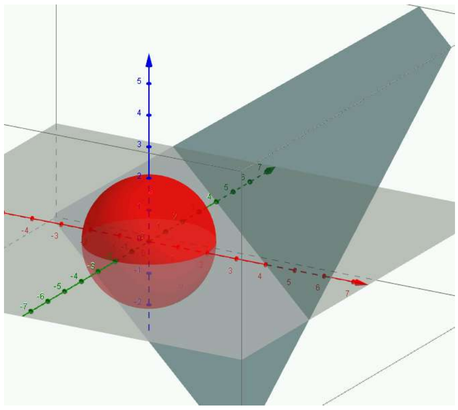
Geometria analitica dello spazio

Quesiti esame di stato

2^ Simulazione 2015 - Quesito 7



Trovare l'equazione del piano tangente alla superficie sferica avente come centro l'origine e raggio 2, nel suo punto di coordinate $(1,1,z)$, con z negativa.

Svolgimento

Equazione della superficie sferica: $x^2+y^2+z^2=4$.

Punto T di tangenza:

$1+1+z^2=4 \Rightarrow z=-\sqrt{2} \Rightarrow T(1,1,-\sqrt{2})$.

Il vattore $\vec{v}=\vec{OT}$ che congiunge l'origine al punto di tangenza ha componenti: $\vec{v}\equiv(-1-1,\sqrt{2})$.

Il piano t richiesto deve essere perpendicolare al vettore $\vec{v}$, e quindi deve avere coefficienti direttori proporzionali alle componenti di $\vec{v}$.

Scegliendo ad esempio la costante di proporzionalità uguale ad uno, l'equazione del piano t avrà la forma: $-x-y+\sqrt{2}z+d=0$.

Imponiamo che il piano t passi per il punto T: $-1-1-2+d=0 \Rightarrow d=4$.

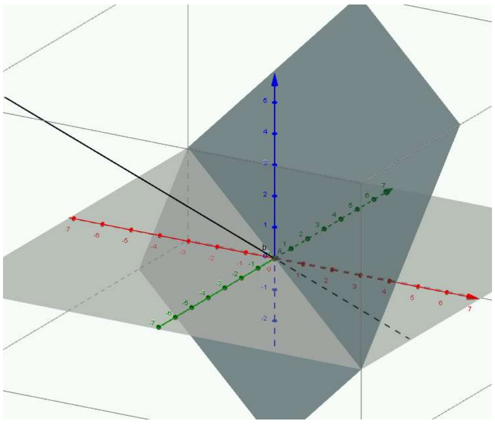
L'equazione del piano t è quindi: $-x-y+\sqrt{2}z+4=0$, ovvero $x+y-\sqrt{2}z-4=0$.

Sessione ordinaria 2015 - Quesito 5

Determinare un'espressione analitica della retta perpendicolare nell'origine al piano di equazione $x+y-z=0$.

Svolgimento

Poiché la retta *r* è perpendicolare al piano π, i suoi coefficienti direttori devono essere proporzionali a quelli del piano π, che sono: $a=1\,;\ b=1\,;\ c=-1$.



Se prendiamo per semplicità la costante di proporzionalità uguale ad uno, le equazioni parametriche della retta *r* saranno della forma:

$$\begin{cases} x=t+x_0 \\ y=t+y_0 \\ z=-t+z_0 \end{cases} .$$

Se poi, sempre per semplicità, imponiamo che la retta passi per l'origine quando $t=0$, ricaviamo: $x_0=y_0=z_0=0$.

Con queste scelte, le equazioni parametriche della retta *r* saranno quindi:

$$\begin{cases} x=t \\ y=t \\ z=-t \end{cases} .$$

Se poi volessimo, come in alcune soluzioni che si trovano in rete, scrivere le equazioni della retta come intersezioni tra due piani, sarebbe sufficiente eliminare il parametro *t* dal sistema precedente, ottenendo ad esempio:

$$\begin{cases} x-y=0 \\ x+z=0 \end{cases} .$$

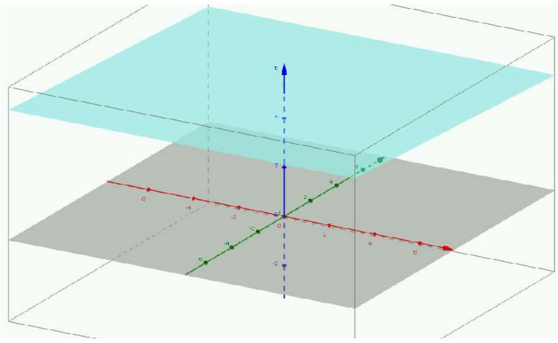
Sessione suppletiva 2015 - Problema 1

Per realizzare una tettoia che deve coprire una pista da ballo, è necessario usare un piano leggermente inclinato, per favorire il deflusso della pioggia.

Nel sistema di riferimento cartesiano *Oxyz*, tale piano deve passare per i punti $(-4,0,5)$, $(4,0,5)$ e $(0,25,4)$, in modo che la quota vari gradualmente dai 5 metri in corrispondenza dell'inizio della pista, ai 4 metri in corrispondenza della fine della pista stessa.

Determina l'equazione del piano prescelto.

Svolgimento



Consideriamo il piano generico di equazione $ax+by+cz+d=0$ e imponiamo le condizioni di passaggio per i tre punti:

$$\begin{cases} -4a+5c+d=0 \\ 4a+5c+d=0 \\ 25b+4c+d=0 \end{cases} .$$

Sottraiamo membro a membro le prime due equazioni: $8a=0 \Rightarrow a=0$.

Sommiamo membro a membro le prime due equazioni: $10c+2d=0 \Rightarrow d=-5c$.

Sostituiamo nella terza equazione: $25b+4c-5c=0 \Rightarrow c=25b$.

Scegliamo per semplicità $b=1 \Rightarrow c=25 \Rightarrow d=-125$.

L'equazione del piano della tettoia è quindi: $y+25z-125=0$.

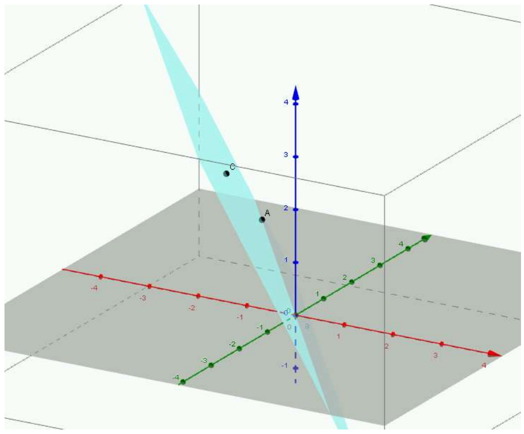
Osserviamo che nell'equazione è assente il termine in x, per cui il piano è parallelo all'asse x.

Sessione suppletiva 2015 - Quesito 4

In un sistema di riferimento cartesiano nello spazio *Oxyz* sono dati i punti $A(-3,4,0)$ e $C(-2,1,2)$. I tre punti O, A e C giacciono su un piano π.

Determinare l'equazione che descrive il piano π.

Svolgimento



Consideriamo il piano generico di equazione $ax+by+cz+d=0$ e imponiamo le condizioni di passaggio per i punti O, A, C:

$$\begin{cases} d=0 \\ -3a+4b+d=0 \\ -2a+b+2c+d=0 \end{cases} .$$

Sostituiamo la prima equazione nelle altre due e ricaviamo b dalla terza: $b=2a-2c$.

Sostituiamo nella seconda: $-3a+8a-8c=0 \Rightarrow a=\frac{8}{5}c$.

Scegliamo per semplicità $c=5 \Rightarrow a=8 \Rightarrow b=16-10=6$.

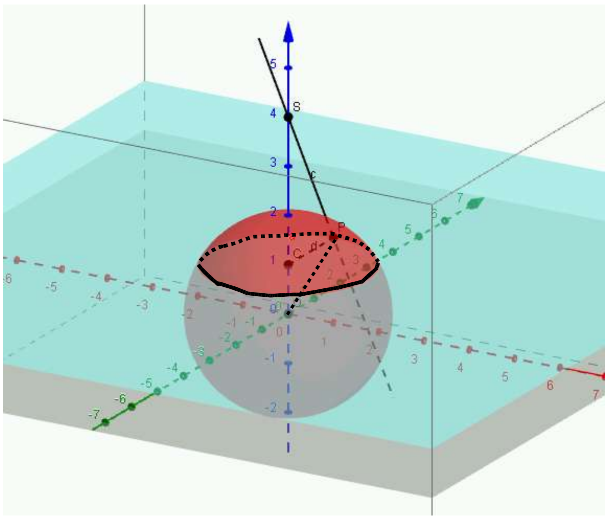
Il piano π ha quindi equazione: $8x+6y+5z=0$.

Esame Europa 2015 - Quesito 3

In un riferimento cartesiano *Oxyz*, si verifichi che la circonferenza γ, intersezione della sfera di equazione $x^2+y^2+z^2=4$ e del piano $z=1$ ha centro in $(0,0,1)$ e raggio $\sqrt{3}$.

