Rette e vettori nel piano

Perché questo ripasso?

L'argomento che vogliamo trattare riguarda la geometria analitica dello spazio, mentre queste prime pagine riprendono la geometria analitica lineare del piano, trattata in terza

D'altra parte, quando in classe viene presentato questo tema, gli studenti hanno (non del tutto a torto) l'impressione che l'impostazione del discorso sia molto diversa e più astratta rispetto a quella presentata in precedenza.

Per questo motivo, dedichiamo qualche pagina a riprendere il “vecchio” argomento, ma trattandolo in una maniera un po' diversa rispetto a quella utilizzata in precedenza, sia per l'uso della notazione vettoriale che per la preferenza verso la forma implicita dell'equazione della retta.

La speranza è che questa introduzione, pur non eliminando del tutto le difficoltà (che sono legate soprattutto al fatto che nello spazio abbiamo a che fare sia con le rette che con i piani), possa rendere meno astruso e lievemente più familiare l'argomento centrale di questi appunti.

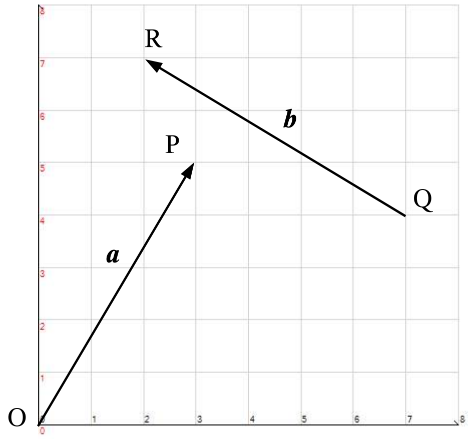
Vettori applicati

In genere ci occuperemo di <u>vettori applicati nell'origine degli assi</u>, ovvero la cui “coda” coincide con l'origine.

Questo sarà il caso che incontreremo più di frequente, per cui, tranne diversa indicazione, lo considereremo sottinteso.

In questo caso, le componenti del vettore coincidono con le coordinate della “punta” P del vettore:

$\vec{a} \equiv (a_x, a_y) \equiv (x_P, y_P)$.



Se, invece, il vettore ha un <u>diverso punto di applicazione</u>, ovvero ha la “coda” in un punto $Q(x_Q, y_Q)$ e la “punta” in un punto $R(x_R, y_R)$, allora le coordinate del vettore sono date dalle differenze delle coordinate dei due punti:

$\vec{b} \equiv (b_x, b_y) \equiv (x_R - x_Q, y_R - y_Q)$.

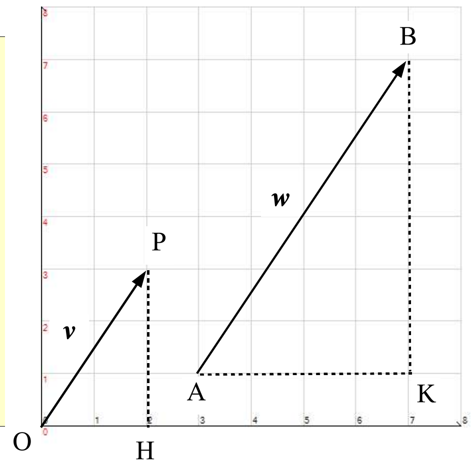
Esempio: i vettori in figura hanno componenti $\vec{v} \equiv (3, 5)$, $\vec{w} \equiv (-5, 3)$.

Condizione di parallelismo tra vettori

Due vettori $\vec{v}$ e $\vec{w}$ sono <u>paralleli</u> se le loro componenti sono proporzionali, ovvero se esiste un numero reale k tale che: $v_x = k\,w_x$, $v_y = k\,w_y$.

Se le componenti di un dei due (ad esempio $\vec{w}$) sono tutte diverse da zero, possiamo anche scrivere:

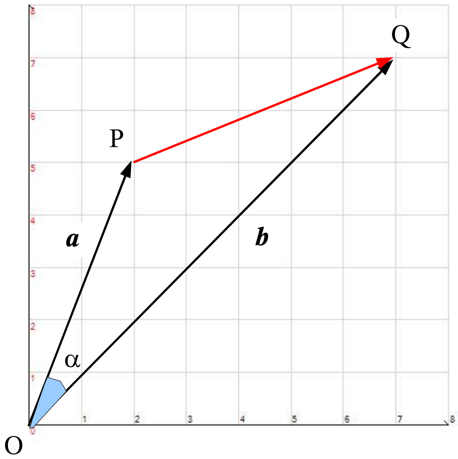
$\frac{v_x}{w_x} = \frac{v_y}{w_y} = k$.



