2^A - MATEMATICA compito n°1 - 2013-2014

1. Risolvi le seguenti equazioni, disequazioni o sistemi di disequazioni:

- $\frac{(3x-1)^2}{6}-\frac{(1+x)^2}{3}-\frac{x(5x-1)}{6}-\frac{(x-1)^2}{3}\leq 0$;
- $(3x+1)^2-4x(x-2)\geq 5x(x+6)-16x$; $a(x-1)>x-2$;
- $x^2-x-2\leq 0$; $x^3-3x^2-x+3\geq 0$;
- $\frac{x^2-5x+6}{x^2-3x-10}\geq 0$; $1-\frac{6}{1-4x^2}\geq\frac{2}{2x-1}-\frac{3}{2x+1}$;
- $\begin{cases}3x-1<4+x\\ x-2\geq 0\\ 2x-1<x+3\end{cases}$; $\begin{cases}7-2x\geq 3x-1\\ x+9<0\\ 4(x+1)+3>x-1\end{cases}$;
- $|1-2x|=5+x$; $|2-x|=5+|2x+1|$;
- $|2+3x|\leq 5$; $|4x-3|>2$;
- $|1-2x|+x\leq 8$; $x\geq|2x-5|$.

2. Dati due numeri razionali non negativi *a* e *b*, definiamo la loro media aritmetica $m_a=\frac{a+b}{2}$ e la loro media geometrica $m_g=\sqrt{ab}$. Dimostra che $m_a\geq m_g$. In quale caso si ha $m_a=m_g$?

3. Considera un triangolo rettangolo isoscele ABC di ipotenusa AB.

   Per un punto generico P del lato AB traccia la perpendicolare ad AB che interseca le rette AC e BC rispettivamente nei punti E ed F. Dimostra che:

   - il triangolo EFC è isoscele;
   - la sua mediana CM è parallela ad AB.

<u>2^A</u> *- Correzione compito n°1*

1.

- $9x^2-6x+1-2-4x-2x^2-5x^2+x-2x^2+4x-2\le 0 \;\Rightarrow\; -5x-3\le 0 \;\Rightarrow\; x\ge -\frac{3}{5}$;
- $9x^2+6x+1-4x^2+8x\ge 5x^2+30x-16x \;\Rightarrow\; 1\ge 0 \;\; vera! \;\Rightarrow\; Sol: \forall x\in\mathbb{Q}$;
- $ax-a>x-2 \;\Rightarrow\; (a-1)x>a-2$. Quindi:

  se $a>1 \;\Rightarrow\; Sol:\; x>\frac{a-2}{a-1}$;

  se $a<1 \;\Rightarrow\; Sol:\; x<\frac{a-2}{a-1}$;

  se $a=1 \;\Rightarrow\; 0>2 \;\; vera! \;\; Sol: \forall x\in\mathbb{Q}$;
- $(x-2)(x+1)\le 0 \;\Rightarrow\; Sol:\; -1\le x\le 2$

	-1		2		
-	-	-	o	+	*x*-2
-	o	+	+	+	*x*+1
+	o	-	o	+	*f(x)*

- $x^2(x-3)-(x-3)\ge 0 \;\Rightarrow\; (x-3)(x+1)(x-1)\ge 0$

  $Sol:\; -1\le x\le 1 \;\vee\; x\ge 3$

	-1		1		3		
-	-	-	-	-	o	+	*x*-3
-	o	+	+	+	+	+	*x*+1
-	-	-	o	+	+	+	*x*-1
-	o	+	o	-	o	+	*f(x)*

- $\frac{(x-2)(x-3)}{(x-5)(x+2)}\ge 0$

  $Sol:\; x<-2 \;\vee\; 2\le x\le 3 \;\vee\; x>5$

	-2		2		3		5		
-	-	-	o	+	+	+	+	+	*x*-2
-	-	-	-	-	o	+	+	+	*x*-3
-	-	-	-	-	-	-	o	+	*x*-5
-	o	+	+	+	+	+	+	+	*x*+2
+	●	-	o	+	o	-	●	+	*f(x)*

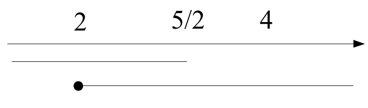
- $1+\frac{6}{(2x+1)(2x-1)}-\frac{2}{2x-1}+\frac{3}{2x+1}\ge 0 \;\Rightarrow$

  $\frac{4x^2-1+6-4x-2+6x-3}{(2x+1)(2x-1)}\ge 0 \;\Rightarrow$

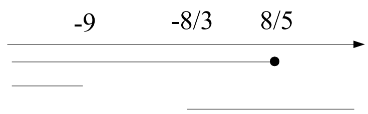
  $\frac{4x^2+2x}{(2x+1)(2x-1)}\ge 0 \;\Rightarrow\; \frac{2x(2x+1)}{(2x+1)(2x-1)}\ge 0 \;\Rightarrow\; Sol:\; x\le 0 \;\wedge\; x\ne -\frac{1}{2} \;\vee\; x>\frac{1}{2}$

	-1/2		0		1/2		
-	-	-	o	+	+	+	2*x*
-	-	-	-	-	o	+	2*x*-1
+	●	+	o	-	●	+	*f(x)*

- $\begin{cases} x<5/2 \\ x\ge 2 \\ x<4 \end{cases} \;\Rightarrow\; Sol:\; 2\le x<\frac{5}{2}$



- $\begin{cases} x\le 8/5 \\ x<-9 \\ x>-8/3 \end{cases} \;\Rightarrow\; Sol:\; \emptyset$



- Se $x\le\frac{1}{2} \;\Rightarrow\; 1-2x=5+x \;\Rightarrow\; x=-\frac{4}{3} \;\; acc.$

Se $x>\frac{1}{2} \Rightarrow 2x-1=5+x \Rightarrow x=6 \ \ acc.$ $\qquad$ $Sol: \ x=-\frac{4}{3} \ \vee \ x=6$

- Se $x\leq-\frac{1}{2} \Rightarrow 2-x=5-2x-1 \Rightarrow x=2 \ \ non\,acc.$

  Se $-\frac{1}{2}<x\leq 2 \Rightarrow 2-x=5+2x+1 \Rightarrow x=-\frac{4}{3} \ \ non\,acc.$

  Se $x>2 \Rightarrow x-2=5+2x+1 \Rightarrow x=-8 \ \ non\,acc.$

	-1/2		2		
+	+	+	o	-	2-x
-	o	+	+	+	2x+1

$Sol: \ \emptyset$

- $|2+3x|\leq 5 \Rightarrow -5\leq 2+3x\leq 5 \Rightarrow -7\leq 3x<3 \Rightarrow -\frac{7}{3}\leq x\leq 1$

- $|4x-3|>2 \Rightarrow 4x-3<-2 \ \vee \ 4x-3>2 \Rightarrow x<\frac{1}{4} \ \vee \ x>\frac{5}{4}$

- Se $x\leq\frac{1}{2} \Rightarrow 1-2x+x\leq 8 \Rightarrow x\geq -7 \Rightarrow Sol_1: \ -7\leq x\leq\frac{1}{2}$

  Se $x>\frac{1}{2} \Rightarrow 2x-1+x\leq 8 \Rightarrow x\leq 3 \Rightarrow Sol_2: \ \frac{1}{2}<x\leq 3$ $\qquad$ $Sol.\,diseq: \ -7\leq x\leq 3$

- Se $x\leq\frac{5}{2} \Rightarrow x\geq -2x+5 \Rightarrow x\geq\frac{5}{3} \Rightarrow Sol_1: \ \frac{5}{3}\leq x\leq\frac{5}{2}$

  Se $x>\frac{5}{2} \Rightarrow x\geq 2x-5 \Rightarrow x\leq 5 \Rightarrow Sol_2: \ \frac{5}{2}<x\leq 5$ $\qquad$ $Sol.\,diseq: \ \frac{5}{3}\leq x\leq 5$

2. Poniamo $\frac{a+b}{2}\geq\sqrt{ab}$ ed eleviamo al quadrato:

$$\frac{a^2+2ab+b^2}{4}\geq ab \Rightarrow a^2+2ab+b^2\geq 4ab \Rightarrow a^2-2ab+b^2\geq 0 \Rightarrow (a-b)^2\geq 0$$

che è vera $\forall a,b\in\mathbb{Q}$. E' valida l'uguaglianza quando $a=b$.

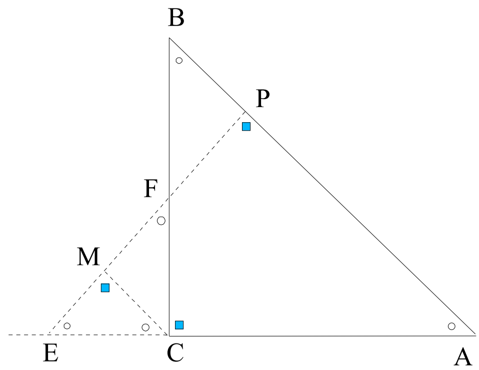
3. *Ipotesi*:

- $AC\perp CB$; $AC=CB$; $PE\perp AB$; $EM=MF$.

Tesi:

- $EC=FC$; $CM\parallel AB$.

Dimostrazione.



Poiché $AC=CB$, anche $\hat{A}=\hat{B}=45°$.

Quindi $F\hat{E}C=45°$ per la somma degli angoli interni del triangolo PAE e $E\hat{F}C=45°$ per la somma degli angoli interni del triangolo FEC.

Pertanto $EC=FC$ perché lati opposti ad angoli congruenti c.v.d.

$CM\perp EF$ perché la mediana relativa alla base di un triangolo isoscele è anche altezza.

Quindi $E\hat{C}M=45°$ per la somma degli angoli interni del triangolo ECM.

Le rette CM ed AB sono quindi parallele perché, tagliate dalla trasversale AC, formano gli angoli corrispondenti $\hat{A}$ e $E\hat{C}M$ congruenti c.v.d.

<u>2^A - MATEMATICA</u> compito n°2 - 2013-2014

1. Traccia una circonferenza di centro O (*di raggio uguale ad almeno 12 quadretti*).

   Traccia i diametri perpendicolari AB e DE. Prendi sull'arco AD un punto C tale che ad esso corrisponda un angolo al centro $A\hat{O}C=60°$. Dimostra che:

   a. la retta CE è la bisettrice dell'angolo $A\hat{C}B$;

   b. la retta CD è la bisettrice dell'angolo esterno di vertice C del triangolo ABC;

   c. se F ed H sono rispettivamente le proiezioni ortogonali di A e B sulla retta CD, i triangoli AFC e CHB sono isosceli;

   d. se N è l'ulteriore punto di intersezione di BH con la circonferenza, allora gli archi CD e BN sono congruenti;

   e. le rette DN e BC sono parallele;

   f. la retta OH è asse del segmento BC.

   g. Calcola la misura dell'angolo acuto formato dalle rette CE ed AB.

2. Enuncia e dimostra due teoremi a scelta tra quelli richiesti per questo compito.

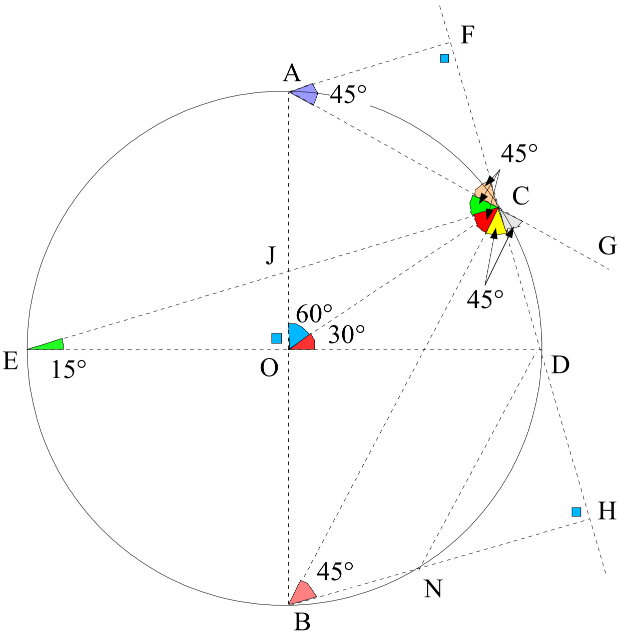
3. Risolvi le seguenti disequazioni:

   a. $\frac{x^2+x+5}{x+1}+\frac{4}{1-x^2}\leq\frac{2x^2-2x+3}{2x-2}$;

   b. $\frac{3}{x^2-5x+6}+\frac{4-x}{3-x}\geq\frac{6-x}{2-x}$;

   c. $|3x-5|\geq 2x+1$.

2^A - *Correzione compito n°2*



1. *Ipotesi*:
   - $AB \perp DE$; $A\hat{O}C = 60°$;
   - $AF \perp CD$; $BH \perp CD$.

   Tesi:
   - $A\hat{C}E = B\hat{C}E$;
   - $B\hat{C}D = D\hat{C}G$;
   - $AF = FC$; $BH = CH$;
   - $CD = BN$;
   - $BC \| DN$;
   - OH asse di BC.

   Dimostrazione.

   a. $A\hat{C}E = B\hat{C}E = 45°$ perché entrambi insistono su un quadrante di circonferenza, e quindi i loro corrispondenti angoli al centro sono retti c.v.d.

   b. $B\hat{C}D = 45°$ perché insiste su un quadrante di circonferenza; $D\hat{C}G = 45°$ per differenza, in quanto $A\hat{C}G$ è un angolo piatto c.v.d.

   c. Il triangolo AFC ha l'angolo in F retto per ipotesi e $A\hat{C}F = 45°$ perché opposto al vertice di $D\hat{C}G$. Quindi $F\hat{A}C = 45°$ perché la somma degli angoli interni è un angolo piatto. Pertanto AFC è un triangolo isoscele in quanto ha due angoli congruenti c.v.d.
   Un ragionamento analogo vale per il triangolo CHB.

   d. Sappiamo che gli archi BD e CN sono congruenti perché su di essi insistono gli angoli alla circonferenza $B\hat{C}D = C\hat{B}N = 45°$. Sottraendo ad entrambi l'arco DN, otteniamo che gli archi CD e BN sono congruenti per differenza c.v.d.

   e. Sappiamo che $CH = BH$ per dimostrazione precedente. Inoltre $CD = BN$ perché ad archi congruenti corrispondono corde congruenti. Quindi $DH = NH$ per differenza.
   Pertanto $H\hat{D}N = H\hat{N}D = 45°$ perché angoli alla base di un triangolo isoscele.
   Quindi le rette DN e BC sono parallele perché, tagliate dalla trasversale BH (o CH) formano angoli corrispondenti congruenti.

   f. $OB = OC$ perché raggi della circonferenza, quindi O appartiene all'asse del segmento BC;
   $HB = HC$ per dimostrazione precedente, quindi H appartiene all'asse del segmento BC;
   pertanto la retta OH è l'asse del segmento BC c.v.d.

   g. L'angolo al centro $C\hat{O}D = 30°$ per differenza, quindi il corrispondente angolo alla circonferenza $C\hat{E}D = 15°$.

Pertanto $E\hat{J}O = 75°$ dalla somma degli angoli interni del triangolo EJO.

2. Vedi libro di testo.

3.

a. $$\frac{2(x-1)(x^2+x+5)-8-(x+1)(2x^2-2x+3)}{2(x+1)(x-1)} \leq 0 \ \Rightarrow$$

$$\frac{2x^3+2x^2+10x-2x^2-2x-10-8-2x^3+2x^2-3x-2x^2+2x-3}{2(x+1)(x-1)} \leq 0 \ \Rightarrow$$

$$\frac{7(x-3)}{2(x+1)(x-1)} \leq 0$$

$Sol: \ x<-1 \ \vee \ 1<x \leq 3$.

	-1		1		3		
-	-	-	-	-	o	+	*x*-3
-	o	+	+	+	+	+	*x*+1
-	-	-	o	+	+	+	*x*-1
-	●	+	●	-	o	+	*f(x)*

b. $$\frac{3-(4-x)(x-2)+(6-x)(x-3)}{(x-2)(x-3)} \geq 0 \ \Rightarrow$$

$$\frac{3+x^2-6x+8-x^2+9x-18}{(x-2)(x-3)} \geq 0 \ \Rightarrow$$

$$\frac{3x-7}{(x-2)(x-3)} \geq 0$$

$Sol: \ 2<x \leq \frac{7}{3} \ \vee \ x>3$.

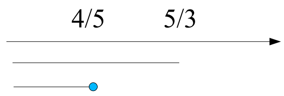
	2		7/3		3		
-	-	-	o	+	+	+	3*x*-7
-	o	+	+	+	+	+	*x*-2
-	-	-	-	-	o	+	*x*-3
-	●	+	o	-	●	+	*f(x)*

c. Segno dell'argomento del valore assoluto: $3x-5 \geq 0 \ \Rightarrow \ x \geq \frac{5}{3}$.

	5/3		
-	o	+	3*x*-5

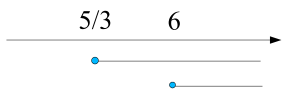
1° caso: $x<\frac{5}{3} \ \Rightarrow \ 5-3x \geq 2x+1 \ \Rightarrow \ 5x \leq 4 \ \Rightarrow \ x \leq \frac{4}{5}$.

Soluzione 1° caso: $\begin{cases} x<5/3 \\ x \leq 4/5 \end{cases} \Rightarrow \ S_1: \ x \leq \frac{4}{5}$.



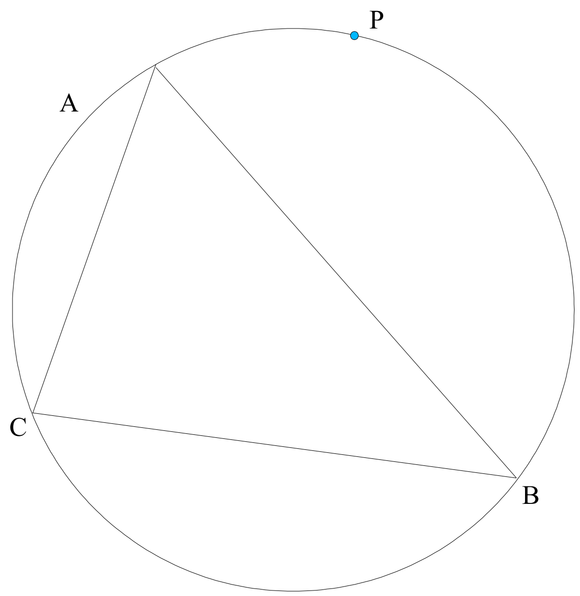
2° caso: $x \geq \frac{5}{3} \ \Rightarrow \ 3x-5 \geq 2x+1 \ \Rightarrow \ x \geq 6$.

Soluzione 2° caso: $\begin{cases} x \geq 5/3 \\ x \geq 6 \end{cases} \Rightarrow \ S_2: \ x \geq 6$.



Soluzione disequazione: $S_{tot} = S_1 \cup S_2: \ x \leq \frac{4}{5} \ \vee \ x \geq 6$.

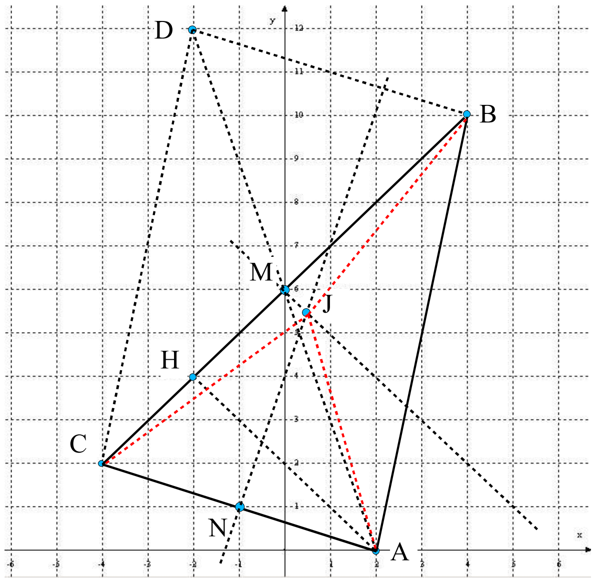
1. Dato il triangolo di vertici $A(2,0)$, $B(4,10)$, $C(-4,2)$, determina:
   a. la lunghezza e l'equazione del lato BC;
   b. le equazioni della mediana AM, dell'altezza AH e dell'asse relativi al lato BC;
   c. le coordinate del piede H dell'altezza AH relativa al lato BC;
   d. la misura dell'altezza AH e l'area del triangolo ABC;
   e. l'equazione dell'asse relativo al lato AC;
   f. le coordinate del circocentro J del triangolo;
   g. la misura del raggio della circonferenza circoscritta al triangolo ABC;
   h. le coordinate del punto D tale che il quadrilatero ABDC sia un parallelogramma;
   i. l'area del parallelogramma ABDC e le aree dei due triangoli in cui la mediana AM divide il triangolo ABC (*non devi svolgere alcun calcolo, ma solo motivare le risposte*).
2. Considera un punto P sull'arco AB della circonferenza $\mathcal{C}$ circoscritta al triangolo ABC. Conduci le perpendicolari PD, PE, PF rispettivamente alle rette dei lati AB, AC, BC. Dimostra che:



   a. i quattro quadrilateri ACBP, BFDP, AEPD, CFPE sono inscrivibili in altrettante circonferenze, e descrivi tali circonferenze circoscritte.
   b. $A\hat{P}B = E\hat{P}F$ (*utilizza la dimostrazione precedente*);
   c. $A\hat{P}E = B\hat{P}F$;
   d. $A\hat{P}E = A\hat{D}E$ (*disegna a parte la circonferenza circoscritta al quadrilatero AEPD*);
   e. $B\hat{P}F = B\hat{D}F$ (*disegna a parte la circonferenza circoscritta al quadrilatero BFDP*);
   f. i punti D, E, F sono allineati.

<u>2^A</u> *- Correzione compito n°3*

1.



a. $\overline{BC}=\sqrt{8^2+8^2}=\sqrt{128}$.

$m_{BC}=\frac{\Delta y}{\Delta x}=\frac{8}{8}=1 \Rightarrow y=x+q$.

Passaggio per B: $4+q=10 \Rightarrow q=6$.

Equazione lato BC: $y=x+6$.

b. Punto medio BC: $M(0,6)$.

$m_{AM}=\frac{\Delta y}{\Delta x}=\frac{-6}{2}=-3 \Rightarrow y=-3x+q$;

$q_{AM}=y_M=6$.

Equazione mediana AM: $y=-3x+6$.

$m_{AH}=m_{asse}=-\frac{1}{m_{BC}}=-1 \Rightarrow y=-x+q$.

Passaggio per A: $-2+q=0 \Rightarrow q=2$. Equazione altezza AH: $y=-x+2$.

Passaggio per M: $-6+q=0 \Rightarrow q=6$. Equazione asse di BC: $y=-x+6$.

c. $\begin{cases} y=x+6 \\ y=-x+2 \end{cases} \Rightarrow x+6=-x+2 \Rightarrow 2x=-4 \Rightarrow x_H=-2;\ y_H=4 \Rightarrow H(-2,4)$.

d. $\overline{AH}=\sqrt{4^2+4^2}=\sqrt{32}$. $Area_{ABC}=\frac{1}{2}\cdot BC\cdot AH=\frac{1}{2}\cdot\sqrt{128}\cdot\sqrt{32}=32$.

e. Punto medio AC: $N(-1,1)$. $m_{AC}=\frac{\Delta y}{\Delta x}=\frac{-2}{6}=-\frac{1}{3} \Rightarrow m_{asse}=-\frac{1}{m_{AC}}=3$.

Passaggio per N: $-3+q=1 \Rightarrow q=4$. Equazione asse di AC: $y=3x+4$.

f. Il circocentro J è il punto di intersezione degli assi dei lati:

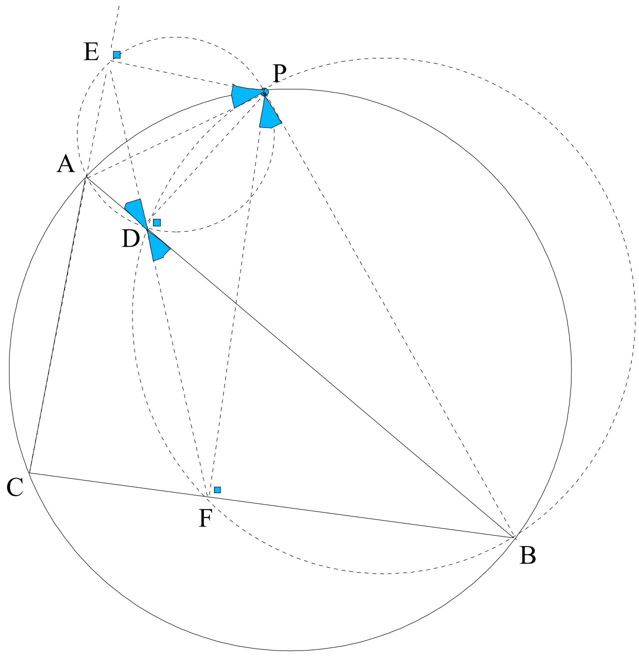
$\begin{cases} y=-x+6 \\ y=3x+4 \end{cases} \Rightarrow -x+6=3x+4 \Rightarrow 4x=2 \Rightarrow x_J=\frac{1}{2};\ y_J=\frac{11}{2} \Rightarrow J(\frac{1}{2},\frac{11}{2})$.

g. $r_{circ}=\overline{OA}=\overline{OB}=\overline{OC}=\sqrt{(\frac{3}{2})^2+(\frac{11}{2})^2}=\frac{\sqrt{130}}{2}$.

h. D è il simmetrico di A rispetto ad M: $\begin{cases} x_D=2x_M-x_A=-2 \\ y_D=2y_M-y_A=12 \end{cases} \Rightarrow D(-2,12)$.

i. Il parallelogramma ABDC è composto dai triangoli congruenti ABC e BDC, quindi: $Area_{ABDC}=2\,Area_{ABC}=64$. I triangoli AMB e AMC hanno le basi BM e MC congruenti per definizione di mediana, e la stessa altezza AH. Pertanto: $Area_{AMB}=Area_{AMC}=16$.

2.



a. Il quadrilatero ACBP è inscrivibile nella circonferenza $\mathcal{C}$ per ipotesi.

Il quadrilatero BFDP è inscrivibile nella circonferenza di diametro BP, in quanto gli angoli $B\hat{D}P$ e $B\hat{F}P$ sono retti, e quindi insistono su una semicirconferenza.

Il quadrilatero AEPD è inscrivibile nella circonferenza di diametro AP, in quanto ha gli angoli opposti $A\hat{D}P$ e $A\hat{E}P$ supplementari e retti.

Il quadrilatero CFPE è inscrivibile nella circonferenza di diametro CP, in quanto ha gli angoli opposti $C\hat{E}P$ e $C\hat{F}P$ supplementari e retti.

b. Poniamo $\hat{C}=\gamma$. Abbiamo quindi:

- $A\hat{P}B=180°-\gamma$ perché $A\hat{P}B$ e $\hat{C}$ sono angoli opposti del quadrilatero ACBP inscritto nella circonferenza $\mathcal{C}$;
- $E\hat{P}F=180°-\gamma$ perché $E\hat{P}F$ e $\hat{C}$ sono angoli opposti del quadrilatero CFPE inscritto nella circonferenza di diametro PC;

perciò $A\hat{P}B=E\hat{P}F$ c.v.d.

c. $A\hat{P}E=E\hat{P}F-A\hat{P}F$; $B\hat{P}F=A\hat{P}B-A\hat{P}F$.

