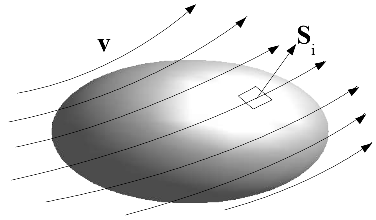
Flusso di un campo vettoriale.



Consideriamo una zona di spazio in cui sia presente un certo campo vettoriale $\vec{v}$ e, in questo spazio, una certa superficie S (aperta o chiusa).

Dividiamo l'intera superficie in tanti elementi così piccoli che la superficie di ognuno di essi si possa considerare praticamente piana e che il campo $\vec{v}$ non cambi in maniera apprezzabile, né in direzione, né in modulo, da un punto all'altro.

Ogni elemento di superficie definisce un modulo (il valore della sua area), una direzione e un verso (quelli della normale alla sua superficie rivolta verso l'esterno; se poi la superficie è chiusa, si può parlare di interno ed esterno senza ambiguità). Possiamo quindi rappresentare l'elemento di superficie con un vettore, che indica l'area e la sua orientazione.

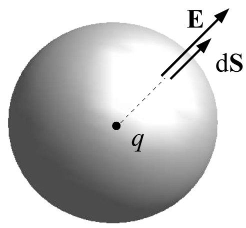
Se $\vec{v}_i$ è il vettore relativo all'elemento di superficie S_i, chiamiamo **flusso** del campo $\vec{v}$ attraverso quell'elemento di superficie la quantità $\Phi_i = \vec{v}_i \cdot \vec{S}_i$.

Il nome ha origine dal fatto che, se $\vec{v}$ rappresenta la velocità di un fluido in movimento, per esempio dell'acqua in un fiume, allora Φ_i è la *portata* (ovvero il volume nell'unità di tempo) dell'acqua che attraversa l'elemento di superficie S_i.

Per ottenere il flusso complessivo attraverso la superficie S, sommiamo il flusso attraverso tutti gli elementi: $\Phi(\vec{v}) = \sum_i \Phi_i = \sum_i \vec{v}_i \cdot \vec{S}_i$.

Supponendo poi di far diventare ogni elemento sempre più piccolo ed il loro numero sempre più grande, passiamo dalla somma all'integrale di superficie: $\Phi(\vec{v}) = \int_S \vec{v} \cdot d\vec{S}$.

Teorema di Gauss.



Consideriamo come campo vettoriale il campo elettrico $\vec{E}$.

La situazione più semplice è quella del campo generato da una singola carica puntiforme isolata q e di una superficie sferica di raggio r e centro nella posizione della carica.

In questo caso, il campo è costante in ogni punto della superficie, e la sua direzione e verso coincidono con quelli della normale esterna alla superficie in quel punto. Quindi:

$$\Phi(\vec{E}) = E \cdot A_{tot} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{q}{r^2} \cdot 4\pi r^2 = \frac{q}{\epsilon_0} \quad .$$

Osserviamo che il flusso non dipende dalle dimensioni della sfera.

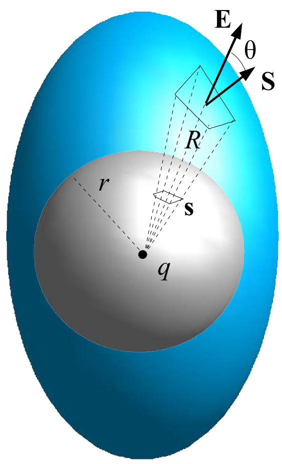
Consideriamo ora una seconda superficie chiusa di forma qualsiasi che racchiuda la prima.

Il flusso totale attraverso questa superficie sarà lo stesso di quello attraverso la sfera in quanto, intuitivamente, tutte le linee di forza che attraversano la sfera tagliano anche la superficie esterna.

In termini più rigorosi, consideriamo un cono con vertice in q che tagli una piccola porzione di superficie $\vec{s}$ sulla sfera ed una $\vec{S}$ sulla superficie esterna, a distanza R dalla carica. L'area di $\vec{S}$ è maggiore di quella di $\vec{s}$ per due motivi: il fattore di similitudine $(R/r)^2$ dovuto alla diversa distanza dalla carica ed il fattore $1/\cos\theta$ dovuto all'inclinazione. Quindi il contributo di tale area al flusso è:

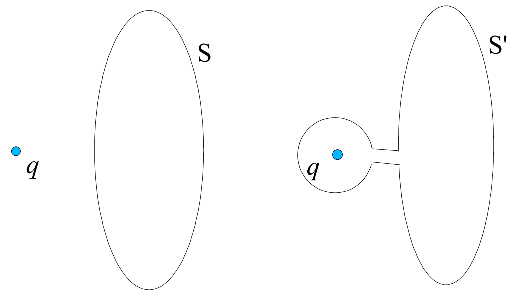
$$\Phi(\vec{E})_S = \vec{E}(S)\cdot\vec{S} = E(S)\cdot S\cos\theta = k\frac{q}{R^2}\cdot s\frac{R^2}{r^2}\frac{1}{\cos\theta}\cdot\cos\theta = k\frac{q}{r^2}\cdot s = E(s)\cdot s = \Phi(\vec{E})_s \quad .$$

Poiché ogni porzione della superficie esterna può essere messa in corrispondenza in questo modo con una parte della superficie sferica, il flusso totale attraverso le due superfici è lo stesso.