Dimostrazione. E' sufficiente osservare che i triangoli OPH e ABK sono simili per il primo criterio, in quanto hanno due coppie di lati proporzionali (OH con AK e PH con BK) e gli angoli compresi uguali in quanto retti. Di conseguenza gli angoli in O ed in A sono uguali c.v.d.

Osserviamo che, se $k < 0$, allora i due vettori hanno stessa direzione, ma verso opposto.

Angolo tra due vettori nel piano



Calcoliamo l'ampiezza dell'angolo α compreso tra i vettori

$\vec{a} \equiv (a_x, a_y)$ e $\vec{b} \equiv (b_x, b_y)$.

Applichiamo il teorema di Carnot al triangolo OPQ:

$PQ^2 = OP^2 + OQ^2 - 2\, OP \cdot OQ \cos\alpha$.

Svolgiamo il primo membro applicando la formula della distanza tra due punti:

$(b_x - a_x)^2 + (b_y - a_y)^2 = b_x^2 - 2\, a_x b_x + a_x^2 + b_y^2 - 2\, a_y b_y + b_y^2$.

Svolgiamo in maniera analoga il secondo membro: $a_x^2 + a_y^2 + b_x^2 + b_y^1 - 2|a||b|\cos\alpha$.

"Mandiamo via" i termini che compaiono in entrambi i membri e ricaviamo $\cos\alpha$:

$$\cos\alpha = \frac{a_x b_x + a_y b_y}{|a||b|}$$

da cui possiamo ricavare l'ampiezza dell'angolo.

Ricordando la definizione di prodotto scalare tra vettori: $\vec{a} \cdot \vec{b} = |a||b|\cos\alpha$, possiamo ricavare: $\cos\alpha = \dfrac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{|a||b|}$.

Per confronto con il risultato precedente, abbiamo: $\vec{a} \cdot \vec{b} = a_x b_x + a_y b_y$.

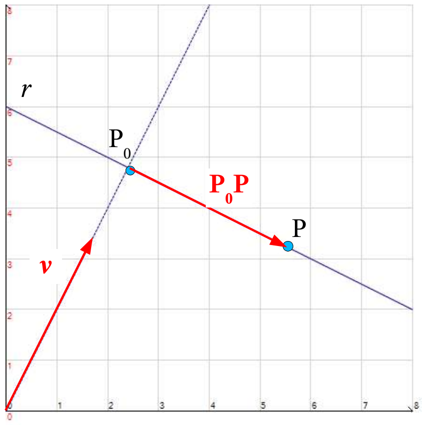
Questa è la formula che esprime il prodotto scalare di due vettori in funzione delle loro componenti.

Condizione di perpendicolarità tra vettori nel piano

Due vettori sono <u>perpendicolari</u> quando l'angolo α tra di essi misura 90°, da cui:

$$\cos 90° = \frac{a_x b_x + a_y b_y}{|a||b|} = 0 \Rightarrow a_x b_x + a_y b_y = 0 \Rightarrow \vec{a} \cdot \vec{b} = 0 .$$

Equazione della retta nel piano



Consideriamo un vettore $\vec{v} \equiv (a, b)$ (che per semplicità consideriam applicato nell'origine) ed un punto $P_0(x_0, y_0)$ sulla retta di applicazione di $\vec{v}$.

Vogliamo determinare l'equazione della retta *r* passante per P_0 e perpendicolare a $\vec{v}$.

Consideriamo un punto generico $P(x, y)$ sulla retta *r* ed imponiamo la condizione di perpendicolarità tra i vettori $\vec{v}$ e $\overrightarrow{P_0P} \equiv (x - x_0, y - y_0)$:

$$a(x - x_0) + b(y - y_0) = 0 \ \Rightarrow \ ax + bx - ax_0 - by_0 = 0 \ .$$

Vediamo quindi che:

- una retta generica è rappresentata da una equazione lineare nelle variabili *x* e *y*, del tipo: $ax + by + c = 0$;
- <u>i coefficienti a e b delle variabili nell'equazione</u> $ax + by + c = 0$ <u>della retta in forma implicita rappresentano le coordinate di un vettore</u> $\vec{v} \equiv (a, b)$ <u>perpendicolare alla retta stessa</u>.

Questa non è una novità, in quanto, portando l'equazione $ax + by + c = 0$ in forma implicita, ricaviamo:

$$y = -\frac{a}{b}x - \frac{c}{b}$$

con coefficiente angolare $m_r = -\frac{a}{b}$, mentre il vettore ha un "coefficiente angolare" $m_v = \frac{b}{a}$.

E' immediato verificare che la retta *r* ed il vettore $\vec{v}$ sono perpendicolari in quanto hanno i coefficienti angolari opposti e reciproci l'uno dell'altro, ovvero perché $m_r \cdot m_v = -1$.

