \vee \ \frac{5}{3}\pi<x<2\pi \quad ;$$

$$cos\,x>0 \ \Rightarrow \ 0\le x<\frac{\pi}{2} \ \vee \ \frac{3}{2}\pi<x<2\pi \quad ;$$

0		π/3		π/2		π		3/2 π		5/3 π		2π	
o	+	+	+	+	+	o	-	-	-	-	-	o	*sen x*
+	+	o	-	-	-	-	-	-	-	o	+	+	2 *cos x*-1
+	+	+	+	o	-	-	-	o	+	+	+	+	*cos x*
o	+	o	-	•	+	o	-	•	+	o	-	o	*f(x)*

$$Sol: \ \ x=0 \ \vee \ \frac{\pi}{3}\le x<\frac{\pi}{2} \ \vee \ \pi\le x<\frac{3}{2}\pi \ \vee \ \frac{5}{3}\pi\le x\le 2\pi \quad .$$

j. $\begin{cases} sen\,x+cos\,x=1 \\ sen^2 x+cos^2 x=1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} cos\,x=1 \\ sen\,x=0 \end{cases} \vee \begin{cases} cos\,x=0 \\ sen\,x=1 \end{cases} \Rightarrow \ x=2k\pi \ \vee \ x=\frac{\pi}{2}+2k\pi \quad .$

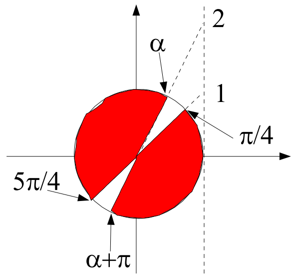
Osservo che la disequazione $sen\,x+cos\,x\le 1$ è verificata nel semipiano contenente l'origine.

$$Sol: \ \ x=0 \ \vee \ \frac{\pi}{2}\le x\le 2\pi \quad .$$

k. $sen^2 x-3\,sen\,x\,cos\,x+2\,cos^2 x>0 \ \Rightarrow \ tg^2 x-3\,tg\,x+2>0 \ \Rightarrow \ tg\,x<1 \ \vee \ tg\,x>2 \quad .$

Pongo $\alpha=arc\,tg\,2\simeq 63{,}43\,°$.

$$Sol: \ \ 0\le x<\frac{\pi}{4} \ \vee \ \alpha<x<\frac{5}{4}\pi \ \vee \ \alpha+\pi<x\le 2\pi \quad .$$



Osserviamo che, anche se la funzione $tg\,x$ non è definita per i valori $x=\pi/2$ e $x=3\pi/2$, essi sono comunque soluzioni della disequazione, come possiamo verificare per sostituzione.

l. $2\,cos^2 x+4\,sen^2 x=\frac{1}{2}+\frac{sen^2 x}{cos^2 x} \ \Rightarrow \ \frac{4\,cos^4 x+8\,sen^2 x\,cos^2 x-cos^2 x-2\,sen^2 x}{2\,cos^2 x}=0 \ \Rightarrow$

$$(4\,cos^2 x-1)(cos^2 x+2\,sen^2 x)=0 \ \ ; \ \ C.E.\ cos\,x\neq 0 \ \Rightarrow \ x\neq\frac{\pi}{2}+k\pi \quad ;$$

$$4\,cos^2 x-1=0 \ \Rightarrow \ cos\,x=\pm\frac{1}{2} \ \Rightarrow \ x=\pm\frac{\pi}{3}+k\pi \ \ acc. \ \ ; \ \ cos^2 x+2\,sen^2 x=0 \ \ non\,ha\,sol.$$

m. $sen\,x+sen\frac{x}{2}=0 \ \Rightarrow \ 2\,sen\frac{x}{2}cos\frac{x}{2}+sen\frac{x}{2}=0 \ \Rightarrow \ sen\frac{x}{2}\left(2\,cos\frac{x}{2}+1\right)=0 \quad ;$

