Es. n. 78 pag. 176

Un automobilista, mentre viaggia alla velocità di 108 *km/h*, si accorge della presenza di un cane alla distanza di 160 *m*. Se i riflessi consentono al conducente di iniziare la frenata con un ritardo di 0,200 *s*, e se l'automobile si ferme dopo 10,0 *s* dall'inizio della frenata decelerando uniformemente, qual è lo spazio percorso dall'automobile a partire dall'istante in cui l'autista ha visto il cane?

[156 *m*]

Soluzione

Inizialmente l'automobile si muove di moto uniforme alla velocità $v_0 = 108 \frac{km}{h} = 30 \frac{m}{s}$.

Mentre il moto è uniforme, si ha uno spostamento: $s_1 = v_0 t_1 = 30 \frac{m}{s} \cdot 0{,}2\, s = 6\, m$.

Mentre l'automobile frena, la velocità varia con la legge $v_f = -at + v_0$.

Sostituiamo $v_f = 0 \;\Rightarrow\; -at + v_0 = 0 \;\Rightarrow\; a = \frac{v_0}{t_2} = \frac{30\, m/s}{10\, s} = 3 \frac{m}{s^2}$.

Mentre il moto è uniformemente accelerato, si ha uno spostamento:

$$s_2 = -\frac{1}{2} a t_2^2 + v_0 t_2 = -\frac{1}{2} \cdot 3 \frac{m}{s^2} \cdot 10\, s^2 + 30 \frac{m}{s} \cdot 10\, s = -150 + 300 = 150\, m \quad .$$

Lo spostamento complessivo è: $s_{tot} = s_1 + s_2 = 6 + 150 = 156\, m$.

Quindi l'automobile si ferma 4 metri prima di investire il cane.

Es. n. 79 pag. 176

Durante una partita di pallavolo, l'alzatore alza una palla per lo schiacciatore. La palla, lanciata verticalmente verso l'alto da un'altezza di 1,8 *m* dal suolo, viene colpita dalla mano dello schiacciatore proprio nell'istante in cui, giunta ad un'altezza di 2,5 *m* dal suolo, ha assunto velocità nulla. Qual è la velocità iniziale impressa dall'alzatore alla palla? Quanto tempo passa da quando la palla è lanciata dall'alzatore a quando è colpita dallo schiacciatore? [3,7 *m/s*; 0,38 *s*]

Soluzione

Lo spostamento della palla è $s = h_2 - h_1 = 2{,}5 - 1{,}8 = 0{,}7\, m$.

Trattandosi di un moto uniformemente accelerato, è descritto dalle leggi:

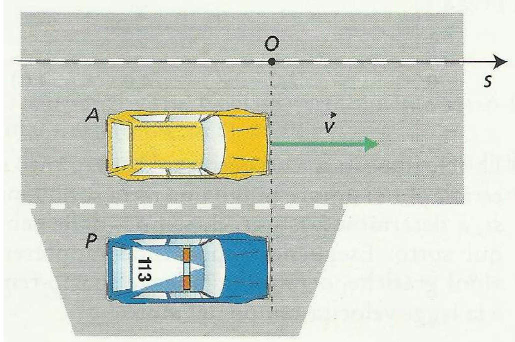
$$\begin{cases} s = -1/2\, g\, t^2 + v_0\, t \\ v_f = -g\, t + v_0 \end{cases} .$$

Dal punto di vista matematico, si tratta di un sistema di due equazioni nelle due incognite v_0 e t. Risolvendolo per sostituzione come nel problema svolto a pag. 166, ricaviamo:

$s = \frac{v_0^2 - v_f^2}{2g}$ da cui, ponendo $v_f = 0$: $v_0 = \sqrt{2\, gs} \simeq \sqrt{2 \cdot 9{,}81 \frac{m}{s^2} \cdot 0{,}7\, m} \simeq 3{,}7 \frac{m}{s}$.

Sostituiamo nella seconda equazione: $t = \frac{v_0}{g} \simeq \frac{3{,}7\, m/s}{9{,}81\, m/s^2} \simeq 0{,}38\, s$.

Es. n. 79 pag. 176



Un'automobile A passa con una velocità costante di 108 *km/h* davanti ad un'auto P della polizia, ferma per il controllo della velocità degli autoveicoli. L'auto della polizia parte all'inseguimento di A dopo 7,20 *s* con accelerazione di $2{,}00\, m/s^2$. Nell'ipotesi che l'accelerazione si mantenga costante, calcola il tempo che impiega P per raggiungere A, misurato a partire dall'istante in cui A passa davanti a P, e la distanza che deve percorrere per raggiungerla.

[43,2 *s*; 1,30 *km*]

Soluzione

Poniamo come istante iniziale $t_0=0$ quello in cui si ha la partenza dell'automobile della polizia.

Al tempo t_0, l'automobile A ha percorso una distanza $s_1=v_A t_1=30\frac{m}{s}\cdot 7{,}2\, s=216\, m$.

Dall'istante t_0 in poi, le leggi orarie dei due veicoli sono: $\begin{cases} s_A=v_A t+s_1 \\ s_P=1/2\, at^2 \end{cases}$.

L'automobile P ha raggiunto A quando:

$$s_P=s_A \;\Rightarrow\; 1/2\, at^2=v_{At}+s_1 \;\Rightarrow\; at^2-2v_a t-2s_1=0 \;\Rightarrow\; t_2=\frac{v_A+\sqrt{v_A^2+2as_1}}{a}$$.

In questo caso, la soluzione negativa non ha senso fisico.

Quindi: $t_2=\frac{30+\sqrt{900+864}}{2}=\frac{30+42}{2}=36\, s$.

La distanza percorsa dalla polizia è: $s_P=\frac{1}{2}a\, t_2^2=\frac{1}{2}\cdot 2\frac{m}{s^2}\cdot(36\, s)^2\simeq 1300\, m$.

Es. n. 81 pag. 176

Un giocoliere si esibisce in un teatro. In un certo momento dello spettacolo lancia verticalmente verso l'alto una palla che dopo 1,0 *s* raggiunge il soffitto con velocità nulla. Calcola la velocità iniziale con la quale il giocoliere lanica la palla e l'altezza del soffitto rispetto al punto di partenza della palla.

Se il giocoliere lancia una seconda palla verso l'alto con la stessa velocità iniziale nell'istante in cui la prima è al soffitto, quanto tempo dopo il lancio della seconda palla questa passa accanto alla prima? In tale istante a che distanza si trovano le due palle al di sopra delle mani del giocoliere?

