1. Il triangolo ABC, isoscele sulla base BC, ha l'angolo al vertice α tale che $\cos\alpha=-1/4$.

   Calcola seno e coseno degli angoli alla base.

2. Nel triangolo ABC l'angolo di vertice A ha $sen\,\alpha=3/4$ e l'angolo di vertice B è $\beta=30°$.

   Determina le funzioni goniometriche $\cos\gamma$ e $sen\,\gamma$ dell'angolo in C distinguendo i casi in cui α è acuto o ottuso. Verifica che in entrambi i casi il triangolo è ottusangolo.

3. Il quadrilatero OABC ha vertici $O(0,0)$, $A(1,1)$, $B(2,3/2)$ e C sul semiasse positivo delle ascisse. Ponendo $O\hat{C}B=\alpha$, risulta $tg\,\alpha=3/4$.

   Determina le coordinate di C e le tangenti degli angoli $O\hat{C}A$ e $A\hat{C}B$.

4. Verifica la seguente identità goniometrica: $sen^2(\frac{\alpha}{2}+\frac{\pi}{4})=\frac{1+sen\,\alpha}{2}$.

5. Il triangolo ABC è isoscele di base AB e l'angolo alla base α è tale che $\cos\alpha=2/7$.

   a. Detto γ l'angolo al vertice, calcola $\cos\gamma$.

   b. Detto O il circocentro del triangolo, calcola $sen\,A\hat{O}B$.

6. Considera la curva di equazione $y=a\cos\frac{x}{2}+b\,sen\frac{x}{2}$.

   a. Determina i coefficienti *a* e *b* in modo che essa abbia ampiezza $A=2$ e passi per il punto $P(\frac{2}{3}\pi,\sqrt{3})$. (*Dovresti ottenere due funzioni che verificano tali condizioni*).

   b. Chiama le funzioni del punto precedente y_1 (quella il cui grafico passa per l'origine) e y_2. Tracciane i grafici nello stesso riferimento cartesiano, spiegando il procedimento seguito.

4^A - Correzione compito n°2

1. Gli angoli alla base misurano $\hat{B}=\hat{C}=\frac{\pi}{2}-\frac{\alpha}{2}$. Quindi:

$$sen\,\beta=sen\,\gamma=sen(\frac{\pi}{2}-\frac{\alpha}{2})=cos\frac{\alpha}{2}=\sqrt{\frac{1+cos\,\alpha}{2}}=\sqrt{\frac{1-1/4}{2}}=\sqrt{\frac{3}{8}}\quad ;$$

$$cos\,\beta=cos\,\gamma=cos(\frac{\pi}{2}-\frac{\alpha}{2})=sen\frac{\alpha}{2}=\sqrt{\frac{1-cos\,\alpha}{2}}=\sqrt{\frac{1+1/4}{2}}=\sqrt{\frac{5}{8}}\quad .$$

2. In entrambi i casi: $\gamma=180°-\alpha-\beta=150°-\alpha$.

   a. Se α è acuto, allora: $cos\,\alpha=\sqrt{1-sen^2\alpha}=\sqrt{1-\frac{9}{16}}=\frac{\sqrt{7}}{4}$. Quindi:

$$sen\,\gamma=sen(150°-\alpha)=sen\,150°\,cos\,\alpha-cos\,150°\,sen\,\alpha=\frac{1}{2}\cdot\frac{\sqrt{7}}{4}+\frac{\sqrt{3}}{2}\cdot\frac{3}{4}=\frac{\sqrt{7}+3\sqrt{3}}{8}\quad ;$$

$$cos\,\gamma=cos(150°-\alpha)=cos\,150°\,cos\,\alpha+sen\,150°\,sen\,\alpha=-\frac{\sqrt{3}}{2}\cdot\frac{\sqrt{7}}{4}+\frac{1}{2}\cdot\frac{3}{4}=\frac{3-\sqrt{21}}{8}\quad .$$

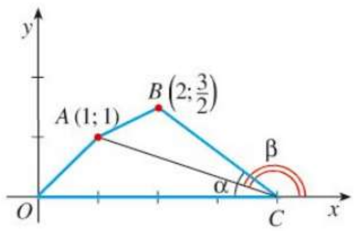
   Poiché $cos\,\gamma<0$, il triangolo è ottusangolo.

   b. Se α è ottuso, allora: $cos\,\alpha=-\sqrt{1-sen^2\alpha}=-\sqrt{1-\frac{9}{16}}=-\frac{\sqrt{7}}{4}$. Quindi:

$$sen\,\gamma=sen(150°-\alpha)=sen\,150°\,cos\,\alpha-cos\,150°\,sen\,\alpha=-\frac{1}{2}\cdot\frac{\sqrt{7}}{4}+\frac{\sqrt{3}}{2}\cdot\frac{3}{4}=\frac{3\sqrt{3}-\sqrt{7}}{8}\quad ;$$

$$cos\,\gamma=cos(150°-\alpha)=cos\,150°\,cos\,\alpha+sen\,150°\,sen\,\alpha=\frac{\sqrt{3}}{2}\cdot\frac{\sqrt{7}}{4}+\frac{1}{2}\cdot\frac{3}{4}=\frac{3+\sqrt{21}}{8}\quad .$$

3. Poiché $tg\,\alpha>0$, l'angolo α deve essere acuto, per cui $x_C>x_B$.



   La retta BC forma con il semiasse positivo delle ascisse un angolo $\pi-\alpha$, per cui il suo coefficiente angolare è $m_{BC}=tg(\pi-\alpha)=-tg\,\alpha=-3/4$, e la sua equazione è:

$$y-y_B=m_{BC}(x-x_B)\ \Rightarrow\ y-\frac{3}{2}=-\frac{3}{4}(x-2)\ \Rightarrow\ y=-\frac{3}{4}x+3\quad .$$

   Ponendo $y=0$, ricaviamo: $-\frac{3}{4}x+3=0\ \Rightarrow\ x=4\ \Rightarrow\ C(4,0)$.

   L'angolo $O\hat{C}A$ è il supplementare dell'angolo β che la retta AC forma con il semiasse positivo delle *x*, per cui: $tg\,O\hat{C}A=tg(\pi-\beta)=-tg\,\beta=-m_{AC}=1/3$.

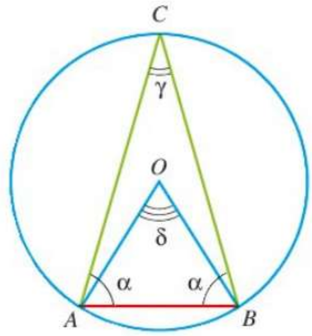
   Ponendo $A\hat{C}B=\gamma$, vediamo che l'angolo γ è formato dalle rette AC e BC di coefficiente angolare $m_{AC}=-1/3$ e $m_{BC}=-3/4$, per cui:

$$tg\,A\hat{C}B=tg\,\gamma=\frac{m_{AC}-m_{BC}}{1-m_{AC}m_{BC}}=\frac{-1/3+3/4}{1+(-1/3)\cdot(-3/4)}=\frac{5/12}{5/4}=\frac{1}{3}\quad .$$

4. $sen^2(\frac{\alpha}{2}+\frac{\pi}{4})=sen^2(\frac{\alpha+\pi/2}{2})=\frac{1-cos(\alpha+\pi/2)}{2}=\frac{1+sen\,\alpha}{2}$ c.v.d.