$$sen\frac{x}{2}=0 \ \Rightarrow \ \frac{x}{2}=k\pi \ \Rightarrow \ x=2k\pi \ \ ; \ \ cos\frac{x}{2}=-\frac{1}{2} \ \Rightarrow \ \frac{x}{2}=\pm\frac{2}{3}\pi+2k\pi \ \Rightarrow \ x=\pm\frac{4}{3}\pi+4k\pi \quad .$$

n. $4\,sen\,x\,cos\,x=\sqrt{3} \ \Rightarrow \ sen\,2x=\frac{\sqrt{3}}{2} \ \Rightarrow \ 2x=\frac{\pi}{3}+2k\pi \ \vee \ 2x=\frac{2}{3}\pi+2k\pi \ \Rightarrow$

$$x=\frac{\pi}{6}+k\pi \ \vee \ x=\frac{\pi}{3}+k\pi \quad .$$

o. $sen\left(2x+\frac{\pi}{4}\right)\le\frac{\sqrt{2}}{2} \ \Rightarrow \ -\frac{5}{4}\pi+2k\pi\le 2x+\frac{\pi}{4}\le\frac{\pi}{4}+2k\pi \ \Rightarrow \ -\frac{3}{2}\pi+2k\pi\le 2x\le 2k\pi \ \Rightarrow$

$-\frac{3}{4}\pi+k\pi\le x\le k\pi$. Per $k=0,1,2$, ottengo le soluzioni nell'intervallo $[0,2\pi]$:

$$Sol: \ \ x=0 \ \vee \ \frac{\pi}{4}\le x\le\pi \ \vee \ \frac{5}{4}\pi\le x\le 2\pi \quad .$$

4^F MATEMATICA *Equazioni goniometriche 1*

Risolvi le seguenti equazioni goniometriche nell'insieme $\mathbb{R}$, giustificando la risposta tramite l'uso della circonferenza goniometrica o dei grafici delle funzioni goniometriche e specificando quali formule goniometriche utilizzi.

Indica quali tra le soluzioni trovate appartengono all'intervallo $[0, 2\pi]$ o $[0°, 360°]$; in questo caso, se nella soluzione non compare un angolo noto, approssimala al centesimo di grado.

a. $3\,sen^2 x + 2\cos^2 x - 2 = sen\,x$;

b. $6\cos^2 x - \cos(x + \frac{\pi}{2}) - 5 = 0$;

c. $tg^2 \frac{x}{2} = 1 - \cos x$;

d. $\sqrt{3}\,tg(2x + \frac{\pi}{4}) + 1 = 0$.

a. $3\,sen^2 x+2-2\,sen^2 x-2=sen\,x \;\Rightarrow\; sen^2 x-sen\,x=0 \;\Rightarrow\; sen\,x(senx-1)=0$

- $sen\,x=0 \;\Rightarrow\; x=k\pi$;
- $sen\,x=1 \;\Rightarrow\; x=\frac{\pi}{2}+2k\pi$.

Soluzioni in $[0,2\pi]$: $x_1=0$, $x_2=\frac{\pi}{2}$, $x_3=\pi$, $x_4=2\pi$.

b. $6-6\,sen^2 x+sen\,x-5=0 \;\Rightarrow\; 6\,sen^2 x-sen\,x-1=0 \;\Rightarrow\; sen\,x=\frac{1\pm\sqrt{1+24}}{12}=\frac{1\pm 5}{12}$

- $sen\,x=-\frac{1}{3} \;\Rightarrow\; x=arc\,sen(-\frac{1}{3})+2k\pi \;\vee\; x=z=\pi-arc\,sen(-\frac{1}{3})+2k\pi$;
- $sen\,x=\frac{1}{2} \;\Rightarrow\; x=\frac{\pi}{6}+2k\pi \;\vee\; x=\frac{5}{6}\pi+2k\pi$.