Come corollario, possiamo osservare che il flusso totale attraverso una superficie chiusa è zero se la carica si trova al di fuori della superficie.

La figura può suggerire il modo di dimostrare questa affermazione.



I risultati ottenuti possono sembrare ovvi se immaginiamo che in q vi sia una sorgente che emetta particelle in tutte le direzioni con frequenza costante. Il flusso di particelle in un elemento di superficie decrescerà con l'inverso del quadrato della distanza da q, proprio come il campo elettrico. E' chiaro che il flusso di particelle attraverso una superficie chiusa che contiene q non dipenderà dalle dimensioni e dalla forma della superficie, e sarà uguale al numero di particelle emesse nell'unità di tempo.

Infine, se sono presenti diverse cariche, ricordiamo che, per il principio di sovrapposizione, il campo elettrico complessivo è la somma vettoriale dei campi dovuti alle singole sorgenti.

Osserviamo che anche il flusso è una quantità additiva, pertanto il flusso del campo elettrico dovuto a più cariche è la somma dei flussi dati dalle singole cariche, ognuno dei quali è dato da q/ϵ_0 .

Possiamo quindi enunciare il **teorema di Gauss**: *il flusso del campo elettrico attraverso una qualunque superficie chiusa è direttamente proporzionale alla carica contenuta all'interno della superficie.*

In formula: $\boldsymbol{\Phi(\vec{E})_{S\,chiusa} = \frac{\sum q_{int}}{\epsilon_0}}$.

Osserviamo che la dimostrazione precedente è fondata sulla dipendenza del campo dall'inverso del quadrato della distanza, oltre che sul principio di sovrapposizione.
Ne segue che, ad esempio, il teorema di Gauss non sarebbe valido se il campo dipendesse dall'inverso del cubo della distanza. In questo caso, il flusso del campo attraverso una sfera centrata sulla carica sarebbe:

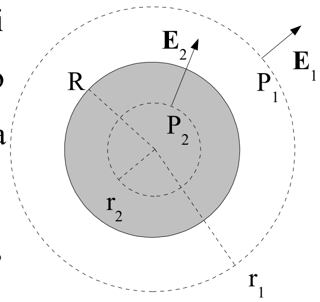
$\Phi(\vec{E})=\int \vec{E}\cdot d\vec{S}=\frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{q}{r^3}\cdot 4\pi r^2=\frac{q}{\epsilon_0 r}$ e quindi dipenderebbe dal raggio.

Vediamo, inoltre, che il teorema di Gauss non è valido esclusivamente per il campo elettrico, ma per qualsiasi campo variabile secondo la legge dell'inverso del quadrato della distanza, come, ad esempio, quello gravitazionale.
Il nostro teorema è equivalente alla legge di Coulomb o a quella di Newton, con l'ipotesi aggiuntiva che il campo abbia simmetria sferica, e potrebbe quindi essere assunto come legge fondamentale delle interazioni elettrostatiche o gravitazionali.

Conseguenze del teorema di Gauss.

In particolari condizioni di simmetria, il teorema di Gauss ci permette di determinare il campo elettrico prodotto da una determinata distribuzione di cariche senza dover ricorrere ad un integrale.

a. Distribuzione sferica di volume



Consideriamo una carica Q distribuita in maniera uniforme all'interno di una sfera di raggio R. Per simmetria, il campo elettrico deve essere diretto radialmente e la sua intensità deve essere costante su tutti i punti di una sfera concentrica con quella in cui è distribuita la carica.
Considerando come superficie chiusa la sfera di raggio r_1, maggiore di R, ed applicando su di essa il teorema di Gauss, ricaviamo:

$$\Phi(\vec{E})=\frac{q_{int}}{\epsilon_0} \Rightarrow E_1 4\pi r_1^2=\frac{Q}{\epsilon_0} \Rightarrow E_1=\frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{Q}{R_1^2} .$$

Quindi *il campo elettrico* *all'esterno* *della sfera è uguale a quello che si avrebbe se la carica fosse concentrata nel centro della sfera (inversamente proporzionale al quadrato della distanza).*

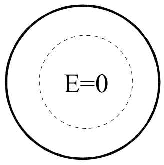
Lo stesso ragionamento, applicato al campo gravitazionale, ci dice che la Terra, considerata come una sfera omogenea, attrae gli altri corpi con la stessa forza con cui li attirerebbe se la sua massa fosse concentrata nel centro.
Questa non è una proprietà ovvia del centro di massa: ad esempio, un cubo di densità uniforme *non* attrae i corpi esterni come se la sua massa fosse concentrata nel centro. Anche per Newton questo risultato non era affatto scontato, ed egli lo dimostrò in maniera assai più laboriosa.