[9,8 *m/s*; 4,9 *m*; 0,50 *s*; 3,7 *m*]

Soluzione

Scegliamo l'origine del sistema di riferimento nel punto di partenza della palla, ed il verso positivo verso l'alto. Il moto della palla è quindi descritto dalle equazioni:

$$\begin{cases} s=-1/2\,g\,t^2+v_0\,t \\ v_f=-g\,t+v_0 \end{cases} \quad .$$

Poniamo $v_f=0 \ \Rightarrow\ v_0=g\,t\simeq 9{,}81\,\frac{m}{s^2}\cdot 1\,s\simeq 9{,}8\,\frac{m}{s}$.

L'altezza raggiunta dalla palla è: $s=-\frac{1}{2}g\,t^2+v_0\,t\simeq -\frac{1}{2}\cdot 9{,}8\,\frac{m}{s^2}\cdot(1\,s)^2+9{,}8\,\frac{m}{s}\cdot 1\,s\simeq 4{,}9\,m$.

Per la seconda parte del problema, scegliamo come istante iniziale quello in cui viene lanciata la seconda palla. Le leggi del moto delle due palle sono: $s_1=-\frac{1}{2}g\,t^2+h$ e $s_2=-\frac{1}{2}g\,t^2+v_0\,t$.

Le due palle si passano accanto quando: $s_1=s_2 \ \Rightarrow\ v_0\,t=h \ \Rightarrow\ t=\frac{h}{v_0}\simeq\frac{4{,}9\,m}{9{,}8\,m/s}\simeq 0{,}5\,s$.

Per trovare l'altezza a cui si trovano, sostituiamo in una delle due equazioni:

$$s_1=-\frac{1}{2}g\,t^2+h\simeq -\frac{1}{2}\cdot 9{,}8\,\frac{m}{s^2}\cdot(0{,}5\,s)^2+4{,}9\,m\simeq 3{,}7\,m \quad .$$

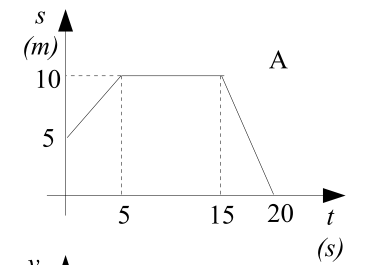
Esercizi moto rettilineo

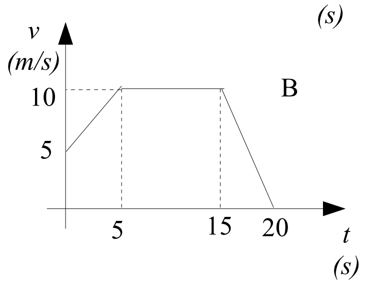
1. Un atleta riesce a percorrere 480 *m* in 1 minuto mantenendo una velocità costante.

   Quanto tempo impiega a percorrere 400 *m*? $[50\,s]$

   Quale distanza percorre in 35 *s*? $[280\,m]$

2. Il movimento di due corpi è descritto dai grafici A e B rispettivamente. Descrivi il loro moto.





   [A) tra 0 e 5 *s*: moto uniforme con $v=1\,m/s$; tra 5 e 15 *s*: quiete; tra 15 e 20 *s*:moto uniforme con $v=-2\,m/s$.

   B) tra 0 e 5 *s*: moto uniformemente accelerato con $a=1\,m/s^2$; tra 5 e 15 *s*: moto uniforme con $v=10\,m/s$; tra 15 e 20 *s*: moto uniformemente accelerato con $a=-2\,m/s^2$.]

   Per l'intervallo di tempo compreso tra 0 e 5 *s*, scrivi la legge oraria e la legge che fornisce la velocità in funzione del tempo.

   [A: $s=t+5$; $v=1$; B): $s=\frac{1}{2}t^2+5t$; $v=t+5$]

   Per il grafico A, disegna i grafici della velocità e della accelerazione in funzione del tempo.

   Per il grafico B, calcola la posizione occupata dopo 5 *s*, dopo 15 *s* e dopo 20 *s*.

   [$37{,}5\,m$, $137{,}5\,m$, $162{,}5\,m$]

   Disegna i grafici della posizione e della accelerazione in funzione del tempo.

3. Un ragazzo cammina per 60 *m* alla velocità di 1,5 *m/s* e poi corre per 80 *m* alla velocità di 5 *m/s*.

   Qual è la sua velocità media sull'intero percorso? $[v_m=2{,}5\,m/s]$

4. Un'automobile da corsa, inizialmente ferma, percorre 70 *m* in 8 *s* muovendosi con accelerazione costante. Quale velocità ha raggiunto dopo 10 *s*? [22 *m/s*]

   Qual è il suo spostamento dopo 10 *s*? [110 *m*]

   Quale velocità media ha mantenuto nei primi 10 *s*? [11 *m/s*]

5. Una moto da corsa che si sta muovendo con la velocità di $30\,m/s$ frena subendo una decelerazione di $2\,m/s^2$. Dopo quanto tempo si ferma? [15 *s*]

   Quanto spazio percorre nella frenata? [225 *m*]

Soluzioni

1. Il moto è uniforme. Calcoliamo la velocità: $v=\frac{s}{t}=\frac{480\,m}{60\,s}=8\,\frac{m}{s}$.

   Tempo impiegato a percorrere 400 *m*: $s=vt \Rightarrow t=\frac{s}{v}=\frac{400\,m}{8\,m/s}=50\,s$.

   Distanza percorsa in 35 *s*: $s=vt=8\,\frac{m}{s}\cdot 35\,s=280\,m$.

2. Grafico A:

   - Tra 0 e 5 *s* il moto è uniforme, perché il grafico posizione - tempo ha una pendenza costante, e tale pendenza fornisce la velocità istantanea del moto.

     $v=\frac{\Delta s}{\Delta t}=\frac{10\,m-5\,m}{5\,s}=1\,\frac{m}{s}$.

   - Tra 5 e 15 *s* la posizione resta invariata, quindi il corpo si trova in quiete.
   - Tra 15 e 20 *s* il moto è uniforme, ma con velocità negativa, ovvero il corpo "torna indietro".

     $v=\frac{\Delta s}{\Delta t}=\frac{0\,m-10\,m}{20\,s-15\,s}=-2\,\frac{m}{s}$.

   Grafico B:

   - Tra 0 e 5 *s* il moto è uniformemente accelerato, perché il grafico velocità - tempo ha una pendenza costante, e tale pendenza fornisce l'accelerazione istantanea del moto.

     $a=\frac{\Delta v}{\Delta t}=\frac{10\,m/s-5\,m/s}{5\,s}=1\,\frac{m}{s^2}$.

   - Tra 5 e 15 *s* la velocità resta costante con valore $v=10\,m/s$, quindi il corpo si muove di moto uniforme.
   - Tra 15 e 20 *s* il moto è uniformemente accelerato, ma con accelerazione negativa, ovvero il corpo "frena".

     $a=\frac{\Delta v}{\Delta t}=\frac{0\,m/s-10\,m/s}{20\,s-15\,s}=-2\,\frac{m}{s^2}$.