Si immagini che un sorgente di luce puntiforme S sia situata sul semiasse positivo delle *z*. A quale distanza dal centro della sfera si deve trovare S affinché γ sia il confine tra la zona della sfera che risulta illuminata e quella che resta in ombra?

Svolgimento



La sfera data ha come centro l'origine degli assi e raggio $R_s=2$.

Il piano di equazione $z=1$ è parallelo al piano *xy*, per cui la retta passante per il centro della sfera e perpendicolare al piano dato è l'asse *z*.

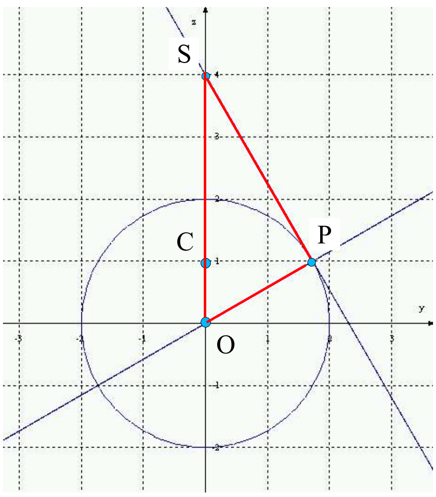
L'intersezione tra l'asse *z* ed il piano $z=1$ è il punto $C(0,0,1)$, che quindi è il centro della circonferenza γ, mentre il raggio r_c della circonferenza viene ricavato tramite il teorema di Pitagora:

$$r_c=\sqrt{R_s^2-OC^2}=\sqrt{4-1}=\sqrt{3} \quad \text{c.v.d.}$$

Poniamo $S(0,0,t)$ con $t\geq 2$. La circonferenza γ è il confine tra la zona della sfera illuminata e quella in ombra se ogni raggio di luce tangente alla sfera tocca la sfera stessa in un punto P che appartiene alla circonferenza γ.

Applichiamo il secondo teorema di Euclide al triangolo rettangolo OSP:

$$SC\cdot CO=CP^2 \Rightarrow (t-1)\cdot 1=3 \Rightarrow t=4 \quad \text{. Quindi } S(0,0,4) \text{ .}$$



In alternativa, avremmo potuto utilizzare il metodo analitico scegliendo il punto P sul piano di equazione $x=0$:

$P(0,\sqrt{3},1)$.

La retta OP ha quindi equazione $z=\frac{1}{\sqrt{3}}y$

(sottintendendo $x=0$).

La retta PC, essendo la perpendicolare ad OP che passa per P, avrà equazione:

$$z-1=-\sqrt{3}(y-\sqrt{3}) \Rightarrow z=-\sqrt{3}y+4 \quad \text{(sempre con } x=0 \text{).}$$

Quindi, l'intersezione di tale retta con l'asse *z*, che ha equazione $y=0$, fornisce $z=4$.

Sessione straordinaria ed esame America 2015 - Quesito 4

Nello spazio sono dati due piani α e β rispettivamente di equazione:

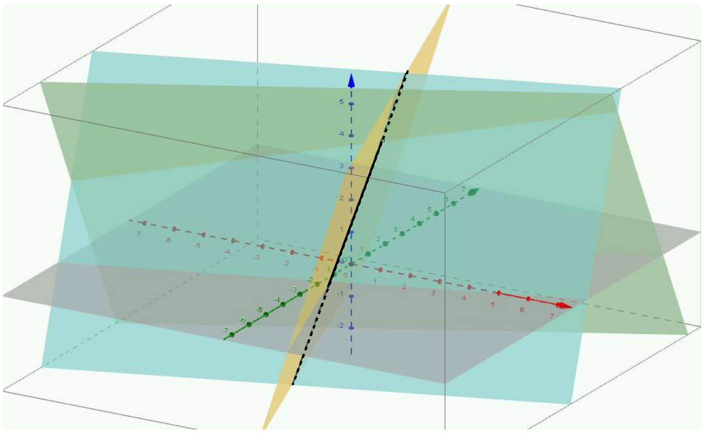
$x-3y+z-5=0$ e $x+2y-z+3=0$.

Dopo aver determinato l'equazione parametrica della retta *r* da essi individuata, verificare che essa appartiene al piano γ di equazione $3x+y-z+1=0$.

Svolgimento

Mettiamo a sistema le equazioni dei piani α e β:

$$\begin{cases} x-3y+z-5=0 \\ x+2y-z+3=0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} z=-x+3y+5 \\ x+2y+x-3y-5+3=0 \Rightarrow y=2x-2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} z=5x-1 \\ y=2x-2 \end{cases} .$$



Se poniamo $x=t$, otteniamo le possibili equazioni parametriche della retta *r*:

$$\begin{cases} x=t \\ y=2t-2 \\ z=5t-1 \end{cases} .$$

Sostituiamo le equazioni parametriche della retta *r* nell'equazione cartesiana del piano γ:

$$3t+2t-2-5t+1+1=0 \Rightarrow 0=0 \Rightarrow \mathit{vera} \quad \forall t \in \mathbb{R} .$$

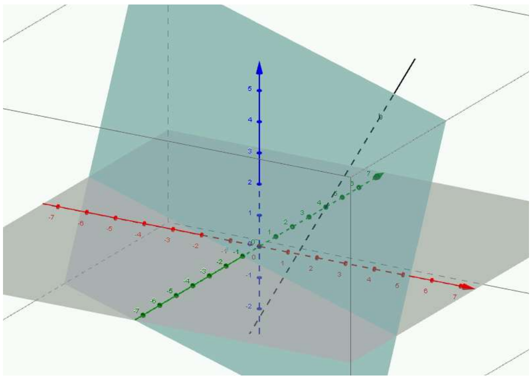
Avendo ottenuto un'identità, possiamo affermare che la retta *r* appartiene al piano γ.

Sessione straordinaria ed esame America 2015 - Quesito 9

In un riferimento cartesiano nello spazio *Oxyz*, data la retta *r* di equazioni: $\begin{cases} x=2t+1 \\ y=1+t \\ z=kt \end{cases}$

e il piano π di equazione: $x+2y-z+2=0$, determinare per quale valore di *k* la retta *r* e il piano π sono paralleli, e la distanza tra di essi.

Svolgimento



La retta *r* risulta <u>parallela</u> al vettore $\vec{u}\equiv(2,1,k)$ che ha come componenti i parametri direttori della retta stessa.

Il piano π risulta invece <u>perpendicolare</u> al vettore $\vec{v}\equiv(1,2,-1)$ che ha come componenti i parametri direttori del piano.

La retta *r* e il piano π sono <u>paralleli</u> se i vettori $\vec{u}$ e $\vec{v}$ sono <u>perpendicolari</u>:

$\vec{u}\perp\vec{v} \Rightarrow \vec{u}\cdot\vec{v}=0 \Rightarrow 2\cdot1+1\cdot2+k\cdot(-1)=0 \Rightarrow k=4$.

La retta *r* ha quindi equazioni parametriche: $\begin{cases} x=2t+1 \\ y=1+t \\ z=4t \end{cases}$.

Poiché la retta *r* e il piano π sono paralleli, la distanza tra di essi è uguale alla distanza di un punto generico della retta *r* dal piano π.

Ponendo ad esempio $t=0$, otteniamo il punto $A(1,1,0)$.

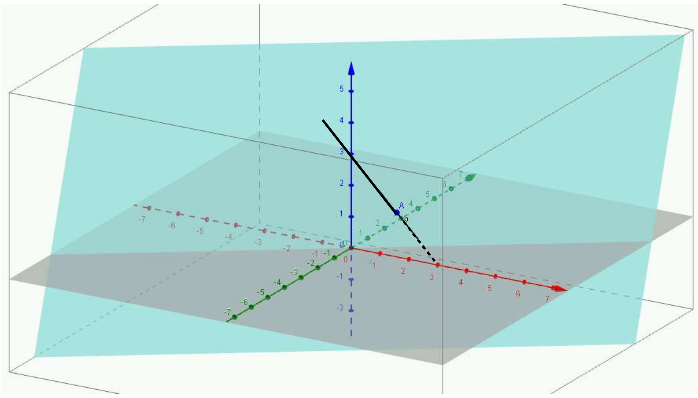
La distanza del punto A (e quindi della retta *r*) dal piano π è:

$$d=\frac{|ax_0+by_0+cz_0+d|}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}}=\frac{|1+2+2|}{\sqrt{1+4+1}}=\frac{5}{\sqrt{6}}$$.

1^ Simulazione 2016 - Quesito 3

Determinare un'espressione analitica della retta perpendicolare nel punto $(1,1,1)$ al piano di equazione $2x-3y+z=0$.

Svolgimento



Il piano dato risulta perpendicolare al vettore $\vec{v}\equiv(2,-3,1)$ che ha come componenti i parametri direttori del piano stesso.

La retta richiesta deve essere parallela al vettore $\vec{v}$, per cui le sue equazioni parametriche sono:

$$\begin{cases} x=2t+x_0 \\ y=-3t+y_0 \\ z=t+z_0 \end{cases} .$$

Imponendo il passaggio della retta per il punto dato, ricaviamo: $\begin{cases} x=2t+1 \\ y=-3t+1 \\ z=t+1 \end{cases}$.