Quindi $A\hat{P}E=B\hat{P}F=x$ perché differenza di angoli congruenti c.v.d.

d. $A\hat{P}E=A\hat{D}E=x$ perché angoli alla circonferenza che insistono sullo stesso arco AE della circonferenza circoscritta al quadrilatero AEPD.

e. $B\hat{P}F=B\hat{D}F=x$ perché angoli alla circonferenza che insistono sullo stesso arco BF della circonferenza circoscritta al quadrilatero BFDP.

f. Dalle dimostrazioni precedenti sappiamo che: $A\hat{D}E=A\hat{P}E=B\hat{P}F=B\hat{D}F=x$.

$B\hat{D}E=180°-x$ perché i punti BDA sono allineati per ipotesi.

Quindi $E\hat{D}F=E\hat{D}B+B\hat{D}F=180°-x+x=180°$.

Pertanto i punti D, E, F sono allineati c.v.d.

1. Risolvi i seguenti sistemi di equazioni lineari:

$$\begin{cases} \dfrac{12x-7}{2}-\dfrac{3(2x+y)}{10}=\dfrac{7}{10} \\ \dfrac{2x+y}{3}=\dfrac{4}{9}+\dfrac{x+y}{2} \end{cases} \quad ; \qquad \begin{cases} (x-y)(x+y)-2y+6=(x-y+2)(x+y+2) \\ \dfrac{7(x-y)}{9}-\dfrac{4x-5y}{6}=\dfrac{1}{2} \end{cases} \quad ;$$

$$\begin{cases} x+2y-2z=-5 \\ 2x-2y+z=-5 \\ x-y+2z=-1 \end{cases} \quad ; \qquad \begin{cases} \dfrac{x+1}{3x+3y}+\dfrac{x}{x-y}=\dfrac{4x^2+2xy+6}{3(x^2-y^2)} \\ \dfrac{x+3}{2x-y}+\dfrac{x-2y}{x-3y}=\dfrac{3x^2-8xy+2y^2+30}{(2x-y)(x-3y)} \end{cases} .$$

2. All'interno di un distributore automatico sono presenti 31 confezioni di cioccolatini.

   Le confezioni di tipo A contengono 3 cioccolatini e quelle di tipo B ne contengono 4.

   Sapendo che nel distributore ci sono complessivamente 104 cioccolatini, calcola quante sono le confezioni del tipo A e quante quelle del tipo B.

3. La corda CD di una circonferenza di raggio $r=15\,cm$ è tagliata nel suo punto medio M dal diametro AB. Sapendo che $9\overline{AM}+4\overline{MB}=240\,cm$, determina l'area del quadrilatero ACBD.

   Il quadrilatero ACBD è circoscrivibile ad una circonferenza? Perché?

4. Enuncia e dimostra il teorema sulle altezze relative ai lati di un triangolo.

5. Verifica se la coppia ordinata di numeri reali $(2,-1)$ è soluzione del sistema:

$$\begin{cases} 2x+xy-3y=5 \\ x-2xy+2y=4 \end{cases} .$$

6. I punti $A(0,3)$, $B(4,1)$ sono vertici del parallelogramma ABCD.

   Il lato CD passa per il punto $P(0,-3)$, e i lati AD e BC sono paralleli alla retta *r* di equazione $5x-2y+3=0$. Determina le equazioni dei lati AD e BC e le coordinate dei vertici C e D.

<u>2^A</u> *- Correzione compito n°4*

1.

a. $\begin{cases} \dfrac{60x-35-6x-3y}{10}=\dfrac{7}{10} \\ \dfrac{12x+6y}{18}=\dfrac{8+9x+9y}{18} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 54x-3y=42 \\ 3x-3y=8 \end{cases}$. Sottraggo membro a membro:

$51x=34 \;\Rightarrow\; x=\dfrac{2}{3} \;\Rightarrow\; 2-3y=8 \;\Rightarrow\; 3y=-6 \;\Rightarrow\; y=-2 \;\Rightarrow\; Sol:(\dfrac{2}{3},-2)$.

b. $\begin{cases} x^2-y^2-2y+6=x^2+4x+4-y^2 \\ \dfrac{14x-14y-12x+15y}{18}=\dfrac{9}{18} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 2x+y=1 \\ 2x+y=9 \end{cases}$.

Il sistema è impossibile perché: $\dfrac{a}{a'}=\dfrac{b}{b'}=1\neq\dfrac{c}{c'}=\dfrac{1}{9}$.

Oppure, sottraendo membro a membro, otteniamo: $0=8$ *falsa!*

c. $\begin{cases} x=-2y+2z-5 \\ -4y+4z-10-2y+z=-5 \\ -2y+2z-5-y+2z=-1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \rightarrow \\ -6y+5z=5 \\ -3y+4z=4 \end{cases}$.

Moltiplico la 2^ eq. per 2 e sottraggo membro a membro: $3z=3 \;\Rightarrow\; z=1 \;\Rightarrow$

$-3y+4=4 \;\Rightarrow\; y=0 \;\Rightarrow\; x=2-5=-3 \;\Rightarrow\; Sol:(-3,0,1)$.

d. $\begin{cases} \dfrac{(x+1)(x-y)+3x(x+y)}{3(x+y)(x-y)}=\dfrac{4x^2+2xy+6}{3(x+y)(x-y)} \\ \dfrac{(x+3)(x-3y)+(x-2y)(2x-y)}{(2x-y)(x-3y)}=\dfrac{3x^2-8xy+2y^2+30}{(2x-y)(x-3y)} \end{cases}$ $C.E.:\; x\neq\pm y \;\wedge\; x\neq\dfrac{y}{2} \;\wedge\; x\neq 3y$.

$\begin{cases} x^2-xy+x-y+3x^2+3xy=4x^2+2xy+6 \\ x^2-3xy+3x-9y+2x^2-xy-4xy+2y^2=3x^2-8xy+2y^2+30 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x-y=6 \\ x-3y=10 \end{cases}$

Sottraggo membro a membro: $2y=-4 \;\Rightarrow\; y=-2 \;\Rightarrow\; x=4 \;\Rightarrow\; Sol:(4,-2)\,accettabile$.

2. Se poniamo: $x=n°\,confezioni\,tipo\,A$; $y=n°\,confezioni\,tipo\,B$, abbiamo:

   $\begin{cases} x+y=31 \\ 3x+4y=104 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 3x+3y=93 \\ 3x+4y=104 \end{cases} \Rightarrow y=11 \;\Rightarrow\; x+11=31 \;\Rightarrow\; x=20$.

   Quindi le confezioni di tipo A sono 20 e quelle di tipo B sono 11.

3. Se poniamo $\overline{AM}=x$, $\overline{BM}=y$, possiamo impostare il sistema:

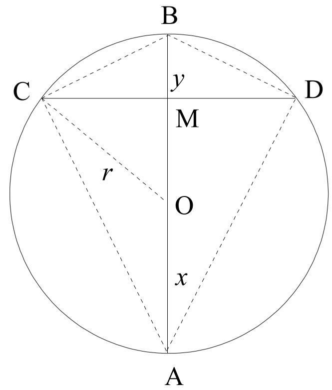
   $\begin{cases} x+y=30 \\ 9x+4y=240 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 4x+4y=120 \\ 9x+4y=240 \end{cases} \Rightarrow 5x=120 \;\Rightarrow\; x=24 \;\Rightarrow\; y=30-24=6$.

   Quindi: $AM=24\,cm$, $BM=6\,cm$, $OM=AM-AO=24-15=9\,cm$.

   Il triangolo OMC è rettangolo perché sappiamo che il diametro passante per il punto medio di una corda è perpendicolare alla corda stessa. Possiamo quindi applicare il teorema di Pitagora:

$CM=\sqrt{CO^2-OM^2}=\sqrt{15^2-9^2}=\sqrt{144}=12\,cm \;\Rightarrow\; CD=2\,CM=24\,cm$.

$Area_{ACBD}=\dfrac{AB\cdot CD}{2}=\dfrac{30\,cm\cdot 24\,cm}{2}=360\,cm^2$.



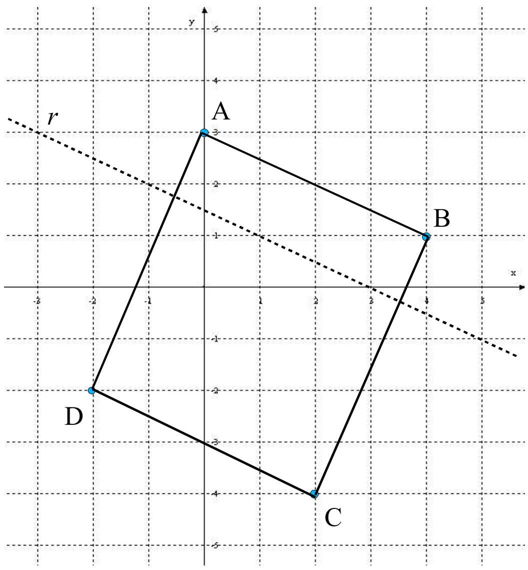
Poiché $BC=AD$ e $BD=AC$, il quadrilatero ACBD è circoscrivibile ad una circonferenza, in quanto la somma di due lati opposti è uguale alla somma degli altri due.

4. Vedi pag. G 188 libro di testo.

5. Sostituendo i valori dati nell'equazione, otteniamo: $\begin{cases} 4-2+3=5 & vera\,! \\ 2+4-2=4 & vera\,! \end{cases}$.

   Quindi la coppia ordinata $(2,-1)$ è soluzione del sistema dato.

6. Poiché $CD \| AB$, allora: $m_{CD}=m_{AB}=\dfrac{y_B-y_A}{x_B-x_A}=\dfrac{-2}{4}=-\dfrac{1}{2}$.



   Imponendo il passaggio per P, l'equazione di CD risulta:

   $y=-\dfrac{1}{2}x-3$.

   Poiché $AD \| BC \| r$, allora: $m_{AD}=m_{BC}=m_r=\dfrac{5}{2}$.

   Imponendo il passaggio per A, ricaviamo l'equazione di AD:

   $y=\dfrac{5}{2}x+3$.

   Imponendo il passaggio per B, ricaviamo l'equazione di BC:

   $y-1=\dfrac{5}{2}(x-4) \;\Rightarrow\; y=\dfrac{5}{2}x-9$.

   Il vertice D è l'intersezione delle rette CD e AD:

   $\begin{cases} y=5/2\,x+3 \\ y=-1/2\,x-3 \end{cases} \Rightarrow \dfrac{5}{2}x+3=-\dfrac{1}{2}x-3 \Rightarrow 3x=-6 \Rightarrow x=-2 \Rightarrow y=-2 \Rightarrow D(-2,-2)$.

   Il vertice C è l'intersezione delle rette CD e BC:

   $\begin{cases} y=5/2\,x-9 \\ y=-1/2\,x-3 \end{cases} \Rightarrow \dfrac{5}{2}x-9=-\dfrac{1}{2}x-3 \Rightarrow 3x=6 \Rightarrow x=2 \Rightarrow y=-4 \Rightarrow C(2,-4)$.

   In alternativa, il vertice C può essere determinato come simmetrico del vertice A rispetto al punto medio della diagonale BD.

2^A - MATEMATICA compito n°5 - 2013-2014

1. Semplifica i seguenti radicali:

$$\sqrt[4]{\frac{x+y}{xy}\left(\frac{1}{x}+\frac{1}{y}\right)} \quad ; \qquad \sqrt[6]{0{,}027} \quad ; \qquad \sqrt{x^6-2x^5+x^4} \quad ; \qquad \sqrt[4]{(-2)^6} \quad ; \qquad \sqrt[8]{1+\frac{2x^2+1}{x^4}} \quad ;$$

$$\sqrt{1+\frac{16}{9}} \quad ; \qquad \sqrt{y^6+\frac{y^{10}}{a^4}+\frac{2y^8}{a^2}} \quad ; \qquad \sqrt[4]{a^4+a^2+\frac{1}{4}} \quad ; \qquad \sqrt[9]{\frac{(1-x)^4}{(1-x^2)(x+1)^5}} \quad ; \qquad \sqrt[4]{\frac{a^5+4a^3+4a}{a^3b^6}} \quad .$$

2. Svolgi le seguenti operazioni contenenti radicali e semplifica i risultati ottenuti:

$$\sqrt{\frac{1}{b^2}-\frac{1}{a^2}}:\sqrt{\frac{1}{b}-\frac{1}{a}} \quad ; \qquad \sqrt{\frac{1}{x^2}+\frac{1}{y^2}-\frac{2}{xy}}:\sqrt[3]{\frac{x}{y}-\frac{y}{x}} \quad ; \qquad \sqrt[3]{x\sqrt{x}} \quad ; \qquad (2\sqrt[3]{3})^4 \quad ;$$

$$\frac{3}{4}\sqrt{80}-\frac{2}{3}\sqrt{45}+\frac{5}{2}\sqrt{12}-\frac{2}{5}\sqrt{75} \quad ; \qquad (2\sqrt{3}+3)^2 \quad ; \qquad (2+\sqrt{2})^3 \quad ;$$

$$\frac{1}{x-\sqrt{x^2-1}}-\frac{1}{x+\sqrt{x^2-1}} \quad ; \qquad \frac{(5-\sqrt{24})(\sqrt{75}+\sqrt{50})}{\sqrt{75}-\sqrt{50}} \quad .$$

3. Trasporta fuori dal segno di radice tutti i fattori per cui questo è possibile:

$$\sqrt{720} \quad ; \qquad \sqrt{1200} \quad ; \qquad \sqrt{a^2+a^2b^2} \quad ; \qquad \sqrt{\frac{a}{x^2}+\frac{2a}{xy}+\frac{a}{y^2}} \quad ;$$

$$\sqrt[3]{a^6+a^3} \quad ; \qquad \sqrt{a^5+2a+\frac{1}{a^3}} \quad ; \qquad \sqrt{\frac{1}{a^4}+\frac{1}{a^2b^2}} \quad ; \qquad \sqrt{(a^2+a)(a^2-1)} \quad .$$

4. Scomponi i seguenti polinomi: x^2-2 ; $2x^2-2\sqrt{2}x+1$; x^3-3 .

5. Risolvi le seguenti equazioni e disequazioni:

$$\frac{x-2}{\sqrt{3}-1}+\frac{2x}{\sqrt{3}+1}=3 \quad ; \qquad (1-\sqrt{2})x-\sqrt{2}+1\geq 0 \quad .$$

6.

- Dimostra che l'operazione $\sqrt[3]{5}$ ammette come risultato un numero irrazionale.
- Enuncia e dimostra la proprietà invariantiva dei radicali.
- Spiega se il numero 2,1011001110001111000... è razionale o irrazionale.
- Dati i numeri $a=1{,}909900999000...$ e $b=1{,}090099000999...$ calcola $a+b$.

- Senza usare la calcolatrice, verifica che $\sqrt{6+4\sqrt{2}}+\sqrt{6-4\sqrt{2}}=4$.

<u>2^A</u> - Correzione compito n°5

1.

- $\sqrt[4]{\frac{x+y}{xy}\cdot\frac{x+y}{xy}}=\sqrt[4]{\frac{(x+y)^2}{x^2y^2}}=\sqrt{\frac{x+y}{xy}}$;
- $\sqrt[6]{0{,}027}=\sqrt[6]{\frac{27}{1000}}=\sqrt[6]{(\frac{3}{10})^3}=\sqrt{\frac{3}{10}}$;
- $\sqrt{x^4(x^2-2x+1)}=\sqrt{x^4(x-1)^2}=x^2(x-1)$;
- $\sqrt[4]{(-2)^6}=\sqrt[4]{2^6}=\sqrt{2^3}=2\sqrt{2}$;
- $\sqrt[8]{\frac{x^4+2x^2+1}{x^4}}=\sqrt[8]{\frac{(x^2+1)^2}{x^4}}=\sqrt[4]{\frac{x^2+1}{x^2}}$;
- $\sqrt{1+\frac{16}{9}}=\sqrt{\frac{25}{9}}=\frac{5}{3}$;
- $\sqrt{\frac{y^{10}+2a^2y^8+a^4y^6}{a^4}}=\sqrt{\frac{y^6(y^2+a^2)^2}{a^4}}=\frac{y^3(y^2+a^2)}{a^2}$;
- $\sqrt[4]{(a^2+\frac{1}{2})^2}=\sqrt{a^2+\frac{1}{2}}$;
- $\sqrt[9]{\frac{(1-x)^4}{(1+x)(1-x)(x+1)^5}}=\sqrt[9]{\frac{(1-x)^3}{(1+x)^6}}=\sqrt[3]{\frac{1-x}{(1+x)^2}}$;
- $\sqrt[4]{\frac{a(a^2+2)^2}{a^3b^6}}=\sqrt{\frac{a^2+2}{ab^3}}=\frac{1}{b}\sqrt{\frac{a^2+2}{ab}}$.

2.

- $\sqrt{\frac{a^2-b^2}{a^2b^2}}:\sqrt{\frac{a-b}{ab}}=\sqrt{\frac{(a+b)(a-b)}{a^2b^2}\cdot\frac{ab}{a-b}}=\sqrt{\frac{a+b}{ab}}$;
- $\sqrt{\frac{x^2-2xy+y^2}{x^2y^2}}:\sqrt[3]{\frac{x^2-y^2}{xy}}=\sqrt[6]{\frac{(x-y)^6}{x^6y^6}}\cdot\sqrt[6]{\frac{x^2y^2}{(x+y)^2(x-y)^2}}=\sqrt[6]{\frac{(x-y)^4}{x^4y^4(x-y)^2}}=\sqrt[3]{\frac{(x-y)^2}{x^2y^2(x-y)}}$;
- $\sqrt[3]{x\sqrt{x}}=\sqrt[3]{\sqrt{x^3}}=\sqrt{x}$;
- $(2\sqrt[3]{3})^4=2^4\sqrt[3]{3^4}=16\cdot 3\sqrt[3]{3}=48\sqrt[3]{3}$;
- $\frac{3}{4}\sqrt{2^4\cdot 5}-\frac{2}{3}\sqrt{3^2\cdot 5}+\frac{5}{2}\sqrt{2^2\cdot 3}-\frac{2}{5}\sqrt{3\cdot 5^2}=3\sqrt{5}-2\sqrt{5}+5\sqrt{3}-2\sqrt{3}=\sqrt{5}+3\sqrt{3}$;
- $(2\sqrt{3}+3)^2=4\cdot 3+12\sqrt{3}+9=21+12\sqrt{3}$;
- $(2+\sqrt{2})^3=8+12\sqrt{2}+6\cdot 2+\sqrt{2^3}=20+14\sqrt{2}$;

- $$\frac{x+\sqrt{x^2-1}-x+\sqrt{x^2-1}}{(x+\sqrt{x^2-1})(x-\sqrt{x^2-1})}=\frac{2\sqrt{x^2-1}}{x^2-x^2+1}=2\sqrt{x^2-1}\quad ;$$
- $$\frac{(5-2\sqrt{6})(5\sqrt{3}+5\sqrt{2})}{5\sqrt{3}-5\sqrt{2}}=\frac{5(5\sqrt{3}+5\sqrt{2}-6\sqrt{2}-4\sqrt{3})}{5(\sqrt{3}-\sqrt{2})}=\frac{\sqrt{3}-\sqrt{2}}{\sqrt{3}-\sqrt{2}}=1\quad .$$

3.

- $\sqrt{720}=\sqrt{2^4\cdot 3^2\cdot 5}=12\sqrt{5}\quad ;$
- $\sqrt{1200}=\sqrt{2^4\cdot 3\cdot 5^2}=20\sqrt{3}\quad ;$
- $\sqrt{a^2+a^2b^2}=\sqrt{a^2(1+b^2)}=a\sqrt{1+b^2}\quad ;$
- $$\sqrt{\frac{a(x^2+2xy+y^2)}{x^2y^2}}=\frac{x+y}{xy}\sqrt{a}\quad ;$$
- $\sqrt[3]{a^6+a^3}=\sqrt[3]{a^3(a^3+1)}=a\sqrt[3]{a^3+1}\quad ;$
- $$\sqrt{\frac{a^8+2a^4+1}{a^3}}=\sqrt{\frac{(a^4+1)^2}{a^3}}=\frac{a^4+1}{a\sqrt{a}}\quad ;$$
- $$\sqrt{\frac{1}{a^4}+\frac{1}{a^2b^2}}=\sqrt{\frac{a^2+b^2}{a^4b^2}}=\frac{\sqrt{a^2+b^2}}{a^2b}\quad ;$$
- $\sqrt{a(a+1)(a+1)(a-1)}=(a+1)\sqrt{a(a-1)}\quad .$

4.

- $x^2-2=(x+\sqrt{2})(x-\sqrt{2})\quad ;$
- $2x^2-2\sqrt{2}x+1=(x\sqrt{2}-1)^2\quad ;$
- $x^3-3=(x-\sqrt[3]{3})(x^2+x\sqrt[3]{3}+\sqrt[3]{9})\quad .$

5.

- $(\sqrt{3}+1)(x-2)+2x(\sqrt{3}-1)=3(\sqrt{3}+1)(\sqrt{3}-1)\ \Rightarrow\ x\sqrt{3}+x-2\sqrt{3}-2+2x\sqrt{3}-2x=6\ \Rightarrow$

  $$x(3\sqrt{3}-1)=8+2\sqrt{3}\ \Rightarrow\ x=\frac{8+2\sqrt{3}}{3\sqrt{3}-1}\cdot\frac{3\sqrt{3}+1}{3\sqrt{3}+1}=\frac{24\sqrt{3}+8+18+2\sqrt{3}}{26}=\frac{26(\sqrt{3}+1)}{26}=\sqrt{3}+1\quad ;$$
- $$(1-\sqrt{2})x\ge\sqrt{2}-1\ \Rightarrow\ x\le\frac{\sqrt{2}-1}{1-\sqrt{2}}\ \Rightarrow\ x\le -1\quad .$$

6.

- Supponiamo per assurdo che $\sqrt[3]{5}=\frac{a}{b}$ e procediamo come a pag. 775 del libro di testo.
- Vedi pag. 783 del libro di testo.
- E' irrazionale, in quanto decimale illimitato non periodico.
- $a+b=2,\overline{9}=3\quad .$
- Eleviamo al quadrato l'uguaglianza:

  $6+4\sqrt{2}+2\sqrt{(6+4\sqrt{2})(6-4\sqrt{2})}+6-4\sqrt{2}=16\ \Rightarrow\ 12+2\sqrt{36-32}=16\ \Rightarrow\ 12+4=16\ \ \textit{vera!}$

2^A - MATEMATICA compito n°6 - 2013-2014

1. Risolvi con il metodo più appropriato:

$2x^2+x-6=0$; $2x^2-1=0$; $3(2x+1)^2=0$; $-1-x^2=0$;

$x^2+3x+6=0$; $(2x-1)(3x+2)=0$; $4x^2=0$; $x^2+6x+4=0$;

$x^2+16=0$; $-x^2+4x-4=0$; $9x-x^2=0$; $3x^2+12x+9=0$;

$18-x^2=0$; $9x^2+6x=0$; $x(x-10)=-16$; $x^2+2\sqrt{2}x-6=0$.

2. Risolvi le seguenti equazioni fratte:

- $\dfrac{1}{x^2-3x+2}-\dfrac{x-2}{x^2-1}=\dfrac{x}{2(x^2-x-2)}$;
- $\dfrac{2x-1}{x^3+x^2-x-1}+\dfrac{2x-3}{x^3-x^2-x+1}=\dfrac{2}{x^2-1}$.

3. Una ditta spende ogni giorno 750 € per gli stipendi dei suoi operai. Se la ditta riducesse il personale di 5 unità e aumentasse lo stipendio giornaliero di 10 €, allora la spesa giornaliera sarebbe di 800 €. Calcola il numero degli operai della ditta e qual è il loro stipendio.

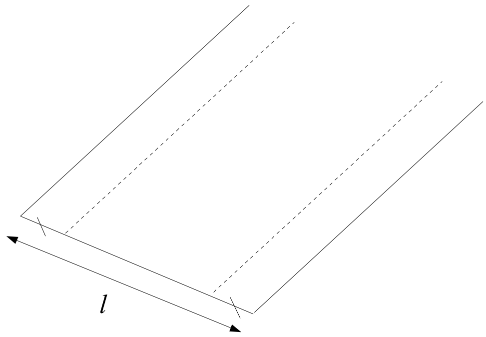
4. Da una striscia metallica di larghezza $l=1\,m$ vogliamo ottenere, piegandone i bordi come indicato nella figura allegata, una grondaia avente sezione rettangolare di area $A=1200\,cm^2$. Calcola la larghezza dei bordi da piegare.

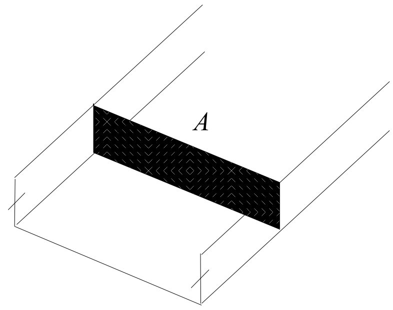
5. Semplifica le seguenti frazioni:

$\dfrac{x^2-1}{2x^2-x-1}$; $\dfrac{x^2-3x-4}{4x^2-14x-8}$; $\dfrac{6x^2+x-1}{8x^2+2x-1}$; $\dfrac{x^2-8ax-9a^2}{2x^2+ax-a^2}$.

6. Data l'equazione $kx^2-(2k-1)x+(k-3)=0$, determina per quali valori del parametro *k*:

- l'equazione è di primo grado, e determina la soluzione;
- l'equazione è pura, e determina le eventuali soluzioni;
- l'equazione è spuria, e determina le soluzioni;
- l'equazione ha radici reali, e determina le soluzioni;
- l'equazione ha due radici reali e coincidenti, e determina tali soluzioni.


l


A

<u>2^A</u> - *Correzione compito n°6*

1.