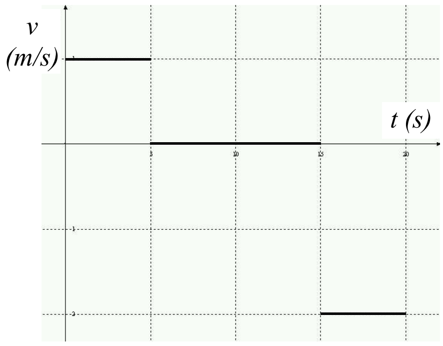
   Nell'intervallo di tempo $[0\,s, 5\,s]$, le leggi del moto descritto dal grafico A sono quelle del moto uniforme, del tipo $s=vt+s_0$ e $v=cost$.

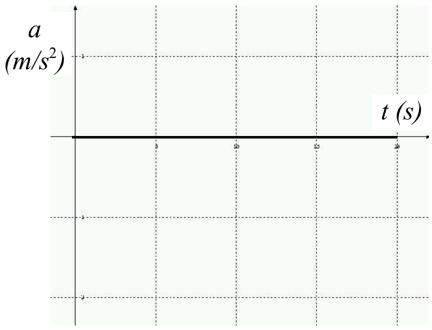
   Sostituiamo i valori ottenuti (tralasciando per semplicità le unità di misura): $s=t+5$, $v=1$.

   Nello stesso intervallo di tempo, le leggi del moto descritto dal grafico B sono quelle del moto uniformemente accelerato, del tipo $s=1/2\,a\,t^2+v_0 t$ e $v=a\,t+v_0$.

   Sostituiamo i valori ottenuti: $s=1/2\,t^2+5t$, $v=t+5$.

   Tracciamo i grafici velocità - tempo e accelerazione - tempo deducibili dal grafico A:



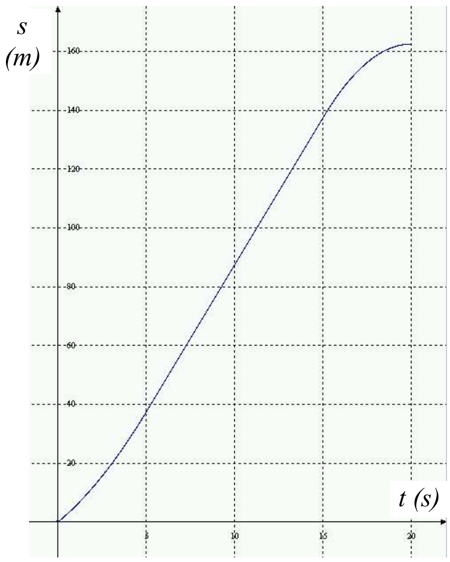


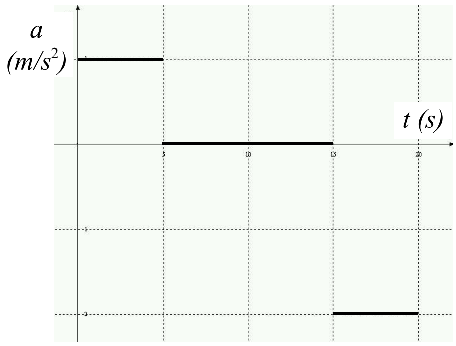
Il grafico accelerazione - tempo coincide con l'asse delle ascisse, perché, trattandosi di un moto uniforme, l'accelerazione è uguale a zero.

Per il grafico B:

- dopo 5 s: $s_1 = 1/2\, a(\Delta t)^2 + v_0 \Delta t = 1/2 \cdot 5^2 + 5 \cdot 5 = 12{,}5 + 25 = 37{,}5\, m$;
- dopo 15 s: $s_2 = v \cdot \Delta t + s_1 = 10 \cdot 10 + 37{,}5 = 137{,}5\, m$;
- dopo 20 s: $s_3 = 1/2\, a(\Delta t)^2 + v_{in} \cdot \Delta t + s_2 = 1/2 \cdot (-2) \cdot 5^2 + 10 \cdot 5 = -25 + 50 + 137{,}5 = 162{,}5\, m$.

Tracciamo i grafici posizione - tempo e accelerazione - tempo deducibili dal grafico B:





Per quanto riguarda il grafico posizione - tempo, osserviamo che:

- tra 0 e 5 s è una parabola con la concavità rivolta verso l'alto;
- tra 5 e 15 s è una retta;
- tra 15 e 20 s è una parabola con la concavità rivolta verso il basso;
- nei punti di "raccordo" tra un intervallo e l'altro, la pendenza non cambia.

3. Calcoliamo i tempi impiegati a percorrere i due intervalli:

$$t_1 = \frac{s_1}{v_1} = \frac{60\, m}{1{,}5\, m} = 40\, s \quad ; \quad t_2 = \frac{s_2}{v_2} = \frac{80\, m}{5\, m} = 16\, s \quad .$$

Velocità media: $v_m = \frac{s_1 + s_2}{t_1 + t_2} = \frac{140\, m}{56\, s} = 2{,}5 \frac{m}{s}$.

Osserviamo che la velocità media non è uguale alla media delle due velocità (che avrebbe il valore $3{,}25\, m/s$).

4. Moto uniformemente accelerato con velocità iniziale nulla:

$$s=\frac{1}{2}a\,t^2 \;\Rightarrow\; a=\frac{2\,s}{t^2}=\frac{2\cdot 70\,m}{(8\,s)^2}\simeq 2{,}2\,\frac{m}{s^2} \quad .$$

Velocità raggiunta dopo 10 s: $v_f=at\simeq 2{,}2\,\frac{m}{s^2}\cdot 10\,s\simeq 22\,\frac{m}{s}$.

Spazio percorso dopo 10 s: $s=\frac{1}{2}a\,t^2\simeq\frac{1}{2}\cdot 2{,}2\,\frac{m}{s^2}\cdot(10\,s)^2\simeq 110\,m$.

Velocità media: $v_m=\frac{s}{t}\simeq\frac{110\,m}{10\,s}\simeq 11\,\frac{m}{s}=\frac{v_f}{2}$.

5. Moto uniformemente accelerato con velocità iniziale diversa da zero.

La moto si ferma quando la sua velocità è nulla:

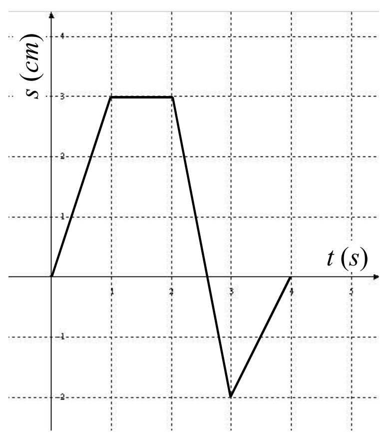
$$v=at+v_0=0 \;\Rightarrow\; t=-\frac{v_0}{a}=\frac{30\,m/s}{2\,m/s^2}=15\,s \quad .$$

Spazio percorso: $s=\frac{1}{2}a\,t^2+v_0\,t=\frac{1}{2}\cdot\left(-2\,\frac{m}{s^2}\right)\cdot(15\,s)^2+30\,\frac{m}{s}\cdot 15\,s=-225+450=225\,m$.