Esempi

- la retta *r* di equazione $3x - 2y + 1 = 0$ è perpendicolare al vettore $\vec{v}_r \equiv (3, -2)$;
- la retta *s* di equazione $x + 2y = 0$ è perpendicolare al vettore $\vec{v}_s \equiv (1, 2)$;
- la retta di equazione $x = 0$ (asse *y*) è perpendicolare al vettore $\vec{i} \equiv (1, 0)$ (versore dell'asse *x*);
- la retta di equazione $y = 0$ (asse *x*) è perpendicolare al vettore $\vec{j} \equiv (0, 1)$ (versore dell'asse *y*).

La corrispondenza tra la retta *r* ed il vettore $\vec{v}_r$ ad essa perpendicolare non è biunivoca. Infatti:

- data la retta *r* di equazione $ax + by + c = 0$, il vettore $\vec{v} \equiv (a, b)$ non è l'unico ad essa perpendicolare, ma lo sono anche tutti i vettori del tipo $k\vec{v} \equiv (ka, kb)$ con $k \in \mathbb{R}$;
- dato il vettore $\vec{v} \equiv (a, b)$, esistono infinite rette ad esso perpendicolari, e tali rette si ottengono facendo variare il parametro *c* nell'equazione $ax + by + c = 0$.

Retta per due punti

Osserviamo che l'equazione generica della retta in forma implicita $ax+by+c=0$ non dipende dai valori dei tre parametri *a*, *b*, *c*, ma soltanto dai loro due rapporti.

Infatti, moltiplicando o dividendo tale equazione per un numero reale *k*, otteniamo un'equazione equivalente, per cui le equazioni $ax+by+c=0$ e $kax+kby+kc=0$ descrivono la stessa retta.

In pratica, quando determiniamo l'equazione di una retta in forma implicita, possiamo scegliere liberamente il valore di uno dei tre parametri *a*, *b*, *c*.

Esempio

Vogliamo determinare l'equazione della retta passante per i punti $A(-1,-7)$, $B(2,-1)$.

Sostituiamo le coordinate dei punti nell'equazione generica della retta $ax+by+c=0$:

$$\begin{cases} -a-7b+c=0 \\ 2a-b+c=0 \end{cases} .$$

Abbiamo ottenuto un sistema lineare di due equazioni nelle tre incognite *a*, *b*, *c*, che in generale non è determinato. Quindi esprimiamo due delle incognite in funzione della terza:

$$\begin{cases} c=a+7b \\ 2a-b+a+7b=0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} c=a+7b \\ 3a+6b=0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a=-2b \\ c=5b \end{cases} .$$

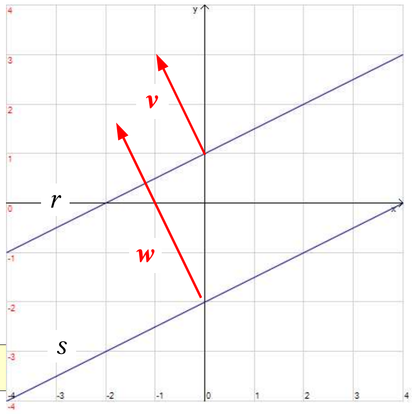
A questo punto scegliamo un valore arbitrario per *b*, ad esempio $b=-1$, e ricaviamo:

$$\begin{cases} a=2 \\ c=-5 \end{cases} .$$

Di conseguenza, la retta AB ha equazione in forma implicita $2x-y-5=0$.

Se avessimo scelto un diverso valore per il parametro *b*, avremmo ottenuto un'equazione diversa, ma equivalente a quella che abbiamo ricavato, che quindi rappresenta la stessa retta.

Parallelismo tra rette



Due rette *r* ed *s*, aventi rispettivamente equazioni $ax+by+c=0$ e $a'x+b'y+c'=0$, sono parallele se e soltanto se sono paralleli i vettori $\vec{v}\equiv(a,b)$ e $\vec{w}\equiv(a',b')$ ad esse associati.

A loro volta, i vettori $\vec{v}$ e $\vec{w}$ sono paralleli se hanno le componenti in proporzione.

Quindi: $\boldsymbol{r \parallel s \iff a=ka',\ b=kb'}$.

Osserviamo che la precedente condizione può essere riscritta:

$$k=\frac{a}{a'}=\frac{b}{b'} \Rightarrow -\frac{a}{b}=-\frac{a'}{b'} \Rightarrow m_r=m_s$$

e quindi coincide con la "vecchia" condizione di parallelismo tra rette la cui equazione è scritta in forma esplicita.

Esempio 1

Le rette *r* ed *s* di equazioni $2x-y+3=0$ e $4x-2y-1=0$ sono parallele.

Infatti, i vettori $\vec{v}\equiv(2,-1)$ e $\vec{w}\equiv(4,-2)$ che sono ad esse rispettivamente perpendicolari hanno le componenti in proporzione (con $k=2$).