- $2x^2+x-6=0 \;\Rightarrow\; x=\dfrac{-1\pm\sqrt{1+48}}{4}=\dfrac{-1\pm 7}{4} \;\Rightarrow\; x_1=-2;\;\; x_2=\dfrac{3}{2}$;
- $2x^2-1=0 \;\Rightarrow\; x^2=\dfrac{1}{2} \;\Rightarrow\; x=\dfrac{\pm\sqrt{2}}{2}$;
- $3(2x+1)^2=0 \;\Rightarrow\; (2x+1)^2=0 \;\Rightarrow\; 2x+1=0 \;\Rightarrow\; x_1=x_2=-\dfrac{1}{2}$;
- $-1-x^2=0 \;\Rightarrow\; x^2=-1 \;\; \textit{non ha soluzioni}$;
- $x^2+3x+6=0 \;\Rightarrow\; \Delta=9-24<0 \;\Rightarrow\; \textit{non ha soluzioni}$;
- $(2x-1)(3x+2)=0 \;\Rightarrow\; 2x-1=0 \;\vee\; 3x+2=0 \;\Rightarrow\; x_1=\dfrac{1}{2};\;\; x_2=-\dfrac{2}{3}$;
- $4x^2=0 \;\Rightarrow\; x^2=0 \;\Rightarrow\; x_1=x_2=0$;
- $x^2+6x+4=0 \;\Rightarrow\; x=\dfrac{-6\pm\sqrt{36-16}}{2}=\dfrac{-6\pm 2\sqrt{5}}{2}=-3\pm\sqrt{5}$;
- $x^2+16=0 \;\Rightarrow\; x^2=-16 \;\; \textit{non ha soluzioni}$;
- $-x^2+4x-4=0 \;\Rightarrow\; -(x-2)^2=0 \;\Rightarrow\; x-2=0 \;\Rightarrow\; x_1=x_2=2$;
- $9x-x^2=0 \;\Rightarrow\; x(9-x)=0 \;\Rightarrow\; x_1=0;\;\; x_2=9$;
- $3x^2+12x+9=0 \;\Rightarrow\; x^2+4x+3=0 \;\Rightarrow\; (x+3)(x+1)=0 \;\Rightarrow\; x_1=-3;\;\; x_2=-1$;
- $18-x^2=0 \;\Rightarrow\; x^2=18 \;\Rightarrow\; x=\pm 3\sqrt{2}$;
- $9x^2+6x=0 \;\Rightarrow\; 3x(3x+2)=0 \;\Rightarrow\; 3x=0 \;\vee\; 3x+2=0 \;\Rightarrow\; x_1=0;\;\; x_2=-\dfrac{2}{3}$;
- $x(x-10)=-16 \;\Rightarrow\; x^2-10x+16=0 \;\Rightarrow\; (x-2)(x-8)=0 \;\Rightarrow\; x_1=2;\;\; x_2=8$;
- $x^2+2\sqrt{2}x-6=0 \;\Rightarrow\; x=\dfrac{-2\sqrt{2}\pm\sqrt{8+24}}{2}=\dfrac{-2\sqrt{2}\pm 4\sqrt{2}}{2} \;\Rightarrow\; x_1=-3\sqrt{2};\;\; x_2=\sqrt{2}$.

2.

- $\dfrac{1}{(x-2)(x-1)}-\dfrac{x-2}{(x+1)(x-1)}=\dfrac{x}{2(x-2)(x+1)}$

  $\dfrac{2(x+1)-2(x-2)^2}{2(x-2)(x+1)(x-1)}=\dfrac{x(x-1)}{2(x-2)(x+1)(x-1)}$ $\qquad$ $C.E.:\;\; x\neq 2 \;\wedge\; x\neq\pm 1$

  $2x+2-2x^2+8x-8=x^2-x \;\Rightarrow\; 3x^2-11x+6=0 \;\Rightarrow$

  $x=\dfrac{11\pm\sqrt{121-72}}{6}=\dfrac{11\pm 7}{6} \;\Rightarrow\; x_1=\dfrac{2}{3}\;\; acc.;\;\; x_2=3\;\; acc.$

- $\dfrac{2x-1}{(x+1)^2(x-1)}+\dfrac{2x-3}{(x+1)(x-1)^2}=\dfrac{2}{(x+1)(x-1)}$

$$\frac{(2x-1)(x-1)+(2x-3)(x+1)}{(x+1)^2(x-1)^2}=\frac{2(x+1)(x-1)}{(x+1)^2(x-1)^2} \qquad C.E.:\ x\neq\pm 1$$

$$2x^2-3x+1+2x^2-x-3=2x^2-2 \Rightarrow 2x^2-4x=0 \Rightarrow x_1=0 \ \ acc.;\ \ x_2=2 \ \ acc.$$

3. Poniamo $n=n°\,operai$, con $n\in\mathbb{N} \wedge n>5$.

   Lo stipendio giornaliero attuale in euro è: $750/n$. Diminuendo il numero di operai e aumentando la spesa, lo stipendio diventerebbe: $800/(n-5)$. Sappiamo dal testo che:

   $$\frac{750}{n}+10=\frac{800}{n-5} \Rightarrow 750n-3750+10n^2-50n=800 \Rightarrow n^2-10n-375=0 \Rightarrow$$

   $$n=5\pm\sqrt{25+375}=5\pm 20 \Rightarrow n_1=-15 \ \ non\,acc.;\ \ n_2=25 \ \ acc.$$

   La ditta ha quindi 25 operai, e ognuno di loro guadagna $750:25=30\,€/giorno$.

4. Poniamo $x=larghezza\ \ bordo\ \ in\ \ cm$, con $0\leq x\leq 50$.

   La sezione che si forma è un rettangolo di base $100-2x$ e altezza x. Impostiamo l'equazione:

   $$x(100-2x)=1200 \Rightarrow x^2-50x+600=0 \Rightarrow x=25\pm\sqrt{625-600}=25\pm 5 \Rightarrow$$

   $x_1=20;\ x_2=30$. Poiché entrambe le soluzioni rientrano nelle condizioni di esistenza, possiamo piegare i bordi della striscia di $20\,cm$ oppure di $30\,cm$.

5.
   - $\dfrac{x^2-1}{2x^2-x-1}=\dfrac{(x+1)(x-1)}{(2x+1)(x-1)}=\dfrac{x+1}{2x+1}$;
   - $\dfrac{x^2-3x-4}{4x^2-14x-8}=\dfrac{(x-4)(x+1)}{2(2x+1)(x-4)}=\dfrac{x+1}{2(2x+1)}$;
   - $\dfrac{6x^2+x-1}{8x^2+2x-1}=\dfrac{(2x+1)(3x-1)}{(2x+1)(4x-1)}=\dfrac{3x-1}{4x-1}$;
   - $\dfrac{x^2-8ax-9a^2}{2x^2+ax-a^2}=\dfrac{(x-9a)(x+a)}{(2x-a)(x+a)}=\dfrac{x-9a}{2x-a}$.

6.
   - per $k=0$ l'eq. è di primo grado: $x-3=0 \Rightarrow x=3$;
   - per $k=1/2$ l'eq. è pura: $x^2-5=0 \Rightarrow x=\pm\sqrt{5}$;
   - per $k=3$ l'eq. è spuria: $3x^2-5x=0 \Rightarrow x_1=0;\ x_2=5/3$;
   - poiché $\Delta=(2k-1)^2-4k(k-3)=8k+1$, per $k\geq -1/8$ l'eq. ha radici reali:

     $$x=\frac{2k-1\pm\sqrt{8k+1}}{2k} \ ;$$
   - per $k=-1/8$ l'eq. ha due radici reali e coincidenti: $x^2-10x+25=0 \Rightarrow x=5$.

1. Risolvi le seguenti equazioni di grado superiore al secondo:

   $x^3+16=0$; $64x^5-1=0$;

   $x^4+16=0$; $x^8-16=0$;

   $x^3+x^2-4x-4=0$; $x(x^2+5)-6x^2=0$;

   $x^5+2x^4-16x-32=0$; $2x^4-7x^3+x^2+7x-3=0$;

   $2x^5+x^4-11x^3+7x^2-13x+6=0$; $4x^4-25x^2+36=0$;

   $8x^6-7x^3-1=0$; $4x^5-4x^4-x^3+x^2-18x+18=0$.

2. In un triangolo rettangolo, l'altezza relativa all'ipotenusa misura $6\sqrt{2}\,cm$ e divide l'ipotenusa in due segmenti tali che il maggiore supera di $\sqrt{2}\,cm$ il doppio del minore.

   Calcola il perimetro e l'area del rettangolo.

3. Un quadrato è inscritto in una semicirconferenza di raggio $r=10\,cm$. (*Un lato del quadrato giace sul diametro, e i due vertici del lato opposto appartengono alla semicirconferenza*).

   Determina il lato del quadrato.

Svolgi uno a scelta dei seguenti quesiti:

4. Enuncia e dimostra il primo teorema di Euclide.

5. Enuncia e dimostra il teorema di Pitagora e il secondo teorema di Euclide.

<u>2^A</u> *- Correzione compito n°6*

1.

- $x^3+16=0 \Rightarrow x^3=-16 \Rightarrow x=-\sqrt[3]{2^4}=-2\sqrt[3]{2}$;
- $64x^5-1=0 \Rightarrow x^5=\dfrac{1}{64} \Rightarrow x=\dfrac{1}{\sqrt[5]{2^6}}=\dfrac{1}{2\sqrt[5]{2}}$;
- $x^4+16=0 \Rightarrow x^4=-16$ *non ha soluzioni* ;
- $x^8-16=0 \Rightarrow x^8=16 \Rightarrow x=\pm\sqrt[8]{2^4}=\pm\sqrt{2}$;
- $x^3+x^2-4x-4=0 \Rightarrow x^2(x+1)-4(x+1)=0 \Rightarrow (x+1)(x^2-4)=0 \Rightarrow$
  $x+1=0 \Rightarrow x_1=-1 \lor x^2-4=0 \Rightarrow x_{23}=\pm 2$;
- $x(x^2+5)-6x^2=0 \Rightarrow x(x^2-6x+5)=0 \Rightarrow x(x-1)(x-5)=0 \Rightarrow x_1=0 \lor x_2=1 \lor x_3=5$;
- $x^5+2x^4-16x-32=0 \Rightarrow x^4(x+2)-16(x+2)=0 \Rightarrow (x+2)(x^4-16)=0 \Rightarrow$
  $x+2=0 \Rightarrow x_1=-2 \lor x^4-16=0 \Rightarrow x_{23}=\pm 2$;
- $2x^4-7x^3+x^2+7x-3=0$. $P(1)=0$, quindi $P(x)$ è divisibile per $x-1$.

	2	−7	1	7	−3
1		2	−5	−4	3
	2	−5	−4	3	0

$(x-1)(2x^3-5x^2-4x+3)=0$. $P(-1)=0$, quindi $P(x)$ è divisibile per $x+1$.

	2	−5	−4	3
−1		−2	7	−3
	2	−7	3	0

$(x-1)(x+1)(2x^2-7x+3)=0 \Rightarrow x_{12}=\pm 1 \lor x=\dfrac{7\pm\sqrt{49-24}}{4}=\dfrac{7\pm 5}{4} \Rightarrow x_3=\dfrac{1}{2};\ x_4=3$.

- $2x^5+x^4-11x^3+7x^2-13x+6=0$. $P(2)=114-114=0 \Rightarrow P(x)$ è divisibile per $x-2$.

	2	1	−11	7	−13	6
2		4	10	−2	10	−6
	2	5	−1	5	−3	0

$(x-2)(2x^4+5x^3-x^2+5x-3)=0$. $P(-3)=162-162=0 \Rightarrow P(x)$ è divisibile per $x+3$.

	2	5	−1	5	−3
−3		−6	3	−6	3
	2	−1	2	−1	0

$(x-2)(x+3)(2x^3-x^2+2x-1)=0 \Rightarrow (x-2)(x+3)[x^2(2x-1)+(2x-1)]=0 \Rightarrow$

$(x-2)(x+3)(2x-1)(x^2+1)=0 \Rightarrow x_1=2 \lor x_2=-3 \lor x_3=1/2 \lor x^2+1=0 \Rightarrow$ *non ha sol.*

- Poniamo $x^2=t$: $4t^2-25t+36=0 \Rightarrow t=\frac{25\pm\sqrt{625-576}}{8}=\frac{25\pm 7}{8} \Rightarrow$

  $t_1=\frac{9}{4} \Rightarrow x_{12}=\pm\frac{3}{2}$; $t_2=4 \Rightarrow x_{34}=\pm 2$.

- Poniamo $x^3=t$: $8t^2-7t-1=0 \Rightarrow t=\frac{7\pm\sqrt{49+32}}{16}=\frac{7\pm 9}{16} \Rightarrow$

  $t_1=-\frac{1}{8} \Rightarrow x_1=-\frac{1}{2}$; $t_2=1 \Rightarrow x_2=1$.

- $4x^4(x-1)-x^2(x-1)-18(x-1)=0 \Rightarrow (x-1)(4x^4-x^2-18)=0 \Rightarrow x_1=1$.

  Poniamo $x^2=t$: $4t^2-t-18=0 \Rightarrow t=\frac{1\pm\sqrt{1+288}}{8}=\frac{1\pm 17}{8} \Rightarrow$

  $t_1=-2 \Rightarrow \textit{non ha sol.}$; $t_2=\frac{9}{4} \Rightarrow x_{23}=\pm\frac{3}{2}$.

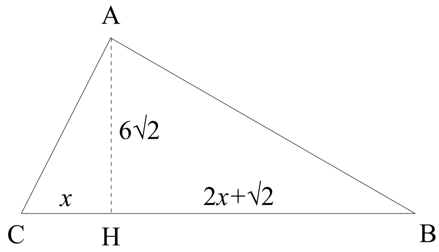
2. Poniamo $CH=x \Rightarrow BH=2\sqrt{2}$.

   Applichiamo il 2° teorema di Euclide:

   $CH\cdot BH=AH^2 \Rightarrow x(2x+\sqrt{2})=(6\sqrt{2})^2 \Rightarrow$

   $2x^2+\sqrt{2}x-72=0 \Rightarrow x=\frac{-\sqrt{2}\pm\sqrt{2+576}}{4}=$

   $\frac{-\sqrt{2}\pm 17\sqrt{2}}{4} \Rightarrow x_1=-\frac{9}{2}\sqrt{2}$ *non acc.*; $x_2=4\sqrt{2}$ *acc.*



   Quindi: $CH=4\sqrt{2}\,cm$; $AC=\sqrt{AH^2+CH^2}=\sqrt{72+32}=\sqrt{104}=2\sqrt{26}\,cm$;

   $BH=2\cdot 4\sqrt{2}+\sqrt{2}=9\sqrt{2}\,cm$; $AB=\sqrt{AH^2+BH^2}=\sqrt{72+162}=\sqrt{264}=3\sqrt{26}\,cm$;

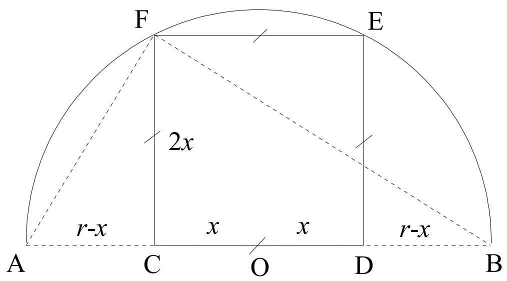
   $BC=4\sqrt{2}+9\sqrt{2}=13\sqrt{2}$; $2p_{ABC}=(5\sqrt{26}+13\sqrt{2})\,cm$;

   $Area_{ABC}=\frac{1}{2}BC\cdot AH=\frac{1}{2}\cdot 13\sqrt{2}\cdot 6\sqrt{2}=78\,cm^2$.

3. Poniamo $CO=x$ (distanza tra uno dei vertici del quadrato che si trovano sul diametro e il centro della circonferenza).

   Quindi: $CD=CF=2x$, $AC=r-x$, $BC=r+x$.

   Applichiamo il 2° teorema di Euclide al triangolo ABF, rettangolo in F perché angolo alla circonferenza che insiste su una semicirconferenza:



   $CF^2=AC\cdot BC \Rightarrow 4x^2=(10-x)(10+x)=100-x^2 \Rightarrow x^2=20 \Rightarrow x=\pm 2\sqrt{5}$.

   E' accettabile solo la soluzione positiva, per cui: $CD=4\sqrt{5}\,cm$.

4. Vedi pagg. G249-250 del libro di testo.
5. Vedi pagg. G251-252 del libro di testo.

1. Risolvi le seguenti equazioni irrazionali:

   $x+\sqrt{10x+6}=9$; $\sqrt{2x+9}+13=x$

2. Risolvi i seguenti sistemi di equazioni:

   $\begin{cases}(x+y)^2-9=\frac{3}{2}xy+\frac{11}{18}\\ 2(x-y)-\frac{1}{3}=x+3-3y\end{cases}$; $\begin{cases}\frac{1}{x-3}-\frac{1}{y-1}=\frac{1}{3}\\ \frac{y+1}{x+3}=1\end{cases}$

3. Disegna (*in un unico piano cartesiano*) la parabola p di equazione $y=-x^2+x+2$ e le rette r_1, r_2, r_3 che hanno rispettivamente equazione $y=3x-1$, $y=-3x+6$, $y=3$.

   Determina algebricamente le coordinate dei punti di intersezione tra parabola e rette.

4. Un cassetto contiene calzini bianchi e calzini neri, con i quali possiamo formare 40 diverse coppie contenenti ciascuna un calzino bianco ed uno nero. Se nel cassetto ci fosse un calzino bianco in meno ed un calzino nero in più, le possibili coppie di calzini "misti" sarebbero 42. Quanti sono i calzini bianchi e quanti quelli neri?

5. In una circonferenza di raggio $r=15\,cm$ è inscritto un rettangolo di area $A=432\,cm^2$. Determina le misure dei lati del rettangolo.

6. Si ritiene che noi utilizziamo il sistema di numerazione in base 10 (in cui, ad esempio, 362 significa $3\cdot10^2+6\cdot10+2$) in quanto abbiamo 10 dita. Un marziano, dopo avere letto l'equazione $x^2-16x+41=0$, scrive che la differenza delle radici è 10. Quante dita ha un marziano? (*N.B. Per le cifre comprese tra 0 e 6, la scrittura dei marziani coincide con la nostra*).

<u>2^A</u> *- Correzione compito n°8*

1.

- $\sqrt{10x+6}=9-x \Rightarrow 10x+6=81-18x+x^2 \Rightarrow x^2-28x+75=0 \Rightarrow (x-3)(x-25)=0 \Rightarrow$

  $x_1=3 \Rightarrow 6=6 \Rightarrow sol.\, accettabile$; $x_2=25 \Rightarrow 16=-16 \Rightarrow sol.\, non\, accettabile$

- $\sqrt{2x+9}=x-13 \Rightarrow 2x+9=x^2-26x+169 \Rightarrow x^2-28x+160=0 \Rightarrow (x-8)(x-20)=0 \Rightarrow$

  $x_1=8 \Rightarrow 5=-5 \Rightarrow sol.\, non\, accettabile$; $x_2=20 \Rightarrow 7=7 \Rightarrow sol.\, accettabile$

2.

- $\begin{cases} 18x^2+36xy+18y^2-162=27xy+11 \\ 6x-6y-1=3x+9-9y \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 18x^2+9xy+18y^2-173=0 \\ 3x+3y-10=0 \end{cases}$.

  Ricaviamo dalla 2^ eq. $x=10/3-y$ e sostituiamo nella 1^:

  $18\left(\frac{10}{3}-y\right)^2+9y\left(\frac{10}{3}-y\right)+18y^2-173=0 \Rightarrow 200-120y+18y^2+30y-9y^2+18y^2-173=0 \Rightarrow$

  $3y^2-10y+3=0 \Rightarrow y=\frac{5\pm\sqrt{25-9}}{3}=\frac{5\pm 4}{3} \Rightarrow \begin{cases} y_1=1/3 \Rightarrow x_1=3 \\ y_2=3 \Rightarrow x_2=1/3 \end{cases}$. Sol: $(3,\frac{1}{3});(\frac{1}{3},3)$.

  Dato che il sistema è simmetrico, avremmo potuto ricavare dalla 2^ eq. $x+y=10/3$, sostituirlo nella 1^, ottenendo $xy=1$ e impostare l'eq. di secondo grado associata $t^2-10/3\,t+1=0$.

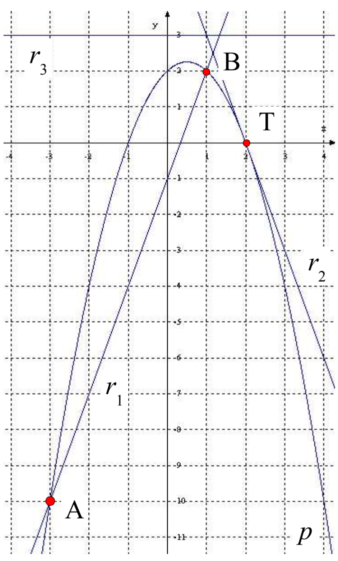
- $C.E.: x\neq\pm 3 \ \wedge \ y\neq 1$. $\begin{cases} 3y-3-3x+9=xy-3y-x+3 \\ y+1=x+3 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} xy+2x-6y-3=0 \\ y+1=x+3 \end{cases}$.

  Ricaviamo dalla 2^ eq. $y=x+2$ e sostituiamo nella 1^:

  $x^2+2x+2x-6x-12-3=0 \Rightarrow x^2-2x-15=0 \Rightarrow (x+3)(x-5)=0 \Rightarrow$

  $\begin{cases} x_1=-3 \quad non\, acc. \\ x_2=5 \Rightarrow y_2=7 \quad acc. \end{cases}$ $\quad Sol: \ (5,7)$.

3. La parabola *p* ha:



- concavità rivolta verso il basso;
- vertice di coordinate: $x_V=-\frac{b}{2a}=\frac{1}{2}$, $y_V=-\frac{1}{4}+\frac{1}{2}+2=\frac{9}{4}$;
- intersezione con l'asse *y*: $(0,2)$;
- intersezioni con l'asse *x*: $x^2-x-2=0 \Rightarrow x_1=-1;\ x_2=2$.

Determiniamo le intersezioni tra le rette e la parabola:

- $p\cap r_1$: $\begin{cases} y=3x-1 \\ y=-x^2+x+2 \end{cases} \Rightarrow 3x-1=-x^2+x+2 \Rightarrow$

  $x^2+2x-3=0 \Rightarrow (x+3)(x-1)=0 \Rightarrow x_1=-3;\ x_2=1$.

  $x_1=-3 \Rightarrow y_1=-10$; $x_2=1 \Rightarrow y_2=2$. Sol: $A(-3,-10);\ B(1,2)$.

- $p \cap r_2$: $\begin{cases} y=-3x+6 \\ y=-x^2+x+2 \end{cases} \Rightarrow -3x+6=-x^2+x+2 \Rightarrow x^2-4x+4=0 \Rightarrow (x-2)^2=0 \Rightarrow$

  $x_1=x_2=2 \Rightarrow y_1=y_2=0$. Sol: $T(2,0)$.
- $p \cap r_3$: $\begin{cases} y=3 \\ y=-x^2+x+2 \end{cases} \Rightarrow 3=-x^2+x+2 \Rightarrow x^2+x+1=0 \Rightarrow Sol: \emptyset$.

Le rette risultano quindi rispettivamente secante, tangente ed esterna rispetto alla parabola.

4. Indichiamo con *b* ed *n* rispettivamente il numero di calzini bianchi e neri.

   Dal testo sappiamo che: $\begin{cases} bn=40 \\ (b-1)(n+1)=42 \Rightarrow bn-n+b-1=42 \end{cases}$.

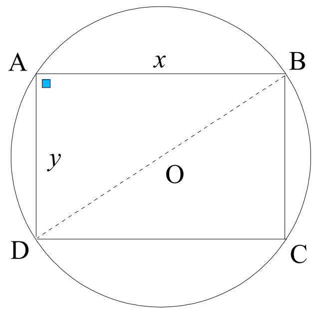
   Sostituendo il valore di *bn* nella 2^ eq., o sottraendo membro a membro, otteniamo:

   $\begin{cases} bn=40 \\ b=n+3 \end{cases} \Rightarrow n(n+3)=40 \Rightarrow n^2+3n-40=0 \Rightarrow (n+8)(n-5)=0 \Rightarrow$

   $n_1=-8$ *sol. non acc.* ; $n_2=5 \Rightarrow b_2=8$.

   Il cassetto contiene dunque 8 calzini bianchi e 5 neri.

5. Poniamo $AB=CD=x$, $AD=BC=y$.

   Le diagonali AC e BD sono diametri, in quanto gli angoli retti in A, B, C, D insistono su una semicirconferenza. Di conseguenza:

   $\begin{cases} x^2+y^2=30^2 \\ xy=432 \end{cases} \Rightarrow y=\frac{432}{x} \Rightarrow x^2+\frac{432^2}{x^2}=30^2 \Rightarrow$

   $x^4-30^2x^2+432^2=0 \Rightarrow x^2=\frac{900 \pm 252}{2} \Rightarrow$

   - $x_1^2=324 \Rightarrow x_1=18 \Rightarrow y_1=24$ (*la soluzione negativa non è accettabile*);
   - $x_2^2=576 \Rightarrow x_2=24 \Rightarrow y_2=18$ (*la soluzione negativa non è accettabile*).

   Dato che il sistema è simmetrico, avremmo potuto scrivere la 1^ eq. $(x+y)^2-2xy=900$, sostituirvi il valore della 2^, ottenendo $x+y=42$ e impostare l'eq. di secondo grado associata $t^2-42t+432=0$.

   Dal punto di vista algebrico il sistema ammette due soluzioni reali e distinte, che però corrispondono (a meno di isometrie) ad un unico rettangolo, i cui lati misurano 18 *cm* e 24 *cm*.

6. La differenza delle radici dell'equazione $ax^2+bx+c=0$ è: $x_2-x_1=\frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a}-\frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a}=\frac{\sqrt{\Delta}}{a}$.

   Se il marziano ha *n* dita, egli scriverà quindi (in base *n*):

   $\sqrt{\Delta}=\sqrt{b^2-4ac}=\sqrt{(n+6)^2-4(4n+1)}=n$

   da cui, elevando al quadrato: $n^2+12n+36-16n-4=n^2 \Rightarrow 4n=32 \Rightarrow n=8$.

   Quindi un marziano ha 8 dita. ☺

2^A - MATEMATICA compito n°9 - 2013-2014

1. Risolvi le seguenti disequazioni di secondo grado intere:

$4x^2-3x+1<0$; $2x^2-3x-2<0$; $-x^2-4\leq 0$; $3x-x^2<0$;

$2x^2>0$; $x^2-5\leq 0$; $x^2+4x\geq 0$; $(x+2)^2>0$;

$9x^2+6x+1\geq 0$; $1-4x^2\geq 0$; $-4x^2\geq 0$; $x^2+9>0$.

2. Risolvi le seguenti disequazioni e sistemi di disequazioni:

$\frac{x^2-5x+6}{x^2-3x-10}\geq 0$; $\frac{9-x^2}{x^2+8x+16}\leq 0$;

$x^3+x^2-9x-9\geq 0$; $x^4-3x^2+2\leq 0$;

$\begin{cases} x^2-5x+4\leq 0 \\ 4x-x^2-4<0 \end{cases}$; $\begin{cases} x^2-4\leq 0 \\ 4x-x^2\geq 3 \end{cases}$.

3. Un triangolo isoscele è inscritto in una circonferenza di raggio $r=5\,cm$. Sapendo che la differenza tra l'altezza e metà della base è 4 *cm*, calcola perimetro e area del triangolo.

4. Dato un quadrilatero ABCD, considera un punto P sulla diagonale BD. Conduci da P la parallela al lato AB che incontra in E il lato AD e la parallela al lato BC che incontra in F il lato CD. Dimostra che sussiste la proporzione $AD:ED=CD:FD$ (*bleah*!) e che EF è parallela ad AC.

5. Un contadino dispone di 40 *m* di filo metallico per costruire un recinto rettangolare. Calcola l'area massima che egli può racchiudere e determina le corrispondenti dimensioni del recinto.

2^A - Correzione compito n°9

1.

a. $4x^2-3x+1=0 \Rightarrow \Delta<0 \Rightarrow \emptyset$. $Sol.\,dis.:\ \emptyset$.

b. $2x^2-3x-2=0 \Rightarrow x=\dfrac{3\pm\sqrt{9+16}}{4}=\dfrac{3\pm 5}{4} \Rightarrow x_1=-\dfrac{1}{2};\ x_2=2$. $Sol.\,dis.:\ -\dfrac{1}{2}<x<2$.

c. $x^2=-4 \Rightarrow \emptyset$. $Sol.\,dis.:\ \forall x\in\mathbb{R}$.

d. $x(3-x)=0 \Rightarrow x_1=0;\ x_2=3$. $Sol.\,dis.:\ x<0 \vee x>3$.

e. $2x^2=0 \Rightarrow x=0$. $Sol.\,dis.:\ \forall x\in\mathbb{R},\ x\neq 0$.

f. $x^2-5=0 \Rightarrow x=\pm\sqrt{5}$. $Sol.\,dis.:\ -\sqrt{5}\le x\le\sqrt{5}$.

g. $x(x+4)=0 \Rightarrow x_1=-4;\ x_2=0$. $Sol.\,dis.:\ x\le -4 \vee x\ge 0$.