Abbiamo applicato le formule di bisezione nel secondo passaggio e quelle degli archi associati nel terzo.

5.



a. $cos\,\gamma=cos(\pi-2\alpha)=-cos\,2\alpha=1-2cos^2\alpha=1-2\cdot\frac{4}{49}=\frac{41}{49}$.

b. Se poniamo $A\hat{O}B=\delta$, abbiamo $\delta=2\gamma$ in quanto angolo al centro ed alla circonferenza che insistono sullo stesso arco AB, per cui: $sen\,A\hat{O}B=sen\,2\gamma=2\,sen\,\gamma\,cos\,\gamma=$

$$2\cdot\sqrt{1-(\frac{41}{49})^2}\cdot\frac{41}{49}=2\cdot\frac{12}{7}\sqrt{5}\cdot\frac{41}{49}=\frac{984\sqrt{5}}{2401}$$.

6.

a. Imponiamo le condizioni sull'ampiezza ed il passaggio per P:

$$\begin{cases}\sqrt{a^2+b^2}=2\\ a/2+b\sqrt{3}/2=\sqrt{3}\end{cases} \Rightarrow \begin{cases}a^2+b^2=4\\ a=\sqrt{3}(2-b)\end{cases} \Rightarrow 3(4-4b+b^2)+b^2=4 \Rightarrow$$

$$b^2-3b+2=0 \Rightarrow (b-2)(b-1)=0 \Rightarrow \left[\begin{array}{l} b_1=2 \Rightarrow a_1=0\\ b_2=1 \Rightarrow a_2=\sqrt{3}\end{array}\right.$$.

Le condizioni del testo sono quindi verificate dalle due curve di equazione:

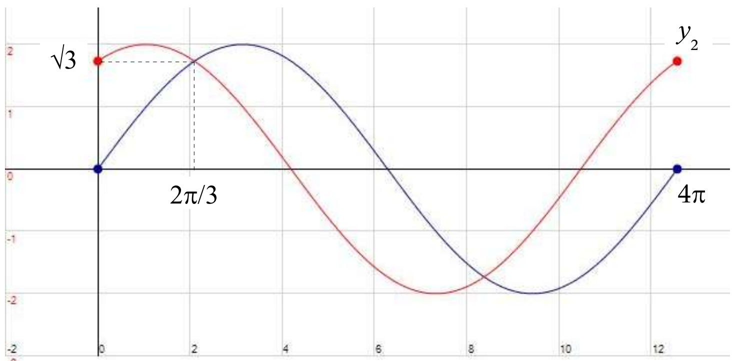
$$y_1=2\,sen\frac{x}{2} \quad \text{e} \quad y_2=\sqrt{3}cos\frac{x}{2}+sen\frac{x}{2}$$.

b. La prima funzione descrive una sinusoide di ampiezza $A=2$ e periodo $T=4\pi$.

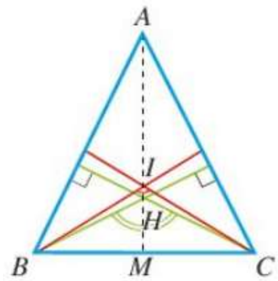
Tramite la “formula dell'angolo aggiunto”, possiamo scrivere la seconda funzione come:

$$y_2=2\,sen(\frac{x}{2}+\frac{\pi}{3})=2\,sen[\frac{1}{2}(x+\frac{2}{3}\pi)]$$.

Quindi anche essa descrive una sinusoide di ampiezza $A=2$ e periodo $T=4\pi$, ma traslata di un vettore $\vec{v}\equiv(-2\pi/3,0)$.

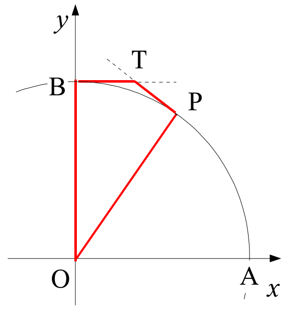


1. Nel triangolo isoscele ABC si ha $tg\,A\hat{B}C = tg\,A\hat{C}B = 2$, I è l'incentro (*punto di intersezione delle bisettrici*) ed H è l'ortocentro (*punto di intersezione delle altezze*). Calcola $cos\,B\hat{I}C$ e $sen\,B\hat{H}C$.



2. Dato il punto $P(cos\,\alpha, sen\,\alpha)$ nel primo quadrante, traccia la tangente in P alla circonferenza goniometrica fino ad incontrare in T la tangente alla circonferenza in $B(0,1)$.

   Calcola il perimetro del quadrilatero OPTB sapendo che $cos\,\alpha = 3/5$.



3. Sapendo che $sen\frac{x}{4} = \frac{1}{\sqrt{6}}$, calcola $cos\,x$.

4. Un corpo si muove di moto armonico secondo la legge oraria $x(t) = sen(2\pi t) + \sqrt{3}\,cos(2\pi t)$, dove il tempo *t* è espresso in secondi e la posizione *x* in metri.

   Scrivi la legge oraria nella forma $x(t) = A\,sen(\omega t + \phi)$, precisando l'ampiezza *A*, la pulsazione ω ed il periodo *T* del moto (con le rispettive unità di misura). Determina:

   a. in quali istanti di tempo il corpo passa per la posizione di equilibrio $x = 0\,m$;

   b. in quali istanti di tempo il corpo passa per la posizione $x = 1\,m$;

   c. in quali istanti di tempo il corpo ha velocità nulla.

   Traccia il grafico della funzione $x(t)$ fornendo le opportune spiegazioni.

5. Risolvi le seguenti equazioni goniometriche nell'insieme dei numeri reali.

   (*Se nella soluzione non compare un angolo noto, approssimala al centesimo di grado*)

   a. $3\,sen^2 x + 2\,cos^2 x - 2 = sen\,x$;

   b. $sen\,x - 2\,cos\,x - 1 = 0$;

   c. $\sqrt{3}\,sen\,x\,cos\,x - cos^2 x = 0$;

   d. $sen\,2x = \sqrt{2}\,cos\,x$.

4^C - Correzione compito n°2

1. Se poniamo $A\hat{B}C = A\hat{C}B = \beta$, abbiamo $I\hat{B}C = I\hat{C}B = \beta/2$ per definizione di bisettrice e $B\hat{I}C = \pi - 2\cdot\beta/2 = \pi - \beta$ per la somma degli angoli interni di un triangolo.

   Sostituendo $tg\,\beta = \dfrac{sen\,\beta}{cos\,\beta} = 2 \Rightarrow sen\,\beta = 2\,cos\,\beta$ nella prima relazione fondamentale, ricaviamo:

   $$sen^2\beta + cos^2\beta = 1 \Rightarrow 4\,cos^2\beta + cos^2\beta = 1 \Rightarrow cos^2\beta = \frac{1}{5} \Rightarrow cos\,\beta = +\frac{1}{\sqrt{5}} \Rightarrow sen\,\beta = +\frac{2}{\sqrt{5}} \quad .$$

   Il segno del coseno deve essere positivo in quanto il triangolo isoscele deve avere gli angoli alla base acuti.