Esempio 2

Dati la retta *r* di equazione $2x-y+3=0$ ed il punto $P(1,-2)$, cerchiamo l'equazione della retta *s* passante per P e parallela ad *r*.

Osserviamo che P è esterno ad *r*, perché le sue coordinate non verificano l'equazione della retta.

Il vettore normale alla retta *r* ha componenti $\vec{v}\equiv(2,-1)$, per cui il vettore normale alla retta *s* dovrà, per la condizione di parallelismo, avere componenti $\vec{w}\equiv(2k,-k)$.

In genere a questo punto conviene porre subito $k=1$.

L'equazione di *s* sarà quindi del tipo: $2kx-ky+c=0$.

Imponiamo il passaggio per il punto P: $2k+2k+c=0 \Rightarrow c=-4k$.

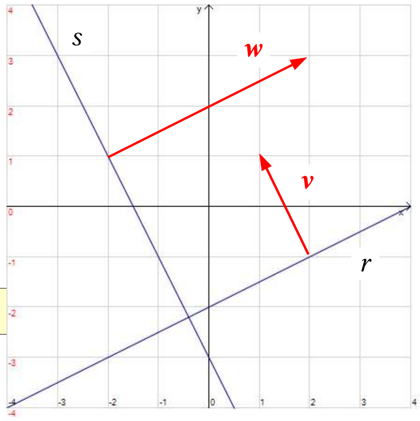
Poniamo per semplicità $k=1$ (se non l'abbiamo già fatto prima), e ricaviamo:

$a=2,\ b=-1,\ c=-4$.

L'equazione della retta *s* è quindi: $2x-y-4=0$.

Come al solito, scegliendo un diverso valore per il parametro *k*, otterremmo un'equazione diversa, ma equivalente a quella trovata.

Perpendicolarità tra rette



Due rette *r* ed *s*, aventi rispettivamente equazioni $ax+by+c=0$ e $a'x+b'y+c'=0$, sono perpendicolari se anche i vettori $\vec{v}\equiv(a,b)$ e $\vec{w}\equiv(a',b')$ ad esse associati sono perpendicolari tra di loro.

Quindi: $\boldsymbol{r \perp s \Leftrightarrow \vec{v}\cdot\vec{w}=aa'+bb'=0}$.

Osserviamo che la precedente condizione può essere riscritta:

$$\frac{a}{b}=-\frac{b'}{a'} \Rightarrow m_r=-\frac{1}{m_s}$$

e quindi coincide con la "vecchia" condizione di perpendicolarità tra rette la cui equazione è scritta in forma esplicita.

Esempio 1

Le rette *r* ed *s* di equazioni $2x-y+3=0$ e $x+2y-1=0$ sono perpendicolari.

Infatti, i vettori $\vec{v}\equiv(2,-1)$ e $\vec{w}\equiv(1,2)$ che sono ad esse rispettivamente perpendicolari hanno le componenti tali che: $\vec{v}\cdot\vec{w}=a\cdot a'+b\cdot b'=2-2=0$.

Esempio 2

Dati la retta *r* di equazione $2x-y+3=0$ ed il punto $P(1,-2)$, cerchiamo l'equazione della retta *s* passante per P e perpendicolare ad *r*.

Osserviamo che P è esterno ad *r*, perché le sue coordinate non verificano l'equazione della retta.

Il vettore normale alla retta *r* ha componenti $\vec{v}\equiv(2,-1)$, per cui il vettore normale alla retta *s* dovrà, per la condizione di perpendicolarità, avere componenti $\vec{w}\equiv(a',b')$ tali che:

$\vec{v}\cdot\vec{w}=2a'-b'=0 \Rightarrow b'=2a'$.

Qui dovrebbe essere possibile "lasciar cadere" gli apici senza paura di fare confusione.

L'equazione di *s* sarà quindi del tipo: $a'x+2a'y+c'=0$.

Imponiamo il passaggio per il punto P: $a'-4a'+c'=0 \Rightarrow c'=3a'$.

Ponendo per semplicità $a'=1$, ricaviamo $b'=2,\ c'=3$.

L'equazione della retta *s* è quindi: $x+2y+3=0$.

Come al solito, scegliendo un diverso valore per il parametro *a*', otterremmo un'equazione diversa, ma equivalente a quella trovata.

Qui terminiamo il ripasso ed accenniamo all'argomento "nuovo".

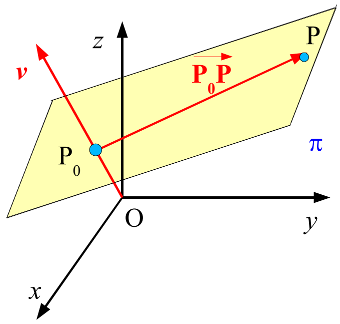
Piano e sua equazione (par. 3 pag. 1276)

Equazione generale del piano

Provo a svolgere in maniera più dettagliata il ragionamento del libro di testo.