Sessione ordinaria 2016 - Quesito 5

Una sfera, il cui centro è il punto $K(-2,-1,2)$, è tangente al piano π avente equazione $2x-2y+z-9=0$. Qual è il punto di tangenza? Qual è il raggio della sfera?

Svolgimento

Il raggio della sfera è la distanza tra il centro K ed il piano di tangenza π:

$$r=d(K,\beta)=\frac{|-4+2+2-9|}{\sqrt{2^2+2^2+1^2}}=3 \quad .$$

Il punto di tangenza T è il punto di intersezione tra la retta *n*, perpendicolare a π e passante per K, ed il piano π.

Poiché la retta *n* è perpendicolare a π, deve essere parallela al vettore $\vec{v}_\pi \equiv (2,-2,1)$ associato ad esso, per cui alla retta è associato un vettore $\vec{v}_r \equiv (2,-2,1)$.

Associando il punto K al valore $t=0$ del parametro, otteniamo le equazioni della retta *n*:

$$\begin{cases} x=2t-2 \\ y=-2t-1 \\ z=t+2 \end{cases} \quad .$$

L'equazione della sfera (non richiesta) è: $(x+2)^2+(y+1)^2+(z-2)^2=3^2$.

Contrariamente a quanto ci si potrebbe attendere, non è una buona idea ricavare T come punto di intersezione tra la sfera ed il piano (provare per credere).

Sessione ordinaria 2016 - Quesito 9

Date le rette $\begin{cases} x=t \\ y=2t \\ z=t \end{cases}$ e $\begin{cases} x+y+z-3=0 \\ 2x-y=0 \end{cases}$

e il punto $P(1,0,-2)$, determina l'equazione del piano passante per P e parallelo alle due rette.

Svolgimento

Portiamo le equazioni della seconda retta in forma parametrica:

$$\begin{cases} y=2x \\ x+2x+z-3=0 \;\Rightarrow\; z=-3x-3 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x=t \\ y=2t \\ z=-3t-3 \end{cases} .$$

I vettori normali alle due rette hanno componenti: $\vec{u} \equiv (1,2,1)$, $\vec{v} \equiv (1,2,-3)$.

Il piano avrà equazione $ax+by+cz+d=0$ che dovrà verificare:

- condizione di perpendicolarità con $\vec{u}$: $a+2b+c=0$;
- condizione di perpendicolarità con $\vec{v}$: $a+2b-3c=0$;
- passaggio per P: $a-2c+d=0$.

Sottraendo membro a mebro le prime due eq, ricaviamo $c=0$, e quindi: $a=-2b$; $d=2b$.

Ponendo per semplicità $b=-1$, otteniamo l'equazione del piano cercato:

$2x-y-2=0$.

Sessione suppletiva 2016 - Quesito 6

I punti $A(3,4,1)$, $B(6,3,2)$, $C(3,0,3)$, $D(0,1,2)$ sono vertici di un quadrilatero ABCD. Si dimostri che tale quadrilatero è un parallelogramma e si controlli se esso è un rettangolo.

Svolgimento

Per mostrare che il quadrilatero ABCD è un parallelogramma possiamo utilizzare uno qualunque dei seguenti criteri:

i. lati opposti uguali: $AB=\sqrt{3^2+1^2+1^2}=\sqrt{11}$, $BC=\sqrt{3^2+3^2+1^2}=\sqrt{19}$,
$CD=\sqrt{3^2+1^2+1^2}=\sqrt{11}$ $DA=\sqrt{3^2+3^2+1^2}=\sqrt{19}$ c.v.d.

ii. lati opposti paralleli: $\vec{AB}\equiv(3,-1,1)$, $\vec{BC}\equiv(-3,-3,1)$, $\vec{CD}\equiv(-3,1,-1)$, $\vec{DA}\equiv(3,3,-1)$; tali vettori sono paralleli in quanto hanno le componenti proporzionali, con costante di proporzionalità $k=-1$ c.v.d.

iii. una sola coppia di lati opposti uguali e paralleli (combinazione delle due precedenti);

iv. diagonali che si dividono vicendevolmente a metà: $M_{AC}(3,2,2)$, $M_{BD}(3,2,2)$ c.v.d.

v. angoli opposti uguali (o angoli adiacenti allo stesso lato supplementari):

$$\cos\alpha=\frac{\vec{AB}\cdot\vec{AD}}{|AB|\cdot|AD|}=\frac{-9+3+1}{\sqrt{11}\cdot\sqrt{19}}=\frac{-5}{\sqrt{11}\cdot\sqrt{19}} \quad ; \quad \cos\gamma=\frac{\vec{CB}\cdot\vec{CD}}{|CB|\cdot|CD|}=\frac{-9+3+1}{\sqrt{11}\cdot\sqrt{19}}=\frac{-5}{\sqrt{11}\cdot\sqrt{19}} \quad ;$$

$$\cos\beta=\frac{\vec{BA}\cdot\vec{BC}}{|BA|\cdot|BC|}=\frac{9-3-1}{\sqrt{11}\cdot\sqrt{19}}=\frac{5}{\sqrt{11}\cdot\sqrt{19}} \quad ; \quad \cos\delta=\frac{\vec{DC}\cdot\vec{DA}}{|DC|\cdot|DA|}=\frac{9-3-1}{\sqrt{11}\cdot\sqrt{19}}=\frac{5}{\sqrt{11}\cdot\sqrt{19}}$$

da cui ricaviamo: $\alpha=\gamma$; $\beta=\delta$; $\alpha=180°-\beta$, etc.

Nei calcoli, fai attenzione al fatto che due vettori come $\vec{AB}$ e $\vec{BA}$ hanno componenti <u>opposte</u>.

Avendo dimostrato che ABCD è un parallelogramma, possiamo verificare se si tratta di un rettangolo utilizzando uno dei seguenti criteri:

i. uno degli angoli interni retto: falso per il punto v del calcolo precedente (è sufficiente verificare che $\vec{AB}\cdot\vec{AD}\neq 0$, senza calcolare $\cos\alpha$;

ii. diagonali uguali: $AC=\sqrt{0^2+4^2+1^2}=\sqrt{17}$; $BD=\sqrt{6^2+2^2+0^2}=2\sqrt{10}$: falso.

Quindi il parallelogramma ABCD non è un rettangolo.

Sessione suppletiva 2016 - Quesito 7

Determina la distanza tra il punto $P(2,1,1)$ e la retta *r*: $\begin{cases} x+y=z+1 \\ z=-y+1 \end{cases}$.

Svolgimento

Portiamo le equazioni della retta *r* in forma parametrica:

$$\begin{cases} x=-y+z+1 \ \Rightarrow \ x=-2y+2 \\ z=-y+1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x=-2t+2 \\ y=t \\ z=-t+1 \end{cases} .$$

Non esiste una "formula" che fornisca la distanza tra un punto ed una retta.

Determiniamo quindi l'equazione del piano π perpendicolare ad *r* e passante per P.

I vettori $\vec{v}_r$ e $\vec{v}_\pi$ associati alla retta ed al piano devono essere paralleli, per cui possiamo porre:

$\vec{v}_\pi \equiv (-2,1,-1)$ e l'equazione di π risulta del tipo: $-2x+y-z+d=0$.

Imponiamo il passaggio per P: $-4+1-1+d=0 \ \Rightarrow \ d=4$.

Quindi il piano π ha equazione: $-2x+y-z+4=0$.

Troviamo le coordinate del punto H in cui il piano π interseca la retta *r* sostituendo le eq. parametriche di *r* nell'eq. cartesiana di π:

$$-2(-2t+2)+t-(-t+1)+4=0 \ \Rightarrow \ 6t-1=0 \ \Rightarrow \ t=\frac{1}{6} \ \Rightarrow$$

$$\begin{cases} x_H=-2\cdot 1/6+2=5/3 \\ y_H=1/6 \\ z_H=-1/6+1=5/6 \end{cases} \Rightarrow \ H(\frac{5}{3},\frac{1}{6},\frac{5}{6}) .$$

La distanza di P da H è la distanza di P dalla retta *r*:

$$d(P,r)=PH=\sqrt{(2-\frac{5}{3})^2+(1-\frac{1}{6})^2+(1-\frac{5}{6})^2}=\sqrt{\frac{5}{6}} .$$

Esame America 2016 - Quesito 9

Dati i punti $A(4,14,17)$, $B(16,11,14)$, $C(16,2,23)$:

a) si dimostri che il triangolo ABC è isoscele e rettangolo;

b) quali sono le coordinate del punto D tale che ABCD sia un quadrato?

Svolgimento punto a

Calcoliamo le lunghezze dei lati:

$$AB=\sqrt{12^2+3^2+3^2}=\sqrt{162}=9\sqrt{2} \quad ;$$

$$BC=\sqrt{0^2+9^2+9^2}=\sqrt{162}=9\sqrt{2} \quad ;$$

$$AC=\sqrt{12^2+12^2+6^2}=\sqrt{324}=18 \quad .$$

Poiché $AB=BC$, il triangolo è isoscele, e poiché $AB^2+BC^2=AC^2=324$, esso è anche rettangolo in B.