Soluzioni in $[0°,360°]$: $x_1=30°$, $x_2=150°$, $x_3\simeq 199{,}47°$, $x_4\simeq 340{,}53°$.

c. $C.E.: \frac{x}{2}\neq\frac{\pi}{2}+k\pi \;\Rightarrow\; x\neq\pi+2k\pi$.

Applichiamo la formula di bisezione della tangente:

$$\frac{1-cos\,x}{1+cos\,x}=1-cos\,x \;\Rightarrow\; 1-cos\,x=1-cos^2 x \;\Rightarrow\; cos^2 x-cos\,x=0 \;\Rightarrow\; cos\,x(cos\,x-1)=0$$

- $cos\,x=0 \;\Rightarrow\; x=\frac{\pi}{2}+k\pi$ *acc.* ;
- $cos\,x=1 \;\Rightarrow\; x=2k\pi$ *acc.*

Soluzioni in $[0,2\pi]$: $x_1=0$, $x_2=\frac{\pi}{2}$, $x_3=2\pi$.

d. $tg(2x+\frac{\pi}{4})=-\frac{\sqrt{3}}{3} \;\Rightarrow\; 2x+\frac{\pi}{4}=-\frac{\pi}{6}+k\pi \;\Rightarrow\; 2x=-\frac{5}{12}\pi+k\pi \;\Rightarrow\; x=-\frac{5}{24}\pi+k\frac{\pi}{2}$.

Soluzioni in $[0,2\pi]$: $x_1=\frac{7}{24}\pi$, $x_2=\frac{19}{24}\pi$; $x_3=\frac{31}{24}\pi$, $x_4=\frac{43}{24}\pi$.

<u>4^F MATEMATICA</u> *Formule goniometriche 2*

Risolvi le seguenti equazioni goniometriche nell'insieme $\mathbb{R}$, giustificando la risposta tramite l'uso della circonferenza goniometrica o dei grafici delle funzioni goniometriche e specificando quali formule goniometriche utilizzi.

Indica quali tra le soluzioni trovate appartengono all'intervallo $[0, 2\pi]$ o $[0°, 360°]$; in questo caso, se nella soluzione non compare un angolo noto, approssimala al centesimo di grado.

a. $tg\,x + ctg\,x = \frac{4}{\sqrt{3}}$;

b. $6\,sen^2 x - 7\,sen\,x + 2 = 0$;

c. $sen\,x = cos\frac{x}{2}$;

d. $2\,cos(2x + \frac{\pi}{4}) + 1 = 0$.

a. $C.E: x \neq k\frac{\pi}{2}$ per l'esistenza di $tg\,x$ e $ctg\,x$.

$tg\,x + \frac{1}{tg\,x} = \frac{4}{\sqrt{3}} \Rightarrow \sqrt{3}\,tg^2 x - 4\,tg\,x + \sqrt{3} = 0 \Rightarrow tg\,x = \frac{2 \pm \sqrt{4-3}}{\sqrt{3}} = \frac{2 \pm 1}{\sqrt{3}}$

- $tg\,x = \frac{1}{\sqrt{3}} \Rightarrow x = \frac{\pi}{6} + k\pi$ *acc.*
- $tg\,x = \frac{3}{\sqrt{3}} = \sqrt{3} \Rightarrow x = \frac{\pi}{3} + k\pi$ *acc.*

Soluzioni in $[0, 2\pi]$: $x_1 = \frac{\pi}{6}$, $x_2 = \frac{\pi}{3}$, $x_3 = \frac{7}{6}\pi$, $x_4 = \frac{4}{3}\pi$.

b. $sen\,x = \frac{7 \pm \sqrt{49-48}}{12} = \frac{7 \pm 1}{12}$

- $sen\,x = \frac{1}{2} \Rightarrow x = \frac{\pi}{6} + 2k\pi \lor x = \frac{5}{6}\pi + 2k\pi$;
- $sen\,x = \frac{2}{3} \Rightarrow x = arc\,sen\frac{2}{3} + 2k\pi \lor x = \pi - arc\,sen\frac{2}{3} + 2k\pi$.