Il calcolo è analogo a quello in cui abbiamo trovato l'equazione di una retta nel piano, con una differenza molto importante (che andrebbe dimostrata):

> Data una retta *r*, e dato un punto P_0 appartenente ad *r*, nello spazio esistono <u>infinite</u> rette perpendicolari ad *r* e passanti per P_0, ed esse formano un <u>piano</u>.



Prendiamo quindi un vettore $\vec{v} \equiv (a,b,c)$ (che per semplicità consideriamo applicato nell'origine) ed un punto $P_0(x_0, y_0, z_0)$ sulla retta di applicazione di $\vec{v}$.

Vogliamo determinare l'equazione del piano π passante per P_0 e perpendicolare a $\vec{v}$.

Consideriamo un punto generico $P(x,y,z)$ sul piano π ed imponiamo la condizione di perpendicolarità tra i vettori $\overrightarrow{P_0P} \equiv (x-x_0, y-y_0, z-z_0)$ e $\vec{v}$:

$$a(x-x_0)+b(y-y_0)+c(z-z_0)=0 \Rightarrow ax+bx+cz-ax_0-by_0-cz_0=0 \quad .$$

Vediamo quindi che:

> - nello spazio, una <u>equazione lineare</u> nelle variabili *x*, *y*, *z* del tipo $ax+by+cz+d=0$ <u>non</u> rappresenta una retta, come potremmo pensare, ma un <u>piano</u>;
> - <u>i coefficienti *a*, *b*, *c* delle variabili in tale equazione rappresentano le componenti di un vettore</u> $\vec{v} \equiv (a,b,c)$ <u>perpendicolare al piano stesso</u>.

Esempi e casi particolari:

- Il piano α di equazione $2x-y+z+3=0$ è perpendicolare al vettore $\vec{v} \equiv (2,-1,1)$.
- I piani di equazioni $x-2=0$, $3-2y=0$, $z=0$ sono rispettivamente perpendicolari ai vettori $\vec{i} \equiv (1,0,0)$, $-2\vec{j} \equiv (0,-2,0)$, $\vec{k} \equiv (0,0,1)$, e quindi sono rispettivamente paralleli al piano *yz*, al piano *xz* ed al piano *xy* (in quest'ultimo caso, il piano definito dall'equazione è proprio coincidente con il piano *xy*).
- I piani di equazioni $x+y+1=0$, $y-z-2=0$, $z-x=0$ sono rispettivamente perpendicolari ai vettori $\vec{v}_1 \equiv (1,1,0)$, $\vec{v}_2 \equiv (0,1,-1)$, $\vec{v}_3 \equiv (-1,0,1)$.

  Di conseguenza, tali piani sono rispettivamente paralleli agli assi *z*, *x*, *y* (ovvero rispettivamente perpendicolari al piano *yz*, al piano *xz* ed al piano *xy*).

Osservazione. La corrispondenza tra il piano π ed il vettore $\vec{v}$ ad esso perpendicolare non è univoca in nessuno dei due sensi. Infatti:

- Dato il piano π di equazione $ax+by+cz+d=0$, il vettore $\vec{v}\equiv(a,b,c)$ non è l'unico ad esso perpendicolare, ma lo sono anche tutti i vettori del tipo $k\vec{v}\equiv(ka,kb,kc)$ con $k\in\mathbb{R}$.

  Infatti, tali vettori hanno stessa direzione di $\vec{v}$ e ne differiscono solo per il modulo (ed eventualmente per il verso se $k<0$).

- Dato il vettore $\vec{v}\equiv(a,b,c)$, esistono infiniti piani ad esso perpendicolari, e tali piani si ottengono facendo variare il parametro *d* nell'equazione $ax+by+cz+d=0$.

Piano per tre punti

Osserviamo che, contrariamente alle apparenze, l'equazione generica del piano nella forma implicita $ax+by+cz+d=0$ non dipende dai valori dei quattro parametri *a*, *b*, *c*, *d*, ma soltanto dai loro tre rapporti.

Infatti, moltiplicando (o dividendo) tale equazione per un numero reale *k*, dobbiamo ottenere un'equazione equivalente, per cui le equazioni $ax+by+cz+d=0$ e $kax+kby+kcz+kd=0$ dovranno descrivere lo stesso piano.

In pratica, quando determiniamo l'equazione di un piano in forma implicita, possiamo scegliere liberamente il valore di uno dei quattro parametri *a*, *b*, *c*, *d*.

Esempio

Determiniamo l'equazione del piano passante per i punti di coordinate $A(1,2,-3)$, $B(-1,1,0)$, $C(0,2,-1)$.