   Quindi $cos\,B\hat{I}C = cos(\pi - \beta) = -cos\,\beta = -1/\sqrt{5}$.

   Se poi indichiamo con K il piede dell'altezza BH, abbiamo:

   $H\hat{B}C = H\hat{C}B = \pi - \pi/2 - \beta = \pi/2 - \beta$, da cui: $B\hat{H}C = \pi - 2\,H\hat{B}C = 2\beta$.

   Di conseguenza: $sen\,B\hat{H}C = sen\,2\beta = 2\,sen\,\beta\,cos\,\beta = 2\cdot\dfrac{2}{\sqrt{5}}\cdot\dfrac{1}{\sqrt{5}} = \dfrac{4}{5}$.

2. Il testo ci informa che $A\hat{O}P = \alpha$, per cui $P\hat{O}B = \pi/2 - \alpha$. Sappiamo poi dalla geometria sintetica che OT è bisettrice di $P\hat{O}B$, per cui: $P\hat{O}T = B\hat{O}T = \pi/4 - \alpha/2$, e che $PT = BT$.

   Per definizione di tangente: $tg\,P\hat{O}T = \dfrac{PT}{OP} \Rightarrow PT = OP\cdot tg\left(\dfrac{\pi}{4} - \dfrac{\alpha}{2}\right) = \dfrac{tg\,\pi/4 - tg\,\alpha/2}{1 + tg\,\pi/4\cdot tg\,\alpha/2}$.

   Usando una qualunque delle formule di bisezione per la tangente, ricaviamo:

   $tg\dfrac{\alpha}{2} = \dfrac{1 - cos\,\alpha}{sen\,\alpha} = \dfrac{1 - 3/5}{4/5} = \dfrac{1}{2}$, da cui: $PT = BT = \dfrac{1 - 1/2}{1 + 1/2} = \dfrac{1}{3}$.

   Quindi: $2\,p_{OPTB} = 2\,OP + 2\,PT = 2 + 2/3 = 8/3$.

3. Applichiamo due volte la formula di duplicazione del coseno:

   $$cos\,2x = 1 - 2\,sen^2 x \Rightarrow cos\frac{x}{2} = 1 - 2\,sen^2\frac{x}{4} = 1 - 2\cdot\frac{1}{6} = \frac{2}{3} \quad ;$$

   $$cos\,2x = 2\,cos^2 x - 1 \Rightarrow cos\,x = 2\,cos^2\frac{x}{2} - 1 = 2\cdot\frac{4}{9} - 1 = -\frac{1}{9} \quad .$$

4. Il testo fornisce direttamente la pulsazione $\omega = 2\pi\dfrac{rad}{s}$ ed il periodo $T = \dfrac{2\pi}{\omega} = 1\,s$.

   Dalla formula dell'angolo aggiunto ricaviamo l'ampiezza $A = \sqrt{a^2 + b^2} = \sqrt{1+3} = 2\,m$ e la fase:

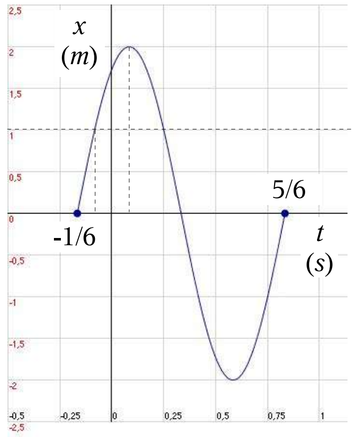
   $\phi = arc\,tg\dfrac{b}{a} = arc\,tg\sqrt{3} = \dfrac{\pi}{3}$. Abbiamo quindi: $x(t) = 2\,sen(2\pi t + \pi/3)$.

   a. $x(t) = 2\,sen(2\pi t + \pi/3) = 0 \Rightarrow 2\pi t + \dfrac{\pi}{3} = k\pi \Rightarrow t = \left(-\dfrac{1}{6} + \dfrac{k}{2}\right)s$.

   b. $x(t) = 2\,sen(2\pi t + \pi/3) = 1 \Rightarrow sen(2\pi t + \pi/3) = 1/2$. Abbiamo quindi:

$$2\pi t+\frac{\pi}{3}=\frac{\pi}{6}+2k\pi \;\Rightarrow\; 2\pi t=-\frac{\pi}{6}+2k\pi \;\Rightarrow\; t_1=(-\frac{1}{12}+k)s \quad ;$$

$$2\pi t+\frac{\pi}{3}=\frac{5}{6}\pi+2k\pi \;\Rightarrow\; 2\pi t=\frac{\pi}{2}+2k\pi \;\Rightarrow\; t_1=(\frac{1}{4}+k)s \quad .$$



c. La velocità è data dalla pendenza del grafico posizione-tempo, per cui si annulla nei punti di massimo o minimo spostamento dalla posizione di equilibrio:

$$x(t)=2\,sen(2\pi t+\pi/3)=\pm 2 \;\Rightarrow\; sen(2\pi t+\pi/3)=\pm 1 \;\Rightarrow$$

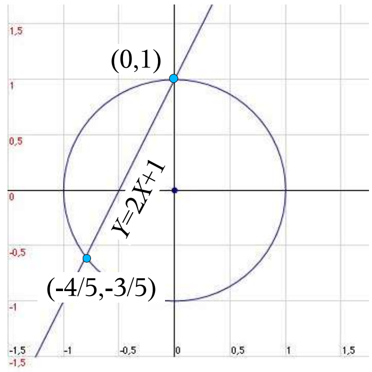
$$2\pi t+\frac{\pi}{3}=\frac{\pi}{2}+k\pi \;\Rightarrow\; 2\pi t=\frac{\pi}{6}+k\pi \;\Rightarrow\; t=(\frac{1}{12}+\frac{k}{2})s \quad .$$

5.

a. $3\,sen^2x+2(1-sen^2x)-2=sen\,x \;\Rightarrow\; sen^2x-sen\,x=0 \;\Rightarrow\; sen\,x(sen\,x-1)=0 \;\Rightarrow$

- $sen\,x=0 \;\Rightarrow\; x_1=k\pi \quad ;$
- $sen\,x=1 \;\Rightarrow\; x_2=\frac{\pi}{2}+2k\pi \quad .$

b. $\begin{cases} Y-2X-1=0 \\ X^2+Y^2=1 \end{cases} \;\Rightarrow\; \begin{cases} Y=2X+1 \\ X^2+4X^2+4X+1=1 \;\Rightarrow\; 5X^2+4X=0 \end{cases} \;\Rightarrow$