In alternativa, calcoliamo le componenti dei vettori $\vec{AB}\equiv(12,-3,-3)$, $\vec{BC}\equiv(0,-9,9)$.

Il triangolo è rettangolo in quanto: $\vec{AB}\cdot\vec{BC}=12\cdot 0-3\cdot(-9)-3\cdot 9=0$.

Svolgimento punto b

Il vertice D è il simmetrico di B rispetto al punto medio M della diagonale AC.

Determiniamo perciò: $M(10,8,20)$, da cui:

$$x_D=2x_M-x_B=20-16=4 \quad , \quad y_D=2y_M-y_B=16-11=5 \quad , \quad z_D=2z_M-z_B=40-14=26 \quad .$$

Quindi il vertice D ha coordinate $D(4,5,26)$.

In maniera più laboriosa, possiamo trovare D come punto di intersezione tra la retta *r* passante per A e parallela a BC e la retta *s* passante per C e parallela ad AB:

$$r: \begin{cases} x=(x_C-x_B)t+x_A=4 \\ y=(y_C-y_B)t+y_A=-9t+14 \\ z=(z_C-z_B)t+z_A=9t+17 \end{cases} ; \quad s: \begin{cases} x=(x_B-x_A)t+x_C=12t'+16 \\ y=(y_B-y_A)t+y_C=--3t'+2 \\ z=(z_B-z_A)t+z_C=-3t'+23 \end{cases} ;$$

$$r\cap t: \begin{cases} 4=12t'+16 \\ -9t+14=-3t'+2 \\ 9t+17=-3t'+23 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} t'=-1 \\ t=1 \end{cases} \Rightarrow D(4,5,26) \text{ c.v.d.}$$

Esame America 2016 - Quesito 10

Si considerino nello spazio il punto $P(1,2,-1)$ ed il piano α di equazione $x-2y+z+4=0$.

a) Verificare che $P \in \alpha$;

b) determinare le equazioni delle superfici sferiche di raggio 6 che sono tangenti ad α in P.

Svolgimento

Il punto P appartiene al piano α in quanto le sue coordinate verificano l'eq. del piano:

$1,-4-1+4=0 \quad \textit{vera!}$

I centri delle superfici sferiche richieste dovranno trovarsi sulla retta *n* perpendicolare al piano α e passante per P, per cui i vettori $\vec{v}_n$ e $\vec{v}_\alpha$ associati alla retta ed al piano dovranno essere paralleli ed avere le componenti proporzionali (per semplicità, le prenderemo uguali):

$$n: \begin{cases} x=at+x_P=t+1 \\ y=bt+y_P=-2t-2 \\ z=ct+z_{Pt}+z_P=-t-1 \end{cases} .$$

Quindi il punto generico Q della retta *n* ha coordinate $Q(t+1,-2t+2,-t+1)$.

Imponiamo che la distanza PQ sia uguale al raggio della sfera:

$$PQ=\sqrt{t^2+(-2t)^2+(-t)^2}=6 \Rightarrow 6t^2=36 \Rightarrow t=\pm\sqrt{6} .$$

Questi sono i valori del parametro *t* per cui si ottengono i centri delle superfici sferiche cercate:

$$C_1(1+\sqrt{6},2-2\sqrt{6},-1-\sqrt{6}) \quad , \quad C_2(1-\sqrt{6},2+2\sqrt{6},-1+\sqrt{6}) .$$

Le superfici sferiche hanno quindi equazioni:

$$(x-1-\sqrt{6})^2+(y-2+2\sqrt{6})^2+(z+1+\sqrt{6})^2=6^2 \quad ;$$

$$(x-1+\sqrt{6})^2+(y-2+2\sqrt{6})^2+(z+1-\sqrt{6})^2=6^2 \quad .$$

Sessione straordinaria 2016 - Quesito 4

Dati i punti $A(2,4,-8)$ e $B(-2,4,-4)$, determinare l'equazione della superficie sferica di diametro AB e l'equazione del piano tangente alla sfera e passante per A.

Svolgimento

Il centro della sfera è il punto medio del segmento AB: $C(0,4,-6)$ ed il raggio misura:

$AC=\sqrt{2^2+0^2+2^2}=2\sqrt{2}$. Quindi l'eq. della superficie sferica è:

$x^2+(y-4)^2+(z+6)^2=(2\sqrt{2})^2 \Rightarrow x^2+y^2+z^2-8y+12z+44=0$.

Il piano tangente alla sfera e passante per A è perpendicolare al vettore $\vec{CA}\equiv(-2,0,2)$, per cui la sua eq. è del tipo: $-2x+2z+d=0$.

Troviamo il valore del parametro *d* imponendo il passaggio per A: $-4-16+d=0 \Rightarrow d=20$.

Quindi l'eq. del piano richiesto è: $-2x+2z+20=0 \Rightarrow x-z-10=0$.

Sessione straordinaria 2016 - Quesito 9

Dati i punti $A(-2,0,1)$, $B(1,1,2)$, $C(0,-1,-2)$, $D(1,1,0)$, determinare l'equazione del piano α passante per i punti A, B, C e l'equazione della retta passante per D e perpendicolare al piano α.

Svolgimento

Consideriamo l'eq. generica del piano $ax+by+cz+d=0$ e imponiamo il passaggio per A, B, C:

$$\begin{cases} -2a+c+d=0 \\ a+b+2c+d=0 \\ -b-2c+d=0 \end{cases} .$$

Sommiamo membro a membro la 2^ e la 3^ eq: $a+2d=0 \Rightarrow a=-2d$ e sostituiamo:

$$\begin{cases} a=-2d \\ 4d+c+d=0 \Rightarrow c=-5d \\ b=d-2c \Rightarrow b=d+10d=11d \end{cases} .$$

Poniamo per semplicità $d=-1$, da cui $a=2$, $b=-11$, $c=5$.

Quindi l'eq. del piano α è $2x-11y+5z-1=0$.

Le equazioni della retta passante per D e perpendicolare al piano α sono:

$$\begin{cases} x=a_\alpha t+x_D=2t+1 \\ y=b_\alpha t+y_D=-11t+1 \\ z=c_\alpha t+z_D=5t \end{cases} .$$

Sessione ordinaria 2017 - Quesito 5

Dati i punti $A(-2,3,1)$, $B(3,0,-1)$, $C(2,2,-3)$, determinare l'equazione della retta *r* passante per A e per B e l'equazione del piano π perpendicolare ad *r* e passante per C.

Svolgimento

Scegliamo i parametri direttori della retta uguali alle componenti del vettore $\vec{AB} \equiv (5,-3,-2)$ e facciamo corrispondere il punto A al valore $t=0$ del parametro.

Le eq. della retta *r* sono quindi: $\begin{cases} x=5t-2 \\ y=-3t+3 \\ z=-2t+1 \end{cases}$.

Per la condizione di perpendicolarità, i parametri del piano π saranno direttamente proporzionali (per semplicità, li prendiamo uguali) ai coefficienti direttori della retta *r*:

$5x-3y-2z+d=0$.

Determiniamo il valore del parametro *d* imponendo il passaggio per il punto C:

$10-6+6+d=0 \Rightarrow d=-10$.

L'eq. del piano π è quindi: $5x-3y-2z-10=0$

Sessione ordinaria 2017 - Quesito 7

Determinare le coordinate dei centri delle sfere di raggio $\sqrt{6}$ tangenti al piano π di equazione: $x+2y-z+1=0$ nel suo punto P di coordinate $(1,0,2)$.

Svolgimento

Troviamo le equazioni della retta *n* passante per P e perpendicolare a π:

$$\begin{cases} x=a_\pi t+x_P=t+1 \\ y=b_\pi t+y_P=2t \\ z=c_\pi t+z_P=-t+2 \end{cases} .$$

I centri delle sfere richieste appartengono alla retta *n*, e quindi hanno coordinate: $C(t+1,2t,-t+2)$.

Inoltre dovrà essere: $CP=\sqrt{6} \Rightarrow t^2+4t^2+t^2=6 \Rightarrow 6t^2=6 \Rightarrow t=\pm 1$.

Quindi i centri delle due sfere hanno coordinate: $C_1(2,2,1)$, $C_2(0,-2,3)$.

Le eq. delle sfere (non richieste) sono:

- $(x-2)^2+(y-2)^2+(z-1)^2=6 \Rightarrow x^2+y^2+z^2-4x-4y-2z-1=0$;
- $x^2+(y+2)^2+(z-3)^2=6 \Rightarrow x^2+y^2+z^2+4y-6z+7=0$.

Sessione suppletiva 2017 - Quesito 2

Determinare l'equazione della retta *r* perpendicolare nel punto $P(1,0,3)$ al piano π di equazione $3x+2y-z=0$.

Svolgimento

Per la condizione di perpendicolarità, i coefficienti direttori della retta *r* devono essere proporzionali (per semplicità, li prendiamo uguali) a quelli del piano π; inoltre, facciamo corrispondere al valore $t=0$ del parametro *t* il punto P:

$$\begin{cases} x=a_\pi t+x_P=3t+1 \\ y=b_\pi t+y_P=2t \\ z=c_\pi t+z_P=-t+3 \end{cases} .$$

Sessione suppletiva 2017 - Quesito 6

Determinare la distanza tra il punto $P(6,6,8)$ e la retta: $r: \begin{cases} x-y=2z+1 \\ z=y+1 \end{cases}$.