Sostituiamo le coordinate dei tre punti nell'equazione generica $ax+by+cz+d=0$:

- passaggio per A: $a+2b-3c+d=0$;
- passaggio per B: $-a+b+d=0$;
- passaggio per C: $2b-c+d=0$.

Risolviamo tramite il metodo di sostituzione (o di riduzione) il sistema così ottenuto, esprimendo tre dei quattro parametri in funzione del quarto.

Ad esempio, possiamo ricavare dalla seconda equazione $a=b+d$ e sostituirla nella prima (nella terza non compare il parametro *a*), ottenendo: $3b-3c+2d=0$.

Quindi ricaviamo dalla terza equazione $c=2b+d$ e sostituirla nella prima, ottenendo: $d=-3b$.

Sostituendo nelle altre due equazioni tale relazione, otteniamo: $a=-2b$ e $c=-b$.

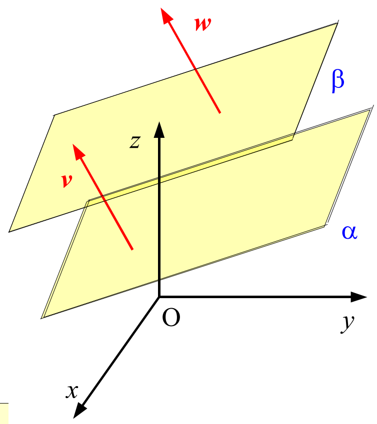
Osserviamo che, scegliendo delle sostituzioni diverse, avremmo potuto ricavare gli altri parametri in funzione di *a*, *c*, o *d*, ma il risultato finale non sarebbe cambiato.

A questo punto, scegliamo liberamente il valore del parametro *b* (purché sia diverso da zero).

Ad esempio, ponendo $b=-1$, ricaviamo $a=2$, $c=1$, $d=3$.

Il piano passante per i punti A, B, C ha quindi equazione: $2x-y+z+3=0$.

Parallelismo tra piani



Due piani α e β aventi rispettivamente equazioni $ax+by+cz+d=0$ e $a'x+b'y+c'z+d'=0$ sono paralleli se e soltanto se sono paralleli i vettori $\vec{v}\equiv(a,b,c)$ e $\vec{w}\equiv(a',b',c')$ ad essi associati.

A loro volta, i vettori $\vec{v}$ e $\vec{w}$ sono paralleli se hanno le componenti in proporzione.

Quindi: $\alpha \| \beta \Leftrightarrow \boldsymbol{a=ka', \ b=kb', \ c=kc'}$.

Esempio 1

I piani α e β di equazioni $2x-y+z+3=0$ e $4x-2y+2z-1=0$ sono paralleli.

Infatti, i vettori $\vec{v}\equiv(2,-1,1)$ e $\vec{w}\equiv(4,-2,2)$ che sono ad essi rispettivamente perpendicolari hanno le componenti in proporzione (con $k=2$).

Esempio 2

Dati il piano α di equazione $2x-y+z+3=0$ ed il punto $P(1,2,-1)$, cerchiamo l'equazione del piano β passante per P e parallelo ad α.

Osserviamo intanto che il punto P è esterno al piano α, perché le sue coordinate non verificano l'equazione del piano.

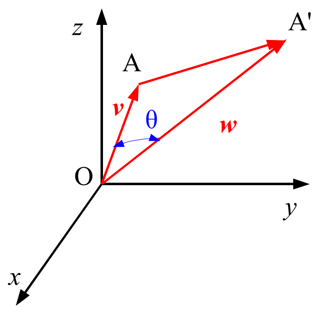
Per la condizione di parallelismo, l'equazione di β deve avere la forma: $2kx-ky+kz+d=0$.

Imponiamo il passaggio per il punto P: $2k-2k-k+d=0 \Rightarrow d=k$.

Poniamo per semplicità $k=1$ (come avremmo potuto fare subito).

L'equazione del piano β è quindi: $2x-y+z+1=0$.

Angolo tra due vettori nello spazio



Si tratta di una immediata generalizzazione del risultato trovato in precedenza per il piano.

Dati i vettori $\vec{a} \equiv (a_x, a_y, a_z)$ e $\vec{b} \equiv (b_x, b_y . b_z)$, vogliamo calcolare l'ampiezza dell'angolo α compreso tra di essi.

Applichiamo il teorema di Carnot al triangolo OPQ:

$$PQ^2 = OP^2 + OQ^2 - 2\, OP \cdot OQ \cos\alpha \quad .$$

Svolgiamo il primo membro applicando la formula della distanza tra due punti:

$$(b_x - a_x)^2 + (b_y - a_y)^2 + (b_z - a_z)^2 = b_x^2 - 2 a_x b_x + a_x^2 + b_y^2 - 2 a_y b_y + b_y^2 + b_z^2 - 2 a_z b_z + a_z^2 \quad .$$

Svolgiamo in maniera analoga il secondo membro: $a_x^2 + a_y^2 + a_z^2 + b_x^2 + b_y^2 + b_z^2 - 2|a||b| \cos\alpha$.