- $\begin{cases} X_1=0 \\ Y_1=1 \end{cases} \;\Rightarrow\; x_1=\frac{\pi}{2}+2k\pi \quad ;$
- $\begin{cases} X_2=-4/5 \\ Y_2=-3/5 \end{cases} \;\Rightarrow\; x_2=arc\,sen\frac{3}{5}+\pi+2k\pi\simeq 216{,}87°+k\,360° \quad .$

c. $\sqrt{3}\,sen\,x\cos x-\cos^2x=0 \;\Rightarrow\; cox\,x(\sqrt{3}\,sen\,x-\cos x)=0 \;\Rightarrow$

- $\cos x=0 \;\Rightarrow\; x_1=\frac{\pi}{2}+k\pi \quad ;$
- $\sqrt{3}\,sen\,x-\cos x=0 \;\Rightarrow\; \sqrt{3}\,tg\,x-1=0 \;\Rightarrow\; tg\,x=\frac{\sqrt{3}}{3} \;\Rightarrow\; x_2=\frac{\pi}{6}+k\pi \quad .$

d. $2\,sen\,x\cos x-\sqrt{2}\cos x=0 \;\Rightarrow\; \cos x(2\,sen\,x-\sqrt{2})=0 \;\Rightarrow$

- $\cos x=0 \;\Rightarrow\; x_1=\frac{\pi}{2}+k\pi \quad ;$
- $sen\,x=\frac{\sqrt{2}}{2} \;\Rightarrow\; x_2=\frac{\pi}{4}+2k\pi\,;\;\; x_3=\frac{3}{4}\pi+2k\pi \quad .$

1. Scrivi e dimostra la formula di duplicazione della tangente.

2. Svolgi riducendo al primo quadrante: $\dfrac{2\,sen\,90°-2\sqrt{6}\,sen\,780°+\sqrt{2}\,cos\,45°}{2\,sen\,150°+tg(-60°)-5\,tg\,225°}$.

3. Calcola il valore esatto di $cos\,15°$ e $tg\,75°$.

4. Sapendo che $sen\,\alpha=3/5$ e che $\pi/2<\alpha<\pi$, calcola i valori di:

   $cos(\alpha+60°)$, $cos\,2\alpha$, $sen\,\alpha/2$.

5. Verifica le seguenti identità indicando le formule applicate:

   - $tg(\frac{\pi}{4}+\alpha)-tg(\alpha-\frac{\pi}{4})=\dfrac{2}{cos^2\alpha-sen^2\alpha}$;
   - $2\,sen^2\alpha=\dfrac{sen^2 2\alpha}{1+cos\,2\alpha}$;
   - $\dfrac{1+sen\,\alpha}{cos\,\alpha}=\dfrac{1+tg\,\alpha/2}{1-tg\,\alpha/2}$.

6. Un proiettile viene lanciato dal suolo con velocità iniziale v_0 che forma un angolo α con la direzione orizzontale. Calcola il tempo di volo t_1 del proiettile e la sua gittata $l(\alpha)$.

   Dopo avere precisato quali sono le limitazioni geometriche per α, traccia, spiegando il procedimento seguito, il grafico della funzione $l(\alpha)$ in tale intervallo.

   A parità di velocità iniziale, determina a quale angolo α deve essere lanciato il proiettile in modo che la sua gittata sia massima e calcola tale gittata massima.

7. Determina le funzioni della forma $y=a\,sen\,x+b\,cos\,x$ tali che per $x=\pi/6$ sia $y=3/2$, e che l'ampiezza dell'oscillazione sia $r=3$ e tracciane il grafico nell'intervallo $[0,2\pi]$.

   Ponendo $y=s$, $x=2\pi t$, dove *s* rappresenta lo spostamento dall'origine di un punto P che si muova su una retta nel tempo *t*, descrivi il moto di P.

   Per la funzione più semplice delle due, determina in quali istanti la velocità è nulla.

4^A - Correzione compito n°2

1. Vedi pag. 713 del libro di testo.

2. $$\frac{2\cdot 1-2\sqrt{6}\cdot sen\,60°+\sqrt{2}\cdot\sqrt{2}/2}{2\,sen\,30°-tg\,60°-5\,tg\,45°}=\frac{2-2\sqrt{6}\cdot\sqrt{3}/2+1}{2\cdot 1/2-\sqrt{3}-5\cdot 1}=\frac{-3\sqrt{2}+3}{-4-\sqrt{3}}=\frac{3(\sqrt{2}-1)}{4+\sqrt{3}}\ .$$

3. $$cos\,15°=cos(45°-30°)=cos\,45°\,cos\,30°+sen\,45°\,sen\,30°=\frac{\sqrt{2}}{2}\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}+\frac{\sqrt{2}}{2}\cdot\frac{1}{2}=\frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}\ ;$$

$$tg\,75°=tg(45°+30°)=\frac{tg\,45°+tg\,30°}{1-tg\,45°\,tg\,30°}=\frac{1+\sqrt{3}/3}{1-1\cdot\sqrt{3}/3}=\frac{3+\sqrt{3}}{3-\sqrt{3}}=\frac{9+6\sqrt{6}+3}{9-3}=2+\sqrt{3}\ .$$

4. $sen\,\alpha=3/5 \ \Rightarrow\ cos\,\alpha=-\sqrt{1-sen^2\alpha}=-4/5$.

- $$cos(\alpha+60°)=cos\,\alpha\,cos\,60°-sen\,\alpha\,sen\,60°=-\frac{4}{5}\cdot\frac{1}{2}-\frac{3}{5}\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}=-\frac{4+3\sqrt{3}}{10}\ ;$$
- $$cos\,2\alpha=cos^2\alpha-sen^2\alpha=\frac{16}{25}-\frac{9}{25}=\frac{7}{25}\ ;$$
- $$sen\frac{\alpha}{2}=\sqrt{\frac{1-cos\,\alpha}{2}}=\sqrt{\frac{1+4/5}{2}}=\sqrt{\frac{9}{10}}=\frac{3}{\sqrt{10}}\ .$$

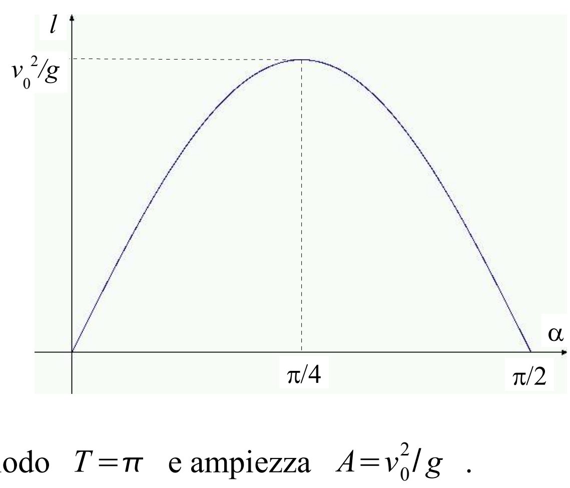
5.