Svolgimento

Scriviamo l'eq. della retta *r* in forma parametrica:

$$\begin{cases} y=t \\ z=t+1 \\ x=y+2z+1=3t+3 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x=3t+3 \\ y=t \\ z=t+1 \end{cases} .$$

Scriviamo l'eq. del fascio di piani perpendicolari alla retta *r*: $3x+y+z+d=0$.

Imponiamo il passaggio per il punto P: $18+6+8+d=0 \Rightarrow d=-32$.

Quindi l'eq. del piano π passante per P e perpendicolare alla retta *r* è: $3x+y+z-32=0$.

Troviamo le coordinate del punto H in cui la retta *r* interseca il piano π:

$$3(3t+3)+t+t+1-32=0 \Rightarrow 11t=22 \Rightarrow t=2 .$$

Quindi il punto H ha coordinate: $H(9,2,3)$.

La distanza tra il punto P e la retta *r* è la distanza tra i punti P ed H:

$$PH=\sqrt{3^2+4^2+5^2}=\sqrt{50}=5\sqrt{2} .$$

Sessione straordinaria 2017 - Quesito 6

In un sistema di riferimento cartesiano il piano π di equazione $3x-4y-22=0$ è tangente ad una sfera avente come centro il punto $C(3,3,0)$. Determinare i raggio della sfera.

Svolgimento

Il raggio della sfera è la distanza tra il punto C ed il piano π:

$$r=\frac{|ax_C+by_C+cz_C+d|}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}}=\frac{|3\cdot 3-4\cdot 3-22|}{\sqrt{3^2+4^2}}=5 \quad .$$

L'eq. della sfera (non richiesta) è:

$$(x-3)^2+(y-3)^2+z^2=5^2 \;\Rightarrow\; x^2+y^2+z^2-6x-6y-7=0 \quad .$$

Sessione straordinaria 2017 - Quesito 8

Determinare l'equazione della retta *r* perpendicolare nel punto P di coordinate $(1, 1, 0)$ al piano π di equazione $2x-2y+z=0$.

Svolgimento

Il vettore $\vec{v}_r$ avente la direzione della retta *r* deve essere parallelo al vettore $\vec{v}_\pi \equiv (2, -2, 1)$ normale al piano π, per cui le eq. parametriche della retta *r* possono essere scritte:

$$\begin{cases} x = x_\pi t + x_P = 2t+1 \\ y = y_\pi t + y_P = -2t+1 \\ x = x_\pi t + x_P = t \end{cases} .$$

Sessione ordinaria 2018 - Quesito 6

Determinare l'equazione della superficie sferica *S*, con centro sulla retta

$$r: \begin{cases} x=t \\ y=t \\ z=t \end{cases} \quad t\in\mathbb{R}$$

tangente al piano $\pi: \quad 3x-y-2z+14=0$ nel punto $T(-4,0,1)$.

Svolgimento

Scriviamo le eq. parametriche della retta *n* passante per il punto T e perpendicolare al piano π:

$$n: \begin{cases} x=3u-4 \\ y=-u \\ z=-2u+1 \end{cases} \quad .$$

Il centro della sfera è il punto $C=r\cap n$:

$$\begin{cases} t=3u-4 \\ t=-u \\ t=-2u+1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} -u=3u-4 \\ t=-u \\ -u=-2u+1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} u=1 \\ t=--1 \end{cases}$$

da cui, sostituendo il valore $t=-1$ nell'eq. di *r* o il valore $u=1$ nell'eq. di *n*, ricaviamo:

$$C(-1,-1,-1) \quad .$$

Il raggio della sfera è la distanza tra il punto C ed il piano π:

$$r=d(C,\pi)=\frac{|ax_C+by_C+cz_C+d|}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}}=\frac{|-3+1+2+14|}{\sqrt{3^2+1^2+2^2}}=\sqrt{14} \quad .$$

Quindi l'eq. della superficie sferica S è:

$$(x+1)^2+(y+1)^2+(z+1)^2=14 \Rightarrow x^2+y^2+z^2+2x+2y+2z-11=0 \quad .$$

Sessione ordinaria 2018 - Quesito 9

Sono dati, nello spazio tridimensionale, i punti $A(3,1,0)$, $B(3,-1,2)$, $C(1,1,2)$. Dopo aver verificato che ABC è un triangolo equilatero e che è contenuto nel piano *a* di equazione $x+y+z-4=0$, stabilire quali sono i punti P tali che ABCP sia un tetraedro regolare.

Svolgimento

Calcoliamo le lunghezze dei lati del triangolo:

$$AB=\sqrt{0^2+2^2+2^2}=2\sqrt{2} \quad ; \quad BC=\sqrt{2^2+2^2+0^2}=2\sqrt{2} \quad ; \quad AC=\sqrt{1^2+0^2+2^2}=2\sqrt{2} \quad .$$

Poiché $AB=BC=CA$, il triangolo ABC è equilatero.

Verifichiamo che il triangolo sia contenuto nel piano *a* sostituendo le coordinate dei suoi vertici nell'eq. del piano:

- $A: \quad 3+1-4=0 \quad vero!$
- $B: \quad 3-1+2-4=0 \quad vero!$
- $C: \quad 1+1+2-4=0 \quad vero!$

Il tetraedro ABCP è regolare se le sue quattro facce sono triangoli equilateri congruenti.

Per determinare la posizione del vertice P possiamo utilizzare almeno due metodi.

Primo metodo

Il vertice $P(x,y,z)$ deve essere equidistante dai vertici A, B, C, e le distanze *PA*, *PB*, *PC* devono essere uguali alla lunghezza del lato *AB* calcolata in precedenza:

$$\begin{cases} (x-3)^2+(y-1)^2+z^2=(2\sqrt{2})^2 \;\Rightarrow\; x^2+y^2+z^2-6x-2y+2=0 \\ (x-3)^2+(y+1)^2+(z-2)^2=(2\sqrt{2})^2 \;\Rightarrow\; x^2+y^2+z^2-6x+2y-4z+6=0 \\ (x-1)^2+(y-1)^2+(z-2)^2=(2\sqrt{2})^2 \;\Rightarrow\; x^2+y^2+z^2-2x-2y-4z-2=0 \end{cases} .$$

Sottraiamo la seconda e la terza eq. dalla prima:

$$\begin{cases} x^2+y^2+z^2-6x-2y+2=0 \\ -4y+4z-4=0 \;\Rightarrow\; y=z-1 \\ -4x+4z+4=0 \;\Rightarrow\; x=z+1 \end{cases} .$$

Sostituiamo nella prima eq. le espressioni ricavate dalle altre due:

$$(z+1)^2+(z-1)^2+z^2-6(z+1)-2(z-1)+2=0 \;\Rightarrow$$

$$3z^2-8z=0 \;\Rightarrow\; z_1=0; \quad z_2=8/3 \quad .$$

Sostituendo i valori trovati per *z* nelle altre due eq, ricaviamo le due possibili posizioni del vertice P (una “sopra” ed una “sotto” il piano α):

$$P_1(1,-1,0) \qquad P_2\left(\frac{11}{3},\frac{5}{3},\frac{8}{3}\right) \quad .$$

Secondo metodo

Troviamo il baricentro G del triangolo equilatero ABC:

$$x_G=\frac{x_A+x_B+x_C}{3}=\frac{7}{3} \quad ; \quad y_G=\frac{y_A+y_B+y_C}{3}=\frac{1}{3} \quad ; \quad z_G=\frac{z_A+z_B+z_C}{3}=\frac{4}{3} \quad .$$

Quindi il baricentro ha coordinate $G(\frac{7}{3},\frac{1}{3},\frac{4}{3})$.

Il vertice P deve trovarsi sulla retta *n* perpendicolare al piano *a* e passante per G:

$$n: \quad \begin{cases} x=a_a t+x_G=t+7/3 \\ y=b_a t+y_G=t+1/3 \\ z=c_a t+z_G=t+4/3 \end{cases} \Rightarrow \ P(t+\frac{7}{3},t+\frac{1}{3},t+\frac{4}{3}) \quad .$$

Imponiamo $PA=AB$:

$$(t+\frac{7}{3}-3)^2+(t+\frac{1}{3}-1)^2+(t+\frac{4}{3})^2=(2\sqrt{2})^2 \Rightarrow$$

$$t^2-\frac{4}{3}t+\frac{4}{9}+t^2-\frac{4}{3}t+\frac{4}{9}+t^2+\frac{8}{3}t+\frac{16}{9}=8 \Rightarrow$$

$$3t^2=\frac{16}{3} \Rightarrow t^2=\frac{16}{9} \Rightarrow t=\pm\frac{4}{3} \quad .$$

Sostituendo tali valori del parametro *t* nelle eq. parametriche della retta *n*, otteniamo ancora le soluzioni P_1 e P_2 trovate in precedenza.