“Mandiamo via” i termini che compaiono in entrambi i membri e ricaviamo $\cos\alpha$:

$$\cos\alpha = \frac{a_x b_x + a_y b_y + a_z b_z}{|a||b|} = \frac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{|a||b|}$$

da cui possiamo ricavare l'ampiezza dell'angolo.

Condizione di perpendicolarità tra vettori nello spazio

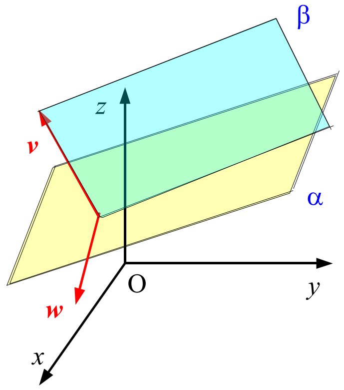
Due vettori sono <u>perpendicolari</u> quando l'angolo α tra di essi misura 90°, da cui:

$$\cos 90° = \frac{a_x b_x + a_y b_y + a_z b_z}{|a||b|} = 0 \;\Rightarrow\; a_x b_x + a_y b_y + a_z b_z = 0 \;\Rightarrow\; \vec{a} \cdot \vec{b} = 0 \quad .$$

Perpendicolarità tra piani

Due piani α e β aventi rispettivamente equazioni $ax+by+cz+d=0$ e $a'x+b'y+c'z+d'=0$ sono perpendicolari se e soltanto se sono perpendicolari i vettori $\vec{v}\equiv(a,b,c)$ e $\vec{w}\equiv(a',b',c')$ ad essi associati.

A loro volta, i vettori $\vec{v}$ e $\vec{w}$ sono perpendicolari se verificano la condizione ricavata nella pagina precedente.



Quindi: $\alpha \perp \beta \iff \boldsymbol{\vec{v}\cdot\vec{w}=0} \iff \boldsymbol{aa'+bb'+cc'=0}$.

Esempio 1

I piani α e β di equazioni $x-y+2z+1=0$ e $3x+y-z-2=0$ sono perpendicolari.

Infatti, i vettori $\vec{v}\equiv(1,-1,2)$ e $\vec{w}\equiv(3,1,-1)$, che sono rispettivamente perpendicolari ai piani dati, sono anche perpendicolari tra loro, in quanto: $\vec{v}\cdot\vec{w}=1\cdot3-1\cdot1+2\cdot(-1)=0$.

Esempio 2

Dati il piano α di equazione $2x-y+z+3=0$ ed il punto $P(1,2,-1)$ ad esso esterno, cerchiamo l'equazione del piano β passante per P e perpendicolare ad α.

Come ci suggerisce l'intuizione (e come dovremmo sapere dalla geometria sintetica dello spazio), questo problema è indeterminato, in quanto esistono <u>infiniti</u> piani passanti per P e perpendicolari ad α, ovvero tutti quelli che contengono la retta passante per P e perpendicolare ad α.

Analiticamente, vediamo infatti che possiamo considerare un piano generico di equazione $ax+by+cz+d=0$ e imporre:

- condizione di passaggio per P: $a+2b-c+d=0$;
- condizione di perpendicolarità: $2a-b+c=0$;
- $d=1$ (scelta arbitraria, in quanto ad ogni piano corrispondono infinite equazioni della forma data, aventi i coefficienti in proporzione).

Otteniamo quindi un sistema di tre equazioni in quattro incognite, che pertanto ammette ∞^1 soluzioni; è quindi necessario fornire un'altra condizione per determinare il piano β.

Retta e sua equazione (par. 4 pag. 1280)

Come abbiamo visto in precedenza, quando ci troviamo in tre dimensioni, una equazione lineare in tre variabili non determina una retta, ma un piano.

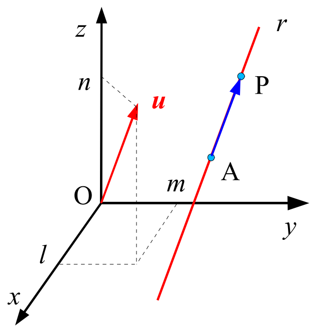
Allora come è possibile identificare in maniera analitica una determinata retta nello spazio?