- $$tg(\frac{\pi}{4}+\alpha)-tg(\alpha-\frac{\pi}{4})=\frac{1+tg\,\alpha}{1-tg\,\alpha}-\frac{tg\,\alpha-1}{tg\,\alpha+1}=\frac{(1+tg\,\alpha)^2+(1-tg\,\alpha)^2}{(1-tg\,\alpha)(1+tg\,\alpha)}=$$

  $$\frac{2(1+tg^2\alpha)}{1-tg^2\alpha}=\frac{2(cos^2\alpha+sen^2\alpha)}{cos^2\alpha-sen^2\alpha}=\frac{2}{cos^2\alpha-sen^2\alpha}\quad \text{c.v.d.}$$
- $$\frac{sen^2 2\alpha}{1+cos\,2\alpha}=\frac{4\,sen^2\alpha\,cos^2\alpha}{1+2\,cos^2\alpha-1}=2\,sen^2\alpha\quad \text{c.v.d.}$$
- Poniamo $tg\,\alpha/2=t$ e applichiamo le eq. parametriche:

  $$\frac{1+sen\,\alpha}{cos\,\alpha}=(1+\frac{2t}{1+t^2})\cdot\frac{1+t^2}{1-t^2}=\frac{1+t^2+2t}{1-t^2}=\frac{(1+t)^2}{(1+t)(1-t)}=\frac{1+t}{1-t}\quad \text{c.v.d.}$$

6. Equazioni del moto: $\begin{cases} x=v_0 t\,cos\,\alpha \\ y=-1/2\,g\,t^2+v_0 t\,sen\,\alpha \end{cases}$.



Tempo di volo: $y=-\frac{1}{2}g\,t^2+v_0 t\,sen\,\alpha=0\ \Rightarrow$

$t_0=0;\ \ t_1=\frac{2\,v_0\,sen\,\alpha}{g}$. Gittata:

$$l(\alpha)=v_0 t_1\,cos\,\alpha=\frac{2\,v_0^2\,sen\,\alpha\,cos\,\alpha}{g}=\frac{v_0^2\,sen\,2\alpha}{g}\ .$$

Limitazioni: $0\le\alpha\le\pi/2$. Arco di sinusoide di periodo $T=\pi$ e ampiezza $A=v_0^2/g$.

La gittata è massima quando il proiettile viene lanciato ad un angolo $\alpha=\pi/4$, e il valore della gittata massima è $l_{max}=v_0^2/g$.

7. Imponiamo il passaggio per il punto $(\frac{\pi}{6},\frac{3}{2})$: $\frac{a}{2}+b\frac{\sqrt{3}}{2}=\frac{3}{2} \Rightarrow a+b\sqrt{3}=3$.

L'ampiezza dell'oscillazione è: $r=\sqrt{a^2+b^2}=3 \Rightarrow a^2+b^2=9$.

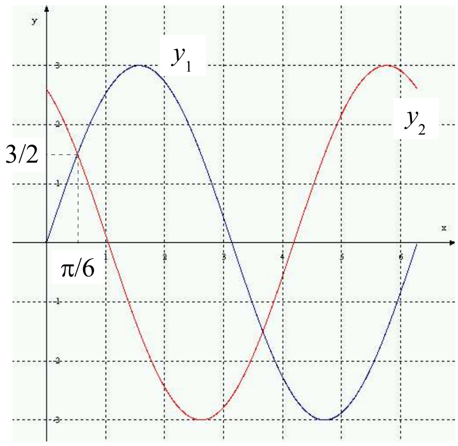
$$\begin{cases} a=3-b\sqrt{3} \\ a^2+b^2=9 \end{cases} \Rightarrow 9-6b\sqrt{3}+3b^2+b^2=9 \Rightarrow 4b^2-6b\sqrt{3}=0 \Rightarrow \begin{cases} a_1=3 \\ b_1=0 \end{cases} \vee \begin{cases} a_2=-3/2 \\ b_2=3\sqrt{3}/2 \end{cases} .$$

Soluzioni: $y_1=3\,sen\,x$, $y_2=-\frac{3}{2}sen\,x+\frac{3\sqrt{3}}{2}cos\,x=3\,sen(x+\frac{2}{3}\pi)$.

Per determinare l'angolo aggiunto, abbiamo utilizzato: $tg\,\alpha=\frac{b}{a}=-\sqrt{3}$ con $cos\,\alpha<0$ e $sen\,\alpha>0$.

Scrivendo le soluzioni nella forma: $s_1=3\,sen(2\pi t)$, $s_2=3\,sen(2\pi t+\frac{2}{3}\pi)$,

vediamo che esse descrivono dei moti armonici di ampiezza $A=3$ e periodo $T=1$.



La velocità è data dalla pendenza del grafico posizione-tempo, per cui si annulla nei punti di massimo o minimo spostamento dalla posizione di equilibrio.

Per la funzione y_1 abbiamo quindi:

$$2\pi t=\frac{\pi}{2} \Rightarrow t_1=\frac{1}{4} \quad ; \quad 2\pi t=\frac{3}{2}\pi \Rightarrow t_2=\frac{3}{4} .$$

4^F - MATEMATICA compito n°2 - 2015-2016

1. Scrivi e dimostra la formula dell'angolo aggiunto.

2. Calcola: $(cos\,60°\,sen\,45° - sen\,300°\,cos\,315°)^2 + [-cos\,45°\cdot(-cos\,60°) - sen\,45°\,sen\,60°]^2$.

3. Calcola il valore esatto di: $cos\,75°$ e $tg\,15°$.

4. Sapendo che $cos\,\alpha = 4/5$ e che $-\pi/2 < \alpha < 0$, calcola i valori di:

   $sen(45° - \alpha)$, $sen\,2\alpha$, $cos\,\alpha/2$.

5. Verifica le seguenti identità indicando le formule applicate:

   - $\dfrac{sen(\alpha+\beta) + sen(\alpha-\beta)}{cos(\alpha+\beta) + cos(\alpha-\beta)} = tg\,\alpha$;
   - $\dfrac{tg\,\alpha\,sen\,2\alpha}{1 - cos\,\alpha} = 4\,cos^2\,\alpha/2$;
   - $\dfrac{2\,sen\,\alpha - sen\,2\alpha}{sen^2\,\alpha/2} = 4\,sen\,\alpha$.

6. Descrivi la curva di equazione $\dfrac{x^2}{9} - \dfrac{y^2}{16} = 1$ e tracciane il grafico.

   Calcola la tangente e il coseno degli angoli formati dai suoi asintoti.

7. Due angoli di un triangolo hanno ampiezza α e il terzo angolo ha ampiezza β.

   Sapendo che $sen\,\alpha = 4/5$, calcola $sen\,\beta$.

8. Determina le funzioni della forma $y = a\,sen\,x + b\,cos\,x$ tali che per $x = 0$ sia $y = -1$, e che l'ampiezza della loro oscillazione sia $r = \sqrt{2}$. Tracciane il grafico nell'intervallo $[0, 2\pi]$.

   Individua una trasformazione geometrica che trasformi uno dei due grafici nell'altro e dimostra analiticamente questo fatto.