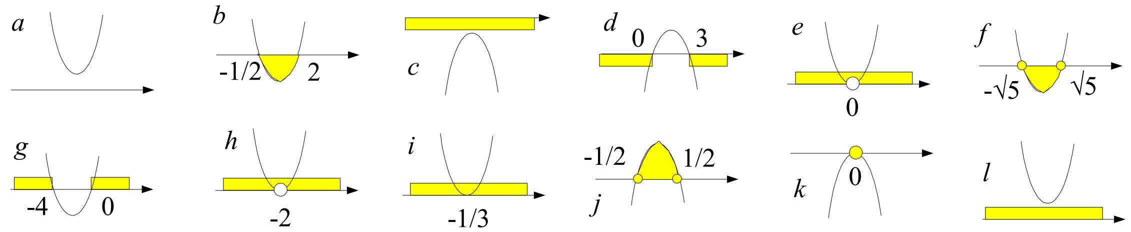
h. $(x+2)^2=0 \Rightarrow x=-2$. $Sol.\,dis.:\ \forall x\in\mathbb{R},\ x\neq -2$.

i. $(3x+1)^2=0 \Rightarrow x=-1/3$. $Sol.\,dis.:\ \forall x\in\mathbb{R}$.

j. $x^2=\dfrac{1}{4} \Rightarrow x=\pm\dfrac{1}{2}$. $Sol.\,dis.:\ -\dfrac{1}{2}\le x\le\dfrac{1}{2}$.

k. $-4x^2=0 \Rightarrow x=0$. $Sol.\,dis.:\ x=0$.

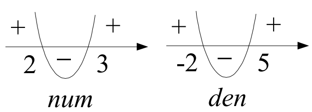
l. $x^2=-9 \Rightarrow \emptyset$. $Sol.\,dis.:\ \forall x\in\mathbb{R}$.



2.

a. $\dfrac{x^2-5x+6}{x^2-3x-10}\ge 0$

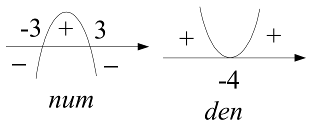
$Sol:\ x<-2 \vee 2\le x\le 3 \vee x>5$



	-2		2		3		5		
+	+	+	o	-	o	+	+	+	*num*
+	o	-	-	-	-	-	o	+	*den*
+	●	-	o	+	o	-	●	+	*f(x)*

b. $\dfrac{9-x^2}{x^2+8x+16}\le 0$

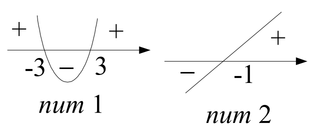
$Sol:\ (x\le -3 \wedge x\neq -4) \vee x\ge 3$



	-4		-3		3		
-	-	-	o	+	o	-	*num*
+	o	+	+	+	+	+	*den*
-	●	-	o	+	o	-	*f(x)*

c. $(x^2-9)(x+1)\ge 0$

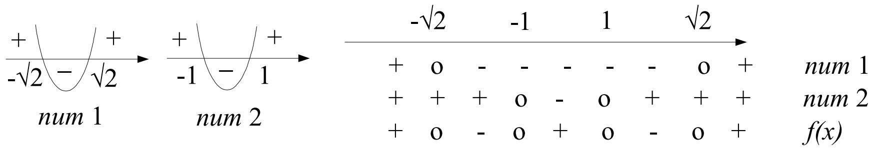
$Sol:\ -3\le x\le -1 \vee x\ge 3$



	-3		-1		3		
+	o	-	-	-	o	+	*num 1*
-	-	-	o	+	+	+	*num 2*
-	o	+	o	-	o	+	*f(x)*

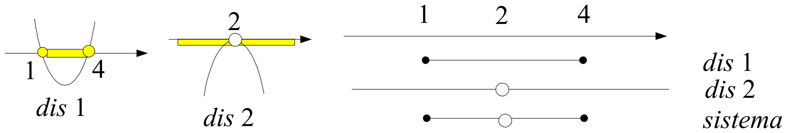
d. $(x^2-2)(x^2-1)\leq 0$

$Sol:\ -\sqrt{2}\leq x\leq -1$
$\vee\ \ 1\leq x\leq \sqrt{2}$



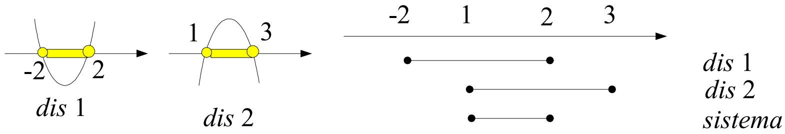
e. $\begin{cases} x^2-5x+4\leq 0 \\ -x^2+4x-4<0 \end{cases}$

$Sol:\ 1\leq x\leq 4\ \wedge\ x\neq 2$

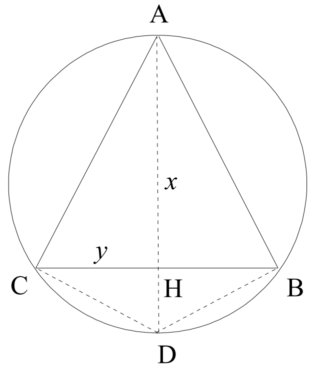


f. $\begin{cases} x^2-4\leq 0 \\ -x^2+4x-3\geq 0 \end{cases}$

$Sol:\ 1\leq x\leq 2$



3. Scegliamo come incognite l'altezza e la metà della base del triangolo:
   $AH=x$, $CH=y$. Quindi: $DH=10-x$.
   Il triangolo ACD è rettangolo in C perché tale angolo insiste su mezza circonferenza. Per il 2° teorema di Euclide:



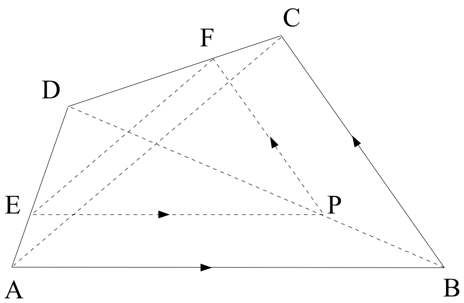
   $CH^2=AH\cdot DH\ \Rightarrow\ y^2=x(10-x)$.

   $\begin{cases} x-y=4 \\ y^2=x(10-x) \end{cases}\ \Rightarrow\ \begin{cases} y=x-4 \\ x^2-8x+16=10x-x^2\ \Rightarrow\ x^2-9x+8=0 \end{cases}$

   $x_1=1\ \Rightarrow\ y_1=-3\ \ non\,acc.$; $x_2=8\ \Rightarrow\ y_2=4\ \ acc.$

   Quindi: $AH=BC=8\,cm$, $AB=\sqrt{4^2+8^2}=4\sqrt{5}\,cm$, $2\,p_{ABC}=8(1+\sqrt{5})\,cm$, $S_{ABC}=32\,cm^2$.

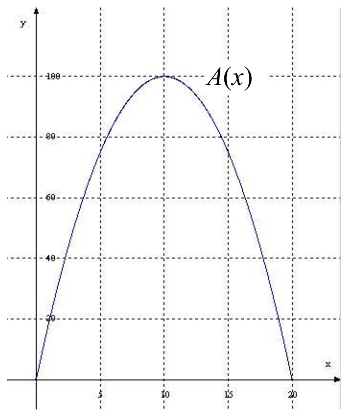
4. Nel triangolo ABD abbiamo $EP\parallel AB$ per ipotesi.
   Per il teorema di Talete (o per il suo corollario riguardante la parallela ad un lato di un triangolo): $\dfrac{AD}{ED}=\dfrac{BD}{PD}$.
   In maniera analoga, nel triangolo BCD abbiamo $PF\parallel BC$ per ipotesi, da cui: $\dfrac{BD}{PD}=\dfrac{CD}{FD}$.



   Per la proprietà transitiva dell'uguaglianza: $\dfrac{AD}{ED}=\dfrac{CD}{FD}$ c.v.d.

   Dalla precedente proporzione, applicando l'inverso del teorema di Talete (o del suo corollario) al triangolo ACD, segue che $EF\parallel AC$ c.v.d.

5. Poniamo $b=x$ la base del rettangolo, con $0\leq x\leq 20$.
   L'altezza misura quindi $h=20-x$.
   L'area del rettangolo misura $A(x)=x(20-x)=20x-x^2$.
   La funzione $A(x)$ ha come grafico una parabola con la concavità rivolta verso il basso e vertice $V(10,100)$.
   Quindi l'area massima è $A_{max}=100\,m^2$, e viene ottenuta quando il recinto è un quadrato di lato $l=10\,m$.



2^B - *Questionario Matematica*

1. Risolvi la seguente equazione: $x\sqrt{2}-\sqrt{2}=x+1$.
2. Un'automobile che viaggia con velocità *v* percorre una distanza $d=120\,km$.

   Se essa avesse viaggiato ad una velocità superiore a *v* di $20\,km/h$, avrebbe impiegato 18 minuti in meno. Imposta l'equazione che permette di determinare la velocità *v* in *km/h*.
3. Risolvi la seguente equazione: $(x^3+1)(x^3-2)(x^4+1)(x^4-2)=0$.
4. Risolvi la seguente disequazione: $-(x+\sqrt{2})^2<0$.
5. Risolvi il seguente sistema: $\begin{cases} x+y=5 \\ xy=6 \end{cases}$.
6. La somma tra l'ampiezza di un angolo alla circonferenza e quella del corrispondente angolo al centro è 69°. Calcola le ampiezze dei due angoli.
7. In un trapezio inscritto in una circonferenza, uno degli angoli ha ampiezza 40°.

   Calcola le ampiezze degli altri angoli del trapezio.

   (*Nota: in partenza, non sappiamo "di che genere" è il trapezio*).
8. Dato il quadrato ABCD di lato *a*, prendiamo il punto medio E del lato CD ed un punto F sul lato AD tale che $\overline{AF}=x$. Esprimi l'area del triangolo BEF in funzione di *x*.
9. In un orologio la lancetta dei minuti è lunga $r_m=5\,cm$ e quella delle ore $r_h=3{,}5\,cm$.

   Calcola le misure degli archi descritti dalle due lancette in un quarto d'ora.
10. Due poligoni sono simili ed hanno rapporto di similitudine $k=3/2$.

    La somma delle loro aree è $S_1+S_2=65\,cm^2$. Calcola le aree dei due poligoni.
11. In un triangolo ABC, isoscele sulla base AB, risulta $A\hat{C}B=120°$ e $\overline{AB}=2l\sqrt{3}$.

    Calcola perimetro ed area del triangolo.

2^B - *Correzione questionario Matematica*

1. $x(\sqrt{2}-1)=\sqrt{2}+1 \ \Rightarrow \ x=\dfrac{\sqrt{2}+1}{\sqrt{2}-1}=\dfrac{(\sqrt{2}+1)^2}{(\sqrt{2}-1)(\sqrt{2}+1)}=3+2\sqrt{2}$.

2. Nel primo caso, il tempo di percorrenza è $t_1=\dfrac{d}{v}$. Nel secondo è $t_2=\dfrac{d}{v+20}$.

   Dal testo sappiamo che $t_1=t_2-\dfrac{18}{60} \ \Rightarrow \ \dfrac{120}{v}=\dfrac{120}{v+20}+\dfrac{18}{60}$.

3. Per la legge di annullamento del prodotto:

   $x^3+1=0 \ \Rightarrow \ x_1=-1$; $x^3-2=0 \ \Rightarrow \ x_2=\sqrt[3]{2}$; $x^4+1=0 \ \Rightarrow \ \emptyset$; $x^4-2=0 \ \Rightarrow \ x_{3,4}=\pm\sqrt[4]{2}$.

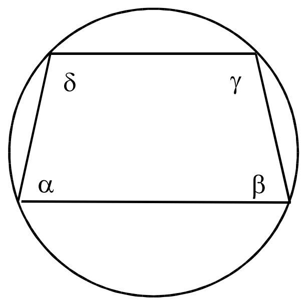
4. $-(x+\sqrt{2})^2=0 \ \Rightarrow \ x=-\sqrt{2}$; concavità rivolta verso il basso; *sol. dis:* $\forall x\neq-\sqrt{2}$.

5. $x=5-y \ \Rightarrow \ (5-y)y=6 \ \Rightarrow \ y^2-5y+6=0 \ \Rightarrow \ y_1=2;\ y_2=3$. *Sol:* $(2,3);\ (3,2)$.

6. Se l'angolo alla circonferenza misura α, quello al centro misura 2α.

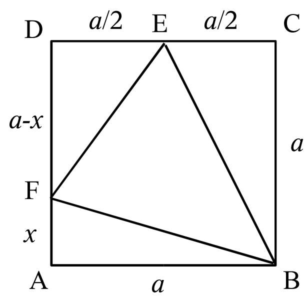
   $\alpha+2\alpha=69° \ \Rightarrow \ \alpha=23°;\ 2\alpha=46°$.

7. Se $\alpha=40°$, allora:



   - $\gamma=140°$ perché un quadrilatero inscritto in una circonferenza ha gli angoli opposti supplementari;
   - $\delta=40°$ perché coniugato interno (supplementare) di α;
   - $\beta=140°$ per differenza (somma degli angoli interni di un quadrilatero uguale ad un angolo giro).

   Ora, quindi, possiamo affermare che un trapezio inscritto in una circonferenza è isoscele.



8. Per differenza: $S(x)=a^2-\dfrac{a^2}{4}-\dfrac{a}{4}(a-x)-\dfrac{ax}{2}=\dfrac{a^2}{2}-\dfrac{ax}{4}$.

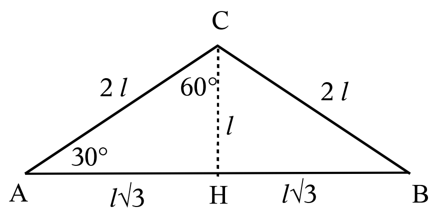
9. In un quarto d'ora la lancetta dei minuti descrive $1/4$ della circonferenza, e quella delle ore $1/48$ della circonferenza.

   Quindi: $l_m=\dfrac{2\pi r_m}{4}\simeq 7{,}85\,cm$, $l_h=\dfrac{2\pi r_h}{48}\simeq 0{,}458\,cm$.

10. $S_2=k^2S_1 \ \Rightarrow \ S_1+S_2=(1+k^2)S_1=65 \ \Rightarrow \ S_1=\dfrac{65}{1+9/4}=20\,cm^2 \ \Rightarrow \ S_2=45\,cm^2$.

11. $AH=AC\dfrac{\sqrt{3}}{2} \ \Rightarrow \ AC=\dfrac{2\,AH}{\sqrt{3}}=2l$; $CH=\dfrac{AC}{2}=l$.

    $2p_{ABC}=(4+2\sqrt{3})l$; $S_{ABC}=l^2\sqrt{3}$.



1. Risolvi i seguenti sistemi lineari con il metodo che ritieni più opportuno:

$$\begin{cases} \frac{x-y}{8}+\frac{x-6}{4}=\frac{x-y}{6}+\frac{x-2}{3} \\ \frac{1}{2}(x-4)+\frac{1}{3}(3x-y)=-9 \end{cases} \quad ; \qquad \begin{cases} 3x+y-z=2 \\ x+3y+2z=1 \\ 3x+4y+z=-2 \end{cases} .$$

2. Un compito in classe di matematica viene proposto in due classi diverse. In una i compiti sufficienti sono i 2/3 degli studenti, mentre nell'altra sono i 3/4. In tutto ci sono 32 compiti sufficienti e 13 compiti insufficienti. Calcola il numero degli studenti in ciascuna classe.
3. Paolo vorrebbe acquistare una camicia ed un paio di pantaloni, ma pensa che il loro prezzo sia troppo alto. Dopo una settimana, la camicia viene scontata del 10%, ed il prezzo complessivo di camicia e pantaloni è sceso a 170 €. Dopo un mese, il prezzo dei pantaloni viene scontato del 20%, mentre il prezzo della camicia subisce un ulteriore sconto del 10% rispetto al prezzo già scontato. A questo punto, Paolo acquista camicia e pantaloni spendendo in tutto 145 €.

   Calcola il prezzo iniziale della camicia e quello dei pantaloni.
4. Nel trapezio ABCD la base maggiore AB misura 8 *cm* e la base minore CD misura 4 *cm*. Conduci dal vertice C la parallela al lato obliquo AD che incontra la base AB nel punto E.

   Determina le lunghezze dei lati obliqui del trapezio sapendo che il perimetro del triangolo EBC misura 15 *cm* e che il perimetro del quadrilatero AECD misura 3 *cm* in meno del perimetro del trapezio ABCD.
5. Enuncia tutti i criteri che conosci per stabilire se un quadrilatero è un parallelogramma.

   Dimostrane due di essi a tua scelta.
6. Dato il parallelogramma ABCD, considera sulla diagonale AC due punti H e K tali che $AH=KC$. Dimostra che il quadrilatero BKDH è un parallelogramma.

Nome alunno: Classe **2^B**

Esercizio	***A***	***B***	***C***	***D***	***Punteggio***
1	/9	/9	/1	/1	/20
2	/4	/4	/3	/4	/15
3	/4	/4	/3	/4	/15
4	/4	/4	/3	/4	/15
5	*no*	*no*	/5	/5	/10
6	/7	*no*	/4	/4	/15
Totale					/90

Voto: $\frac{punteggio\ \ totale}{10}+1=$

<u>2^B</u> - Correzione compito n°1a

1. Utilizziamo in entrambi i casi il metodo di sostituzione.

- $$\begin{cases} \dfrac{3x-3y+6x-36}{24}=\dfrac{4x-4y+8x-16}{24} \\ \dfrac{3x-12+6x-2y}{6}=\dfrac{-54}{6} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 3x-y=-20 \\ 9x-2y=-42 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y=3x+20 \\ 9x-2(3x+20)=-42 \end{cases} \Rightarrow$$

  $$\begin{cases} y=3x+20 \\ 9x-6x-40=-42 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y=3x+20 \\ 3x=-2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x=-2/3 \\ y=3\cdot(-2/3)+20=18 \end{cases} \Rightarrow \ Sol:(-\frac{2}{3},18) \ .$$

- $$\begin{cases} z=3x+y-2 \\ x+3y+6x+2y-4=1 \\ 3x+4y+3x+y-2=-2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} z=3x+y-2 \\ 7x+5y=5 \\ 6x+5y=0 \end{cases} \Rightarrow$$

  (*sottraiamo membro a membro la seconda e la terza equazione*)

  $$\begin{cases} z=3x+y-2 \\ x=5 \\ y=-6 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} z=15-6-2=-7 \\ x=5 \\ y=-6 \end{cases} \Rightarrow \ Sol:(5,-6,7) \ .$$

2. Indichiamo con x ed y i numeri di studenti della prima e della seconda classe rispettivamente.

   Imponiamo le condizioni del testo sui numeri totali di voti sufficienti e insufficienti:

   $$\begin{cases} 2/3x+3/4y=32 \\ 1/3x+1/4y=13 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 8x+9y=384 \\ 4x+3y=156 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 8x+9y=384 \\ 8x+6y=312 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 3y=72 \Rightarrow y=24 \\ 4x+72=156 \Rightarrow x=21 \end{cases} .$$

   Abbiamo moltiplicato la seconda equazione per 2 *e sottratto membro a membro.*

   Quindi la prima classe è composta da 21 studenti e la seconda classe da 24 studenti.

3. Indichiamo con x ed y i prezzi iniziali della camicia e dei pantaloni rispettivamente.

   Dopo una settimana, il prezzo della camicia diventa $0{,}9x$.

   Dopo un mese, il prezzo della camicia è $0{,}9\cdot 0{,}9x=0{,}81x$ e quello dei pantaloni $0{,}8y$.

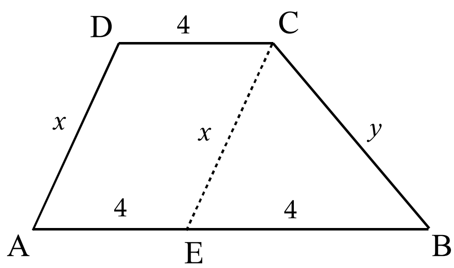
   Imponiamo le condizioni del testo sulla spesa dopo una settimana e dopo un mese:

   $$\begin{cases} 0{,}9x+y=170 \\ 0{,}81x+0{,}8y=145 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y=170-0{,}9x \\ 0{,}81x+0{,}8(170-0{,}9x)=145 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y=170-0{,}9x \\ 0{,}81x+136-0{,}72x=145 \end{cases} \Rightarrow$$

   $$\begin{cases} y=170-0{,}9x \\ 0{,}09x=9 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x=100 \\ y=170-90=80 \end{cases} .$$

   Quindi il prezzo iniziale della camicia era 100 € e quello dei pantaloni 80 €.

4. Poniamo $AD=x$ e $BC=y$.

   Il quadrilatero AECD è un parallelogramma per definizione, in quanto $AB\|CD$ per ipotesi e $CE\|AD$ per costruzione; quindi $CE=AD=x$ e $AE=CD=4\,cm$ perché i lati opposti di un parallelogramma sono uguali; $EB=4\,cm$ per differenza.

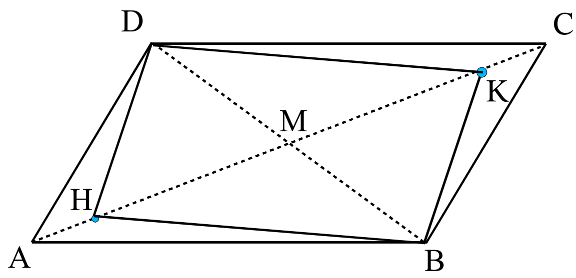
Imponiamo le condizioni del testo sui perimetri:

$$\begin{cases} x+y+4=15 \\ 2x+8=x+y+12-3 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x+y=11 \\ x-y=1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x=6 \\ y=5 \end{cases} .$$

Abbiamo sommato e sottratto membro a membro le due equazioni o, se preferite, abbiamo determinato due numeri aventi somma uguale a 11 e differenza uguale ad 1.

Quindi $AD=6\,cm$ e $BC=5\,cm$ (*pertanto la figura andrebbe corretta*).

5. Vedi pagg. G124-126 del libro di testo.
6. Le diagonali del parallelogramma ABCD si dividono scambievolmente a metà: $AM=MC$, $BM=MD$.



Le diagonali del quadrilatero BKDH hanno:

- $BM=MD$ per dim. prec;
- $HM=MK$ per differenza di segmenti congruenti

($AH=KC$ per ipotesi e $AM=MC$ per dim. prec.).

Quindi il quadrilatero BKDH ha le diagonali che si dividono scambievolmente a metà, e pertanto è un parallelogramma c.v.d.

In alternativa, potremmo mostrare che i triangoli ABH e CDK sono congruenti per il primo criterio; i triangoli ADH e CBK sono congruenti per lo stesso motivo, per cui il quadrilatero BKDH ha entrambe le coppie di lati opposti congruenti, e pertanto è un parallelogramma c.v.d.

1. Risolvi i seguenti sistemi lineari con il metodo che ritieni più opportuno:

$$\begin{cases} \frac{x+y}{8}+\frac{x+6}{4}=\frac{x+y}{6}+\frac{x+2}{3} \\ \frac{1}{2}(x+4)+\frac{1}{3}(3x+y)=9 \end{cases} \quad ; \qquad \begin{cases} 3x-y+z=2 \\ x-3y-2z=1 \\ 3x-4y-z=-2 \end{cases} \quad .$$

2. Un compito in classe di matematica viene proposto in due classi diverse. In una i compiti sufficienti sono i 2/3 degli studenti, mentre nell'altra sono i 3/4. In tutto ci sono 36 compiti sufficienti e 15 compiti insufficienti. Calcola il numero degli studenti in ciascuna classe.
3. Paolo vorrebbe acquistare una camicia ed un paio di pantaloni, ma pensa che il loro prezzo sia troppo alto. Dopo una settimana, la camicia viene scontata del 10%, ed il prezzo complessivo di camicia e pantaloni è sceso a 210 €. Dopo un mese, il prezzo dei pantaloni viene scontato del 20%, mentre il prezzo della camicia subisce un ulteriore sconto del 10% rispetto al prezzo già scontato. A questo punto, Paolo acquista camicia e pantaloni spendendo in tutto 177 €.

   Calcola il prezzo iniziale della camicia e quello dei pantaloni.
4. Nel trapezio ABCD la base maggiore AB misura 10 *cm* e la base minore CD misura 5 *cm*. Conduci dal vertice C la parallela al lato obliquo AD che incontra la base AB nel punto E.

   Determina le lunghezze dei lati obliqui del trapezio sapendo che il perimetro del triangolo EBC misura 18 *cm* e che il perimetro del quadrilatero AECD misura 4 *cm* in meno del perimetro del trapezio ABCD.
5. Enuncia tutti i criteri che conosci per stabilire se un quadrilatero è un parallelogramma.

   Dimostrane due di essi a tua scelta.
6. Dato il parallelogramma ABCD, considera sulla diagonale BD due punti H e K tali che $BH=KD$. Dimostra che il quadrilatero AHCK è un parallelogramma.

2^B - Correzione compito n°1b

1. Utilizziamo in entrambi i casi il metodo di sostituzione.

- $$\begin{cases} \dfrac{3x+3y+6x+36}{24}=\dfrac{4x+4y+8x+16}{24} \\ \dfrac{3x+12+6x+2y}{6}=\dfrac{54}{6} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 3x+y=20 \\ 9x+2y=42 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y=-3x+20 \\ 9x+2(-3x+20)=42 \end{cases} \Rightarrow$$

$$\begin{cases} y=-3x+20 \\ 9x-6x+40=42 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y=-3x+20 \\ 3x=2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x=2/3 \\ y=-3\cdot 2/3+20=18 \end{cases} \Rightarrow Sol: (\frac{2}{3}, 18) \ .$$

- $$\begin{cases} z=2-3x+y \\ x-3y-4+6x-2y=1 \\ 3x-4y-2+3x-y=-2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} z=2-3x+y \\ 7x-5y=5 \\ 6x-5y=0 \end{cases} \Rightarrow$$

(*sottraiamo membro a membro la seconda e la terza equazione*)

$$\begin{cases} z=2-3x+y \\ x=5 \\ y=6 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} z=2-15+6=-7 \\ x=5 \\ y=-6 \end{cases} \Rightarrow Sol: (5, 6, -7) \ .$$

2. Indichiamo con x ed y i numeri di studenti della prima e della seconda classe rispettivamente.

   Imponiamo le condizioni del testo sui numeri totali di voti sufficienti e insufficienti:

$$\begin{cases} 2/3x+3/4y=36 \\ 1/3x+1/4y=15 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 8x+9y=432 \\ 4x+3y=180 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 8x+9y=432 \\ 8x+6y=360 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 3y=72 \Rightarrow y=24 \\ 4x+72=180 \Rightarrow x=27 \end{cases} .$$

   Abbiamo moltiplicato la seconda equazione per 2 *e sottratto membro a membro.*

   Quindi la prima classe è composta da 27 studenti e la seconda classe da 24 studenti.