Una possibilità ovvia è quella di individuarla come intersezione di due piani:

$$\begin{cases} ax+by+cz+d=0 \\ a'x+b'y+c'z+d'=0 \end{cases} .$$

Queste *equazioni cartesiane della retta* possono essere fornite dal testo del problema o richieste nella soluzione, ma, di per sé, non sono particolarmente utili. Infatti:

- non forniscono delle informazioni geometriche chiare sulla retta (non è facile comprendere da queste equazioni quale sia la direzione della retta nello spazio);
- esistono infinite coppie di piani che hanno in comune la stessa retta, e da queste equazioni non è semplice comprendere se due diversi sistemi definiscono la stessa retta o meno.



Equazioni parametriche

Un'idea migliore è quella di individuare una retta tramite la sua direzione nello spazio.

Cerchiamo quindi di determinare le equazioni della retta *r* passante per il punto $A(x_0, y_0, z_0)$ e parallela al vettore $\vec{u} \equiv (l, m, n)$.

Chiamiamo $P(x, y, z)$ un punto generico della retta *r*.

I vettori $\vec{PA}$ e $\vec{u}$ risultano paralleli se hanno le componenti proporzionali:

$$\frac{x-x_0}{l} = \frac{y-y_0}{m} = \frac{z-z_0}{n} .$$

Indichiamo con *t* il valore comune dei tre rapporti precedenti e ricaviamo le coordinate *x*, *y*, *z* in funzione del parametro *t*:

$$\begin{cases} \boldsymbol{x = lt + x_0} \\ \boldsymbol{y = mt + y_0} \\ \boldsymbol{z = nt + z_0} \end{cases} .$$

Abbiamo così ottenuto le **equazioni parametriche** della retta *r*, che, per ogni valore del parametro *t*, forniscono le coordinate di un punto P di tale retta.

Le quantità *l*, *m*, *n*, che individuano la direzione della retta *r*, vengono chiamate *coefficienti* (o *parametri*) *direttori* (o *direttivi*).

Per visualizzare meglio la situazione, possiamo pensare alle equazioni parametriche come alle leggi orarie del moto di un punto nello spazio. In questo caso:

- il parametro t può essere identificato con il tempo;
- per $t=0$, abbiamo $x=x_0$, $y=y_0$, $z=z_0$, per cui il punto A rappresenta la posizione iniziale del moto;
- il moto è rettilineo ed uniforme, in quanto le leggi orarie sono lineari;
- le quantità l, m, n rappresentano le componenti v_x, v_y, v_z della velocità del punto P.

Anche in questo caso, osserviamo che la corrispondenza tra rette dello spazio ed equazioni parametriche non è biunivoca per due motivi:

- su ogni retta r possiamo scegliere infiniti punti A rappresentanti la "posizione iniziale";
- per ogni retta r possiamo scegliere infiniti vettori $\vec{u}$ aventi la stessa direzione, ma diverso modulo (ed eventualmente verso opposto), in modo che i coefficienti direttori l, m, n vengano moltiplicati per uno stesso numero reale k.

  Nell'analogia fisica citata prima, questo equivale a percorrere la stessa traiettoria (la retta r), ma con una velocità diversa, di componenti (kl, km, kn) .

Retta di intersezione tra due piani

Determiniamo le equazioni parametriche della retta *r* intersezione dei piani α e β che hanno rispettivamente equazioni $x-2y+z-1=0$ e $2x+y-z+1=0$.

Poniamo a sistema le equazioni dei due piani; sommandole membro a membro, ricaviamo:

$3x-y=0 \Rightarrow y=3x$.

Sostituendo in una qualunque delle due equazioni, otteniamo: $z=5x+1$.

Poiché abbiamo espresso le variabili *y* e *z* in funzione di *x*, risulta naturale scegliere quest'ultima come parametro ponendo $x=t$.

Le equazioni parametriche della retta *r* risultano quindi: $\begin{cases} x=t \\ y=3t \\ z=5t+1 \end{cases}$.

In altri termini, la retta *r* passa per il punto $A(0,0,1)$ ed è parallela al vettore $\vec{u}\equiv(1,3,5)$.

Ripetiamo che, con una diversa scelta del metodo di risoluzione del sistema o del parametro, avremmo ottenuto delle equazioni diverse, ma equivalenti a quelle ottenute.

Retta passante per due punti

Determiniamo le equazioni parametriche della retta *r* passante per $A(-1,2,0)$ e $B(1,-1,-2)$.

Scegliamo A come "posizione iniziale" della nostra traiettoria: $x_0=-1;\ y_0=2,\ z_0=0$.

Come coefficienti direttori possiamo prendere le differenze tra le coordinate dei due punti:

$l=x_B-x_A=2;\quad m=y_B-y_A=3;\quad n=z_B-z_A=-2$.

Le equazioni parametriche della retta *r* sono quindi: $\begin{cases} x=2t-1 \\ y=3t+2 \\ z=-2t \end{cases}$.