Sessione suppletiva 2018 - Quesito 3

Determinare l'equazione della superficie sferica di centro $C(1,-1,2)$ tangente al piano di equazione $x-y+z=10$ e le coordinate del punto di contatto tra la superficie sferica e il piano.

Svolgimento

Il raggio della superficie sferica è uguale alla distanza tra il centro C ed il piano π:

$$r=d(C,\pi)=\frac{|ax_C+by_C+cz_C+d|}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}}=\frac{|1+1+2-10|}{\sqrt{1^1+1^1+1^1}}=2\sqrt{3} \quad .$$

Quindi l'eq. della superficie sferica è:

$$(x-1)^2+(y+1)^2+(z-2)^2=(2\sqrt{3})^2 \quad \Rightarrow$$

$$x^2+y^2+z^2-2x+2y-4z-6=0 \quad .$$

Il punto di contatto tra la superficie sferica ed il piano π si trova sulla retta *n* passante per il centro C e perpendicolare al piano:

$$n: \quad \begin{cases} x=a_\pi t+x_C=t+1 \\ y=b_\pi t+y_C=-t-1 \\ z=c_\pi t+z_C=t+2 \end{cases} \quad .$$

Sostituiamo le eq. parametriche della retta *n* nell'eq. cartesiana del piano π:

$$t+1+t+1+t+2=10 \ \Rightarrow \ 3t=6 \ \Rightarrow \ t=2 \quad .$$

Quindi il punto di contatto ha coordinate $T(3,-3,4)$.

Non è invece conveniente porre a sistema l'eq. della superficie sferica con quella del piano π (provare per credere).

Sessione suppletiva 2018 - Quesito 9

Determinare il luogo geometrico dei punti $P(x, y, z)$ equidistanti dai punti $A(0,1,2)$ e $B(-3,2,0)$.

Svolgimento - primo metodo

Possiamo applicare la definizione di luogo geometrico imponendo che:

$$PA = PB \Rightarrow x^2+(y-1)^2+(z-2)^2=(x+3)^2+(y-2)^2+z^2 \Rightarrow$$

$$-2y+1-4z+4=6x+9-4y+4 \Rightarrow 3x-y+2z+4=0 \quad .$$

Osserviamo che l'eq. ottenuta è lineare, per cui rappresenta un piano.

Svolgimento - secondo metodo

Sappiamo dalla geometria sintetica che il luogo richiesto è il piano perpendicolare al segmento AB e passante per il suo punto medio M.

Ricaviamo $M(-\frac{3}{2}, \frac{3}{2}, 1)$, $\vec{AB} \equiv (-3, 1-2)$.

Per la condizione di perpendicolarità, l'eq. del piano sarà del tipo: $-3x+y-2z+d=0$.

Imponiamo la condizione di passaggio per il punto medio M:

$$\frac{9}{2}+\frac{3}{2}-2+d=0 \Rightarrow d=-4 \quad .$$

L'eq. del piano è quindi: $-3x+y-2z-4=0 \Rightarrow 3x-y+2z+4=0$.

Sessione straordinaria 2018 - Quesito 2

Determinare il raggio della sfera di centro $C(2,2,2)$ tangente al piano di equazione: $x+2y+z=12$.

Svolgimento

Il raggio è uguale alla distanza del centro C dal piano:

$$r=d(C,\pi)=\frac{|ax_C+by_C+cz_C+d|}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}}=\frac{|2+4+2-12|}{\sqrt{1^2+2^2+1^1}}=\frac{4}{\sqrt{6}}=\frac{2}{3}\sqrt{6} \quad .$$

L'eq. della sfera (non richiesta) è:

$$(x-2)^2+(y-2)^2+(z-2)^2=\frac{8}{3} \Rightarrow x^2+y^2+z^2-4x-5y-4z+\frac{28}{3}=0 \quad .$$

Sessione straordinaria 2018 - Quesito 8

Determinare le coordinate dei punti nello spazio che giacciono sulla retta *r* perpendicolare nel punto $P(1,1,1)$ al piano π di equazione $2x-y-z=0$, a distanza $d=6$ da tale piano.

Svolgimento

Il vettore normale al piano π è $\vec{v}\equiv(2,-1,-1)$, per cui le eq. parametriche della retta *r* sono:

$$r:\quad \begin{cases} x=a_v t+x_P=2t+1 \\ y=b_v t+y_P=-t+1 \\ z=c_v t+z_P=-t+1 \end{cases} \quad .$$

Quindi un punto generico della retta *r* ha coordinate $Q(2t+1,-t+1,-t+1)$.

Imponiamo che la distanza del punto Q dal piano π sia $d=6$:

$$d(Q,\pi)=\frac{|2(2t+1)-(-t+1)-(-t+1)|}{\sqrt{2^2+1^2+1^2}}=6 \;\Rightarrow\; |6t|=6\sqrt{6} \;\Rightarrow\; t=\pm\sqrt{6} \quad .$$

Esistono quindi due punti le cui coordinate verificano le condizioni richieste:

$$Q_1(2\sqrt{6}+1,-\sqrt{6}+1,-\sqrt{6}+1) \quad , \quad Q_2(-2\sqrt{6}+1,\sqrt{6}+1,\sqrt{6}+1) \quad .$$

"Esempio ministeriale" 2019 - quesito 7

Una sfera, il cui centro è il punto $K(1,0,1)$, è tangente al piano π avente equazione $x-2y+z+1=0$. Qual è il punto di tangenza? Qual è il raggio della sfera?

Svolgimento

Il raggio della sfera è la distanza del punto *K* dal piano π:

$$r=d(K,\pi)=\frac{|1\,ax_K+by_K+cz_K+d|}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}}=\frac{|1+1+1|}{\sqrt{1^2+2^2+1^2}}=\sqrt{\frac{3}{2}} \quad .$$

Determiniamo le eq. parametriche della retta *n* passante per K e perpendicolare al piano π:

$$n: \begin{cases} x=a_\pi t+x_K=t+1 \\ y=b_\pi t+y_K=-2t \\ z=c_\pi t+z_K=t+1 \end{cases} \quad .$$

Il punto di tangenza T è dato dall'intersezione della retta *n* con il piano π:

$$t+1-2(-2t)+t+1+1=0 \;\Rightarrow\; 6t=-3 \;\Rightarrow\; t=-\frac{1}{2} \quad .$$

Sostituendo nelle eq. parametriche della retta *n*, ricaviamo: $T(\frac{1}{2},1,\frac{1}{2})$.

1^ Simulazione 2019 - Quesito 5

Si consideri la superficie sferica *S* di equazione $x^2+y^2+z^2-2x+6z=0$.

Dopo aver determinato le coordinate del centro e la misura del raggio, verificare che il piano π di equazione $3x-2y+6z+1=0$ e la superficie *S* sono secanti.

Determinare il raggio della circonferenza ottenuta intersecando π e *S*.

Svolgimento

Scrivendo l'eq. della sfera nella forma $x^2+y^2+z^2+ax+by+cz+d=0$, sappiamo che le coordinate del centro ed il raggio sono:

$$C(-a/2,-b/2,-c/2)=(1,0,-3) \quad ; \quad R_S=\sqrt{x_C^2+y_C^2+z_C^2-d}=\sqrt{1^2+3^2}=\sqrt{10} \quad .$$

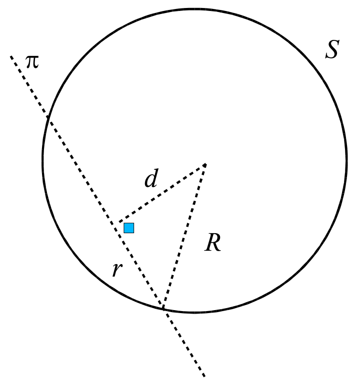
In alternativa, possiamo applicare il "completamento del quadrato":

$(x-1)^2+y^2+(z+3)^2=10$, da cui arriviamo alle stesse conclusioni.

Calcoliamo la distanza *d* del centro C dal piano π:

$$d(C,\pi)=\frac{|ax_C+by_C+cz_C+d|}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}}=\frac{|3\cdot1-2\cdot0+6\cdot(-3)+1|}{\sqrt{3^2+2^2+6^2}}=\frac{14}{7}=2 \quad .$$

Osserviamo che $d<R$, per cui il piano π e la superficie *S* sono secanti (in maniera molto più complicata, mettendo a sistema le eq. del piano e della superficie sferica, otteniamo una eq. risolvente in due incognite con discriminante $\Delta>0$, che quindi ha ∞^1 sol. reali).



Il raggio *R* della superficie sferica, la distanza *d* del centro C dal piano π ed il raggio *r* della circonferenza ottenuta intersecando π e *S* formano un triangolo rettangolo, per cui:

$$r=\sqrt{R^2-s^2}=\sqrt{10-4}=\sqrt{6} \quad .$$

2^ Simulazione 2019 - Quesito 4

Nello spazio tridimensionale, sia r la retta passante per i punti $A(-2,0,1)$ e $B(0,2,1)$. Determinare le coordinate di un punto appartenente alla retta r che sia equidistante rispetto ai punti $C(5,1,-2)$ e $D(1,3,4)$.

Svolgimento - primo metodo

Calcoliamo le componenti del vettore $\vec{AB}=\vec{v}\equiv(2,2,0)$.