Soluzioni in $[0, 360°]$: $x_1 = 30°$, $x_2 \simeq 41{,}81°$, $x_3 \simeq 138{,}19°$, $x_4 = 150°$.

c. Applichiamo la formula di duplicazione del seno (oppure poniamo $x/2 = t$):

$2\,sen\frac{x}{2}cos\frac{x}{2} = cos\frac{x}{2} \Rightarrow cos\frac{x}{2}(2\,sen\frac{x}{2} - 1) = 0$

- $cos\frac{x}{2} = 0 \Rightarrow \frac{x}{2} = \frac{\pi}{2} + k\pi \Rightarrow x = \pi + 2k\pi$;
- $2\,sen\frac{x}{2} - 1 = 0 \Rightarrow sen\frac{x}{2} = \frac{1}{2} \Rightarrow \left[\begin{array}{l} \frac{x}{2} = \frac{\pi}{6} + 2k\pi \Rightarrow x = \frac{\pi}{3} + 4k\pi \\ \frac{x}{2} = \frac{5}{6}\pi + 2k\pi \Rightarrow x = \frac{5}{3}\pi + 4k\pi \end{array}\right.$

Soluzioni in $[0, 2\pi]$: $x_1 = \frac{\pi}{3}$, $x_2 = \pi$, $x_3 = \frac{5}{3}\pi$.

d. $cos(2x + \frac{\pi}{4}) = -\frac{1}{2} \Rightarrow 2x + \frac{\pi}{4} = \pm\frac{2}{3}\pi + 2k\pi \Rightarrow$

- $2x = -\frac{11}{12}\pi + 2k\pi \Rightarrow x = -\frac{11}{24}\pi + k\pi$;
- $2x = \frac{5}{12}\pi + 2k\pi \Rightarrow x = \frac{5}{24}\pi + k\pi$.

Soluzioni in $[0, 2\pi]$: $x_1 = \frac{5}{24}\pi$, $x_2 = \frac{13}{24}\pi$, $x_3 = \frac{29}{24}\pi$; $x_4 = \frac{37}{24}\pi$.

Risolvi le seguenti equazioni goniometriche nell'insieme $\mathbb{R}$, giustificando la risposta tramite l'uso della circonferenza goniometrica o dei grafici delle funzioni goniometriche e specificando quali formule goniometriche utilizzi.

Indica quali tra le soluzioni trovate appartengono all'intervallo $[0, 2\pi]$ o $[0°, 360°]$; in questo caso, se nella soluzione non compare un angolo noto, approssimala al centesimo di grado.

a. $sen^2 x - cos\, x - 1 = 0$;

b. $tg^2 \frac{x}{2} = cos\, x$;

c. $sen^2 x\, cos^2 x = \frac{1}{8}$;

d. $tg\left(2x + \frac{\pi}{4}\right) + \sqrt{3} = 0$.

a. $1-\cos^2 x-\cos x-1=0 \Rightarrow \cos^2 x+\cos x=0 \Rightarrow \cos x(\cos x+1)=0$

- $\cos x=0 \Rightarrow x=\frac{\pi}{2}+k\pi$;
- $\cos x=-1 \Rightarrow x=\pi+2k\pi$.

Soluzioni in $[0,2\pi]$: $x_1=\frac{\pi}{2}$, $x_2=\pi$, $x_3=\frac{3}{2}\pi$.

b. $C.E.: \frac{x}{2}\neq\frac{\pi}{2}+k\pi \Rightarrow x\neq\pi+2k\pi$.

Applichiamo la formula di bisezione della tangente:

$$\frac{1-\cos x}{1+\cos x}=\cos x \Rightarrow 1-\cos x=\cos x+\cos^2 x \Rightarrow \cos^2 x+2\cos x-1=0 \Rightarrow \cos x=-1\pm\sqrt{2}$$

- $\cos x=-(1+\sqrt{2}) \Rightarrow$ *non ha sol.* ;
- $\cos x=\sqrt{2}-1 \Rightarrow x=\pm \arccos(\sqrt{2}-1)+2k\pi$.