3. Indichiamo con x ed y i prezzi iniziali della camicia e dei pantaloni rispettivamente.

   Dopo una settimana, il prezzo della camicia diventa $0{,}9x$.

   Dopo un mese, il prezzo della camicia è $0{,}9\cdot 0{,}9x=0{,}81x$ e quello dei pantaloni $0{,}8y$.

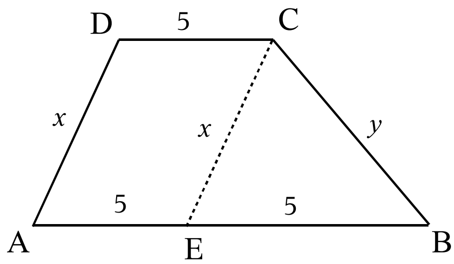
   Imponiamo le condizioni del testo sulla spesa dopo una settimana e dopo un mese:

$$\begin{cases} 0{,}9x+y=210 \\ 0{,}81x+0{,}8y=177 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y=210-0{,}9x \\ 0{,}81x+0{,}8(210-0{,}9x)=177 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y=210-0{,}9x \\ 0{,}81x+168-0{,}72x=177 \end{cases} \Rightarrow$$

$$\begin{cases} y=210-0{,}9x \\ 0{,}09x=9 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x=100 \\ y=210-90=120 \end{cases} .$$

   Quindi il prezzo iniziale della camicia era 100 € e quello dei pantaloni 120 €.

4. Poniamo $AD=x$ e $BC=y$.



   Il quadrilatero AECD è un parallelogramma per definizione, in quanto $AB \| CD$ per ipotesi e $CE \| AD$ per costruzione; quindi $CE=AD=x$ e $AE=CD=5\,cm$ perché i lati opposti di un parallelogramma sono uguali; $EB=5\,cm$ per differenza.

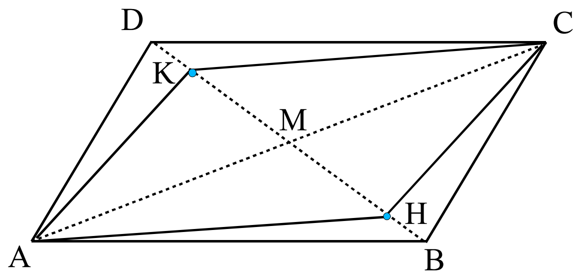
Imponiamo le condizioni del testo sui perimetri:

$$\begin{cases} x+y+5=18 \\ 2x+10=x+y+15-4 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x+y=13 \\ x-y=1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x=7 \\ y=6 \end{cases} .$$

Abbiamo sommato e sottratto membro a membro le due equazioni o, se preferite, abbiamo determinato due numeri aventi somma uguale a 13 e differenza uguale ad 1.

Quindi $AD=7\,cm$ e $BC=6\,cm$ (*pertanto la figura andrebbe corretta*).

5. Vedi pagg. G124-126 del libro di testo.



6. Le diagonali del parallelogramma ABCD si dividono scambievolmente a metà: $AM=MC$, $BM=MD$.

   Le diagonali del quadrilatero AHCK hanno:

   - $AM=MC$ per dim. prec;
   - $HM=MK$ per differenza di segmenti congruenti ($BH=KD$ per ipotesi e $BM=MD$ per dim. prec.).

   Quindi il quadrilatero AHCK ha le diagonali che si dividono scambievolmente a metà, e pertanto è un parallelogramma c.v.d.

   In alternativa, potremmo mostrare che i triangoli ABH e CDK sono congruenti per il primo criterio; i triangoli ADK e CBH sono congruenti per lo stesso motivo, per cui il quadrilatero AHCK ha entrambe le coppie di lati opposti congruenti, e pertanto è un parallelogramma c.v.d.

1. Semplifica, se possibile, i seguenti radicali:

$$\sqrt[12]{64.000} \;;\; \sqrt[8]{0,0001} \;;\; \sqrt[6]{\frac{9\cdot 5^4}{121}} \;;\; \sqrt[6]{\frac{1}{4}-\frac{1}{8}} \;;\; \sqrt[10]{\frac{32}{b^{10}c^{15}}} \;;\; \sqrt{x^4+y^8} \;;\; \sqrt{\frac{1}{a^4}-\frac{2}{a^5}+\frac{1}{a^6}} \;.$$

2. Svolgi le seguenti operazioni contenenti radicali e, se possibile, semplifica i risultati ottenuti:

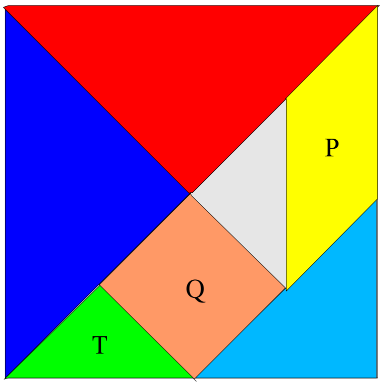
$$\sqrt{xy-x-y+1}\cdot\sqrt{\frac{1}{y^2-1}} \;;\; \sqrt[3]{\frac{a^2-4a+4}{a^7}}:\sqrt[3]{\frac{a^2}{a-2}} \;;\; \sqrt[3]{\frac{2}{3}-\frac{1}{2}}:\sqrt{\frac{1}{6}} \;;\; (\sqrt[6]{4ab^3})^2 \;;\; \sqrt{2\sqrt{2}} \;;$$

$$\sqrt{15^2-45} \;;\; \sqrt{\frac{1}{x^3}-\frac{6}{x^4}+\frac{9}{x^5}} \;;\; \sqrt{18}+\sqrt{2}+\sqrt{20}+\sqrt{45} \;;\; (2\sqrt{2}-\sqrt{3})^2 \;;\; (\sqrt{2}-2\sqrt{3})^3 \;.$$

3. Risolvi la seguente equazione:

$$\frac{1}{x^3-3x^2\sqrt{2}+6x-2\sqrt{2}}=\frac{x}{x^2-2x\sqrt{2}+2}-\frac{1}{x-\sqrt{2}} \;.$$

4. Il Tangram è un gioco cinese formato da sette tavolette disposte a formare un quadrato. Tra le tavolette, cinque sono triangoli rettangoli isosceli (due grandi, uno medio e due piccoli), una è un quadrato ed una un parallelogramma.

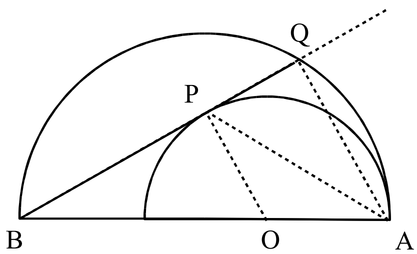


Se la somma dei perimetri del quadrato arancione Q, del triangolo verde T e del parallelogramma giallo P è 46 *cm*, quanto misura il lato del quadrato "complessivo"?

(*Suggerimento: indica con x il lato del quadrato arancione Q*).

5. Enuncia e dimostra il teorema su angoli al centro ed alla circonferenza corrispondenti (*puoi limitarti al caso in cui il centro della circonferenza sia interno all'angolo alla circonferenza*).

6. Due circonferenze sono tangenti internamente in A ed AB è un diametro della circonferenza di raggio maggiore. Conduci da B una tangente alla circonferenza di raggio minore, indicando con P il suo punto di contatto con essa e con Q l'ulteriore punto di intersezione



con la circonferenza di raggio maggiore.

Dimostra che la semiretta AP è la bisettrice dell'angolo $B\hat{A}Q$.

(*Suggerimento 1: se chiami O il centro della circonferenza di raggio minore, puoi dimostrare direttamente che* $OP \| AQ$.

Suggerimento 2: in alternativa, ed in maniera più meccanica, puoi porre $A\hat{B}Q=\alpha$ *ed esprimere le ampiezze di tutti gli angoli della figura in funzione di* α).

Esercizio	***A***	***B***	***C***	***D***	***Punteggio***
1	/6	/7	/1	/1	/15
2	/12	/11	/1	/1	/25
3	/4	/4	/1	/1	/10
4	/5	/5	/2	/3	/15
5	*no*	*no*	/5	/5	/10
6	/5	*no*	/5	/5	/15
Totale					/90

Voto: $\frac{punteggio \quad totale}{11}+2=$

(A) **Completezza**: sviluppo e scelta del procedimento concettuale o dei contenuti teorici;

(B) **Calcolo**: utilizzo degli algoritmi e delle procedure di calcolo;

(C) **Linguaggio**: utilizzo del linguaggio specifico della disciplina (anche grafico e simbolico) adeguato;

(D) **Argomentazione**: giustificare motivare e verificare i procedimenti utilizzati e le soluzioni ottenute.

2^B - Correzione compito n°2a

1.

- $\sqrt[12]{64.000}=\sqrt[12]{2^9\cdot 5^3}=\sqrt[4]{2^3\cdot 5}=\sqrt[4]{40}$;
- $\sqrt[8]{0{,}0001}=\sqrt[8]{10^{-4}}=\sqrt{10^{-1}}=\sqrt{\frac{1}{10}}$;
- $\sqrt[6]{\frac{9\cdot 5^4}{121}}=\sqrt[6]{\frac{3^2\cdot 5^4}{11^2}}=\sqrt[3]{\frac{3\cdot 5^2}{11}}=\sqrt[3]{\frac{75}{11}}$;
- $\sqrt[6]{\frac{1}{4}-\frac{1}{8}}=\sqrt[6]{\frac{1}{8}}=\sqrt[6]{\frac{1}{2^3}}=\sqrt{\frac{1}{2}}$;
- $\sqrt[10]{\frac{32}{b^{10}c^{15}}}=\sqrt[10]{\frac{2^5}{b^{10}c^{15}}}=\sqrt{\frac{2}{b^2c^3}}=\frac{1}{bc}\sqrt{\frac{2}{c}}$;
- $\sqrt{x^4+y^8}$ non si semplifica;
- $\sqrt{\frac{1}{a^4}-\frac{2}{a^5}+\frac{1}{a^6}}=\sqrt{\frac{a^2-2a+1}{a^6}}=\sqrt{\frac{(a-1)^2}{a^6}}=\frac{a-1}{a^3}$.

2.

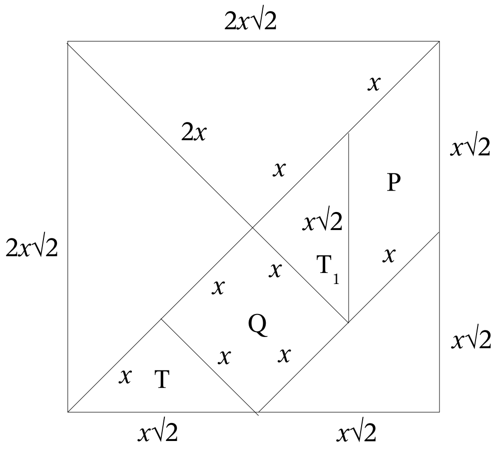
- $\sqrt{xy-x-y+1}\cdot\sqrt{\frac{1}{y^2-1}}=\sqrt{(x-1)(y-1)}\cdot\sqrt{\frac{1}{(y+1)(y-1)}}=\sqrt{\frac{x-1}{y+1}}$;
- $\sqrt[3]{\frac{a^2-4a+4}{a^7}}:\sqrt[3]{\frac{a^2}{a-2}}=\sqrt[3]{\frac{(a-2)^2}{a^7}}\cdot\sqrt[3]{\frac{a-2}{a^2}}=\sqrt[3]{\frac{(a-2)^3}{a^9}}=\frac{a-2}{a^3}$;
- $\sqrt[3]{\frac{2}{3}-\frac{1}{2}}:\sqrt{\frac{1}{6}}=\sqrt[3]{\frac{1}{6}}\cdot\sqrt{6}=\sqrt[6]{\frac{1}{6^2}}\cdot\sqrt[6]{6^3}=\sqrt[6]{6}$;
- $(\sqrt[6]{4ab^3})^2=\sqrt[6]{16a^2b^6}=b\sqrt[3]{4a}$;
- $\sqrt{2\sqrt{2}}=\sqrt{\sqrt{2^2\cdot 2}}=\sqrt[4]{2^3}=\sqrt[4]{8}$;
- $\sqrt{15^2-45}=\sqrt{225-45}=\sqrt{180}=\sqrt{2^2\cdot 3^2\cdot 5}=2\cdot 3\sqrt{5}=6\sqrt{5}$;
- $\sqrt{\frac{1}{x^3}-\frac{6}{x^4}+\frac{9}{x^5}}=\sqrt{\frac{x^2-6x+9}{x^5}}=\sqrt{\frac{(x-3)^2}{x^5}}=\frac{x-3}{x^2\sqrt{x}}$;
- $\sqrt{18}+\sqrt{2}+\sqrt{20}+\sqrt{45}=3\sqrt{2}+\sqrt{2}+2\sqrt{5}+3\sqrt{5}=4\sqrt{2}+5\sqrt{5}$;
- $(2\sqrt{2}-\sqrt{3})^2=8-4\sqrt{6}+3=11-4\sqrt{6}$;
- $(\sqrt{2}-2\sqrt{3})^3=2\sqrt{2}-12\sqrt{3}+36\sqrt{2}-24\sqrt{3}=38\sqrt{2}-36\sqrt{3}$.

3. $\frac{1}{(x-\sqrt{2})^3}=\frac{x}{(x-\sqrt{2})^2}-\frac{1}{x-\sqrt{2}} \Rightarrow 1=x(x-\sqrt{2})-(x-\sqrt{2})^2 \Rightarrow \quad C.E.:\ x\neq\sqrt{2}$

$1=x^2-x\sqrt{2}-x^2+2x\sqrt{2}-2 \Rightarrow x\sqrt{2}=3 \Rightarrow x=3/\sqrt{2}$ *sol. acc.*

4. Ricordiamo, o ricaviamo tramite il teo. di Pitagora, che, in un triangolo rettangolo isoscele in cui i cateti misurano l, l'ipotenusa misura $l\sqrt{2}$.

   Quindi, se poniamo x il lato del quadrato Q, il triangolo T ha cateti che misurano x e ipotenusa $x\sqrt{2}$, e lo stesso vale per il triangolo T_1, da cui ricaviamo che un lato del parallelogramma P misura $x\sqrt{2}$, mentre l'altro lato misura x per differenza.



   Imponiamo la condizione sulla somma dei perimetri:

   $$2\,p_Q+2\,p_T+2\,p_P=4\,x+2\,x+x\sqrt{2}+2\,x+2\,x\sqrt{2}=46 \;\Rightarrow$$

   $$8\,x+3\,x\sqrt{2}=46 \;\Rightarrow\; x=\frac{46}{8+3\sqrt{2}}=\frac{46(8-3\sqrt{2})}{64-18}=8-3\sqrt{2} \;.$$

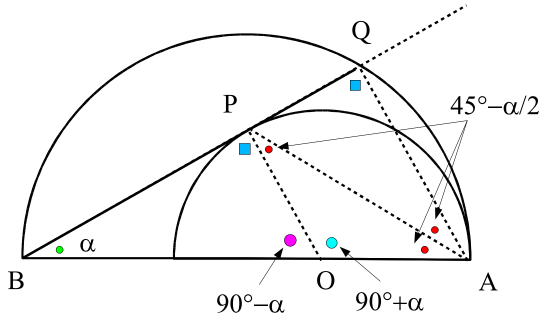
   Quindi il lato del quadrato "grande" misura $l=2\,x\sqrt{2}=2\sqrt{2}(8-3\sqrt{2})=(16\sqrt{2}-12)\,cm$.

5. Vedi libro di testo pag. G174.

6. *Svolgimento* 1. Le rette OP e AQ sono entrambe perpendicolari alla retta BQ, la prima perché la tangente AP è perpendicolare al raggio OP, e la seconda perché l'angolo in Q insiste su una semicirconferenza. Quindi OP e AQ sono parallele perché perpendicolari alla stessa retta BQ e, tagliate dalla trasversale AP, formano angoli alterni interni uguali: $O\hat{P}A=P\hat{A}Q$. D'altra parte, $O\hat{P}A=O\hat{A}P$ perché il triangolo OPA è isoscele, in quanto OA e OP sono raggi della circonferenza minore. Quindi $O\hat{A}P=P\hat{A}Q$ per la proprietà transitiva dell'uguaglianza c.v.d.

   Svolgimento 2. Poniamo $A\hat{B}Q=\alpha$.

   Quindi $B\hat{P}O=90°$ perché la tangente è perpendicolare al raggio per il punto di tangenza, $B\hat{O}P=90°-\alpha$ per differenza e $P\hat{O}A=90°+\alpha$ perché supplementare di $B\hat{A}P$.



   Il triangolo OAP è isoscele perché OP e OA sono raggi della stessa circonferenza, per cui:

   $$O\hat{P}A=O\hat{A}P=\frac{180°-A\hat{O}P}{2}=\frac{180°-(90°+\alpha)}{2}=45°-\frac{\alpha}{2} \;.$$

   Considerando ora il triangolo BAQ, $B\hat{Q}A=90°$ perché insiste su una semicirconferenza e $B\hat{A}Q=90°-\alpha$ per differenza.

   Quindi $P\hat{A}Q=B\hat{A}Q-O\hat{A}P=90°-\alpha-(45°-\frac{\alpha}{2})=45°-\frac{\alpha}{2}=O\hat{A}P$ c.v.d.

1. Semplifica, se possibile, i seguenti radicali:

$$\sqrt[12]{27.000} \;;\; \sqrt[6]{0,001} \;;\; \sqrt[6]{\frac{16\cdot 5^2}{81}} \;;\; \sqrt[6]{\frac{1}{4}-\frac{1}{8}} \;;\; \sqrt[10]{\frac{32}{x^{10}y^{15}}} \;;\; \sqrt[3]{x^6+y^9} \;;\; \sqrt{\frac{1}{a^6}-\frac{2}{a^7}+\frac{1}{a^8}} \;.$$

2. Svolgi le seguenti operazioni contenenti radicali e, se possibile, semplifica i risultati ottenuti:

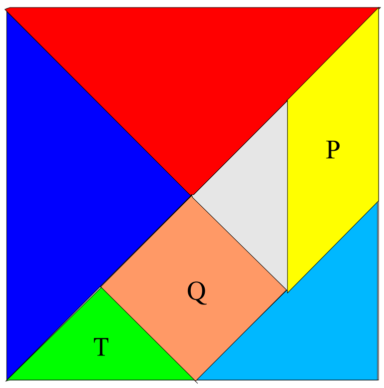
$$\sqrt{ab-a-b+1}\cdot\sqrt{\frac{1}{b^2-1}} \;;\; \sqrt[3]{\frac{x^2-4x+4}{x^7}}:\sqrt[3]{\frac{x^2}{x-2}} \;;\; \sqrt[3]{\frac{2}{3}-\frac{1}{2}}:\sqrt{\frac{1}{6}} \;;\; (\sqrt[6]{4xy^3})^2 \;;\; \sqrt{3\sqrt{3}} \;;$$

$$\sqrt{15^2-45} \;;\; \sqrt{\frac{1}{a^3}-\frac{6}{a^4}+\frac{9}{a^5}} \;;\; \sqrt{50}+\sqrt{2}+\sqrt{12}+\sqrt{75} \;;\; (2\sqrt{3}-\sqrt{2})^2 \;;\; (\sqrt{2}-2\sqrt{3})^3 \;.$$

3. Risolvi la seguente equazione:

$$\frac{1}{x^3-3x^2\sqrt{3}+9x-3\sqrt{3}}=\frac{x}{x^2-2x\sqrt{3}+3}-\frac{1}{x-\sqrt{3}} \;.$$

4. Il Tangram è un gioco cinese formato da sette tavolette disposte a formare un quadrato. Tra le tavolette, cinque sono triangoli rettangoli isosceli (due grandi, uno medio e due piccoli), una è un quadrato ed una un parallelogramma.

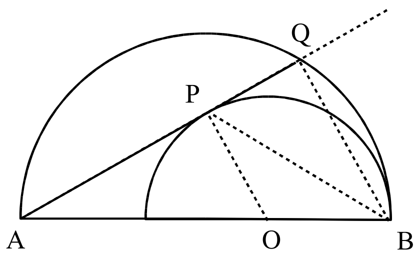


   Se la somma dei perimetri del quadrato arancione Q, del triangolo verde T e del parallelogramma giallo P è 23 cm, quanto misura il lato del quadrato "complessivo"?

   (*Suggerimento: indica con x il lato del quadrato arancione Q*).

5. Enuncia e dimostra il teorema su angoli al centro ed alla circonferenza corrispondenti (*puoi limitarti al caso in cui il centro della circonferenza sia interno all'angolo alla circonferenza*).

6. Due circonferenze sono tangenti internamente in B ed AB è un diametro della circonferenza di raggio maggiore. Conduci da A una tangente alla circonferenza di raggio minore, indicando con P il suo punto di contatto con essa e con Q l'ulteriore punto di intersezione



con la circonferenza di raggio maggiore.

Dimostra che la semiretta BP è la bisettrice dell'angolo $A\hat{B}Q$.

(*Suggerimento 1: se chiami O il centro della circonferenza di raggio minore, puoi dimostrare direttamente che* $OP \| BQ$.

Suggerimento 2: in alternativa, ed in maniera più meccanica, puoi porre $B\hat{A}Q=\alpha$ *ed esprimere le ampiezze di tutti gli angoli della figura in funzione di* α).

Esercizio	***A***	***B***	***C***	***D***	***Punteggio***
1	/6	/7	/1	/1	/15
2	/12	/11	/1	/1	/25
3	/4	/4	/1	/1	/10
4	/5	/5	/2	/3	/15
5	*no*	*no*	/5	/5	/10
6	/5	*no*	/5	/5	/15
Totale					/90

Voto: $\frac{punteggio\ \ totale}{10}+2=$

(A) **Completezza**: sviluppo e scelta del procedimento concettuale o dei contenuti teorici;

(B) **Calcolo**: utilizzo degli algoritmi e delle procedure di calcolo;

(C) **Linguaggio**: utilizzo del linguaggio specifico della disciplina (anche grafico e simbolico) adeguato;

(D) **Argomentazione**: giustificare motivare e verificare i procedimenti utilizzati e le soluzioni ottenute.

2^B - Correzione compito n°2b

1.

- $\sqrt[12]{27.000}=\sqrt[12]{2^3\cdot3^3\cdot5^3}=\sqrt[4]{2\cdot3\cdot5}=\sqrt[4]{30}$;
- $\sqrt[6]{0{,}001}=\sqrt[6]{10^{-3}}=\sqrt{10^{-1}}=\sqrt{\frac{1}{10}}$;
- $\sqrt[6]{\frac{16\cdot5^2}{81}}=\sqrt[6]{\frac{2^4\cdot5^2}{3^4}}=\sqrt[3]{\frac{2^2\cdot5}{3^2}}=\sqrt[3]{\frac{20}{9}}$;
- $\sqrt[6]{\frac{1}{4}-\frac{1}{8}}=\sqrt[6]{\frac{1}{8}}=\sqrt[6]{\frac{1}{2^3}}=\sqrt{\frac{1}{2}}$;
- $\sqrt[10]{\frac{32}{x^{10}y^{15}}}=\sqrt[10]{\frac{2^5}{x^{10}y^{15}}}=\sqrt{\frac{2}{x^2y^3}}=\frac{1}{xy}\sqrt{\frac{2}{y}}$;
- $\sqrt[3]{x^6+y^9}$ non si semplifica;
- $\sqrt{\frac{1}{a^6}-\frac{2}{a^7}+\frac{1}{a^8}}=\sqrt{\frac{a^2-2a+1}{a^8}}=\sqrt{\frac{(a-1)^2}{a^8}}=\frac{a-1}{a^4}$.

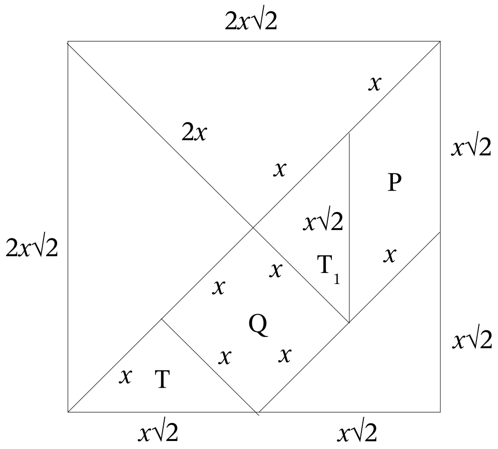
2.

- $\sqrt{ab-a-b+1}\cdot\sqrt{\frac{1}{b^2-1}}=\sqrt{(a-1)(b-1)}\cdot\sqrt{\frac{1}{(b+1)(b-1)}}=\sqrt{\frac{a-1}{b+1}}$;
- $\sqrt[3]{\frac{x^2-4x+4}{x^7}}:\sqrt[3]{\frac{x^2}{x-2}}=\sqrt[3]{\frac{(x-2)^2}{x^7}}\cdot\sqrt[3]{\frac{x-2}{x^2}}=\sqrt[3]{\frac{(x-2)^3}{x^9}}=\frac{x-2}{x^3}$;
- $\sqrt[3]{\frac{2}{3}-\frac{1}{2}}:\sqrt{\frac{1}{6}}=\sqrt[3]{\frac{1}{6}}\cdot\sqrt{6}=\sqrt[6]{\frac{1}{6^2}}\cdot\sqrt[6]{6^3}=\sqrt[6]{6}$;
- $(\sqrt[6]{4xy^3})^2=\sqrt[6]{16x^2y^6}=y\sqrt[3]{4x}$;
- $\sqrt{3\sqrt{3}}=\sqrt{\sqrt{3^2\cdot3}}=\sqrt[4]{3^3}=\sqrt[4]{27}$;
- $\sqrt{15^2-45}=\sqrt{225-45}=\sqrt{180}=\sqrt{2^2\cdot3^2\cdot5}=2\cdot3\sqrt{5}=6\sqrt{5}$;
- $\sqrt{\frac{1}{a^3}-\frac{6}{a^4}+\frac{9}{a^5}}=\sqrt{\frac{a^2-6a+9}{a^5}}=\sqrt{\frac{(a-3)^2}{a^5}}=\frac{a-3}{a^2\sqrt{a}}$;
- $\sqrt{50}+\sqrt{2}+\sqrt{12}+\sqrt{75}=5\sqrt{2}+\sqrt{2}+2\sqrt{3}+5\sqrt{3}=6\sqrt{2}+7\sqrt{3}$;
- $(2\sqrt{3}-\sqrt{2})^2=12-4\sqrt{6}+2=14-4\sqrt{6}$;
- $(\sqrt{2}-2\sqrt{3})^3=2\sqrt{2}-12\sqrt{3}+36\sqrt{2}-24\sqrt{3}=38\sqrt{2}-36\sqrt{3}$.

3. $\frac{1}{x^3-3x^2\sqrt{3}+9x-3\sqrt{3}}=\frac{x}{x^2-2x\sqrt{3}+3}-\frac{1}{x-\sqrt{3}}\;\Rightarrow\;1=x(x-\sqrt{3})-(x-\sqrt{3})^2\;\Rightarrow\quad C.E:\;x\neq\sqrt{3}$

$1=x^2-x\sqrt{3}-x^2+2x\sqrt{3}-3\;\Rightarrow\;x\sqrt{3}=4\;\Rightarrow\;x=4/\sqrt{3}\;\; sol.\,acc.$

4. Ricordiamo, o ricaviamo tramite il teo. di Pitagora, che, in un triangolo rettangolo isoscele in cui i cateti misurano l, l'ipotenusa misura $l\sqrt{2}$.