Determiniamo le eq. parametriche della retta r imponendo che abbia i parametri direttori uguali alle componenti di $\vec{v}$ e che al valore del parametro $t=0$ faccia corrispondere il punto A:

$$r: \begin{cases} x=v_x t+x_A=2t-2 \\ y=v_y t+y_A=2t \\ z=v_z t+z_A=1 \end{cases} .$$

Quindi il punto generico della retta r ha coordinate $P(2t-2,2t,1)$.

Imponiamo $PC=PD \Rightarrow (2t-7)^2+(2t-1)^2+3^2=(2t-3)^2+(2t-3)^2+3^2 \Rightarrow$

$-28t+49-4t+1=-12t+9-12t+9 \Rightarrow 8t=32 \Rightarrow t=4$.

Quindi il punto appartenente alla retta r equidistante rispetto ai punti C e D è $P(6,8,1)$.

Svolgimento - secondo metodo

Il luogo dei punti dello spazio equidistanti dai punti C e D è il piano passante per il punto medio M del segmento CD e perpendicolare alla retta CD.

Calcoliamo le coordinate del punto medio e le componenti del vettore $\vec{CD}$:

$M(3,2,1)$, $\vec{CD}\equiv(-4,2,6)$.

Per la condizione di perpendicolarità, il piano avrà eq. del tipo $-4x+2y+6z+d=0$.

Imponiamo il passaggio per M: $-12+4+6+d=0 \Rightarrow d=2$.

Quindi l'eq. del piano richiesto è $-4x+2y+6z+2=0 \Rightarrow 2x-y-3z-1=0$.

Determiniamo il punto di intersezione tra la retta r ed il piano mettendo a sistema le loro eq:

$4t-4-2t-3-1=0 \Rightarrow 2t=8 \Rightarrow t=4$

da cui ritroviamo la soluzione $P(6,8,1)$.

Sessione ordinaria 2019 - Quesito 4

Dati i punti $A(2,0,-1)$ e $B(-2,2,1)$, provare che il luogo geometrico dei punti *P* dello spazio, tali che $\overline{PA}=\sqrt{2}\,\overline{PB}$ è costituito da una superficie sferica *S* e scrivere la sua equazione cartesiana. Verificare che il punto $T(-10,8,7)$ appartiene a *S* e determinare l'equazione del piano tangente in *T* a *S*.

Svolgimento

Poniamo $P(x,y,z)$ ed imponiamo la condizione del testo:

$$\overline{PA}=\sqrt{2}\,\overline{PB} \Rightarrow (x-2)^2+y^2+(z+1)^2=2[(x+2)^2+(y-2)^2+(z-1)^2] \Rightarrow$$

$$x^2-4x+4+y^2+z^2+2z+1=2x^2+8x+8+2y^2-8y+8+2z^2-4z+2 \Rightarrow$$

$$x^2+y^2+z^2+12x-8y-6z+13=0 \quad .$$

Dal momento che l'eq. è della forma $x^2+y^2+z^2+ax+by+cz+d=0$, essa descrive una superficie sferica *S* che ha centro e raggio:

$$C(-a/2,-b/2,-c/2)=(-6,4,3) \quad ;$$

$$R_S=\sqrt{x_C^2+y_C^2+z_C^2-d}=\sqrt{6^2+4^2+3^2-13}=\sqrt{48}=4\sqrt{3} \quad .$$

In alternativa, possiamo applicare il "completamento del quadrato":

$(x+6)^2+(y-4)^2+(z-3)^2=48$, da cui arriviamo alle stesse conclusioni.

Il punto $T(-10,8,7)$ appartiene ad *S* in quanto le sue coordinate ne verificano l'eq:

$$10^2+8^2+7^2+12\cdot(-10)-8\cdot 8-6\cdot 7+13=0 \Rightarrow 226-226=0 \ \ \textit{vera!}$$

Il vettore $\vec{v}=\vec{CT}$ ha componenti $\vec{v}\equiv(-4,4,4)$.

Per la condizione di perpendicolarità, il piano π tangente in *T* a *S* ha parametri direttori proporzionali a quelli di $\vec{v}$; per semplicità, scriviamo il vettore $\vec{u}$ normale a π come $\vec{u}\equiv(-1,1,1)$; quindi l'eq. di π è del tipo $-x+y+z+d=0$.

Imponiamo il passaggio per T: $10+8+7+d=0 \Rightarrow d=-25$.

Pertanto l'eq. del piano π è: $-x+y+z-25=0 \Rightarrow x-y-z+25=0$.

Sessione suppletiva 2019 - Quesito 4

Considerati i punti $A(2,3,6)$, $B(6,2,-3)$, $C(3,-6,2)$ nello spazio tridimensionale, verificare che i segmenti OA, OB, OC (dove il punto O indica l'origine degli assi) costituiscono tre spigoli di un cubo.

Determinare il centro e il raggio della sfera *S* circoscritta a tale cubo.

Svolgimento

Verifichiamo che $OA=OB=OC$:

$$OA=\sqrt{2^2+3^3+6^2}=7 \quad ; \quad OB=\sqrt{6^2+2^2+3^2}=7 \quad ; \quad OC=\sqrt{3^2+6^2+2^2}=7 \quad .$$

Verifichiamo che le rette OA, OB, OC sono a due a due perpendicolari:

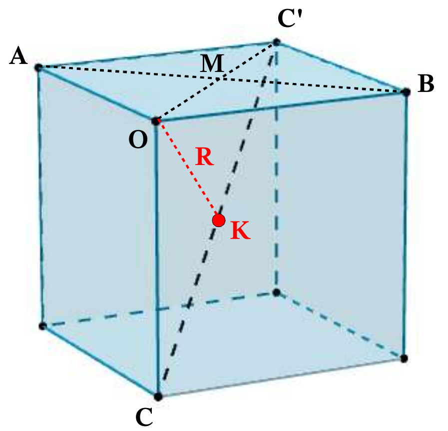
$$\vec{OA}\cdot\vec{OB}=2\cdot 6+3\cdot 2+6\cdot(-3)=0 \quad ;$$

$$\vec{OB}\cdot\vec{OC}=6\cdot 3+2\cdot(-6)+(-3)\cdot 2=0 \quad ;$$

$$\vec{OC}\cdot\vec{OA}=3\cdot 2+(-6)\cdot 3+2\cdot 6=0 \quad .$$

Quindi i segmenti OA, OB, OC possono costituire tre spigoli di un cubo (scegliendo in maniera opportuna i quattro vertici mancanti).

Determiniamo centro e raggio della sfera circoscritta.



Primo metodo

Utilizziamo le simmetrie della figura:

- troviamo il punto medio del segmento AB:

  $$M(4,5/2,3/2) \quad ;$$

- troviamo il simmetrico C' dell'origine O rispetto ad M:

  $$\begin{cases} x'=2x_M-x_O=8 \\ y'=2y_M-y_O=5 \\ z'=2z_M-z_O=3 \end{cases} \Rightarrow C'(8,5,3) \quad .$$

Il centro della sfera circoscritta è il punto medio della diagonale CC':

$$K(11/2,-1/2,5/2)$$

ed il raggio è la distanza tra il centro K ed uno dei vertici:

$$R=KO=\sqrt{\left(\frac{11}{2}\right)^2+\left(\frac{1}{2}\right)^2+\left(\frac{5}{2}\right)^2}=\sqrt{\frac{147}{4}}=\frac{7}{2}\sqrt{3} \quad .$$

L'eq. della sfera circoscritta (non richiesta) è $\left(x-\frac{11}{2}\right)^2+\left(y+\frac{1}{2}\right)^2+\left(z-\frac{5}{2}\right)^2=\frac{147}{4}$.

Secondo metodo

- Scriviamo le componenti dei vettori $\vec{v}=\vec{OA}\equiv(2,3,6)$, $\vec{w}=\vec{OB}\equiv(6,2,-3)$.
- Determiniamo le eq. della retta *r* passante per A e parallela ad OB:

$$r: \begin{cases} x=a_w t+x_A=6t+2 \\ y=b_w t+y_A=2t+3 \\ z=c_w t+z_A=-3t+6 \end{cases} .$$

- Determiniamo le eq. della retta *s* passante per B e parallela ad OA:

$$s: \begin{cases} x=a_v u+x_B=2u+6 \\ y=b_v u+y_B=3u+2 \\ z=c_v u+z_B=6u-3 \end{cases} .$$

- Troviamo C' come punto di intersezione delle rette *r* ed *s*:

$$s: \begin{cases} 6t+2=2u+6 \;\Rightarrow\; u=3t-2 \\ 2t+3=3u+2 \;\Rightarrow\; 2t+3=9t-6+2 \;\Rightarrow\; 7t=7 \\ -3t+6=6u-3 \;\Rightarrow\; -3t+6=18t-12-3 \;\Rightarrow\; 21t=21 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} t=1 \\ u=1 \end{cases} \Rightarrow C'(8,5,3) .$$

Quindi si prosegue come nel primo metodo.