Esercizi sul moto in una dimensione

1. Un treno Eurostar impiega $4\,h$ e $30\,min$ a percorrere la distanza tra Roma e Milano $(632\,km)$, con una sosta a Bologna di $4\,min$ e una sosta a Firenze di $8\,min$. Qual è la velocità media del treno sull'intero percorso? Quale sarebbe la velocità media se il treno non facesse soste intermedie? $[1{,}4\cdot10^2\,km/h\,;1{,}5\cdot10^2\,km/h]$
2. La pantera può mantenere una velocità di $100\,km/h$ per circa $20\,s$, ma poi deve fermarsi. L'antilope, invece, può raggiungere in corsa una velocità massima di $85\,km/h$, ma riesce a mantenerla a lungo. Una pantera ed un'antilope scattano contemporaneamente quando la loro distanza è $15\,m$, e si muovono in linea retta. Scrivi le leggi del moto della pantera e dell'antilope e stabilisci se la pantera riesce a raggiungere l'antilope.
3. Un pipistrello emette un suono mentre passa vicino ad una casa. Dopo $0{,}5\,s$, sente l'eco. Se la velocità del suono nell'aria è di $300\,m/s$, quanto dista la casa dal pipistrello? $[75\,m]$
4. In un cartone animato, un gatto scocca una freccia per colpire un topo, mentre questi cerca di raggiungere la sua tana che si trova a $5{,}0\,m$ di distanza. Il topo corre alla velocità di $20\,km/h$ e la freccia a $30\,km/h$. Inizialmente, il gatto e il topo distano $10\,m$. Il topo riesce a mettersi in salvo? [*sì, la freccia è ancora a metà strada*]
5. Un'automobile attraversa un semaforo alla velocità di $72\,km/h$. Nello stesso istante, uno scooter, che si trova $1{,}5\,km$ più avanti, mantiene una velocità di $36\,km/h$. Quanto tempo impiega l'automobile a raggiungere lo scooter? A che distanza dal semaforo si trovano i due veicoli quando avviene il sorpasso? $[2{,}5\,min\,;3{,}0\,km]$
6. Il grafico rappresenta la posizione di una formica che si sta muovendo lungo il tronco di un albero. Descrivi il moto della formica. Calcola la velocità media della formica nei quattro intervalli e sull'intero percorso.

   $[0{,}03\,m/s\,;0\,m/s\,;-0{,}05\,m/s\,;0{,}02\,m/s\,;0\,m/s]$



7. In una gara di atletica, mancano $100\,m$ al traguardo. L'atleta B, in seconda posizione, si muove a $8{,}4\,m/s$. L'atleta A, in prima posizione con $2\,m$ di vantaggio sull'avversario, procede a $8{,}1\,m/s$. Chi vince la gara, e con quanti metri di vantaggio? $[B\,;1{,}6\,m]$
8. Uno scooter viaggia alla velocità di $50\,km/h$ e, quando è a $25\,m$ da un semaforo, questo diventa rosso. Il guidatore rallenta con un'accelerazione costante di $-3{,}5\,m/s^2$. Quanto tempo impiega prima di fermarsi? Riesce a fermarsi prima di oltrepassare la linea del semaforo? Quanto dovrebbe valere l'accelerazione per riuscire a fermarsi sulla linea del semaforo nello stesso

intervallo di tempo? $[4{,}0\,s\,;no\,;-3{,}8\,m/s^2]$

9. Quanto tempo impiega un corpo che cade da fermo (con accelerazione $g=9{,}80\,m/s^2$) a raggiungere la velocità di $100\,km/h$? In questo intervallo di tempo, di quanto cade?
$[2{,}84\,s\,;39{,}5\,m]$

10. Un ventricolo del cuore porta la velocità del sangue da 0 a $26\,cm/s$ in $0{,}15\,s$. Qual è l'accelerazione del sangue? Che distanza è percorsa dal sangue in fase di accelerazione?
$[1{,}7\,m/s^2\,;1{,}9\,cm]$

11. In una afosa giornata estiva, vuoi colpire con un sacchetto d'acqua un amico che sta per passare sotto la tua finestra posta a $5{,}0\,m$ dal suolo. L'amico in bicicletta si muove alla velocità costante di $10\,m/s$. Quanto tempo impiega il sacchetto d'acqua a cadere a terra? Quando lasci andare il sacchetto, a che distanza dal piede della verticale deve trovarsi il tuo amico per essere centrato? $[1{,}0\,s\,;10\,m]$

12. Un'automobile, che viaggia alla velocità di $120\,km/h$, è a $190\,m$ da un semaforo quando scatta il giallo. L'automobilista frena e l'automobile rallenta con una accelerazione pari a $-3{,}0\,m/s^2$. Dopo $10\,s$ il semaforo dal giallo passa al rosso. Che velocità ha l'automobile quando si accende il rosso? In tale istante l'automobile ha già superato la linea del semaforo?
$[12\,km/h\,;no\,,mancano\,ancora\,7\,m]$

13. Durante una scalata in montagna, un alpinista lascia cadere un sasso. Questo transita accanto al suo compagno dopo aver percorso $18\,m$ e tocca il suolo alla base della parete dopo $8{,}0\,s$ in tutto. Calcola il tempo a disposizione del secondo alpinista per evitare di essere colpito dal sasso. Calcola la velocità del sasso quando passa accanto al secondo alpinista. A quale altezza si trova il primo alpinista rispetto alla base della parete? $[1{,}9\,s\,;19\,m/s\,;310\,m]$

14. Con una fionda, Davide lancia un sasso verticalmente verso l'alto dall'altezza di $1{,}0\,m$ dal suolo. La velocità iniziale del sasso è $10\,m/s$. In quanto tempo il sasso raggiunge l'altezza massima? Quanto vale l'altezza massima raggiunta? $[1{,}0\,s\,;6{,}1\,m]$