Soluzioni in $[0,360°]$: $x_1\simeq 65{,}53°$, $x_2\simeq 294{,}47°$.

c. Applichiamo la formula di duplicazione del seno (oppure applichiamo la prima relazione fondamentale e otteniamo un'equazione biquadratica in $sen\, x$ o $\cos x$):

$$\frac{1}{4}sen^2 2x=\frac{1}{8} \Rightarrow sen^2 2x=\frac{1}{2} \Rightarrow sen\, 2x=\pm\frac{\sqrt{2}}{2} \Rightarrow 2x=\frac{\pi}{4}+k\frac{\pi}{2} \Rightarrow x=\frac{\pi}{8}+k\frac{\pi}{4}$$.

Soluzioni in $[0,2\pi]$:

$x_1=\frac{\pi}{8}$, $x_2=\frac{3}{8}\pi$, $x_3=\frac{5}{8}\pi$, $x_4=\frac{7}{8}\pi$, $x_5=\frac{9}{8}\pi$, $x_6=\frac{11}{8}\pi$, $x_7=\frac{13}{8}\pi$, $x_8=\frac{15}{8}\pi$.

d. $tg(2x+\frac{\pi}{4})=-\sqrt{3} \Rightarrow 2x+\frac{\pi}{4}=-\frac{\pi}{3}+k\pi \Rightarrow 2x=-\frac{7}{12}\pi+k\pi \Rightarrow x=-\frac{7}{24}\pi+k\frac{\pi}{2}$.

Soluzioni in $[0,2\pi]$: $x_1=\frac{5}{24}\pi$, $x_2=\frac{17}{24}\pi$, $x_3=\frac{29}{24}\pi$; $x_4=\frac{41}{24}\pi$.

1. Risolvi le seguenti disequazioni goniometriche nell'intervallo $[0, 2\pi]$:

   $\sqrt{3}\cos x - sen\, x \geq 0$; $2\, sen(2x - \frac{\pi}{4}) + 1 \geq 0$; $2\cos^2 x + \cos x - 1 \geq 0$.

2. Data la semicirconferenza di centro O e diametro $\overline{AB} = 10$, conduci per il punto C, posto sul prolungamento di AB dalla parte di A, la semiretta tangente in M alla semicirconferenza.

   Sapendo che $tg\, M\hat{C}O = \frac{3}{4}$, determina:

   a. le misure di MC e di OC;

   b. il valore di $sen\, M\hat{O}C$;

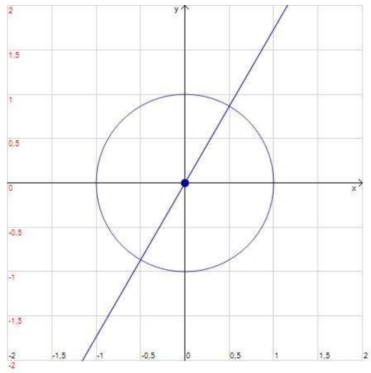
   c. la misura della corda MB;

   d. la misura del segmento AH, dove H è il piede della perpendicolare condotta da M ad AB.

4^F - Correzione compito n°3a

1.

a. La disequazione è lineare in $sen\,x$ e $cos\,x$, per cui può essere risolta con metodo “grafico”, con il cosiddetto “angolo aggiunto”, o (al limite) con le formule razionali parametriche. E' vero che la disequazione è anche omogenea, ma non possiamo semplicemente dividerla per $cos\,x$, in quanto si tratta di una quantità che contiene l'incognita, e può assumere sia segno positivo che negativo. Scegliamo, ad esempio, il metodo “grafico” e poniamo $cos\,x=X$, $sen\,x=Y$:



$$\begin{cases}\sqrt{3}X-Y=0\\ X^2+Y^2=1\end{cases} \Rightarrow \begin{cases}Y=\sqrt{3}X\\ X^2+3X^2=1\end{cases} \Rightarrow \begin{cases}X=\pm 1/2\\ Y=\pm\sqrt{3}/2\end{cases} \Rightarrow x_1=\frac{\pi}{3};\ x_2=\frac{4}{3}\pi \quad .$$