Terzo metodo

Scriviamo l'eq. della sfera generica $x^2+y^2+z^2+ax+by+cz+d=0$ e imponiamo il passaggio per i punti O, A, B, C:

$$\begin{cases} d=0 \\ 4+9+36+2a+3b+6c+d=0 \\ 36+4+9+6a+2b-3c+d=0 \\ 9+36+4+3a-6b+2c+d=0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a=-11 \\ b=1 \\ c=-5 \\ d=0 \end{cases} .$$

Quindi la sfera circoscritta al cubo ha eq. $x^2+y^2+z^2-11x+y-5z=0$.

Ricaviamo centro e raggio della sfera:

$K(-a/2,-b/2,-c/2)=(11/2,-1/2,5/2)$;

$$R_S=\sqrt{x_K^2+y_K^2+z_K^2-d}=\sqrt{(\frac{11}{2})^2+(\frac{1}{2})^2+(\frac{5}{2})^2}=\sqrt{\frac{147}{4}}=\frac{7}{2}\sqrt{3} .$$

In alternativa, possiamo applicare il “completamento del quadrato”:

$(x-\frac{11}{2})^2+(y+\frac{1}{2})^2+(z-\frac{5}{2})^2=\frac{147}{4}$, da cui arriviamo alle stesse conclusioni.

Sessione straordinaria 2019 - Quesito 4

Dopo aver verificato che il punto $T(1,0,1)$ appartiene al piano $\pi: \ x-2y+2z=3$, determinare l'equazione della superficie sferica passante per il punto $P(1,0,5)$ e tangente in *T* al piano π.

Svolgimento

Il punto T appartiene al piano π in quanto le sue coordinate ne verificano l'eq:

$$2-3\cdot 0+2=3 \qquad vero!$$

Il centro C della sfera si trova sulla retta *n* passante per T e perpendicolare a π:

$$n: \ \begin{cases} x=a_\pi t+x_T=t+1 \\ y=b_\pi t+y_T=-2t \\ z=c_\pi t+z_T=2t+1 \end{cases} \quad .$$

Quindi le coordinate del centro sono della forma $C(t+1\,,-2t\,,2t+1)$.

Se C è il centro della sfera, è equidistante da tutti punti della superficie:

$$CT=CP \ \Rightarrow \ t^2+(-2t)^2+(2t)^2=t^2+(-2t)^2+(2t-4)^2 \ \Rightarrow \ -16t+16=0 \ \Rightarrow \ t=1 \quad .$$

Quindi la sfera ha centro $C(2\,,-2\,,3)$ e raggio $R=CT=\sqrt{1^2+2^2+2^2}=3$.

L'eq. della superficie sferica è pertanto:

$$(x-2)^2+(y+2)^2+(z-3)^2=3^2 \ \Rightarrow \ x^2+y^2+z^2-4x+4y-6z+8=0 \quad .$$

In alternativa, per determinare le coordinate del centro C, avremmo potuto:

- trovare il punto medio M del segmento PT: $M(1\,,0\,,3)$;
- calcolare le componenti del vettore $\vec{PT}\equiv(0\,,0\,,4)$;
- determinare l'eq. del piano α passante per M e perpendicolare a $\vec{PT}$:

  $\alpha: \quad z+d=0 \ \Rightarrow \ z=3$;
- mettere a sistema le eq. parametriche della retta *n* con quella del piano α:

  $2t+1=3 \ \Rightarrow \ t=1$

da cui si ottiene lo stesso risultato trovato in precedenza.

Sessione ordinaria 2023 - Quesito 3

Considerata la retta *r* passante per i due punti $A(1,-2,0)$ e $B(2,3,-1)$, determinare l'eq. cartesiana della superficie sferica di centro $C(1,-6,7)$ e tangente ad *r*.

Svolgimento

La direzione della retta *r* è determinata dal vettore $\vec{v}=\vec{AB}\equiv(1,5,-1)$.

Le eq. parametriche della retta *r* sono:

$$r: \begin{cases} x=a_V t+x_A=t+1 \\ y=b_V t+y_A=5t-2 \\ z=c_V t+z_A=-t \end{cases} .$$

L'eq. di un piano π passante per C e perpendicolare ad *r* è della forma: $x+5y-z+d=0$.

Imponiamo il passaggio per C: $1-30-7+d=0 \Rightarrow d=36$.

Quindi il piano π ha eq: $x+5y-z+36=0$.

Determiniamo le coordinate del punto T di intersezione tra il piano π e la retta *r*:

$$t+1+5(5t-2)+t+36=0 \Rightarrow 27t=-27 \Rightarrow t=-1 .$$

Quindi il punto T ha coordinate $T(0,-7,1)$.

Il raggio della superficie sferica è la distanza CT:

$$R=CT=\sqrt{1^2+1^2+6^2}=\sqrt{38} .$$

Quindi l'eq. della superficie sferica di centro C e tangente ad *r* è:

$$(x-1)^2+(y+6)^2+(z-7)^2=38 \Rightarrow x^2+y^2+z^2-2x+12y-14z+48=0 .$$

In alternativa, utilizzando gli strumenti dell'analisi matematica del quinto anno, potremmo scrivere le coordinate del punto generico della retta *r*: $P(t+1,5t-2,-t)$, definire la funzione $f(t)$ che esprime la distanza PC (o, meglio, $\overline{PC}^2$) in funzione del parametro *t*, ed infine calcolare il minimo di tale funzione.

Sessione suppletiva 2023 - Quesito 3

Determinare le equazioni delle superfici sferiche di raggio $r=5\sqrt{2}$ tangenti nel punto $P(-1,2,3)$ al piano π di equazione $3x+4y-5z+10=0$.

Svolgimento

Determiniamo le eq. parametriche della retta *n* passante per P e perpendicolare al piano π:

$$n: \begin{cases} x=a_{\pi}t+x_P=3t-1 \\ y=b_{\pi}t+y_P=4t+2 \\ z=c_{\pi}t+z_P=-5t+3 \end{cases} \quad .$$

Quindi i centri delle superfici sferiche, dovendosi trovare sulla retta *n*, avranno coordinate della forma $C(3t-1,4t+2,-5t+3)$.

Imponiamo la condizione sul raggio:

$$CP=r \;\Rightarrow\; (3t)^2+(4t)^2+(5t)^2=(5\sqrt{2})^2 \;\Rightarrow\; 50t^2=50 \;\Rightarrow\; t=\pm 1 \quad .$$

Abbiamo pertanto due possibili posizioni del centro (una “sopra” ed una “sotto” il piano π:

$$C_1(2,6,-2) \;;\; C_2(-4,-2,8) \quad .$$

Quindi le eq. delle superficie sferiche sono:

- $(x-2)^2+(y-6)^2+(z+2)^2=(5\sqrt{2})^2 \;\Rightarrow\; x^2+y^2+z^2-4x-12y+4z-6=0$;
- $(x+4)^2+(y+2)^2+(z-8)^2=(5\sqrt{2})^2 \;\Rightarrow\; x^2+y^2+z^2+8x+4y-16z+34=0$.

Sessione straordinaria 2023 - Quesito 3

Assegnate le rette $r: \begin{cases} x=1+t \\ y=t \\ z=1+4t \end{cases}$, $s: \begin{cases} x=1 \\ 2y-z=3 \end{cases}$ con t parametro reale, determinare l'equazione cartesiana del piano π contenente *r* e parallelo ad *s*.

Svolgimento

Scriviamo le eq. della retta *s* in forma parametrica: $s: \begin{cases} x=1 \\ y=u \\ z=2u-3 \end{cases}$.

Il piano π è parallelo alla retta *s* se i rispettivi vettori associati sono perpendicolari.

Scrivendo l'eq. di π nella forma $ax+by+cz+d=0$, avremo:

$\vec{v}_\pi \equiv (a,b,c)$, $\vec{w}_r \equiv (0,1,2)$,

da cui: $\vec{v}_\pi \cdot \vec{w}_r = a\cdot 0 + b\cdot 1 + c\cdot 2 = b+2c=0$.

Per imporre che il piano π contenga la retta *r*, potremmo sostituire le eq. di *r* in quella di π:

$a(1+t)+bt+c(1+4t)+d=0 \Rightarrow a+c+d+t(a+b+4c)=0$.

Poiché questa uguaglianza deve essere vera <u>per ogni valore del parametro *t*</u>, allora devono annullarsi separatamente il termine noto ed il coefficiente del termine di primo grado in *t*:

$a+c+d=0 \quad \wedge \quad a+b+4c=0$

(per i matematici, stiamo applicando il *principio di identità dei polinomi*).

Mettiamo a sistema le tre condizioni trovate:

$$\begin{cases} b+2c=0 \\ a+c+d=0 \\ a+b+4c=0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} b=-2c \\ a=-2c \\ d=c \end{cases} .$$

Ponendo $c=-1$, ricaviamo l'eq. del piano π: $2x+2y-z-1=0$.

In alternativa, avremmo potuto assegnare al parametro *t* due valori arbitrari, ad esempio $t=0$ e $t=1$, ricavando i punti $A(1,0,1)$ e $B(2,1,5)$ appartenenti alla retta *r*, ed imporre al piano π le condizioni di passaggio per A e per B e quella di parallelismo alla retta *s*.