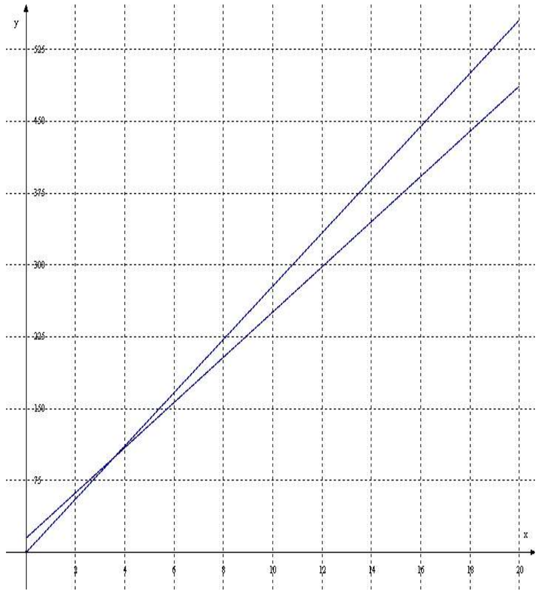
15. Un'automobile parte da ferma con accelerazione di $0{,}50\,m/s^2$ e la mantiene per $10\,s$, quindi prosegue a velocità costante per $15\,s$. Calcola la velocità finale raggiunta e la distanza percorsa. $[5{,}0\,m/s\,;100\,m]$

1. Velocità media sull'intero percorso: $v_m = \frac{s}{t} = \frac{632\,km}{4{,}5\,h} \simeq 140\,\frac{km}{h}$.

   La durata complessiva delle soste è di $12\,min = 0{,}2\,h$.

   Velocità media escluse le soste: $v_m = \frac{s}{t} = \frac{632\,km}{4{,}3\,h} \simeq 150\,\frac{km}{h}$.

2. Velocità pantera: $v_p = 100\,\frac{km}{h} \simeq 27{,}8\,\frac{m}{s}$.

   Velocità antilope: $v_a = 85\,\frac{km}{h} \simeq 23{,}6\,\frac{m}{s}$.

   Scelgo il sistema di riferimento avente l'origine nella posizione iniziale della pantera.

   Legge oraria moto pantera: $s_p = 27{,}8\,t$.

   Legge oraria moto antilope: $s_a = 23{,}6\,t + 15$.

   Al tempo $t = 20\,s$, la posizione della pantera è: $s_p = 27{,}8 \cdot 20 \simeq 556\,m$, mentre quella dell'antilope è (o meglio, sarebbe): $s_a = 23{,}6 \cdot 20 + 15 \simeq 487\,m$.

   Quindi, la pantera riesce a raggiungere l'antilope. Esattamente, ciò avviene quando:

   $s_p = s_a \;\Rightarrow\; 27{,}8\,t = 23{,}6\,t + 15 \;\Rightarrow\; 4{,}2\,t = 15 \;\Rightarrow\; t \simeq 3{,}6\,s$.

3. Tempo necessario perché il suono arrivi alla casa: $t = \frac{0{,}5\,s}{2} = 0{,}25\,s$.

   Distanza tra il pipistrello e la casa: $s = vt = 300\,\frac{m}{s} \cdot 0{,}25\,s = 75\,m$.

4. Velocità freccia: $v_f = 30\,\frac{km}{h} \simeq 8{,}3\,m/s$.

   Velocità topo: $v_t = 20\,\frac{km}{h} \simeq 5{,}6\,m/s$.

   Scelgo il sistema di riferimento avente l'origine nella posizione iniziale della freccia.

   Legge oraria moto freccia: $s_f = 8{,}3\,t$.

   Legge oraria moto topo: $s_t = 5{,}6\,t + 10$.

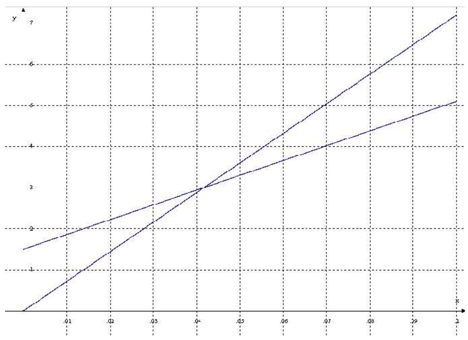
   Il topo raggiunge la sua tana quando $s_t = 10 + 5 = 15\,m$,ovvero:

   $5{,}6\,t + 10 = 15 \;\Rightarrow\; 5{,}6\,t = 5 \;\Rightarrow\; t \simeq 0{,}89\,s$.

   In quel momento, la posizione della freccia è: $s_f \simeq 8{,}3 \cdot 0{,}89 \simeq 7{,}4\,m$.

   Di conseguenza, la freccia non raggiunge il topo. Il contatto avverrebbe quando:

$s_f = s_f \;\Rightarrow\; 8{,}3\,t = 5{,}6\,t + 10 \;\Rightarrow\; 2{,}7\,t = 10 \;\Rightarrow\; t \simeq 3{,}7\,s$.



5. Scelgo il sistema di riferimento avente l'origine nella posizione iniziale dell'automobile.

   Legge oraria moto automobile: $s_a = 72\,t$.

   Legge oraria moto scooter: $s_s = 36\,t + 1{,}5$.

   L'automobile raggiunge lo scooter quando:

   $$s_a = s_s \;\Rightarrow\; 72\,t = 36\,t + 1{,}5 \;\Rightarrow\; 36\,t = 1{,}5 \;\Rightarrow\; t = \frac{1{,}5}{36}\,h = 2{,}5\,min \;.$$

   In quel momento, la loro distanza dal semaforo è: $s_a = s_s = 72 \cdot \frac{1{,}5}{36} = 3{,}0\,km$.

6. Nell'intervallo $0 \div 1\,s$, il moto della formica è uniforme (in quanto la pendenza del grafico posizione - tempo è costante), ed essa si muove "in avanti" rispetto al verso di percorrenza scelto.

   La velocità media è: $v_m = \frac{s_{fin} - s_{\text{in}}}{t_{fin} - t_{\text{in}}} = \frac{3-0}{1-0} = 3\,\frac{cm}{s}$.

   Nell'intervallo $1 \div 2\,s$, la formica è in quiete (in quanto la pendenza del grafico posizione - tempo è nulla), e, quindi la sua velocità media è uguale a zero.

   Nell'intervallo $2 \div 3\,s$, il moto della formica è uniforme, ma essa si muove "indietro".

   La velocità media è: $v_m = \frac{s_{fin} - s_{\text{in}}}{t_{fin} - t_{\text{in}}} = \frac{-2-3}{3-2} = -5\,\frac{cm}{s}$.

   Nell'intervallo $3 \div 4\,s$, il moto della formica è uniforme ed essa si muove "in avanti".

   La velocità media è: $v_m = \frac{s_{fin} - s_{\text{in}}}{t_{fin} - t_{\text{in}}} = \frac{0-(-2)}{4-3} = 2\,\frac{cm}{s}$.

   La velocità media sull'intero percorso è uguale a zero, in quanto la posizione di arrivo coincide con la posizione di partenza (l'origine del sistema di riferimento).

7. Scelgo il sistema di riferimento avente l'origine nella posizione iniziale dell'atleta B.

   Legge oraria moto atleta A: $s_A = 8{,}1\,t + 2$.