Quindi, se poniamo x il lato del quadrato Q, il triangolo T ha cateti che misurano x e ipotenusa $x\sqrt{2}$, e lo stesso vale per il triangolo T_1, da cui ricaviamo che un lato del parallelogramma P misura $x\sqrt{2}$, mentre l'altro lato misura x per differenza.

Imponiamo la condizione sulla somma dei perimetri:

$$2p_Q+2p_T+2p_P=4x+2x+x\sqrt{2}+2x+2x\sqrt{2}=23 \;\Rightarrow$$

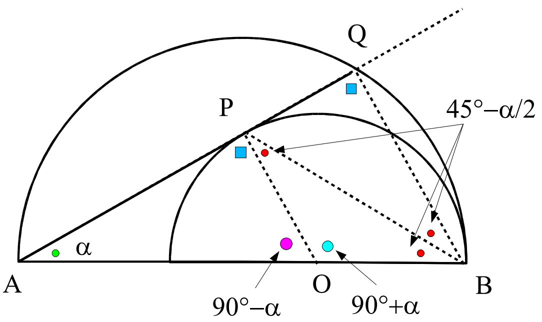
$$8x+3x\sqrt{2}=23 \;\Rightarrow\; x=\frac{23}{8+3\sqrt{2}}=\frac{23(8-3\sqrt{2})}{64-18}=4-\frac{3}{2}\sqrt{2} \; .$$

Quindi il lato del quadrato “grande” misura $l=2x\sqrt{2}=2\sqrt{2}(4-3\sqrt{2}/2)=(8\sqrt{2}-6)cm$.

5. Vedi libro di testo pag. G174.

6. *Svolgimento* 1. Le rette OP e BQ sono entrambe perpendicolari alla retta AQ, la prima perché la tangente BP è perpendicolare al raggio OP, e la seconda perché l'angolo in Q insiste su una semicirconferenza. Quindi OP e BQ sono parallele perché perpendicolari alla stessa retta AQ e, tagliate dalla trasversale BP, formano angoli alterni interni uguali: $O\hat{P}B=P\hat{B}Q$. D'altra parte, $O\hat{P}B=O\hat{B}P$ perché il triangolo OPB è isoscele, in quanto OB e OP sono raggi della circonferenza minore. Quindi $O\hat{B}P=P\hat{B}Q$ per la proprietà transitiva dell'uguaglianza c.v.d.

Svolgimento 2. Poniamo $B\hat{A}Q=\alpha$.



Quindi $A\hat{P}O=90°$ perché la tangente è perpendicolare al raggio per il punto di tangenza, $A\hat{O}P=90°-\alpha$ per differenza e $P\hat{O}B=90°+\alpha$ perché supplementare di $A\hat{B}P$.

Il triangolo OBP è isoscele perché OP e OB sono raggi della stessa circonferenza, per cui:

$$O\hat{P}B=O\hat{B}P=\frac{180°-B\hat{O}P}{2}=\frac{180°-(90°+\alpha)}{2}=45°-\frac{\alpha}{2} \; .$$

Considerando ora il triangolo ABQ, $B\hat{Q}A=90°$ perché insiste su una semicirconferenza e $A\hat{B}Q=90°-\alpha$ per differenza.

Quindi $P\hat{B}Q=A\hat{B}Q-O\hat{B}P=90°-\alpha-(45°-\frac{\alpha}{2})=45°-\frac{\alpha}{2}=O\hat{B}P$ c.v.d.

2^B - MATEMATICA compito n°3*a* - 2021-22

1. Risolvi utilizzando preferibilmente il procedimento più semplice (*in particolare, utilizza la formula risolutiva solo dove è necessario*):

$\frac{5}{16}x^2=125$; $\frac{4}{3}x^2+\frac{2}{9}x-\frac{1}{6}=0$; $x^2\sqrt{2}+x=0$; $2x^2-3x-2=0$;

$4x^2-12x+9=0$; $x^2-\sqrt{2}+\sqrt{3}=0$; $(2x-5)(3x+2)=0$; $x^2+5x-6=0$;

$1,\bar{1}x^2-1,2x=0$; $(x-2)^2=\frac{9}{4}$; $x^2-2x+4=0$; $x^2+2x-6=0$.

2. Risolvi la seguente equazione fratta: $\frac{1}{x^3-2x^2-4x+8}+\frac{2}{x^2-4x+4}+\frac{1}{x-2}=0$.

3. Semplifica, se possibile, le seguenti frazioni algebriche:

$\frac{x^2-4}{2x^2-3x-2}$; $\frac{3x^2-2x-5}{2x^2+3x+1}$; $\frac{2x^2+1}{4x^4+1}$; $\frac{x^2-2}{x^2-3x\sqrt{2}+4}$.

4. Un giorno Paolo acquista un certo numero di penne (tutte uguali) spendendo 15 €.

   Il giorno dopo, il prezzo di ciascuna penna è aumentato di 50 centesimi, per cui, spendendo 15 €, egli può acquistare una penna in meno rispetto al primo giorno.

   Calcola quante penne aveva acquistato il primo giorno e qual era il loro prezzo.

5. In un rettangolo ABCD abbiamo $\overline{AB}=6\,cm$, $\overline{BC}=2\,cm$.

   Determina un punto P sul lato AB in modo che l'angolo $D\hat{P}C$ sia retto.

   (*"Determinare" il punto P significa calcolare la distanza AP o PB*).

6. Risolvi senza utilizzare la calcolatrice: $1.000\,x^2+99.999.999\,x-100.000=0$.

   (*Suggerimento: utilizza le potenze di 10*).

Alunno/a: _______________________________ Classe: **2^B**

Esercizio	*A*	*B*	*C*	*D*	*Punteggio*
1					/20
2					/14
3					/14
4					/15
5					/15
6					/12
Totale					/90

Voto approssimato: $\frac{punteggio \quad totale}{11}+2=$ Voto finale:

(A) **Completezza**: sviluppo e scelta del procedimento concettuale o dei contenuti teorici;

(B) **Calcolo**: utilizzo degli algoritmi e delle procedure di calcolo;

(C) **Linguaggio**: utilizzo del linguaggio specifico della disciplina (anche grafico e simbolico) adeguato;

(D) **Argomentazione**: giustificare motivare e verificare i procedimenti utilizzati e le soluzioni ottenute.

<u>2^B</u> *- Correzione compito n°3a*

1.

- $\frac{5}{16}x^2=125 \Rightarrow x^2=400 \Rightarrow x=\pm 20$;
- $\frac{4}{3}x^2+\frac{2}{9}x-\frac{1}{6}=0 \Rightarrow 24x^2+4x-3=0 \Rightarrow x=\frac{-2\pm\sqrt{4+72}}{24}=\frac{-2\pm\sqrt{76}}{24}=\frac{-1\pm\sqrt{19}}{12}$;
- $x^2\sqrt{2}+x=0 \Rightarrow x(x\sqrt{2}+1)=0 \Rightarrow x_1=0;\ x_2=-\frac{1}{\sqrt{2}}$;
- $2x^2-3x-2=0 \Rightarrow x=\frac{3\pm\sqrt{9+16}}{2}=\frac{3\pm 5}{4} \Rightarrow x_1=-\frac{1}{2};\ x_2=2$;
- $4x^2-12x+9=0 \Rightarrow (2x-3)^2=0 \Rightarrow x_1=x_2=\frac{3}{2}$;
- $x^2-\sqrt{2}+\sqrt{3}=0 \Rightarrow x^2=\sqrt{2}-\sqrt{3}<0 \Rightarrow$ *non ha sol.* ;
- $(2x-5)(3x+2)=0 \Rightarrow 2x-5=0 \vee 3x+2=0 \Rightarrow x_1=\frac{5}{2};\ x_2=-\frac{2}{3}$;
- $x^2+5x-6=0 \Rightarrow (x+6)(x-1)=0 \Rightarrow x_1=-6;\ x_2=1$;
- $1,\bar{1}x^2-1,2x=0 \Rightarrow x(1,\bar{1}x-1,2)=0 \Rightarrow x_1=0;\ x_2=\frac{1,2}{1,\bar{1}}=\frac{12/10}{10/9}=\frac{27}{25}$;
- $(x-2)^2=\frac{9}{4} \Rightarrow x-2=\pm\frac{3}{2} \Rightarrow x_1=2-\frac{3}{2}=\frac{1}{2};\ x_2=2+\frac{3}{2}=\frac{7}{2}$;
- $x^2-2x+4=0 \Rightarrow \Delta/4=1-4<0 \Rightarrow$ *non ha sol.* ;
- $x^2+2x-6=0 \Rightarrow x=-1\pm\sqrt{1+6}=-1\pm\sqrt{7}$.

2. Raccogliamo: $x^3-2x^2-4x+8=x^2(x-2)-4(x-2)=(x-2)(x^2-4)=(x-2)^2(x+2)$. Quindi:

$$\frac{1}{(x-2)^2(x+2)}+\frac{2}{(x-2)^2}+\frac{1}{x-2}=0 \Rightarrow \frac{1+2(x+2)+(x-2)(x+2)}{(x-2)^2(x+2)}=0 \quad ; \qquad C.E.:\ x\neq\pm 2$$

$$1+2x+4+x^2-4=0 \Rightarrow x^2+2x+1=0 \Rightarrow (x+1)^2=0 \Rightarrow x_1=x_2=-1 \quad \textit{sol. acc.}$$

3.

- $\frac{x^2-4}{2x^2-3x-2}=\frac{(x+2)(x-2)}{2(x+1/2)(x-2)}=\frac{x+2}{2x+1}$;
- $\frac{3x^2-2x-5}{2x^2+3x+1}=\frac{3(x+1)(x-5/3)}{2(x+1/2)(x+1)}=\frac{3x-5}{2x+1}$;
- $\frac{2x^2+1}{4x^4+1}$ *non si semplifica*;
- $\frac{x^2-2}{x^2-3x\sqrt{2}+4}=\frac{(x+\sqrt{2})(x-\sqrt{2})}{(x-\sqrt{2})(x-2\sqrt{2})}=\frac{x+\sqrt{2}}{x-2\sqrt{2}}$.

4. Poniamo $x = n° \textit{ iniziale penne}$, per cui $\textit{prezzo iniziale} = \dfrac{15}{x}$.

Poi abbiamo $x-1 = n° \textit{ finale penne}$, da cui $\textit{prezzo finale} = \dfrac{15}{x-1}$.

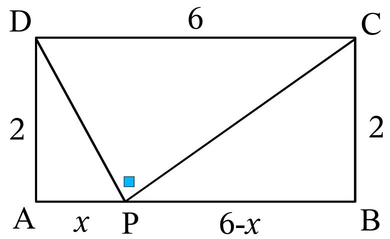
Imponiamo che $\textit{prezzo finale} = \textit{prezzo iniziale} + 0{,}50 \Rightarrow \dfrac{15}{x-1} = \dfrac{15}{x} + 0{,}50 \Rightarrow$

$$15x = 15(x-1) + 0{,}50x(x-1) \Rightarrow 0{,}50x^2 - 0{,}50x - 15 = 0 \Rightarrow x^2 - x - 30 = 0 \Rightarrow$$

$$(x-6)(x+5) = 0 \Rightarrow x_1 = 6 \textit{ acc}; \quad x_2 = -5 \textit{ non acc.}$$

Quindi Paolo aveva acquistato 6 penne ed il loro prezzo era 2,50 €.

5. L'angolo $D\hat{P}C$ è retto se e solo se per il triangolo DPC è valido il teorema di Pitagora:



$$DP^2 + PC^2 = DC^2 \Rightarrow AD^2 + AP^2 + PB^2 + BC^2 = DC^2 .$$

Poniamo $AP = x$:

$$4 + x^2 + (6-x)^2 + 4 = 36 \Rightarrow 2x^2 - 12x + 8 = 0 \Rightarrow$$

$$x^2 - 6x + 4 = 0 \Rightarrow x = 3 \pm \sqrt{9-4} = 3 \pm \sqrt{5} .$$

Entrambe le soluzioni sono accettabili, in quanto verificano le condizioni $0 \le x \le 6$, e corrispondono a posizioni del punto P simmetriche rispetto all'asse dei lati AB e CD.

6. Scriviamo i coefficienti come: $a = 10^3$, $b = 10^8 - 1$, $c = -10^5$;

$$\Delta = b^2 - 4ac = (10^8 - 1)^2 + 4 \cdot 10^3 \cdot 10^5 = 10^{16} - 2 \cdot 10^8 + 1 + 4 \cdot 10^8 = 10^{16} + 2 \cdot 10^8 + 1 = (10^8 + 1)^2 ;$$

$$x = \frac{-10^8 + 1 \pm (10^8 + 1)}{2 \cdot 10^3} \Rightarrow x_1 = \frac{-2 \cdot 10^8}{2 \cdot 10^3} = -10^5; \quad x_2 = \frac{2}{2 \cdot 10^3} = \frac{1}{10^3} .$$

1. Risolvi utilizzando preferibilmente il procedimento più semplice (*in particolare, utilizza la formula risolutiva solo dove è necessario*):

   $\frac{2}{25}x^2=32$; $\frac{4}{3}x^2-\frac{2}{9}x-\frac{1}{6}=0$; $x^2\sqrt{3}-x=0$; $2x^2+3x-2=0$;

   $9x^2-12x+4=0$; $x^2-\sqrt{3}+\sqrt{5}=0$; $(5x-2)(2x+3)=0$; $x^2-5x-6=0$;

   $1,\overline{2}x^2-1,1x=0$; $(x-2)^2=\frac{4}{9}$; $x^2-3x+9=0$; $x^2-2x-6=0$.

2. Risolvi la seguente equazione fratta: $\frac{3-3x}{x^3-2x^2-4x+8}+\frac{1}{x^2-4x+4}+\frac{1}{x-2}=0$.

3. Semplifica, se possibile, le seguenti frazioni algebriche:

   $\frac{2x^2-3x-2}{x^2-4}$; $\frac{2x^2+3x+1}{3x^2-2x-5}$; $\frac{4x^4+1}{2x^2+1}$; $\frac{x^2-3x\sqrt{2}+4}{x^2-2}$.

4. Un giorno Paolo acquista un certo numero di penne (tutte uguali) spendendo 20 €.

   Il giorno dopo, il prezzo di ciascuna penna è aumentato di 50 centesimi, per cui, spendendo 20 €, egli può acquistare due penne in meno rispetto al primo giorno.

   Calcola quante penne aveva acquistato il primo giorno e qual era il loro prezzo.

5. In un rettangolo ABCD abbiamo $\overline{AB}=8\,cm$, $\overline{BC}=3\,cm$.

   Determina un punto P sul lato AB in modo che l'angolo $D\hat{P}C$ sia retto.

   (*"Determinare" il punto P significa calcolare la distanza AP o PB*).

6. Risolvi <u>senza utilizzare la calcolatrice</u>: $100.000x^2+99.999.999x-1.000=0$.

   (*Suggerimento: utilizza le potenze di 10*).

Alunno/a: ________________________________ Classe: **2^B**

Esercizio	*A*	*B*	*C*	*D*	*Punteggio*
1					/20
2					/14
3					/14
4					/15
5					/15
6					/12
Totale					/90

Voto approssimato: $\frac{punteggio\ \ totale}{11}+2=$ Voto finale:

(A) **Completezza**: sviluppo e scelta del procedimento concettuale o dei contenuti teorici;

(B) **Calcolo**: utilizzo degli algoritmi e delle procedure di calcolo;

(C) **Linguaggio**: utilizzo del linguaggio specifico della disciplina (anche grafico e simbolico) adeguato;

(D) **Argomentazione**: giustificare motivare e verificare i procedimenti utilizzati e le soluzioni ottenute.

<u>2^B</u> *- Correzione compito n°3b*

1.

- $\frac{2}{25}x^2=32 \;\Rightarrow\; x^2=400 \;\Rightarrow\; x=\pm 20$;
- $\frac{4}{3}x^2-\frac{2}{9}x-\frac{1}{6}=0 \;\Rightarrow\; 24x^2-4x-3=0 \;\Rightarrow\; x=\frac{2\pm\sqrt{4+72}}{24}=\frac{2\pm\sqrt{76}}{24}=\frac{1\pm\sqrt{19}}{12}$;
- $x^2\sqrt{3}-x=0 \;\Rightarrow\; x(x\sqrt{3}-1)=0 \;\Rightarrow\; x_1=0;\;\; x_2=\frac{1}{\sqrt{3}}$;
- $2x^2+3x-2=0 \;\Rightarrow\; x=\frac{-3\pm\sqrt{9+16}}{2}=\frac{-3\pm 5}{4} \;\Rightarrow\; x_1=-2;\;\; x_2=\frac{1}{2}$;
- $9x^2-12x+4=0 \;\Rightarrow\; (3x-2)^2=0 \;\Rightarrow\; x_1=x_2=\frac{2}{3}$;
- $x^2-\sqrt{3}+\sqrt{5}=0 \;\Rightarrow\; x^2=\sqrt{3}-\sqrt{5}<0 \;\Rightarrow \textit{non ha sol.}$;
- $(5x-2)(2x+3)=0 \;\Rightarrow\; 5x-2=0 \;\vee\; 2x+3=0 \;\Rightarrow\; x_1=\frac{2}{5};\;\; x_2=-\frac{3}{2}$;
- $x^2-5x-6=0 \;\Rightarrow\; (x+1)(x-6)=0 \;\Rightarrow\; x_1=-1;\;\; x_2=6$;
- $1,\bar{2}x^2-1{,}1x=0 \;\Rightarrow\; x(1,\bar{2}x-1{,}1)=0 \;\Rightarrow\; x_1=0;\;\; x_2=\frac{1{,}1}{1,\bar{2}}=\frac{11/10}{11/9}=\frac{9}{10}$;
- $(x-2)^2=\frac{4}{9} \;\Rightarrow\; x-2=\pm\frac{2}{3} \;\Rightarrow\; x_1=2-\frac{2}{3}=\frac{4}{3};\;\; x_2=2+\frac{2}{3}=\frac{8}{3}$;
- $x^2-3x+9=0 \;\Rightarrow\; \Delta=9-36<0 \;\Rightarrow \textit{non ha sol.}$;
- $x^2-2x-6=0 \;\Rightarrow\; x=1\pm\sqrt{1+6}=1\pm\sqrt{7}$.

2. Raccogliamo: $x^3-2x^2-4x+8=x^2(x-2)-4(x-2)=(x-2)(x^2-4)=(x-2)^2(x+2)$. Quindi:

$$\frac{3-3x}{(x-2)^2(x+2)}+\frac{1}{(x-2)^2}+\frac{1}{x-2}=0 \;\Rightarrow\; \frac{3-3x+x+2+(x-2)(x+2)}{(x-2)^2(x+2)}=0 \quad ; \quad C.E.:\; x\neq\pm 2$$

$$3-3x+x+2+x^2-4=0 \;\Rightarrow\; x^2-2x+1=0 \;\Rightarrow\; (x-1)^2=0 \;\Rightarrow\; x_1=x_2=1 \;\; \textit{sol. acc.}$$

3.

- $\frac{2x^2-3x-2}{x^2-4}=\frac{2(x+1/2)(x-2)}{(x+2)(x-2)}=\frac{2x+1}{x+2}$;
- $\frac{2x^2+3x+1}{3x^2-2x-5}=\frac{2(x+1/2)(x+1)}{3(x+1)(x-5/3)}=\frac{2x+1}{3x-5}$;
- $\frac{4x^4+1}{2x^2+1}$ *non si semplifica*;
- $\frac{x^2-3x\sqrt{2}+4}{x^2-2}=\frac{(x-\sqrt{2})(x-2\sqrt{2})}{(x+\sqrt{2})(x-\sqrt{2})}=\frac{x-2\sqrt{2}}{x+\sqrt{2}}$.

4. Poniamo $x = n° \, iniziale \, penne$, per cui $prezzo \, iniziale = \dfrac{20}{x}$.

   Poi abbiamo $x-2 = n° \, finale \, penne$, da cui $prezzo \, finale = \dfrac{20}{x-2}$.

   Imponiamo che $prezzo \, finale = prezzo \, iniziale + 0{,}50 \Rightarrow \dfrac{20}{x-2} = \dfrac{20}{x} + 0{,}50 \Rightarrow$

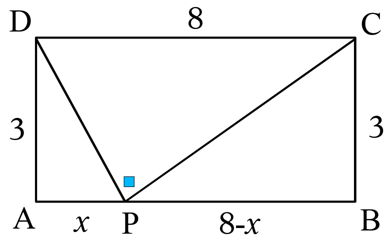
   $20x = 20(x-2) + 0{,}50\, x(x-2) \Rightarrow 0{,}50\, x^2 - x - 40 = 0 \Rightarrow x^2 - 2x - 80 = 0 \Rightarrow$

   $(x-10)(x+6) = 0 \Rightarrow x_1 = 10 \, acc \, ; \; x_2 = -8 \, non \, acc.$

   Quindi Paolo aveva acquistato 10 penne ed il loro prezzo era 2 €.

5. L'angolo $D\hat{P}C$ è retto se e solo se per il triangolo DPC è valido il teorema di Pitagora:

   $DP^2 + PC^2 = DC^2 \Rightarrow AD^2 + AP^2 + PB^2 + BC^2 = DC^2$.

   Poniamo $AP = x$:

   $9 + x^2 + (8-x)^2 + 9 = 64 \Rightarrow 2x^2 - 16x + 18 = 0 \Rightarrow$

   $x^2 - 8x + 9 = 0 \Rightarrow x = 4 \pm \sqrt{16-9} = 4 \pm \sqrt{7}$.

   Entrambe le soluzioni sono accettabili, in quanto verificano le condizioni $0 \le x \le 8$, e corrispondono a posizioni del punto P simmetriche rispetto all'asse dei lati AB e CD.

6. Scriviamo i coefficienti come: $a = 10^5$, $b = 10^8 - 1$, $c = -10^3$;

   $\Delta = b^2 - 4ac = (10^8-1)^2 + 4 \cdot 10^5 \cdot 10^3 = 10^{16} - 2 \cdot 10^8 + 1 + 4 \cdot 10^8 = 10^{16} + 2 \cdot 10^8 + 1 = (10^8+1)^2$;

   $x = \dfrac{-10^8 + 1 \pm (10^8+1)}{2 \cdot 10^5} \Rightarrow x_1 = \dfrac{-2 \cdot 10^8}{2 \cdot 10^5} = -10^3 ; \; x_2 = \dfrac{2}{2 \cdot 10^5} = \dfrac{1}{10^5}$.

1. Risolvi le seguenti equazioni di grado superiore al secondo:

   $(2x-1)^4=2$; $(3x-1)^3+3=0$; $x^4-3x^2+2=0$;

   $1-\frac{7}{x^3}=\frac{8}{x^6}$; $3x^3+x^2-6x-2=0$; $x^3-x^2-2x+8=0$.

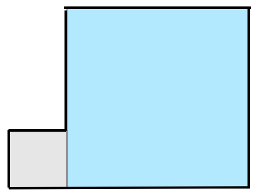
2. Risolvi il seguente sistema di equazioni: $\begin{cases} 3x^2+y^2=4 \\ x^2+y^2-2y-4=0 \end{cases}$.

3. Barbara acquista complessivamente 16 penne, suddivise tra due tipologie, A e B.

   Ogni penna del tipo B costa 1 € in più di ciascuna penna del tipo A; Barbara spende 5 € in tutto per le penne del tipo A e 9 € in tutto per le penne del tipo B.

   Calcola quante penne di ciascun tipo sono state acquistate e qual è il costo di ciascuna penna.

4. Un campo è formato dall'unione di due quadrati. L'area complessiva del campo è $3.400\,m^2$, mentre il recinto esterno (*evidenziato in figura*) è lungo complessivamente 260 *m*. Calcola la misura dei lati dei quadrati.

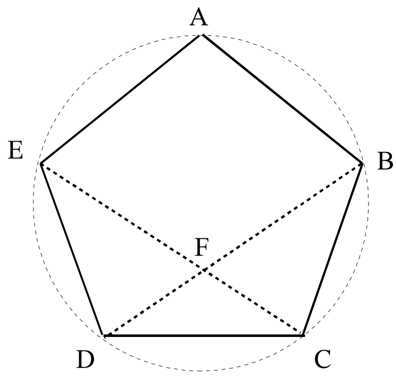


5. Considera il pentagono regolare ABCDE e traccia le diagonali BD e CE, che si intersecano in F.

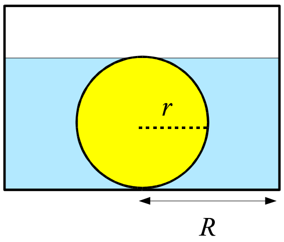
   a. Dimostra che i triangoli CDB e CDE sono congruenti, e calcola le ampiezze degli angoli di tali triangoli.

   b. Dimostra che il triangolo CDF è isoscele, e calcola le ampiezze degli angoli di tale triangolo.

   c. Dimostra che il quadrilatero ABFE è un rombo.



Problema "bonus"



Barbara ha un contenitore cilindrico, il cui raggio di base misura $R=4\,cm$, vi mette una biglia sferica di raggio $r=2\,cm$, e versa nel contenitore dell'acqua, finché la superficie dell'acqua non risulta tangente alla biglia (*vedi figura*).

Paolo toglie dal recipiente la biglia messa da Barbara (*senza modificare il volume di acqua presente*) e la sostituisce con una seconda biglia, di raggio x diverso dalla precedente. Con sua grande sorpresa, Paolo osserva che la superficie dell'acqua è tangente anche alla seconda biglia.

Calcola il raggio x della seconda biglia.

Risoluzione guidata:

- *calcola il volume dell'acqua nel primo caso (valore numerico);*
- *calcola il volume dell'acqua nel secondo caso (in funzione di x);*
- *imponi che il volume dell'acqua sia rimasto lo stesso: otterrai un'equazione di terzo grado, di cui il testo del problema fornisce una radice...*
- *Non voglio offenderti ricordandoti che il volume del cilindro e della sfera misurano:*

  $V_{cil}=\pi R^2 h$ *e* $V_{sf}=\frac{4}{3}\pi r^3$ *(preterizione).*

Alunno/a: ________________________________ Classe: **2^B**

Esercizio	***A***	***B***	***C***	***D***	***Punteggio***
1					/24
2					/18
3					/18
4					/18
5					/15
6					
Totale					/93

Voto approssimato: $\frac{punteggio\ \ totale}{11}+2=$ Voto finale:

<u>2^B</u> *- Correzione compito n°4a*

1.

a. $(2x-1)^4=2 \;\Rightarrow\; 2x-1=\pm\sqrt[4]{2} \;\Rightarrow\; x=\dfrac{1\pm\sqrt[4]{2}}{2}$;

b. $(3x-1)^3+3=0 \;\Rightarrow\; 3x-1=-\sqrt[3]{3} \;\Rightarrow\; x=\dfrac{1-\sqrt[3]{3}}{3}$;

c. $x^4-3x^2+2=0 \;\Rightarrow\; (x^2-1)(x^2-2)=0 \;\Rightarrow\; x=\pm 1 \;\vee\; x=\pm\sqrt{2}$;

d. $1-\dfrac{7}{x^3}=\dfrac{8}{x^6} \;\Rightarrow\; x^6-7x^3-8=0 \;\Rightarrow\; (x^3-8)(x^3+1)=0 \;\Rightarrow\; x=2 \;\vee\; x=-1$;

e. $x^2(3x+1)-2(3x+1)=0 \;\Rightarrow\; (3x+1)(x^2-2)=0 \;\Rightarrow\; x=-\dfrac{1}{3} \;\vee\; x=\pm\sqrt{2}$;

f. $x^3-x^2-2x+8=0$. Osserviamo che $P(-2)=-8-4+4+8=0$, per cui il polinomio a primo membro è divisibile per $(x+2)$; svolgendo la divisione (preferibilmente con lo schema di Ruffini) ricaviamo: $(x+2)(x^2-3x+4)=0$.