Sostituendo le coordinate di un punto (ad esempio $(1,0)$ o $(0,1)$), vediamo che la disequazione data è verificata “sotto” la retta di equazione $Y=\sqrt{3}X$, e quindi:

$$Sol:\ 0\le x\le\frac{\pi}{3}\ \vee\ \frac{4}{3}\pi\le x\le 2\pi \quad .$$

b. $$sen(2x-\frac{\pi}{4})\ge-\frac{1}{2} \Rightarrow -\frac{\pi}{6}+2k\pi\le 2x-\frac{\pi}{4}\le\frac{7}{6}\pi+2k\pi \Rightarrow$$

$$\frac{\pi}{12}+2k\pi\le 2x\le\frac{17}{12}\pi+2k\pi \Rightarrow \frac{\pi}{24}+k\pi\le x\le\frac{17}{24}\pi+k\pi \quad .$$

Pertanto, in $[0,2\pi]$: $Sol:\ \frac{\pi}{24}\le x\le\frac{17}{24}\pi\ \vee\ \frac{25}{24}\pi\le x\le\frac{41}{24}\pi$.

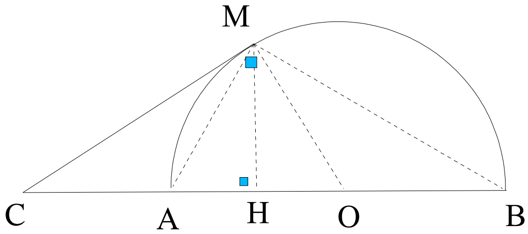
c. $$2t^2+t-1=0 \Rightarrow t=\frac{-1\pm\sqrt{1+8}}{4}=\frac{-1\pm 3}{4} \Rightarrow t_1=-1;\ t_2=\frac{1}{2}\ \text{ con }\ t=cos\,x \quad .$$

$$cos\,x\le-1 \Rightarrow x=\pi \ ;\ cos\,x\ge\frac{1}{2} \Rightarrow 0\le x\le\frac{\pi}{3}\ \vee\ \frac{5}{3}\pi\le x\le 2\pi \quad .$$

$$Sol:\ 0\le x\le\frac{\pi}{3}\ \vee\ x=\pi\ \vee\ \frac{5}{3}\pi\le x\le 2\pi \quad .$$

2.

a. Il triangolo MCO è rettangolo in M, in quanto la retta CM, tangente alla circonferenza, è perpendicolare al raggio OM per il punto di tangenza.



$$tg\,M\hat{C}O=\frac{OM}{MC} \Rightarrow MC=\frac{OM}{tg\,M\hat{C}O}=\frac{5}{3/4}=\frac{20}{3} \quad ;$$

$$OC=\sqrt{OM^2+MC^2}=\sqrt{5^2+\left(\frac{20}{3}\right)^2}=\sqrt{\frac{625}{9}}=\frac{25}{3} \quad .$$

b. $$sen\, M\hat{O}C=\frac{MC}{OC}=\frac{20/3}{25/3}=\frac{4}{5} \quad .$$

c. Osserviamo che: $M\hat{O}B=\pi-M\hat{O}C \;\Rightarrow\; sen\, M\hat{O}B=sen\, M\hat{O}C=\frac{4}{5}$, da cui:

$$cos\, M\hat{O}B=-\sqrt{1-sen^2\, M\hat{O}B}=-\sqrt{1-\frac{16}{25}}=-\frac{3}{5} \quad .$$

Abbiamo scelto il segno negativo in quanto l'angolo $M\hat{O}B$ è ottuso.