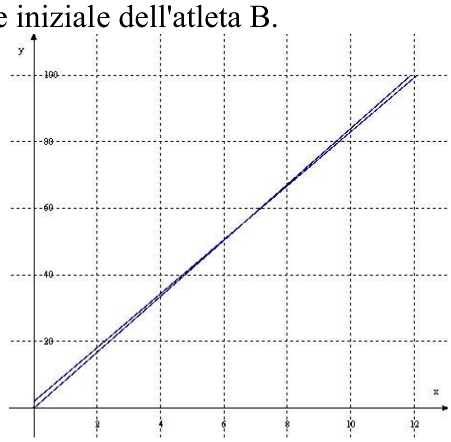
   Legge oraria moto atleta B: $s_B = 8{,}4\,t$.

   A taglia il traguardo quando:

   $$s_A = 8{,}1\,t + 2 = 100 \;\Rightarrow\; 8{,}1\,t = 98 \;\Rightarrow\; t \simeq 12{,}1\,s \;.$$

   B taglia il traguardo quando: $s_B = 8{,}4\,t = 100 \;\Rightarrow\; t \simeq 11{,}9\,s$.

   Quindi B vince la gara con un vantaggio (nel tempo) di circa $0{,}2\,s$ su A.



   Nel momento in cui B taglia il traguardo, la posizione di A è: $s_A \simeq 8{,}1 \cdot 11{,}9 + 2 \simeq 98{,}4\,m$.

   Quindi B vince la gara con un vantaggio (nello spazio) di circa $1{,}6\,m$ su A.

B raggiunge A quando: $s_B = s_A \Rightarrow 8{,}4t = 8{,}1t + 2 \Rightarrow 0{,}3t = 2 \Rightarrow t \simeq 6{,}7s$.

In quel momento, la loro posizione è: $s_A = s_B \simeq 8{,}4 \cdot 6{,}7 \simeq 56{,}3m$ e, quindi, si trovano a circa $43{,}7m$ dal traguardo.

8. Velocità iniziale scooter: $v_{\text{in}} = 50\frac{km}{h} \simeq 13{,}9\frac{m}{s}$.

   Scelgo il sistema di riferimento avente l'origine nella posizione iniziale dello scooter.

   Legge oraria: $s = -\frac{1}{2} \cdot 3{,}5t^2 + 13{,}9t \simeq -1{,}75t^2 + 13{,}9t$.

   Legge della velocità: $v = -3{,}5t + 13{,}9$.

   Lo scooter si ferma quando $v = -3{,}5t + 13{,}9 = 0 \Rightarrow t \simeq 4{,}0s$.

   In quel momento, la sua posizione è: $s \simeq -1{,}75 \cdot 4^2 + 13{,}9 \cdot 4 \simeq 27{,}6m$, quindi si è fermato circa $2{,}6m$ oltre la linea del semaforo.

   Lo scooter si sarebbe fermato nello stesso intervallo di tempo entro la linea del semaforo se:

   $s = -\frac{1}{2}a \cdot 4^2 + 13{,}9 \cdot 4 \leq 25 \Rightarrow -8a + 55{,}6 \geq 25 \Rightarrow 8a \geq 30{,}6 \Rightarrow a \geq 3{,}8\frac{m}{s^2}$.

   Il risultato trovato riguarda il modulo dell'accelerazione, mentre il segno deve essere negativo, quindi: $a \leq -3{,}8 m/s^2$.

9. Scelgo il sistema di riferimento avente l'origine nella posizione iniziale del corpo ed il verso positivo rivolto verso il basso.

   Legge oraria: $s = \frac{1}{2}gt^2 \simeq 4{,}9t^2$. Legge della velocità: $v = \text{gt} \simeq 9{,}8t$.

   Il corpo raggiunge una velocità di $100 km/h \simeq 27{,}8 m/s$ quando:

   $v = 9{,}8t = 27{,}8 \Rightarrow t \simeq 2{,}84s$.

   In questo intervallo di tempo, esso cade di: $s = 4{,}9 \cdot (2{,}84)^2 \simeq 39{,}5m$.

10. Accelerazione media: $a_m = \frac{v_{fin} - v_{\text{in}}}{t_{fin} - t_{\text{in}}} = \frac{(0{,}26 - 0) m/s}{0{,}15 s} \simeq 1{,}7\frac{m}{s^2}$.

    Distanza percorsa: $s = \frac{1}{2}at^2 \simeq \frac{1}{2} \cdot 1{,}7\frac{m}{s^2} \cdot (0{,}15 s)^2 \simeq 1{,}9 cm$.

11. Legge oraria del sacchetto: $s_s = \frac{1}{2}gt^2 \simeq 4{,}9t^2$.

    Il sacchetto raggiunge il suolo quando: $s_s = 4{,}9t^2 = 5 \Rightarrow t \simeq 1{,}0s$.

    Legge oraria bicicletta: $s_b = vt = 10t$.

    Quando il sacchetto raggiunge il suolo, la bicicletta ha percorso: $s_b = 10 \cdot 1{,}0 \simeq 10m$.

12. Velocità iniziale automobile: $v_{\text{in}} = 120\frac{km}{h} \simeq 33{,}3\frac{m}{s}$.

Scelgo il sistema di riferimento avente l'origine nella posizione iniziale dell'automobile.

Legge oraria: $s=-\frac{1}{2}\cdot 3t^2+33{,}3t\simeq -1{,}5t^2+33{,}3t$.

Legge della velocità: $v=-3t+33{,}3$.

Velocità nel momento in cui si accende il rosso: $v=-3\cdot 10+33{,}3\simeq 3{,}3\frac{m}{s}\simeq 12\frac{km}{h}$.

Posizione in cui si trova quando si accende il rosso: $s=-1{,}5\cdot 10^2+33{,}3\cdot 10\simeq 183\,m$, quindi l'automobile si trova ancora a circa $7\,m$ dalla linea del semaforo.

L'automobile si ferma quando $v=-3t+33{,}3=0 \Rightarrow t\simeq 11\,s$.

In quel momento, la sua posizione è: $s=-1{,}5\cdot 11^2+33{,}3\cdot 11\simeq 185\,m$, quindi si è fermata circa $5\,m$ prima della linea del semaforo.

13. Scelgo il sistema di riferimento avente l'origine nella posizione iniziale del sasso ed il verso positivo rivolto verso il basso.

    Legge oraria: $s=\frac{1}{2}gt^2\simeq 4{,}9t^2$. Legge della velocità: $v=\mathrm{gt}\simeq 9{,}8t$.

    Il sasso passa accanto al secondo alpinista quando: $s=4{,}9t^2=18 \Rightarrow t^2\simeq 3{,}7 \Rightarrow t\simeq 1{,}9\,s$.