4^F - Correzione compito n°2

1. Vedi pag. 711 del libro di testo.

2. $$[\frac{1}{2}\cdot\frac{\sqrt{2}}{2}-(-\frac{\sqrt{3}}{2})\cdot\frac{\sqrt{2}}{2}]^2+[-\frac{\sqrt{2}}{2}\cdot(-\frac{1}{2})-\frac{\sqrt{2}}{2}\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}]^2=(\frac{\sqrt{2}}{4}+\frac{\sqrt{6}}{4})^2+(\frac{\sqrt{2}}{4}-\frac{\sqrt{6}}{4})^2=$$

   $\frac{1}{8}-\frac{\sqrt{3}}{4}+\frac{3}{8}+\frac{1}{8}+\frac{\sqrt{3}}{4}+\frac{3}{8}=1$. Segnalo anche la risoluzione dell'alunna M.V. che ha riscritto l'espressione:

   $[sen(45°+60°)]^2+[cos(45°+60°)]^2=1$ per la prima relazione fondamentale.

3. $$cos\,75°=cos(45°+30°)=cos\,45°\,cos\,30°-sen\,45°\,sen\,30°=\frac{\sqrt{2}}{2}\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}-\frac{\sqrt{2}}{2}\cdot\frac{1}{2}=\frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}\;;$$

   $$tg\,15°=tg(45°-30°)=\frac{tg\,45°-tg\,30°}{1+tg\,45°\,tg\,30°}=\frac{1-\sqrt{3}/3}{1+1\cdot\sqrt{3}/3}=\frac{3-\sqrt{3}}{3+\sqrt{3}}=\frac{9-6\sqrt{6}+3}{9-3}=2-\sqrt{3}\;.$$

4. $cox\,\alpha=4/5 \;\Rightarrow\; sen\,\alpha=-\sqrt{1-cos^2\alpha}=-3/5$;

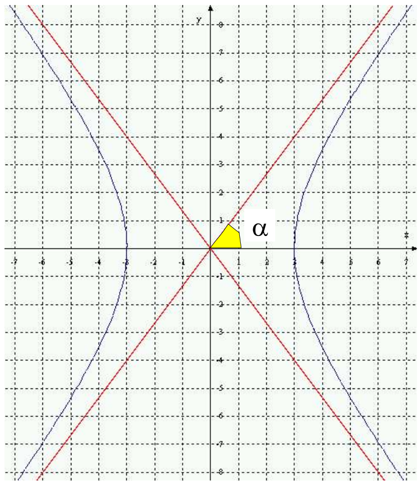
   - $sen(45°-\alpha)=sen\,45°\,cos\,\alpha-cos\,45°\,sen\,\alpha=\frac{\sqrt{2}}{2}\cdot\frac{4}{5}-\frac{\sqrt{2}}{2}\cdot(-\frac{3}{5})=\frac{7}{10}\sqrt{2}$;
   - $sen\,2\alpha=2\,sen\,\alpha\,cos\,\alpha=2\cdot(-\frac{3}{5})\cdot\frac{4}{5}=-\frac{24}{25}$;
   - $cos\frac{\alpha}{2}=\sqrt{\frac{1+cos\,\alpha}{2}}=\sqrt{\frac{1+4/5}{2}}=\sqrt{\frac{9}{10}}=\frac{3}{\sqrt{10}}$.

5.
   - $\frac{sen\,\alpha\,cos\,\beta+cos\,\alpha\,sen\,\beta+sen\,\alpha\,cos\,\beta-cos\,\alpha\,sen\,\beta}{cos\,\alpha\,cos\,\beta-sen\,\alpha\,sen\,\beta+cos\,\alpha\,cos\,\beta+sen\,\alpha\,sen\,\beta}=\frac{2\,sen\,\alpha\,cos\,\beta}{2\,cos\,\alpha\,cos\,\beta}=tg\,\alpha$ c.v.d.
   - 1° membro: $\frac{tg\,\alpha\,sen\,2\alpha}{1-cos\,\alpha}=\frac{sen\,\alpha}{cos\,\alpha}\,\frac{2\,sen\,\alpha\,cos\,\alpha}{1-cos\,\alpha}=\frac{2\,sen^2\alpha}{1-cos\,\alpha}=\frac{2(1+cos\,\alpha)(1-cos\,\alpha)}{1-cos\,\alpha}=2(1+cos\,\alpha)$;

     2° membro: $4\,cos^2\frac{\alpha}{2}=4\frac{1+cos\,\alpha}{2}=2(1+cos\,\alpha)$ c.v.d.
   - $\frac{2\,sen\,\alpha-sen\,2\alpha}{sen^2\alpha/2}=\frac{2\,sen\,\alpha-2\,sen\,\alpha\,cos\,\alpha}{(1-cos\,\alpha)/2}=\frac{4\,sen\,\alpha(1-cos\,\alpha)}{1-cos\,\alpha}=4\,sen\,\alpha$ c.v.d.

6. Si tratta di una iperbole di centro l'origine, semiassi $a=3$, $b=4$ e avente i fuochi sull'asse delle ascisse.

Gli asintoti hanno equazioni $y=\pm\frac{b}{a}x=\pm\frac{4}{3}x$.



Facendo riferimento alla figura, sappiamo che:

$tg\,\alpha=m=\frac{4}{3}$, da cui $cos\,\alpha=\frac{1}{\sqrt{1+tg^2\alpha}}=\frac{1}{\sqrt{1+16/9}}=\frac{3}{5}$.

Gli angoli formati dagli asintoti hanno quindi:

$tg\,2\alpha=\frac{2\,tg\,\alpha}{1-tg^2\alpha}=\frac{8/3}{1-16/9}=-\frac{24}{7}$, $tg(\pi-2\alpha)=-tg\,2\alpha=\frac{24}{7}$

(in alternativa, possiamo utilizzare la formula della tangente dell'angolo compreso tra due rette);

$cos\,2\alpha=2\,cos^2\alpha-1=\frac{18}{25}-1=-\frac{7}{25}$, $cos(\pi-2\alpha)=-cos\,\alpha=\frac{7}{25}$.

7. Poiché $sen\,\alpha=\frac{4}{5}\Rightarrow cos\,\alpha=\sqrt{1-sen^2\alpha}=\sqrt{1-\frac{16}{25}}=\frac{3}{5}$.

Poiché la somma degli angoli interni di un triangolo è uguale ad un angolo piatto:

$sen\,\beta=sen(\pi-2\alpha)=sen\,2\alpha=2\,sen\,\alpha\,cos\,\alpha=2\cdot\frac{4}{5}\cdot\frac{3}{5}=\frac{24}{25}$.

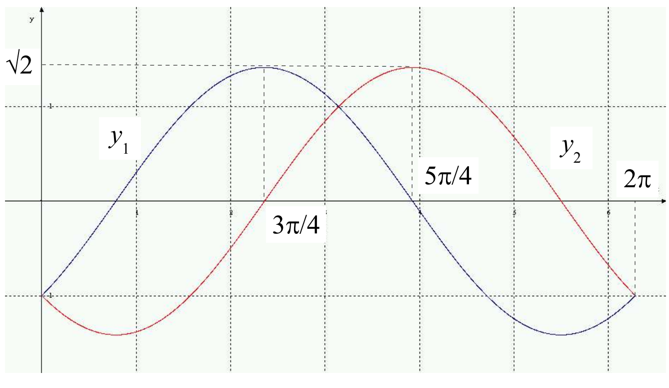
8. Imponiamo il passaggio per il punto $(0,-1)$: $b=-1$.