Inoltre $M\hat{A}B=M\hat{O}B/2$ in quanto angoli alla circonferenza e al centro che insistono sullo stesso arco, quindi dalle formule di bisezione:

$$sen\, A\hat{M}B=\sqrt{\frac{1-cos\, M\hat{O}B}{2}}=\sqrt{\frac{1+3/5}{2}}=\frac{2}{\sqrt{5}} \quad .$$

Dal teorema della corda: $MB=2\, r\, sen\, A\hat{M}B=10\cdot\frac{2}{\sqrt{5}}=4\sqrt{5}$.

In alternativa, possiamo utilizzare il fatto che il triangolo MOB è isoscele, per cui altezza, mediana e bisettrice relative alla base MB coincidono.

d. Consideriamo (ad esempio) il triangolo rettangolo MOC:

$$OH=OM\cdot cos\, M\hat{O}C=5\cdot\frac{3}{5}=3 \;\Rightarrow\; AH=AO-OH=5-3=2 \quad .$$

4^F - MATEMATICA compito n°3*b* - 2020-21

1. Risolvi le seguenti disequazioni goniometriche nell'intervallo $[0, 2\pi]$:

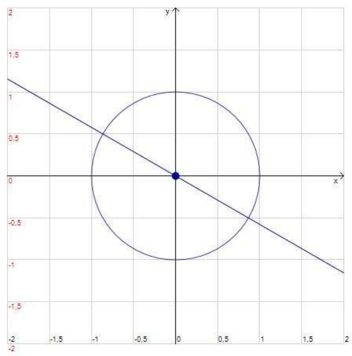
$$cos\, x+\sqrt{3}\, sen\, x \geq 0 \quad ; \qquad 2\, cos(2x-\frac{\pi}{4})+1 \geq 0 \quad ; \qquad 2\, sen^2 x + sen\, x - 1 \geq 0 \quad .$$

2. Considera la semicirconferenza γ di diametro $\overline{AB}=12$ e centro O. Una semiretta di origine A interseca γ in C, e in D la retta tangente in B a γ, in modo che risulti $\overline{AD}=20$. Calcola:
   a. i valori di $sen\, B\hat{A}D$, $sen\, A\hat{B}C$;
   b. la misura della corda AC:
   c. i valori di $cos\, B\hat{A}M$, $cos\, C\hat{M}B$, dove M è il punto medio dell'arco BC;
   d. l'area del quadrilatero AOCN, dove N è il punto medio dell'arco AC.

<u>4^F</u> *- Correzione compito n°3b*

1.

a. La disequazione è lineare in $sen\,x$ e $cos\,x$, per cui può essere risolta con metodo “grafico”, con il cosiddetto “angolo aggiunto”, o (al limite) con le formule razionali parametriche. E' vero che la disequazione è anche omogenea, ma non possiamo semplicemente dividerla per $cos\,x$, in quanto si tratta di una quantità che contiene l'incognita, e può assumere sia segno positivo che negativo. Scegliamo, ad esempio, il metodo “grafico” e poniamo $cos\,x=X$, $sen\,x=Y$:



$$\begin{cases} X+\sqrt{3}\,Y=0 \\ X^2+Y^2=1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} Y=-X/\sqrt{3} \\ X^2+X^2/3=1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} X=\pm\sqrt{3}/2 \\ Y=\mp 1/2 \end{cases} \Rightarrow x_1=\frac{5}{6}\pi;\ x_2=\frac{11}{6}\pi \ .$$

Sostituendo le coordinate di un punto (ad esempio $(1,0)$ o $(0,1)$), vediamo che la disequazione data è verificata “sopra” la retta di equazione $Y=-X/\sqrt{3}$, e quindi:

$$Sol:\ 0\le x\le\frac{5}{6}\pi \ \vee\ \frac{11}{6}\pi\le x\le 2\pi \ .$$

b. $$cos(2x-\frac{\pi}{4})\ge-\frac{1}{2} \Rightarrow -\frac{2}{3}\pi+2k\pi\le 2x-\frac{\pi}{4}\le\frac{2}{3}\pi+2k\pi \Rightarrow$$

$$-\frac{5}{12}\pi+2k\pi\le 2x\le\frac{11}{12}\pi+2k\pi \Rightarrow -\frac{5}{24}\pi+k\pi\le x\le\frac{11}{24}\pi+k\pi \ .$$