    In quel momento, la velocità del sasso è: $v=9{,}8\cdot 1{,}9\simeq 19\,m/s$.

    Dopo $8{,}0\,s$, il sasso ha percorso: $s=4{,}9\cdot 8^2\simeq 310\,m$; questa è anche l'altezza del primo alpinista rispetto alla base della parete.

14. Scelgo il sistema di riferimento avente l'origine nella posizione iniziale del sasso ed il verso positivo rivolto verso l'alto.

    Legge oraria: $s=\frac{1}{2}gt^2+v_0t+s_0\simeq -4{,}9t^2+10t+1$.

    Legge della velocità: $v=\mathrm{gt}+v_0\simeq -9{,}8t+10$.

    Poiché il sasso è stato lanciato in direzione verticale, esso raggiunge l'altezza massima quando la sua velocità è uguale a zero: $v=-9{,}8t+10=0 \Rightarrow t\simeq 1{,}0\,s$.

    L'altezza massima raggiunta è: $s=-4{,}9\cdot 1^2+10\cdot 1+1\simeq 6{,}1\,m$.

15. Nel primo intervallo di tempo, la legge oraria e la legge con cui varia la velocità sono: $s=1/2\,at^2=0{,}25t^2$ e $v=at=0{,}5t$.

    Dopo $10\,s$, l'automobile ha percorso: $s_1=0{,}25\cdot 10^2=25\,m$ ed ha raggiunto la velocità: $v=0{,}5\cdot 10=5\,m/s$.

    Nei successivi $15\,s$, essa mantiene la velocità di $5\,m/s$ e si muove con la legge oraria: $s=vt=5t$. Quindi, essa percorre: $s_2=5\cdot 15=75\,m$.

    Lo spostamento complessivo è quindi: $s=s_1+s_2=100\,m$.

I sette messaggeri

Partito ad esplorare il regno di mio padre, di giorno in giorno vado allontanandomi dalla città e le notizie che mi giungono si fanno sempre più rare.

Ho cominciato il viaggio poco più che trentenne e più di otto anni sono passati, esattamente otto anni, sei mesi e quindici giorni di ininterrotto cammino. Credevo, alla partenza, che in poche settimane avrei facilmente raggiunto i confini del regno, invece ho continuato ad incontrare sempre nuove genti e paesi; e dovunque uomini che parlavano la mia stessa lingua, che dicevano di essere sudditi miei.

Penso talora che la bussola del mio geografo sia impazzita e che, credendo di procedere sempre verso il meridione, noi in realtà siamo forse andati girando su noi stessi, senza mai aumentare la distanza che ci separa dalla capitale; questo potrebbe spiegare il motivo per cui ancora non siamo giunti all'estrema frontiera.

Ma più sovente mi tormenta il dubbio che questo confine non esista, che il regno si estenda senza limite alcuno e che, per quanto io avanzi, mai potrò arrivare alla fine.

Mi misi in viaggio che avevo già più di trent'anni, troppo tardi forse. Gli amici, i familiari stessi, deridevano il mio progetto come inutile dispendio degli anni migli ori della vita. Pochi in realtà dei miei fedeli acconsentirono a partire.

Sebbene spensierato - ben più di quanto sia ora! – mi preoccupai di poter comunicare, durante il viaggio, con i miei cari, e fra i cavalieri della scorta scelsi i sette migliori, che mi servissero da messaggeri.

Credevo, inconsapevole, che averne sette fosse addirittura un'esagerazione. Con l'andar del tempo mi accorsi al contrario che erano ridicolmente pochi; e si che ne ssuno di essi è mai caduto malato, né è incappato nei briganti, né ha sfiancato le cavalcature. Tutti e sette mi hanno servito con una tenacia e una devozione che di fficilmente riuscirò mai a ricompensare.

Per distinguerli facilmente imposi loro nomi con le iniziali alfabeticamente progressive: Alessandro, Bartolomeo, Caio, Domenico, Ettore, Federico, Gregorio.

Non uso alla lontananza dalla mia casa, vi spedii il primo, Alessandro, fin dalla sera del mio secondo giorno di viaggio, quando avevamo percorso già un'ottantina di leghe.

La sera dopo, per assicurarmi la continuità delle comunicazioni, inviai il secondo, poi il terzo, poi il quarto, consecutivamente, fino all'ottava sera di viaggio, in cui partì Gregorio. Il primo non era ancora tornato.

Ci raggiunse la decima sera, mentre stavamo disponendo il campo per la notte, in una valle disabitata. Seppi da Alessandro che la sua rapidità era stata inferiore al previsto; avevo pensato che,

procedendo isolato, in sella a un ottimo destriero, egli potesse percorrere, nel medesimo tempo, una distanza due volte la nostra; invece aveva potuto solamente una volta e mezza; in una giornata, mentre noi avanzavamo di quaranta leghe, lui ne divorava sessanta, ma non di più.
Così fu degli altri. Bartolomeo, partito per la città alla terza sera di viaggio, ci raggiunse alla quindicesima; Caio, partito alla quarta, alla ventesima solo fu di r itorno. Ben presto constatai che bastava moltiplicare per cinque i giorni fin lì impiegati per sapere quando il messaggero ci avrebbe ripresi.
Allontanandoci sempre più dalla capitale, l'itinerario dei messi si faceva ogni volta più lungo. Dopo cinquanta giorni di cammino, l'intervallo fra un arrivo e l'altro dei messaggeri cominciò a spaziarsi sensibilmente; mentre prima me ne vedevo arrivare al campo uno ogni cinque giorni, questo intervallo divenne di venticinque; la voce della mia città diveniva in tal modo sempre più fioca; intere settimane passavano senza che io ne avessi alcuna notizia.
Trascorsi che furono sei mesi - già avevamo varcato i monti Fasani - l'intervallo fra un arrivo e l'altro dei messaggeri aumentò a ben quattro mesi. Essi mi recavano oramai notizie lontane; le buste mi giungevano gualcite, talora con macchie di umido per le notti trascorse all'addiaccio da chi me le portava.
Procedemmo ancora. Invano cercavo di persuadermi che le nuvole trascorrenti sopra di me fossero uguali a quelle della mia fanciullezza, che il cielo della città lontana non fosse diverso dalla cupola azzurra che mi sovrastava, che l'aria fosse la stessa, uguale il soffio del vento, identiche le voci degli uccelli. Le nuvole, il ci elo, I'aria, i venti, gli uccelli, mi apparivano in verità cose nuove e diverse; e io mi sentivo straniero.
Avanti, avanti! Vagabondi incontrati per le pianure mi dicevano che i confini non erano lontani. Io incitavo i miei uomini a non posare, spegnevo gli accenti scoraggiati che si facevano sulle loro labbra. Erano già passati quattro anni dalla mia partenza; che lunga fatica. La capitale, la mia casa, mio padre, si erano fatti stranamente remoti, quasi non ci credevo. Ben venti mesi di silenzio e di solitudine intercorrevano ora fra le successive comparse dei messaggeri. Mi portavano curiose lettere ingiallite dal tempo, e in esse trovavo nomi dimenticati, modi di dire a me insoliti, sentimenti che non riuscivo a capire. Il mattino successivo, dopo una sola notte di riposo, mentre noi ci rimettevamo in cammino il messo ripartiva nella direzione opposta, recando alla città le lettere che da parecchio tempo io avevo apprestate.
Ma otto anni e mezzo sono trascorsi. Stasera cenavo da solo nella mia tenda quando è entrato Domenico, che riusciva ancora a sorridere benché stravolto da lla fatica. Da quasi sette anni non lo rivedevo. Per tutto questo periodo lunghissimo egli non aveva fatto che correre, attraverso praterie, boschi e deserti, cambiando chissà quante volte cavalcatura, per portarmi quel pacco di buste che