L'ampiezza dell'oscillazione è: $r=\sqrt{a^2+b^2}=\sqrt{2}\Rightarrow a^2+1=2\Rightarrow a=\pm1$.

Soluzioni: $y_1=sen\,x-cos\,x=\sqrt{2}\,sen(x-\frac{\pi}{4})$, $y_2=-sen\,x-cos\,x=\sqrt{2}\,sen(x+\frac{5}{4}\pi)$.

Per determinare l'angolo aggiunto, abbiamo utilizzato:

- $tg\,\alpha=\frac{b}{a}=-1$ con $cos\,\alpha>0$ e $sen\,\alpha<0$;
- $tg\,\alpha=\frac{b}{a}=1$ con $cos\,\alpha<0$ e $sen\,\alpha<0$.



Dimostriamo che il grafico di y_2 può essere ottenuto da quello di y_1 tramite una traslazione orizzontale di $\pi/2$ verso destra.

L'equazione della trasformazione è: $x'=x+\pi/2\Rightarrow x=x'-\pi/2$.

Sostituendo nell'equazione di y_1, otteniamo:

$y_1'=\sqrt{2}\,sen(x'-\frac{\pi}{2}-\frac{\pi}{4})=\sqrt{2}\,sen(x'-\frac{3}{4}\pi)=\sqrt{2}\,sen(x+\frac{5}{4}\pi)=y_2$ c.v.d.

1. Dimostra le “formule parametriche” ed una delle formule di prostaferesi a tua scelta.
2. Verifica le seguenti identità goniometriche, precisando quali formule vengono utilizzate:

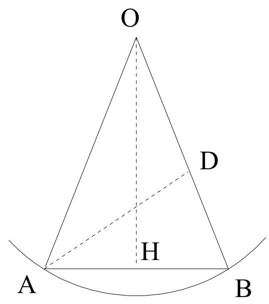
$$tg^2\frac{\alpha}{2}\left(\frac{1}{sen^2\alpha/2}-2\right)=\frac{4\,sen^2\alpha/2}{sen\,\alpha\,tg\,\alpha} \quad ; \qquad \frac{1+8\cos^4\alpha-8\cos^2\alpha}{\cos 4\alpha}=1 \quad ;$$

$$\cos^4\alpha+sen^2\alpha-\cos^2 2\alpha=\frac{3}{4}sen^2 2\alpha \quad ; \qquad tg(\alpha+\beta)-tg(\alpha-\beta)=\frac{2\,tg\,\beta(1+tg^2\alpha)}{1-tg^2\alpha\,tg^2\beta} \quad .$$

3. Dimostra che il lato del decagono regolare inscritto in una circonferenza è la sezione aurea del raggio. Utilizza il precedente risultato per calcolare $sen\,18°$ e $sen\,36°$.
4. Data la funzione $y=a\,sen^2x+b\,sen\,x\cos x+c\cos^2x$, determina i valori di *A*, ω, ϕ, *k*, per i quali si ha: $y=A\,sen(\omega x+\phi)+k$. Applicando tale procedimento, disegna il grafico della funzione $y_1=sen^2x+2\,sen\,x\cos x+3\cos^2x$. Spiega quale successione di trasformazioni porta il grafico di $y=sen\,x$ in quello di y_1 . Per quali valori di *a*, *b*, *c* si ottiene come grafico una retta parallela all'asse delle ascisse?
5. Determina (senza fare uso di radici) l'equazione cartesiana della curva le cui equazioni parametriche sono: $\begin{cases} x=sen\,t \\ y=sen\,2t \end{cases}$. Quali simmetrie possiede la curva?
6. Calcola $sen^2 35°+sen^2 55°$.
7. Determina le funzioni della forma $y=a\,sen\,x+b\cos x$ tali che per $x=2\pi/3$ sia $y=1$, e che l'ampiezza dell'oscillazione sia $A=2$. Disegna (in maniera precisa) il loro grafico nell'intervallo $[0,2\pi]$. Ponendo $y=s$, $x=2\pi t$, dove *s* rappresenta lo spostamento dall'origine di un punto P che si muova su una retta nel tempo *t*, descrivi il moto di P e ricava le leggi che forniscono velocità e accelerazione di P in funzione del tempo.

3^C - Correzione compito n°7

1. Vedi pagg. 91-93 del libro di testo.
2. $$tg^2\frac{\alpha}{2}\left(\frac{1}{sen^2\alpha/2}-2\right)=\frac{1-cos\,\alpha}{1+cos\,\alpha}\left(\frac{2}{1-cos\,\alpha}-2\right)=\frac{1-cos\,\alpha}{1+cos\,\alpha}\cdot\frac{2\,cos\,\alpha}{1-cos\,\alpha}=\frac{2\,cos\,\alpha}{1+cos\,\alpha}\quad ;$$
$$\frac{4\,sen^2\alpha/2}{sen\,\alpha\,tg\,\alpha}=4\cdot\frac{1-cos\,\alpha}{2}\cdot\frac{cos\,\alpha}{sen^2\alpha}=\frac{2\,cos\,\alpha(1-cos\,\alpha)}{(1+cos\,\alpha)(1-cos\,\alpha)}=\frac{2\,cos\,\alpha}{1+cos\,\alpha}\quad \text{c.v.d.}$$
$$\frac{1+8\,cos^4\alpha-8\,cos^2\alpha}{cos\,4\alpha}=\frac{1+8\,cos^4\alpha-8\,cos^2\alpha}{2\,cos^2 2\alpha-1}=\frac{1+8\,cos^4\alpha-8\,cos^2\alpha}{2(2\,cos^2\alpha-1)^2-1}=1\quad \text{c.v.d.}$$
$$cos^4\alpha+sen^2\alpha-cos^2 2\alpha=(1-sen^2\alpha)^2+sen^2\alpha-(1-2\,sen^2\alpha)^2=3\,sen^2\alpha-3\,sen^4\alpha\quad ;$$
$$\frac{3}{4}sen^2 2\alpha=\frac{3}{4}(2\,sen\,\alpha\,cos\,\alpha)^2=3\,sen^2\alpha(1-sen^2\alpha)=3\,sen^2\alpha-3\,sen^4\alpha\quad \text{c.v.d.}$$
$$tg(\alpha+\beta)-tg(\alpha-\beta)=\frac{tg\,\alpha+tg\,\beta}{1-tg\,\alpha\,tg\,\beta}-\frac{tg\,\alpha-tg\,\beta}{1+tg\,\alpha\,tg\,\beta}=...(svolgo)...=\frac{2\,tg\,\beta(1+tg^2\alpha)}{1-tg^2\alpha\,tg^2\beta}\quad \text{c.v.d.}$$
3. Se AB è il lato del decagono regolare inscritto nella circonferenza di centro O e raggio OA, allora:



$$A\hat{O}B=\frac{360°}{10}=36° \quad \text{e} \quad O\hat{A}B=O\hat{B}A=72° \quad .$$

Conduco la bisettrice AD, che forma il triangolo ABD avente anch'esso angoli di $36°-72°-72°$, e quindi simile ad ABO. Inoltre, il triangolo ODA, avendo gli angoli in A e in O uguali, è isoscele, e quindi: $AD=OD$.