$x+2=0 \;\Rightarrow\; x=-2$, mentre $x^2-3x+4=0 \;\Rightarrow\; \Delta=9-16<0$, per cui l'equazione ammette come unica soluzione $x=-2$.

2. Ricaviamo dalla seconda eq: $x^2=4+2y-y^2$ e sostituiamo nella prima:

$12+6y-3y^2+y^2=4 \;\Rightarrow\; y^2-3y-4=0 \;\Rightarrow\; (y-4)(y+1)=0 \;\Rightarrow\; y_1=-1;\; y_2=4$.

$y_1=-1 \;\Rightarrow\; x^2=4-2-1=1 \;\Rightarrow\; x=\pm 1$;

$y_2=4 \;\Rightarrow\; x^2=4+8-16=-4 \;\Rightarrow\; \textit{non ha sol.}$

Il sistema ammette quindi le soluzioni $(1,-1)$ e $(-1,-1)$.

3. Se poniamo $x=n°\ \textit{penne tipo A acquistate}$ e $y=\textit{costo unitario penna tipo A}$, abbiamo:

$16-x=n°\ \textit{penne tipo B acquistate}$, $y+1=\textit{costo unitario penna tipo B}$.

Imponiamo che la spesa totale per ciascun tipo di penna sia quella fornita dal testo:

$$\begin{cases} xy=5 \\ (16-x)(y+1)=9 \end{cases} .$$

Ricaviamo dalla prima eq: $y=5/x$ e sostituiamo nella seconda:

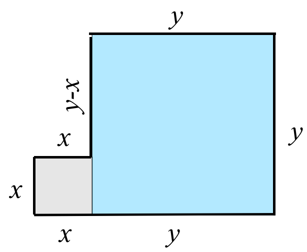
$(16-x)(\dfrac{5}{x}+1)=9 \;\Rightarrow\; (16-x)(5+x)=9x \;\Rightarrow\; 80+16x-5x-x^2=9x \;\Rightarrow$

$x^2-2x-80=0 \;\Rightarrow\; (x+8)(x-10)=0 \;\Rightarrow\; x_1=-8;\; x_2=10$.

La sol. negativa non è accettabile, mentre dall'altra ricaviamo: $y_2=5/x_2=0{,}5$.

Concludiamo quindi che Barbara acquista 10 penne di tipo A e $16-10=6$ di tipo B, e che le penne di tipo A costano 0,5 € ciascuna, mentre quelle di tipo B costano $1+0{,}5=1{,}5\,€$ ciascuna.

4. Indichiamo con x il lato del quadrato “piccolo” e con y quello del quadrato “grande”.



Imponiamo le condizioni su area e perimetro:

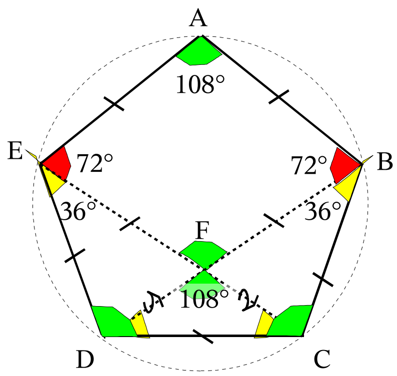
$$\begin{cases} x^2+y^2=3.400 \\ 2x+4y=260 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x=130-2y \\ (130-2y)^2+y^2=3.400 \end{cases} \Rightarrow$$

$$16.900-520y+4y^2+y^2=3.400 \Rightarrow 5y^2-520y+13.500=0 \Rightarrow y^2-104y+2.700=0 \Rightarrow$$

$$y=52\pm 2 \Rightarrow \left[\begin{array}{l} y_1=50 \Rightarrow x_1=30 \\ y_2=54 \Rightarrow x_2=22 \end{array}\right. .$$

Abbiamo quindi due possibilità: che i lati dei quadrati misurino 30 *m* e 50 *m*, oppure che misurino 22 *m* e 54 *m*.

5. Ricordiamo che il pentagono regolare, oltre ai lati congruenti, ha gli angoli che misurano $\alpha=(5-2)\cdot 180°/5=108°$.



a. I triangoli CDB e CDE hanno $BC=CD=DE$ perché lati del pentagono regolare e $B\hat{C}D=C\hat{D}E=108°$ perché angoli interni del pentagono regolare, per cui sono congruenti per il primo criterio c.v.d.

b. Poiché i triangoli CDB e CDE sono isosceli con l'angolo al vertice $B\hat{C}D=C\hat{D}E=108°$, hanno gli angoli alla base $F\hat{C}D=F\hat{D}C=(180°-108°)/2=36°$, per cui il triangolo CDF è isoscele in quanto ha due angoli congruenti c.v.d.

c. Calcoliamo le ampiezze degli angoli del quadrilatero ABFE:

$B\hat{A}E=108°$ perché angolo interno di un pentagono regolare;

$A\hat{B}F=A\hat{B}C-F\hat{B}C=108°-36°=72°$;

$A\hat{E}F=A\hat{E}D-F\hat{E}D=108°-36°=72°$;

$B\hat{F}E=C\hat{F}D=180°-2\cdot 36°=108°$.

Quindi il quadrilatero ABFE è un parallelogramma in quanto ha gli angoli opposti congruenti. D'altra parte, $AB=AE$ perché lati di un pentagono regolare; $AB=EF$ e $AE=EF$ perché lati opposti di un parallelogramma, per cui ABFE è un rombo, in quanto quadrilatero con tutti i lati congruenti c.v.d.

Soluzione problema "bonus"

La prima biglia e l'acqua occupano insieme un cilindro di raggio di base R e altezza $h=2r$, che quindi ha volume $V_{cil\,1}=\pi R^2 h=\pi\cdot 4^2\cdot 4=64\pi\, cm^3$.

La prima biglia è una sfera di raggio r, quindi il suo volume è:

$$V_{sf\,1}=\frac{4}{3}\pi r^3=\frac{4}{3}\pi\cdot 2^3=\frac{32}{3}\pi\, cm^3 \quad .$$

Calcoliamo il volume dell'acqua (valore numerico) per differenza:

$$V_{acqua\,1}=V_{cil\,1}-V_{sf\,1}=64\pi-\frac{32}{3}\pi=\frac{160}{3}\pi\, cm^3 \quad .$$

La seconda biglia e l'acqua occupano insieme un cilindro di raggio di base R e altezza $2x$, che quindi ha volume $V_{cil\,2}=\pi R^2\cdot 2x=32\pi x$.

La seconda biglia è una sfera di raggio x, quindi il suo volume è: $V_{sf\,2}=\frac{4}{3}\pi x^3$.

Calcoliamo il volume dell'acqua (in funzione di x) per differenza:

$$V_{acqua\,1}=V_{cil\,2}-V_{sf\,2}=32\pi x-\frac{4}{3}\pi x^3 \quad .$$

Imponiamo che il volume dell'acqua sia lo stesso nei due casi:

$$\frac{160}{3}\pi=32\pi x-\frac{4}{3}\pi x^3 \quad .$$

Abbiamo ottenuto un'equazione di terzo grado, che scriviamo in forma normale:

$$x^3-24x+40=0 \quad .$$

Sappiamo dal testo (o, alla peggio, troviamo tra i divisori del termine noto) che una soluzione dell'equazione è $x=2$, perché quando $r=2$ la biglia era tangente alla superficie dell'acqua.

Scomponiamo con lo schema di Ruffini: $(x-2)(x^2+2x-20)=0$.

Quindi una soluzione è $x_1=2$ (già nota) e le altre sono $x_2=-1-\sqrt{21}$ (non accettabile, perché, essendo negativa, non può essere la misura di un segmento) e $x_3=\sqrt{21}-1$, che fornisce la misura in *cm* del raggio della seconda biglia.

1. Risolvi le seguenti equazioni di grado superiore al secondo:

   $(2x+1)^4=2$; $(3x+1)^3-3=0$; $x^4-4x^2+3=0$;

   $1+\dfrac{7}{x^3}=\dfrac{8}{x^6}$; $3x^3-x^2-6x+2=0$; $x^3+x^2-2x-8=0$.

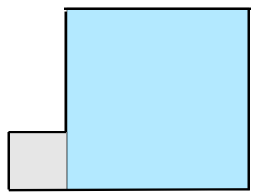
2. Risolvi il seguente sistema di equazioni: $\begin{cases} x^2+3y^2=4 \\ x^2+y^2-2x-4=0 \end{cases}$.

3. Barbara acquista complessivamente 18 penne, suddivise tra due tipologie, A e B.

   Ogni penna del tipo B costa 0,50 € in più di ciascuna penna del tipo A; Barbara spende 12 € in tutto per le penne del tipo A e 20 € in tutto per le penne del tipo B.

   Calcola quante penne di ciascun tipo sono state acquistate e qual è il costo di ciascuna penna.

4. Un campo è formato dall'unione di due quadrati. L'area complessiva del campo è $3.250\,m^2$, mentre il recinto esterno (*evidenziato in figura*) è lungo complessivamente 250 *m*. Calcola la misura dei lati dei quadrati.

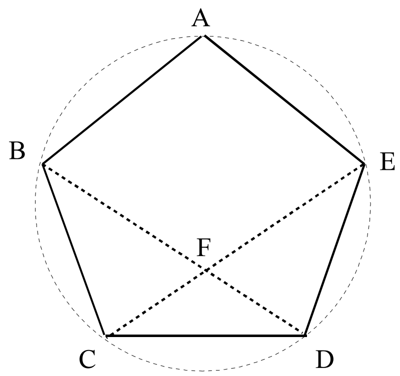


5. Considera il pentagono regolare ABCDE e traccia le diagonali BD e CE, che si intersecano in F.

   a. Dimostra che i triangoli CDB e CDE sono congruenti, e calcola le ampiezze degli angoli di tali triangoli.

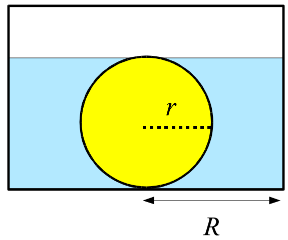
   b. Dimostra che il triangolo CDF è isoscele, e calcola le ampiezze degli angoli di tale triangolo.

   c. Dimostra che il quadrilatero ABFE è un rombo.



Problema "bonus"

Barbara ha un contenitore cilindrico, il cui raggio di base misura $R=2\,cm$, vi mette una biglia sferica di raggio $r=1\,cm$, e versa nel contenitore dell'acqua, finché la superficie dell'acqua non risulta tangente alla biglia (*vedi figura*).



Paolo toglie dal recipiente la biglia messa da Barbara (*senza modificare il volume di acqua presente*) e la sostituisce con una seconda biglia, di raggio x diverso dalla precedente. Con sua grande sorpresa, Paolo osserva che la superficie dell'acqua è tangente anche alla seconda biglia.

Calcola il raggio x della seconda biglia.

Risoluzione guidata:

- *calcola il volume dell'acqua nel primo caso (valore numerico);*
- *calcola il volume dell'acqua nel secondo caso (in funzione di x);*
- *imponi che il volume dell'acqua sia rimasto lo stesso: otterrai un'equazione di terzo grado, di cui il testo del problema fornisce una radice...*
- *Non voglio offenderti ricordandoti che il volume del cilindro e della sfera misurano:*

  $V_{cil}=\pi R^2 h$ *e* $V_{sf}=\frac{4}{3}\pi r^3$ *(preterizione).*

Alunno/a: ________________________________ Classe: **2^B**

Esercizio	*A*	*B*	*C*	*D*	*Punteggio*
1					/24
2					/18
3					/18
4					/18
5					/15
6					
Totale					/93

Voto approssimato: $\frac{punteggio\quad totale}{11}+2=$ Voto finale:

<u>2^B</u> *- Correzione compito n°4b*

1.

a. $(2x+1)^4=2 \Rightarrow 2x+1=\pm\sqrt[4]{2} \Rightarrow x=\dfrac{-1\pm\sqrt[4]{2}}{2}$;

b. $(3x+1)^3-3=0 \Rightarrow 3x+1=\sqrt[3]{3} \Rightarrow x=\dfrac{-1+\sqrt[3]{3}}{3}$;

c. $x^4-4x^2+3=0 \Rightarrow (x^2-1)(x^2-3)=0 \Rightarrow x=\pm 1 \vee x=\pm\sqrt{3}$;

d. $1+\dfrac{7}{x^3}=\dfrac{8}{x^6} \Rightarrow x^6+7x^3-8=0 \Rightarrow (x^3+8)(x^3-1)=0 \Rightarrow x=-2 \vee x=1$;

e. $x^2(3x-1)-2(3x-1)=0 \Rightarrow (3x-1)(x^2-2)=0 \Rightarrow x=\dfrac{1}{3} \vee x=\pm\sqrt{2}$;

f. $x^3+x^2-2x-8=0$. Osserviamo che $P(2)=8+4-4-8=0$, per cui il polinomio a primo membro è divisibile per $(x-2)$; svolgendo la divisione (preferibilmente con lo schema di Ruffini) ricaviamo: $(x-2)(x^2+3x+4)=0$.

$x-2=0 \Rightarrow x=2$, mentre $x^2+3x+4=0 \Rightarrow \Delta=9-16<0$, per cui l'equazione ammette come unica soluzione $x=2$.

2. Ricaviamo dalla seconda eq: $y^2=4+2x-x^2$ e sostituiamo nella prima:

$x^2+12+6x-3x^2=4 \Rightarrow x^2-3x-4=0 \Rightarrow (x-4)(x+1)=0 \Rightarrow x_1=-1;\ x_2=4$.

$x_1=-1 \Rightarrow y^2=4-2-1=1 \Rightarrow y=\pm 1$;

$x_2=4 \Rightarrow y^2=4+8-16=-4 \Rightarrow$ *non ha sol.*

Il sistema ammette quindi le soluzioni $(-1,1)$ e $(-1,-1)$.

3. Se poniamo $x=n°\ \textit{penne tipo A acquistate}$ e $y=\textit{costo unitario penna tipo A}$, abbiamo:

$18-x=n°\ \textit{penne tipo B acquistate}$, $y+0{,}5=\textit{costo unitario penna tipo B}$.

Imponiamo che la spesa totale per ciascun tipo di penna sia quella fornita dal testo:

$$\begin{cases} xy=12 \\ (18-x)(y+0{,}5)=20 \end{cases} .$$

Ricaviamo dalla prima eq: $y=12/x$ e sostituiamo nella seconda:

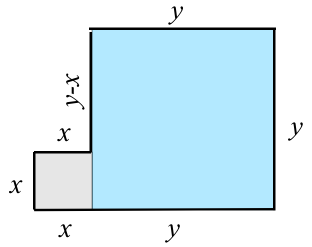
$$(18-x)(\frac{12}{x}+0{,}5)=20 \Rightarrow (18-x)(12+0{,}5x)=20x \Rightarrow 216+9x-12x-0{,}5x^2=20x \Rightarrow$$

$$x^2+46x-432=0 \Rightarrow x=-23\pm\sqrt{24^2+432}=-23\pm 31 \Rightarrow x_1=-54;\ x_2=8 .$$

La sol. negativa non è accettabile, mentre dall'altra ricaviamo: $y_2=12/x_2=1{,}5$.

Concludiamo quindi che Barbara acquista 8 penne di tipo A e $18-8=10$ di tipo B, e che le penne di tipo A costano 1,5 € ciascuna, mentre quelle di tipo B costano $1{,}5+0{,}5=2€$ ciascuna.

4. Indichiamo con x il lato del quadrato "piccolo" e con y quello del quadrato "grande".



Imponiamo le condizioni su area e perimetro:

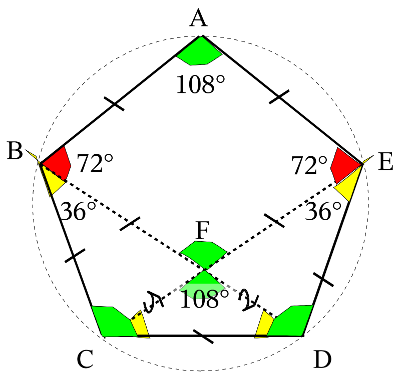
$$\begin{cases} x^2+y^2=3.250 \\ 2x+4y=250 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x=125-2y \\ (125-2y)^2+y^2=3.250 \end{cases} \Rightarrow$$

$$15.625-500y+4y^2+y^2=3.250 \Rightarrow 5y^2-500y+12.375=0 \Rightarrow y^2-100y+2.475=0 \Rightarrow$$

$$y=50\pm5 \Rightarrow \left[\begin{array}{l} y_1=45 \Rightarrow x_1=35 \\ y_2=55 \Rightarrow x_2=15 \end{array}\right. .$$

Abbiamo quindi due possibilità: che i lati dei quadrati misurino 35 m e 45 m, oppure che misurino 15 m e 55 m.

5. Ricordiamo che il pentagono regolare, oltre ai lati congruenti, ha gli angoli che misurano $\alpha=(5-2)\cdot180°/5=108°$.



a. I triangoli CDB e CDE hanno $BC=CD=DE$ perché lati del pentagono regolare e $B\hat{C}D=C\hat{D}E=108°$ perché angoli interni del pentagono regolare, per cui sono congruenti per il primo criterio c.v.d.

b. Poiché i triangoli CDB e CDE sono isosceli con l'angolo al vertice $B\hat{C}D=C\hat{D}E=108°$, hanno gli angoli alla base $F\hat{C}D=F\hat{D}C=(180°-108°)/2=36°$, per cui il triangolo CDF è isoscele in quanto ha due angoli congruenti c.v.d.

c. Calcoliamo le ampiezze degli angoli del quadrilatero ABFE:

$B\hat{A}E=108°$ perché angolo interno di un pentagono regolare;

$A\hat{B}F=A\hat{B}C-F\hat{B}C=108°-36°=72°$;

$A\hat{E}F=A\hat{E}D-F\hat{E}D=108°-36°=72°$;

$B\hat{F}E=C\hat{F}D=180°-2\cdot36°=108°$.

Quindi il quadrilatero ABFE è un parallelogramma in quanto ha gli angoli opposti congruenti. D'altra parte, $AB=AE$ perché lati di un pentagono regolare; $AB=EF$ e $AE=EF$ perché lati opposti di un parallelogramma, per cui ABFE è un rombo, in quanto quadrilatero con tutti i lati congruenti c.v.d.

Soluzione problema "bonus"

La prima biglia e l'acqua occupano insieme un cilindro di raggio di base *R* e altezza $h=2r$, che quindi ha volume $V_{cil\,1}=\pi R^2 h=\pi\cdot 2^2\cdot 2=8\pi\, cm^3$.

La prima biglia è una sfera di raggio *r*, quindi il suo volume è:

$$V_{sf\,1}=\frac{4}{3}\pi r^3=\frac{4}{3}\pi\cdot 1^3=\frac{4}{3}\pi\, cm^3 .$$

Calcoliamo il volume dell'acqua (valore numerico) per differenza:

$$V_{acqua\,1}=V_{cil\,1}-V_{sf\,1}=8\pi-\frac{4}{3}\pi=\frac{20}{3}\pi\, cm^3 .$$

La seconda biglia e l'acqua occupano insieme un cilindro di raggio di base *R* e altezza $2x$, che quindi ha volume $V_{cil\,2}=\pi R^2\cdot 2x=8\pi x$.

La seconda biglia è una sfera di raggio *x*, quindi il suo volume è: $V_{sf\,2}=\frac{4}{3}\pi x^3$.

Calcoliamo il volume dell'acqua (in funzione di *x*) per differenza:

$$V_{acqua\,1}=V_{cil\,2}-V_{sf\,2}=8\pi x-\frac{4}{3}\pi x^3 .$$

Imponiamo che il volume dell'acqua sia lo stesso nei due casi:

$$\frac{20}{3}\pi=8\pi x-\frac{4}{3}\pi x^3 .$$

Abbiamo ottenuto un'equazione di terzo grado, che scriviamo in forma normale:

$$x^3-6x+5=0 .$$

Sappiamo dal testo (o, alla peggio, troviamo tra i divisori del termine noto) che una soluzione dell'equazione è $x=1$, perché quando $r=1$ la biglia era tangente alla superficie dell'acqua.

Scomponiamo con lo schema di Ruffini: $(x-1)(x^2+x-5)=0$.

Quindi una soluzione è $x_1=1$ (già nota) e le altre sono $x_2=-(1+\sqrt{21})/2$ (non accettabile, perché, essendo negativa, non può essere la misura di un segmento) e $x_3=(\sqrt{21}-1)/2$, che fornisce la misura in *cm* del raggio della seconda biglia.

2^B - MATEMATICA compito n°5*a* - 2021-22

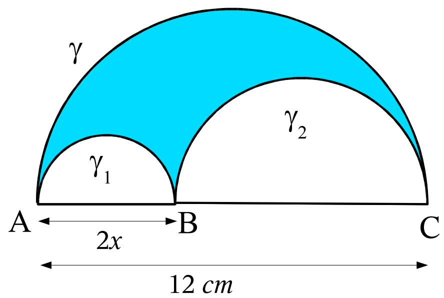
1. Risolvi con metodo grafico le seguenti disequazioni di secondo grado:

$x^2-4x\le 0$; $x^2+2x+1>0$; $x^2+2x+3>0$; $2x^2-6x+4\ge 0$;

$4-x^2\le 0$; $-x^2+2x-5\le 0$; $4x^2>0$; $x^2-2x\sqrt{3}+3\le 0$;

$\frac{3}{4}x^2-\frac{1}{2}x-2<0$; $\frac{x^2}{\sqrt{2}}+x\sqrt{2}\ge 0$; $-x^2-x\sqrt{2}>0$; $2x^2-x\sqrt{5}+1\ge 0$.

2. La semicirconferenza γ, avente raggio $r=6\,cm$ e diametro AC, contiene al suo interno le semicirconferenze γ_1 e γ_2, di diametri AB e BC rispettivamente, tangenti internamente a γ e tangenti esternamente tra di loro.



Chiama $r_1=x$ il raggio di γ_1 e determina:

a. le limitazioni geometriche sui valori (in *cm*) che può assumere la variabile *x*;

b. la funzione $S(x)$ che esprime l'area (in cm^2) della regione colorata in figura (interna a γ, ma esterna a γ_1 e γ_2);

c. il grafico della funzione $S(x)$ (*con le opportune spiegazioni*);

d. i valori di *x* per cui $S(x)$ è maggiore di $9\pi\,cm^2$;

e. i valori di *x* per cui $S(x)$ è minore o uguale di $8\pi\,cm^2$;

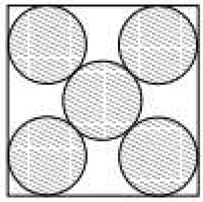
f. i valori di *x* per cui $S(x)$ è maggiore o uguale di $4\pi\,cm^2$;

g. il valore di *x* per cui $S(x)$ assume il proprio valore massimo, precisando a quale situazione geometrica corrisponde e qual è (*senza apostrofo, perché è troncamento, e non elisione*) tale valore massimo.

3. Nel triangolo rettangolo ABC, l'ipotenusa misura $BC=25a$ e la proiezione BH del cateto maggiore AB sull'ipotenusa supera di 4*a* l'altezza AH relativa all'ipotenusa.

Calcola perimetro ed area del triangolo ABC.

4. La mamma ha una sfoglia di pasta di forma quadrata di lato 40 *cm*, da cui ritaglia 5 biscotti rotondi, tutti uguali tra loro, secondo lo schema in figura. Quanto misura il raggio di ciascun biscotto?



Alunno/a: ______________________________ Classe: **2^B**

Esercizio	*A*	*B*	*C*	*D*	*Punteggio*
1					/36
2 a-c					/14
2 d-g					/16
3					/15
4					/10
Totale					/91

Voto approssimato: $\frac{punteggio\ \ totale}{11}+2=$ Voto finale:

(A) **Completezza**: sviluppo e scelta del procedimento concettuale o dei contenuti teorici;

(B) **Calcolo**: utilizzo degli algoritmi e delle procedure di calcolo;

(C) **Linguaggio**: utilizzo del linguaggio specifico della disciplina (anche grafico e simbolico) adeguato;

(D) **Argomentazione**: giustificare motivare e verificare i procedimenti utilizzati e le soluzioni ottenute.

2^B - *Correzione compito n°5a*

1. (*Risolviamo le eq. associate, tracciamo le parabole, dal grafico deduciamo le sol. delle disequazioni*)

a. $x^2-4x=0 \Rightarrow x(x-4)=0 \Rightarrow x_1=0;\ x_2=4.\ \ Sol.\,dis:\ 0\le x\le 4$;

b. $x^2+2x+1=0 \Rightarrow (x+1)^2=0 \Rightarrow x_1=x_2=-1.\ \ Sol.\,dis:\ \forall x\ne -1$;

c. $x^2+2x+3=0 \Rightarrow \Delta/4=-2<0 \Rightarrow \emptyset.\ \ Sol.\,dis:\ \forall x\in\mathbb{R}$;

d. $2x^2-6x+4=0 \Rightarrow 2(x-1)(x-2)=0 \Rightarrow x_1=1;\ x_2=2.\ \ Sol.\,dis:\ x\le 1\ \vee\ x\ge 2$;

e. $4-x^2=0 \Rightarrow x^2=4 \Rightarrow x=\pm 2.\ \ Sol.\,dis:\ x\le -2\ \vee\ x\ge 2$;

f. $-x^2+2x-5=0 \Rightarrow x^2-2x+5=0 \Rightarrow \Delta/4=-4<0 \Rightarrow \emptyset.\ \ Sol.\,dis:\ \forall x\in\mathbb{R}$;

g. $4x^2=0 \Rightarrow x^2=0 \Rightarrow x_1=x_2=0.\ \ Sol.\,dis:\ \forall x\ne 0$;

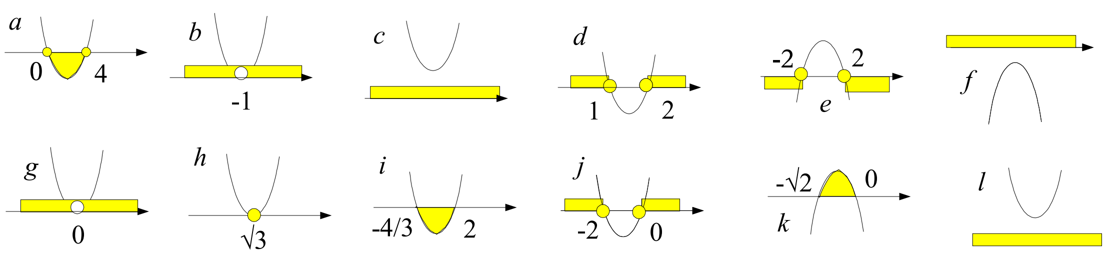
h. $x^2-2x\sqrt{3}+3=0 \Rightarrow (x-\sqrt{3})^2=0 \Rightarrow x_1=x_2=\sqrt{3}.\ \ Sol.\,dis:\ x=\sqrt{3}$;

i. $\frac{3}{4}x^2-\frac{1}{2}x-2=0 \Rightarrow 3x^2-2x-8=0 \Rightarrow x_1=-\frac{4}{3};\ x_2=2.\ \ Sol.\,dis:\ -\frac{4}{3}<x<2$;

j. $\frac{x^2}{\sqrt{2}}+x\sqrt{2}=0 \Rightarrow x^2+2x=0 \Rightarrow x_1=-2;\ x_2=0.\ \ Sol.\,dis:\ x\le -2\ \vee\ x\ge 0$;

k. $-x^2-x\sqrt{2}=0 \Rightarrow x^2+x\sqrt{2}=0 \Rightarrow x_1=-\sqrt{2};\ x_2=0.\ \ Sol.\,dis:\ -\sqrt{2}<x<0$;

l. $2x^2-x\sqrt{5}+1=0 \Rightarrow \Delta=-3 \Rightarrow \emptyset.\ \ Sol.\,dis:\ \forall x\in\mathbb{R}$.