finora non ho avuto voglia di aprire. Egli è già andato a dormire e ripartirà domani stesso all'alba. Ripartirà per l'ultima volta. Sul taccuino ho calcolato che, se tutto andrà bene, io continuando il cammino come ho fatto finora e lui il suo, non potrò rivedere Domenico che fra trentaquattro anni. Io allora ne avrò settantadue. Ma comincio a sentirmi stanco ed è probabile che la morte mi coglierà prima. Così non lo potrò mai più rivedere.
Fra trentaquattro anni (prima anzi, molto prima) Domenico scorgerà inaspetttamente i fuochi del mio accampamento e si domanderà perché mai nel frattempo, io abbia fatto così poco cammino. Come stasera. il buon messaggero entrerà nella mia tenda con le lettere ingiallite dagli anni, cariche di assurde notizie di un tempo già sepolto; ma si fermerà sulla soglia, vedendomi immobile disteso sul giaciglio, due soldati ai fianchi con le torce, morto.
Eppure, va, Domenico, e non dirmi che sono crudele! Porta, il mio ultimo saluto alla città dove io sono nato. Tu sei il superstite legame con il mondo che un tempo fu anche mio. I più recenti messaggi mi hanno fatto sapere che molte cose sono cambiate, che mio padre è morto che la Corona è passata a mio fratello maggiore, che mi considerano perduto, che hanno costruito alti palazzi di pietra là dove prima erano le querce sotto cui andavo solitamente a giocare. Ma è pur sempre la mia vecchia patria.
Tu sei l'ultimo legame con loro, Domenico. Il quinto messaggero, Ettore, che mi raggiungerà, Dio volendo, fra un anno e otto mesi, non potrà ripartire perché non farebbe più in tempo a tornare. Dopo di te il silenzio, o Domenico, a meno che finalmente io non trovi i sospirati confini. Ma quanto più procedo, più vado convincendomi che non esiste frontiera.
Non esiste, io sospetto, frontiera, almeno non nel senso che noi siamo abituati a pensare. Non ci sono muraglie di separazione, né valli divisorie, né montagne che chiudano il passo. Probabilmente varcherò il limite senza accorgermene neppure, e continuerò ad andare avanti, ignaro.
Per questo io intendo che Ettore e gli altri messi dopo di lui, quando mi avranno nuovamente raggiunto, non riprendano più la via della capitale ma partano innanzi a precedermi, affinché io possa sapere in antecedenza ciò che mi attende. Un'ansia inconsueta da qualche tempo si accende in me alla sera, e non è più rimpianto delle gioie lasciate, come accadeva nei primi tempi del viaggio; piuttosto è l'impazienza di conoscere le terre ignote a cui mi dirigo.
Vado notando - e non l'ho confidato finora a nessuno - vado notando come di giorno in giorno, man mano che avanzo verso l'improbabile mèta, nel cielo irraggi una luce insolita quale mai mi è apparsa, neppure nei sogni; e come le piante, i monti, i fiumi che attraversiamo, sembrino fatti di una essenza diversa da quella nostrana e l'aria rechi presagi che non so dire.
Una speranza nuova mi trarrà domattina ancora più avanti, verso quelle montagne inesplorate che le ombre della notte stanno occultando. Ancora una volta io leverò il campo, mentre Domenico

scomparirà all'orizzonte dalla parte opposta, per recare alla città lontanissima l'inutile mio messaggio.

DINO BUZZATI

da : La boutique del mistero

(prima edizione Oscar Mondadori, Milano, 1968)

Problema dei “Sette messaggeri” - Soluzione

La velocità dei messaggeri è uguale ad una volta e mezza quella del principe: $v_m = \frac{3}{2} v_p$.

Supponiamo che il principe, partito dalla sua capitale A, dopo un tempo t (misurato in giornate) si trovi nel punto B. Avremo quindi: $AB = v_p t$.

Quando il messaggero, partito da B, ritorna alla capitale A, compie il percorso AB con la propria velocità in un tempo minore t_1: $AB = v_m t_1$.

Uguagliamo le due espressioni del percorso AB:

$$v_p t = v_m t_1 \ \Rightarrow \ v_p t = \frac{3}{2} v_p t_1 \ \Rightarrow \ t_1 = \frac{2}{3} t \ .$$

Quindi il messaggero ritorna nella capitale A impiegando i due terzi delle giornate impiegate dal principe nel viaggio di andata.

Arrivato nella capitale A, il messaggero riparte e torna in B impiegando un tempo: $t_2 = t_1 = \frac{2}{3} t$.

Arrivato in B, il messaggero continua il suo viaggio per un tempo t_3, fino a raggiungere nel punto C il principe, che nel frattempo si è mosso.

Lo spazio percorso dal messaggero è: $BC = v_m t_3$.

Lo spazio percorso dal principe è: $BC = v_p (t_1 + t_2 + t_3)$.

Uguagliamo le due espressioni e sostituiamo:

$$v_m t_3 = v_p (t_1 + t_2 + t_3) \ \Rightarrow \ \frac{3}{2} v_p t_3 = v_p \left(\frac{2}{3} t + \frac{2}{3} t + t_3\right) \ \Rightarrow \ \frac{3}{2} t_3 = \frac{4}{3} t + t_3 \ \Rightarrow \ \frac{1}{2} t_3 = \frac{4}{3} t \ \Rightarrow \ t_3 = \frac{8}{3} t \ .$$

Quanto tempo è passato complessivamente dalla partenza del principe fino al momento in cui il messaggero torna da lui? $t + t_1 + t_2 + t_3 = t + \frac{2}{3} t + \frac{2}{3} t + \frac{8}{3} t = \frac{15}{3} t = 5t$.

Quindi ha ragione il narratore ad affermare: “Ben presto constatai che bastava moltiplicare per cinque i giorni fin lì impiegati per sapere quando il messaggero ci avrebbe ripresi.”