Se ora consideriamo come superficie chiusa la sfera di raggio r_2, minore di R, ed applichiamo su di essa il teorema di Gauss, ricaviamo:

$$\Phi(\vec{E})=\frac{q_{int}}{\epsilon_0} \Rightarrow E_2 4\pi r_2^2=\frac{Q}{\epsilon_0}\cdot\frac{r_2^3}{R^3} \Rightarrow E_2=\frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{Q}{R^3}\cdot r_2 \quad .$$

Quindi *il campo elettrico* *<u>all'interno</u>* *della sfera cresce linearmente con la distanza dal centro.*

b. Distribuzione sferica di superficie



Nel caso in cui la carica *Q* sia distribuita in maniera uniforme sulla *superficie* di una sfera, è evidente che:

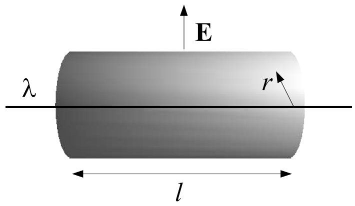
il campo all'esterno è sempre inversamente proporzionale al quadrato della distanza, mentre il campo all'interno della sfera è nullo.

c. Distribuzione lineare

Consideriamo una distribuzione lineare di carica, ovvero un "filo" composto da cariche, di lunghezza infinita (ovvero, molto maggiore delle dimensioni che stiamo considerando).

Esso può essere caratterizzato dalla sua *densità lineare di carica* λ (carica per unità di lunghezza).

Per simmetria, il campo elettrico deve essere radiale ed il suo modulo deve dipendere unicamente dalla distanza *r* dal "filo".

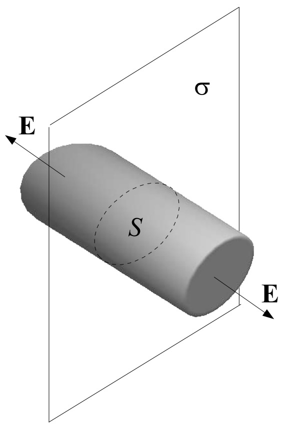


Prendiamo come superficie chiusa un cilindro avente come asse la distribuzione di cariche. Applicando il teorema di Gauss, vediamo che il flusso del campo elettrico attraverso le due basi è zero, per cui:

$$\Phi(\vec{E})=\frac{q_{int}}{\epsilon_0} \Rightarrow E\cdot 2\pi r l=\frac{\lambda l}{\epsilon_0} \Rightarrow E=\frac{\lambda}{2\pi\epsilon_0}\cdot\frac{1}{r} \quad .$$

Quindi il campo elettrico di una distribuzione uniforme infinita lineare di carica varia con l'inverso della distanza dalla distribuzione stessa.

d. Distribuzione piana semplice



Consideriamo una distribuzione di cariche piana e infinitamente estesa (ovvero, le cui dimensioni sono molto maggiori di quelle che stiamo considerando).

Essa può essere caratterizzata dalla sua densità superficiale di carica σ (carica per unità di superficie).

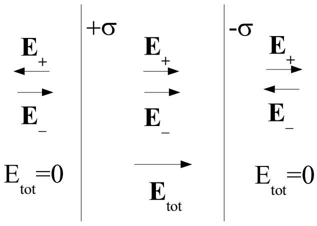
Per simmetria, il campo elettrico deve essere perpendicolare allo strato su cui sono distribuite le cariche ed il suo modulo deve dipendere unicamente dalla distanza *r* dallo strato stesso.

Prendiamo come superficie chiusa un cilindro avente asse perpendicolare al piano su cui sono distribuite le cariche. Applicando il teorema di Gauss, vediamo che il flusso del campo elettrico attraverso la superficie laterale è zero, per cui:

$$\Phi(\vec{E})=\frac{q_{int}}{\epsilon_0} \Rightarrow 2E\cdot S=\frac{\sigma S}{\epsilon_0} \Rightarrow E=\frac{\sigma}{2\epsilon_0} \quad .$$

Quindi *il campo elettrico di una distribuzione piana uniforme infinita di carica non dipende dalla distanza dalla distribuzione stessa, ma ha lo stesso modulo in tutto lo spazio.*

e. Distribuzione piana doppia



Consideriamo due distribuzioni di carica piane, parallele, infinitamente estese ed aventi densità superficiale di carica opposta $\pm\sigma$ (è il nostro modello per schematizzare un condensatore a facce piane e parallele).

Dal risultato precedente, tenendo conto del segno delle cariche, è immediato ricavare che:

il campo elettrico all'esterno delle due distribuzioni è nullo, mentre quello all'interno ha modulo:

$$E_{int}=\frac{\sigma}{\epsilon_0}$$

ed è uniforme, perpendicolare alle distribuzioni e diretto dalla distribuzione di carica positiva verso quella negativa.