Ne segue che: $\frac{OA}{AB}=\frac{AB}{BD} \Rightarrow \frac{r}{l_{10}}=\frac{l_{10}}{r-l_{10}}$, ovvero il lato del decagono regolare inscritto nella circonferenza è uguale alla sezione aurea del raggio, in quanto è medio proporzionale tra il raggio stesso e la parte rimanente. Considerando l_{10} come incognita, ricavo:

$$r^2-rl_{10}=l_{10}^2 \Rightarrow l_{10}^2+rl_{10}-r^2=0 \Rightarrow l_{10}=\frac{\sqrt{5}-1}{2}r \quad \text{(scartando la soluzione negativa).}$$

Quindi: $sen\,18°=\frac{AH}{AO}=\frac{l_{10}/2}{r}=\frac{\sqrt{5}-1}{4} \Rightarrow cos\,18°=\sqrt{1-sen^2 18°}=\sqrt{1-(\frac{\sqrt{5}-1}{4})^2}=\frac{\sqrt{10+2\sqrt{5}}}{4}$, da cui:

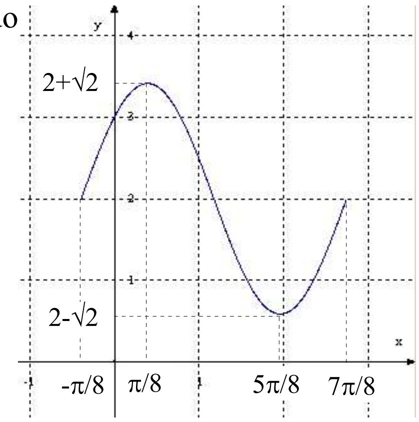
$$sen\,36°=2\,sen\,18°\,cos\,18°=2\cdot\frac{\sqrt{5}-1}{4}\cdot\frac{\sqrt{10+2\sqrt{5}}}{4}=\frac{\sqrt{10-2\sqrt{5}}}{4}\quad .$$

4. Applicando le formule di duplicazione, otteniamo:
$$y=a\,sen^2x+b\,sen\,x\,cos\,x+c\,cos^2x=a\frac{1-cos\,2x}{2}+\frac{b}{2}sen\,2x+c\frac{1+cos\,2x}{2}=\frac{b}{2}sen\,2x+\frac{c-a}{2}cos\,2x+\frac{c+a}{2}\quad .$$

Come abbiamo visto, tale funzione può essere scritta nella forma $y=A\,sen(\omega x+\phi)+k$ ponendo:

$A=\frac{\sqrt{b^2+(c-a)^2}}{2}$, $\omega=2$, $\phi=arc\,tg\frac{c-a}{b}$, $k=\frac{c+a}{2}$, e corrisponde ad una oscillazione armonica di ampiezza A, periodo $T=\dfrac{2\pi}{\omega}=\pi$, sfasamento ϕ e valore medio k.

$$y'=sen^2 x+2\,sen\,x\,cos\,x+3\,cos^2 x=\frac{1-cos\,2x}{2}+sen\,2x+3\frac{1+cos\,2x}{2}=sen\,2x+cos\,2x+2=\sqrt{2}\,sen(2x+\frac{\pi}{4})+2 \quad .$$



Il grafico di y' si ottiene da quello di $y=sen\,x$ applicando nell'ordine (ad esempio):

- una “contrazione” orizzontale di un fattore 2: $x'=x/2$;
- una traslazione verso sinistra di $\pi/8$ unità: $x''=x'-\pi/8$;
- una “dilatazione verticale di un fattore $\sqrt{2}$: $y'=y\sqrt{2}$;
- una traslazione verso l'alto di 2 unità: $y''=y'+2$.

Il grafico è una retta parallela all'asse delle ascisse se:

$A=0 \Rightarrow b=0 \wedge a=c$.

5. $y=sen\,2t=2\,sen\,t\,cos\,t=\pm 2x\sqrt{1-x^2} \Rightarrow y^2=4x^2(1-x^2)$. La curva è simmetrica rispetto ad entrambi gli assi cartesiani, e, quindi, anche rispetto all'origine degli assi.

6. Poiché $55°=90°-35°$, abbiamo: $sen^2 35°+sen^2 55°=sen^2 35°+cos^2 35°=1$.

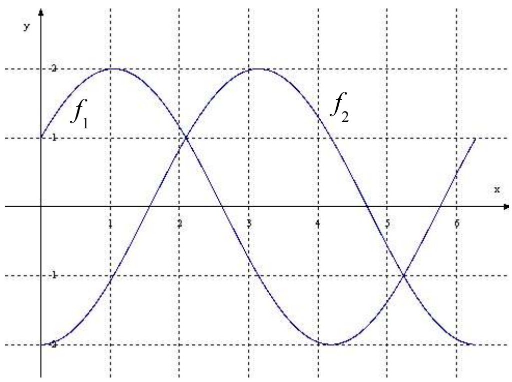
7. Impongo il passaggio per il punto $(\frac{2}{3}\pi, 1)$: $a\frac{\sqrt{3}}{2}-\frac{b}{2}=1 \Rightarrow a\sqrt{3}-b=2$.

L'ampiezza dell'oscillazione è data da $k=\sqrt{a^2+b^2}$, quindi: $a^2+b^2=4$.

Il sistema formato dalle due condizioni ammette le soluzioni: $\begin{cases} a_1=0 \\ b_1=-2 \end{cases}$ e $\begin{cases} a_2=\sqrt{3} \\ b_2=1 \end{cases}$.

Quindi il problema è verificato dalle due funzioni $f_1=-2\,cos\,x$ (il cui grafico si traccia in maniera elementare) ed $f_2=\sqrt{3}\,sen\,x+cos\,x$ che, tramite la formula dell'angolo “aggiunto”, può essere scritta:

$f_2=2\,sen(x+\frac{\pi}{6})$ e, quindi, corrisponde ad una sinusoide traslata di $\pi/6$ verso sinistra e di ampiezza $A=2$.



Scrivendo le funzioni ottenute come:

$s_1=2\,sen(2\pi t-\frac{\pi}{2})$, $s_2=2\,sen(2\pi t+\frac{\pi}{6})$, vediamo che si tratta di moti armonici di ampiezza $A=2$, pulsazione

$\omega=2\pi$, frequenza $f=\dfrac{\omega}{2\pi}=1$, periodo $T=\dfrac{1}{f}=1$.

Possiamo quindi ricavare le velocità: $v_1=4\pi\,cos(2\pi t-\frac{\pi}{2})$, $v_2=4\pi\,cos(2\pi t+\frac{\pi}{6})$ e le

accelerazioni: $a_1=-8\pi^2 sen(2\pi t-\frac{\pi}{2})$, $a_2=-8\pi^2 sen(2\pi t+\frac{\pi}{6})$.