Pertanto, in $[0,2\pi]$: $Sol:\ 0\le x\le\frac{11}{24}\pi \ \vee\ \frac{19}{24}\pi\le x\le\frac{35}{24}\pi \ \vee\ \frac{43}{24}\pi\le x\le 2\pi$.

c. $$2t^2+t-1=0 \Rightarrow t=\frac{-1\pm\sqrt{1+8}}{4}=\frac{-1\pm 3}{4} \Rightarrow t_1=-1;\ t_2=\frac{1}{2} \ \text{con}\ t=sen\,x \ .$$

$$sen\,x\le -1 \Rightarrow x=\frac{3}{2}\pi \ ;\ sen\,x\ge\frac{1}{2} \Rightarrow \frac{\pi}{6}\le x\le\frac{5}{6}\pi \ .$$

$$Sol:\ \frac{\pi}{6}\le x\le\frac{5}{6}\pi \ \vee\ x=\frac{3}{2}\pi \ .$$

2.

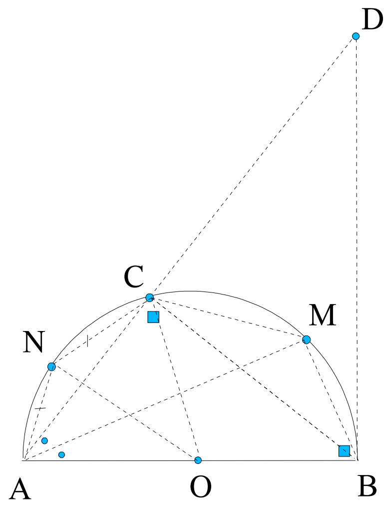
a. Il triangolo ABD è rettangolo in B, in quanto la retta tangente BD è perpendicolare al raggio AB passante per il punto di tangenza:

$$cos\,B\hat{A}D=\frac{AB}{AD}=\frac{12}{20}=\frac{3}{5} \Rightarrow sen\,B\hat{A}D=\sqrt{1-cos^2 B\hat{A}D}=\sqrt{1-\frac{9}{25}}=\frac{4}{5} \ .$$

Anche il triangolo ABC è rettangolo in C, in quanto insiste su una semicirconferenza:

$$A\hat{B}C=\frac{\pi}{2}-B\hat{A}C \Rightarrow sen\,A\hat{B}C=cos\,B\hat{A}C=\frac{3}{5} \ .$$

b. Per il teorema della corda: $AC = 2r\ sen\ A\hat{B}C = 12 \cdot \frac{2}{5} = \frac{36}{5}$.



c. Ad archi uguali corrispondono angoli alla circonferenza uguali, per cui:

$$cos\ B\hat{A}M = cos \frac{B\hat{A}C}{2} = \sqrt{\frac{1 + cos\ B\hat{A}C}{2}} = \sqrt{\frac{1+3/5}{2}} = \frac{2}{\sqrt{5}}$$.

Angoli opposti di un quadrilatero inscritto in una circonferenza sono supplementari:

$$cos\ C\hat{M}B = cos(\pi - B\hat{A}C) = -cos\ B\hat{A}C = -\frac{3}{5}$$.

d. Il quadrilatero AOCN ha i lati consecutivi uguali a due a due: $AO = OC$ perché raggi della circonferenza e $AN = NC$ perché corde sottese ad archi uguali, per cui le diagonali AC e ON sono perpendicolari:

$$S_{AOCN} = \frac{1}{2} AC \cdot ON = \frac{1}{2} \cdot \frac{36}{5} \cdot 6 = \frac{108}{5}$$.