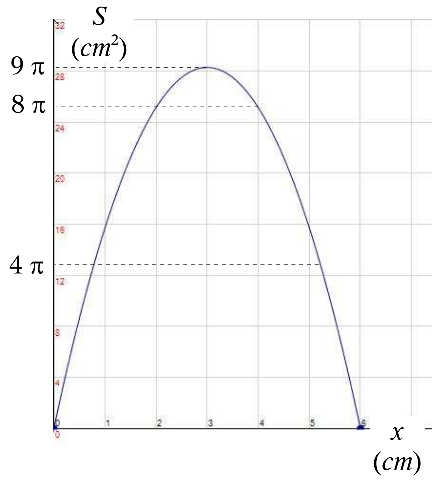


2. Ricaviamo $r_2=r-r_1=6-x$ (*omettiamo le parabole associate alle varie disequazioni*).

a. Imponiamo che le misure dei raggi siano positive o nulle: $0\le x\le 6$.

b. $S(x)=S-S_1-S_2=\frac{\pi}{2}6^2-\frac{\pi}{2}x^2-\frac{\pi}{2}(6-x)^2=$

$\frac{\pi}{2}(36-x^2-36+12x-x^2)=\pi(6x-x^2)$.



c. Si tratta di un arco di parabola con la concavità risolta verso il basso, passante per l'origine degli assi, di vertice $V(3,9\pi)$.

In figura le unità di misura degli assi x e y sono diverse, anche perché le grandezze rappresentate sono diverse: lunghezze e aree.

d. $S(x)=\pi(6x-x^2)>9\pi \Rightarrow x^2-6x+9<0 \Rightarrow (x-3)^2<0 \Rightarrow \emptyset$.

Il risultato era evidente anche dal grafico della funzione.

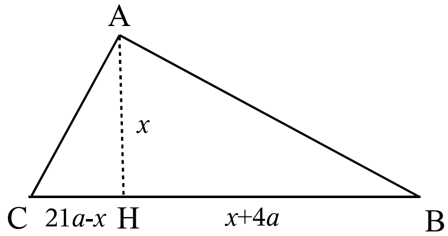
e. $S(x)=\pi(6x-x^2)\leq 8\pi \Rightarrow x^2-6x+8\geq 0 \Rightarrow (x-2)(x-4)\geq 0 \Rightarrow x\leq 2 \vee x\geq 4$,

ma, tenendo conto delle limitazioni sulla variabile: $0\leq x\leq 2 \vee 4\leq x\leq 6$.

f. $S(x)=\pi(6x-x^2)\geq 4\pi \Rightarrow x^2-6x+4\leq 0 \Rightarrow 3-\sqrt{5}\leq x\leq 3+\sqrt{5}$.

g. La funzione $S(x)$ assume il suo valore massimo in corrispondenza del vertice della parabola, ovvero quando $x=3\,cm$; questo corrisponde alla situazione geometrica in cui B è il punto medio del segmento AC e le semicirconferenze γ_1 e γ_2 sono congruenti; il valore massimo è quindi $S_{max}=9\pi\, cm^2$.

3. Poniamo $AH=x$. Il testo ci informa che $BH=x+4a$ e $CH=25a-BH=21a-x$.



Applichiamo il 2° teorema di Euclide al triangolo ABC:

$$AH^2=BH\cdot CH \Rightarrow x^2=(x+4a)(21a-x) \Rightarrow$$

$$x^2=21ax-x^2+84a^2-4ax \Rightarrow 2x^2-17ax-84a^2=0 \Rightarrow$$

$$x=\frac{17a\pm\sqrt{289a^2+672a^2}}{4}=\frac{17\pm 31}{4}a \Rightarrow x_1=-\frac{7}{2}a;\; x_2=12a \;.$$

La soluzione negativa non è accettabile; da quella positiva ricaviamo:

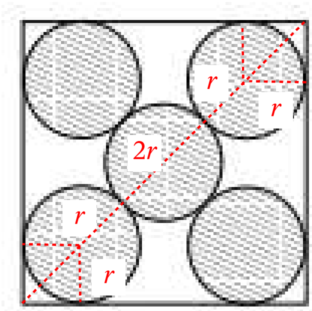
$AH=12a$, $BH=16a$, $CH=9a$ e, applicando il teorema di Pitagora:

$AB=\sqrt{AH^2+BH^2}=20a$, $AC=\sqrt{AH^2+CH^2}=15a$.

Ricaviamo quindi $2p_{ABC}=(25+20+15)a=60a$, $S_{ABC}=\frac{1}{2}25a\cdot 12a=150a^2$.

Come sempre, è possibile considerare il parametro *a*, che rappresenta la lunghezza di un segmento dato, come una unità di misura, e quindi ometterlo dai calcoli per reinserirlo solo nei risultati finali.

4. La diagonale della sfoglia misura $d=l\sqrt{2}=40\sqrt{2}\,cm$.



D'altra parte, la diagonale è formata da quattro raggi dei biscotti, di misura *r*, e due segmenti di misura $r\sqrt{2}$ (*vedi figura*).

Quindi: $4r+2r\sqrt{2}=40\sqrt{2} \Rightarrow r=\frac{40\sqrt{2}}{4+2\sqrt{2}}=\frac{20\sqrt{2}}{2+\sqrt{2}}$

e, razionalizzando: $r=\frac{20\sqrt{2}(2-\sqrt{2})}{4-2}=20(\sqrt{2}-1)\,cm$.

[*Giochi di Archimede 2008*]

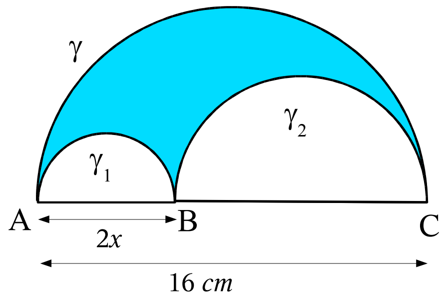
1. Risolvi con metodo grafico le seguenti disequazioni di secondo grado:

   $x^2+4x\leq 0$; $x^2-2x+1>0$; $x^2-2x+3>0$; $2x^2+6x+4\geq 0$;

   $9-x^2\leq 0$; $-x^2-2x-5\leq 0$; $9x^2>0$; $x^2+2x\sqrt{3}+3\leq 0$;

   $\frac{3}{4}x^2+\frac{1}{2}x-2<0$; $\frac{x^2}{\sqrt{3}}+x\sqrt{3}\geq 0$; $-x^2-x\sqrt{3}>0$; $2x^2+x\sqrt{5}+1\geq 0$.

2. La semicirconferenza γ, avente raggio $r=8\,cm$ e diametro AC, contiene al suo interno le semicirconferenze γ_1 e γ_2, di diametri AB e BC rispettivamente, tangenti internamente a γ e tangenti esternamente tra di loro.



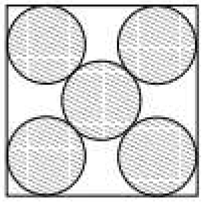
   Chiama $r_1=x$ il raggio di γ_1 e determina:

   a. le limitazioni geometriche sui valori (in *cm*) che può assumere la variabile *x*;
   b. la funzione $S(x)$ che esprime l'area (in cm^2) della regione colorata in figura (interna a γ, ma esterna a γ_1 e γ_2);
   c. il grafico della funzione $S(x)$ (*con le opportune spiegazioni*);
   d. i valori di *x* per cui $S(x)$ è maggiore di $16\pi\,cm^2$;
   e. i valori di *x* per cui $S(x)$ è minore o uguale di $15\pi\,cm^2$;
   f. i valori di *x* per cui $S(x)$ è maggiore o uguale di $11\pi\,cm^2$;
   g. il valore di *x* per cui $S(x)$ assume il proprio valore massimo, precisando a quale situazione geometrica corrisponde e qual è (*senza apostrofo, perché è troncamento, e non elisione*) tale valore massimo.

3. Nel triangolo rettangolo ABC, l'ipotenusa misura $BC=50a$ e la proiezione BH del cateto maggiore AB sull'ipotenusa supera di $8a$ l'altezza AH relativa all'ipotenusa.

   Calcola perimetro ed area del triangolo ABC.

4. La mamma ha una sfoglia di pasta di forma quadrata di lato 20 *cm*, da cui ritaglia 5 biscotti rotondi, tutti uguali tra loro, secondo lo schema in figura. Quanto misura il raggio di ciascun biscotto?



Alunno/a: ______________________________ Classe: **2^B**

Esercizio	***A***	***B***	***C***	***D***	***Punteggio***
1					/36
2 a-c					/14
2 d-g					/16
3					/15
4					/10
Totale					/91

Voto approssimato: $\frac{punteggio\ \ totale}{11}+2=$ Voto finale:

(A) **Completezza**: sviluppo e scelta del procedimento concettuale o dei contenuti teorici;

(B) **Calcolo**: utilizzo degli algoritmi e delle procedure di calcolo;

(C) **Linguaggio**: utilizzo del linguaggio specifico della disciplina (anche grafico e simbolico) adeguato;

(D) **Argomentazione**: giustificare motivare e verificare i procedimenti utilizzati e le soluzioni ottenute.

$\underline{2^\wedge B}$ - *Correzione compito n°5b*

1. (*Risolviamo le eq. associate, tracciamo le parabole, dal grafico deduciamo le sol. delle disequazioni*)

   a. $x^2+4x=0 \;\Rightarrow\; x(x+4)=0 \;\Rightarrow\; x_1=-4;\; x_2=0 \quad Sol.\,dis:\; -4\le x\le 0$;

   b. $x^2-2x+1=0 \;\Rightarrow\; (x-1)^2=0 \;\Rightarrow\; x_1=x_2=1.\quad Sol.\,dis:\; \forall\, x\ne 1$;

   c. $x^2-2x+3=0 \;\Rightarrow\; \Delta/4=-2<0 \;\Rightarrow\; \emptyset.\quad Sol.\,dis:\; \forall\, x\in\mathbb{R}$;

   d. $2x^2+6x+4=0 \;\Rightarrow\; 2(x+1)(x+2)=0 \;\Rightarrow\; x_1=-2;\; x_2=-1 \quad Sol.\,dis:\; x\le -2 \;\vee\; x\ge -1$;

   e. $9-x^2=0 \;\Rightarrow\; x^2=9 \;\Rightarrow\; x=\pm 3 \quad Sol.\,dis:\; x\le -3 \;\vee\; x\ge 3$;

   f. $-x^2-2x-5=0 \;\Rightarrow\; x^2+2x+5=0 \;\Rightarrow\; \Delta/4=-4<0 \;\Rightarrow\; \emptyset.\quad Sol.\,dis:\; \forall\, x\in\mathbb{R}$;

   g. $9x^2=0 \;\Rightarrow\; x^2=0 \;\Rightarrow\; x_1=x_2=0.\quad Sol.\,dis:\; \forall\, x\ne 0$;

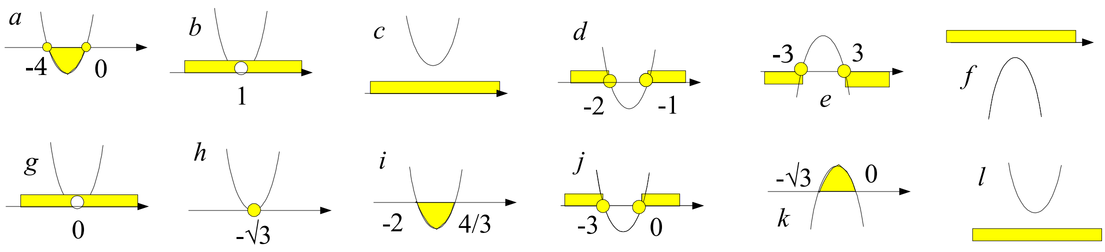
   h. $x^2+2x\sqrt{3}+3=0 \;\Rightarrow\; (x+\sqrt{3})^2=0 \;\Rightarrow\; x_1=x_2=-\sqrt{3}.\quad Sol.\,dis:\; x=-\sqrt{3}$;

   i. $\frac{3}{4}x^2+\frac{1}{2}x-2=0 \;\Rightarrow\; 3x^2+2x-8=0 \;\Rightarrow\; x_1=-2;\; x_2=\frac{4}{3} \quad Sol.\,dis:\; -2<x<\frac{4}{3}$;

   j. $\frac{x^2}{\sqrt{3}}+x\sqrt{3}=0 \;\Rightarrow\; x^2+3x=0 \;\Rightarrow\; x_1=-3;\; x_2=0.\quad Sol.\,dis:\; x\le -3 \;\vee\; x\ge 0$;

   k. $-x^2-x\sqrt{3}=0 \;\Rightarrow\; x^2+x\sqrt{3}=0 \;\Rightarrow\; x_1=-\sqrt{3};\; x_2=0.\quad Sol.\,dis:\; -\sqrt{3}<x<0$;

   l. $2x^2+x\sqrt{5}+1=0 \;\Rightarrow\; \Delta=-3 \;\Rightarrow\; \emptyset.\quad Sol.\,dis:\; \forall\, x\in\mathbb{R}$.

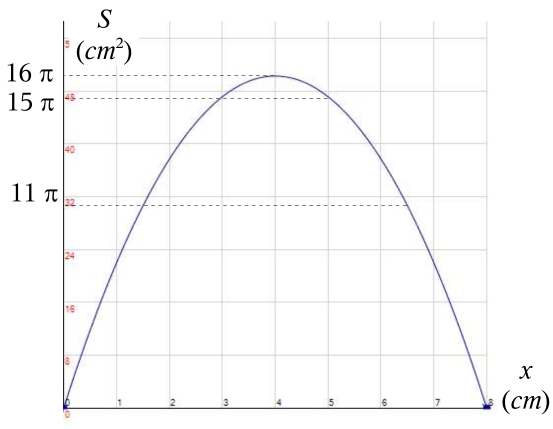


2. Ricaviamo $r_2=r-r_1=8-x$ (*omettiamo le parabole associate alle varie disequazioni*).

   a. Imponiamo che le misure dei raggi siano positive o nulle: $0\le x\le 8$.

   b. $S(x)=S-S_1-S_2=\frac{\pi}{2}8^2-\frac{\pi}{2}x^2-\frac{\pi}{2}(8-x)^2=$

   $\frac{\pi}{2}(64-x^2-64+16x-x^2)=\pi(8x-x^2)$.



   c. Si tratta di un arco di parabola con la concavità risolta verso il basso, passante per l'origine degli assi, di vertice $V(4, 16\pi)$.

   In figura le unità di misura degli assi x e y sono diverse, anche perché le grandezze rappresentate sono diverse: lunghezze e aree.

d. $S(x)=\pi(8x-x^2)>16\pi \Rightarrow x^2-8x+16<0 \Rightarrow (x-4)^2<0 \Rightarrow \emptyset$.

Il risultato era evidente anche dal grafico della funzione.

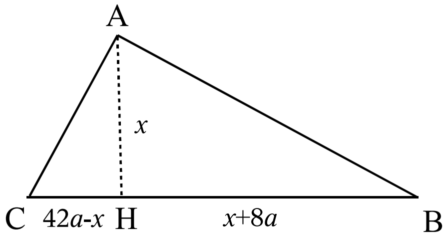
e. $S(x)=\pi(8x-x^2)\le 15\pi \Rightarrow x^2-8x+15\ge 0 \Rightarrow (x-3)(x-5)\ge 0 \Rightarrow x\le 3 \lor x\ge 5$,

ma, tenendo conto delle limitazioni sulla variabile: $0\le x\le 3 \lor 5\le x\le 8$.

f. $S(x)=\pi(8x-x^2)\ge 11\pi \Rightarrow x^2-8x+11\le 0 \Rightarrow 4-\sqrt{5}\le x\le 4+\sqrt{5}$.

g. La funzione $S(x)$ assume il suo valore massimo in corrispondenza del vertice della parabola, ovvero quando $x=4\,cm$; questo corrisponde alla situazione geometrica in cui B è il punto medio del segmento AC e le semicirconferenze γ_1 e γ_2 sono congruenti; il valore massimo è quindi $S_{max}=16\pi\,cm^2$.

3. Poniamo $AH=x$. Il testo ci informa che $BH=x+8a$ e $CH=50a-BH=42a-x$.



Applichiamo il 2° teorema di Euclide al triangolo ABC:

$AH^2=BH\cdot CH \Rightarrow x^2=(x+8a)(42a-x) \Rightarrow$

$x^2=42ax-x^2+336a^2-8ax \Rightarrow x^2-17ax-168a^2=0 \Rightarrow$

$$x=\frac{17a\pm\sqrt{289a^2+672a^2}}{2}=\frac{17\pm 31}{2}a \Rightarrow x_1=-7a;\ x_2=24a$$.

La soluzione negativa non è accettabile; da quella positiva ricaviamo:

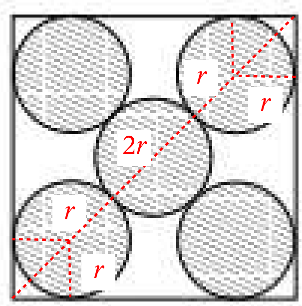
$AH=24a$, $BH=32a$, $CH=18a$ e, applicando il teorema di Pitagora:

$AB=\sqrt{AH^2+BH^2}=40a$, $AC=\sqrt{AH^2+CH^2}=30a$.

Ricaviamo quindi $2p_{ABC}=(50+40+30)a=120a$, $S_{ABC}=\frac{1}{2}50a\cdot 24a=600a^2$.

Come sempre, è possibile considerare il parametro *a*, che rappresenta la lunghezza di un segmento dato, come una unità di misura, e quindi ometterlo dai calcoli per reinserirlo solo nei risultati finali.

4. La diagonale della sfoglia misura $d=l\sqrt{2}=20\sqrt{2}\,cm$.



D'altra parte, la diagonale è formata da quattro raggi dei biscotti, di misura *r*, e due segmenti di misura $r\sqrt{2}$ (*vedi figura*).

Quindi: $4r+2r\sqrt{2}=20\sqrt{2} \Rightarrow r=\frac{20\sqrt{2}}{4+2\sqrt{2}}=\frac{10\sqrt{2}}{2+\sqrt{2}}$

e, razionalizzando: $r=\frac{10\sqrt{2}(2-\sqrt{2})}{4-2}=10(\sqrt{2}-1)\,cm$.

[*Giochi di Archimede 2008*]

2^F - MATEMATICA compito n°1 – 2018-19

1. Risolvi le seguenti equazioni lineari fratte, precisando se le soluzioni ottenute sono accettabili:

   $\frac{1}{2x^2-8}+\frac{2}{x+2}=\frac{3}{x-2}$; $\frac{1}{2x-2}+\frac{1}{3x+3}=\frac{1}{x^2-1}$.

2. Le spese di trasporto per un viaggio ammontano a 240 €e vengono ripartite equamente tra tutti i partecipanti. Se il numero dei partecipanti diminuisse di 10 unità, allora la quota che ciascun partecipante dovrebbe versare diventerebbe i 3/2 di quella originaria.

   Calcola il numero dei partecipanti al viaggio precisando le condizioni di esistenza sull'incognita.

3. Risolvi le seguenti disequazioni lineari fratte:

   $\frac{6-x}{x+2}\leq 0$; $\frac{1}{2x-2}-1\geq\frac{2}{3x-3}$

4. Aggiungendo lo stesso numero reale *x* al numeratore ed al denominatore della frazione 4/5 si vuole ottenere un numero minore di 1/2. A quale intervallo di valori deve appartenere *x*?

5. Dimostra (precisando ipotesi e tesi degli enunciati) che:

   a. in un parallelogramma le diagonali si tagliano a metà;

   b. se un quadrilatero ha le diagonali che si tagliano a metà, allora è un parallelogramma.

6. Considera un quadrato ABCD e un punto P sul lato AB. Traccia la retta passante per B e perpendicolare a CP e indica con H il suo punto di intersezione con CP e con Q il suo punto di intersezione con il lato AD del quadrato.

   a. Dimostra che PB è congruente ad AQ (*poni* $A\hat{B}Q=\alpha$ *e utilizza i criteri di congruenza de triangoli*).

   b. Indica con O il punto di intersezione delle diagonali del quadrato e dimostra che l'angolo $P\hat{O}Q$ è retto (*utilizza i criteri di congruenza de triangoli*).

<u>2^F</u> - *Correzione compito n°1*

1.

a. $\frac{1}{2(x+2)(x-2)}+\frac{2}{x+2}=\frac{3}{x-2} \Rightarrow \frac{1+4(x-2)}{2(x+2)(x-2)}=\frac{6(x+2)}{2(x+2)(x-2)};\ C.E.:\ x\neq\pm 2$

$1+4x-8=6x+12 \Rightarrow 2x=-19 \Rightarrow x=-\frac{19}{2}\ \ sol.\,accettabile$.

b. $\frac{1}{2(x-1)}+\frac{1}{3(x+1)}=\frac{1}{(x+1)(x-1)} \Rightarrow \frac{3(x+1)+2(x-1)}{6(x+1)(x-1)}=\frac{6}{6(x+1)(x-1)};\ x\neq\pm 1$

$3x+3+2x-2=6 \Rightarrow 5x=5 \Rightarrow x=1\ \ sol.\,non\,accettabile\,;\ \ eq.\,impossibile$.

2. Se indichiamo con x il numero dei partecipanti al viaggio, la quota in euro che ciascuno di essi deve versare è $240/x$.

Se, invece, il numero di partecipanti diminuisce ad $x-10$, la quota aumenta a $\frac{240}{x-10}$.

Imponiamo che la quota pro capite nel secondo caso sia i 3/2 di quella del primo caso:

$\frac{240}{x-10}=\frac{3}{2}\cdot\frac{240}{x} \Rightarrow 2x=3(x-10) \Rightarrow x=30$. $C.E: x\in\mathbb{N};\ x>10$.

Al viaggio prendono quindi parte 30 persone.

3.

a. $\frac{6-x}{x+2}\leq 0$; $num\geq 0 \Rightarrow x\leq 6$; $den\geq 0 \Rightarrow x\geq -2$.

$Sol:\ x<-2 \vee x\geq 6$.

	-2		6		
+	+	+	o	-	6-*x*
-	o	+	+	+	*x*+2
-	●	+	o	-	*f(x)*

b. $\frac{1}{2(x-1)}-1-\frac{2}{3(x-1)}\geq 0 \Rightarrow \frac{3-6(x-1)-4}{6(x-1)}\geq 0 \Rightarrow$

$\frac{5-6x}{6(x-1)}\geq 0$; $num\geq 0 \Rightarrow x\leq 5/6$; $den\geq 0 \Rightarrow x\geq 1$.

$Sol:\ 5/6\leq x<1$.

	5/6		1		
+	o	-	-	-	5-6*x*
-	-	-	o	+	6(*x*-1)
-	o	+	●	-	*f(x)*

4. $\frac{4+x}{5+x}<\frac{1}{2} \Rightarrow \frac{4+x}{5+x}-\frac{1}{2}<0 \Rightarrow \frac{8+2x-5-x}{2(5+x)}<0 \Rightarrow$;

$\frac{x+3}{2(5+x)}<0$; $num\geq 0 \Rightarrow x\geq -3$; $den\geq 0 \Rightarrow x\geq -5$.

$Sol:\ -5<x<-3$.

	-5		-3		
-	-	-	o	+	*x*+3
-	o	+	+	+	2(5+*x*)
+	●	-	o	+	*f(x)*

5.

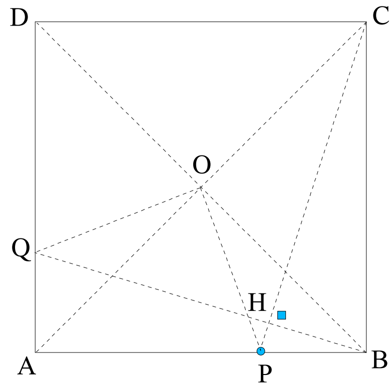
a. Vedi pag. G107 del libro di testo.

b. Vedi pag. G109 del libro di testo.

6. *Ipotesi*: $AB=BC=CD=DA\,;\ \hat{A}=\hat{B}=\hat{C}=\hat{D}$. *Tesi*: $PB=AQ\,;\ P\hat{O}Q=90°$.

a. Se poniamo, come consigliato dal testo, $A\hat{B}Q=\alpha$, abbiamo:

- $C\hat{B}Q=90°-\alpha$ perché gli angoli del quadrato sono retti;
- $B\hat{C}H=\alpha$ per la somma degli angoli interni del triangolo BCH.



I triangoli ABQ e PBC sono congruenti per il secondo criterio in quanto hanno:

- $AB=BC$ perché lati di un quadrato;
- $Q\hat{A}B=P\hat{B}C=90°$ perché angoli di un quadrato;
- $A\hat{B}Q=B\hat{C}H=\alpha$ per la dimostrazione precedente.

In particolare $PB=AQ$ c.v.d.

b. I triangoli AOQ e BOP sono congruenti per il primo criterio in quanto hanno:

- $PB=AQ$ per la dimostrazione precedente;
- $O\hat{A}Q=O\hat{B}P=45°$ perché le diagonali di un quadrato sono bisettrici degli angoli da cui hanno origine;
- $OA\ ?\ OB$ perché metà delle diagonali di un quadrato.

In particolare $A\hat{O}Q=B\hat{O}P=\beta$.

Quindi $P\hat{O}Q=A\hat{O}B+A\hat{O}Q-B\hat{O}P=90°+\beta-\beta=90°$ c.v.d.

2^F - MATEMATICA compito n°2 - 2018-19

1. Risolvi i seguenti sistemi lineari con uno dei metodi studiati:

$$\begin{cases} \frac{x+y}{2}-\frac{x-y}{6}=\frac{2x+y}{4} \\ (x+1)^2=(x-1)(x+1)+y \end{cases} ;$$

$$\begin{cases} (x-2)^2=(x-2)(x+2)+2y \\ (y+2)^2+(1-y)(1+y)=6+x \end{cases} ;$$

$$\begin{cases} x=y-z+1 \\ z=2x-y \\ y=2x+1 \end{cases} .$$

2. Anna acquista 2 penne e tre quaderni e spende 9 euro. Paolo compra 8 penne e 5 quaderni e spende 22 euro. Quanto costa una penna e quanto costa un quaderno?

3. Una squadra vince un campionato di calcio ottenendo 80 punti nelle 42 partite disputate. La somma tra il numero delle partite perse e quello delle partite pareggiate è inferiore di due unità rispetto a quello delle partite vinte. Si assegnano tre punti per ogni partita vinta, un punto per ogni pareggio e nessun punto per una sconfitta.

   Calcola il numero di partite perse, pareggiate e vinte.

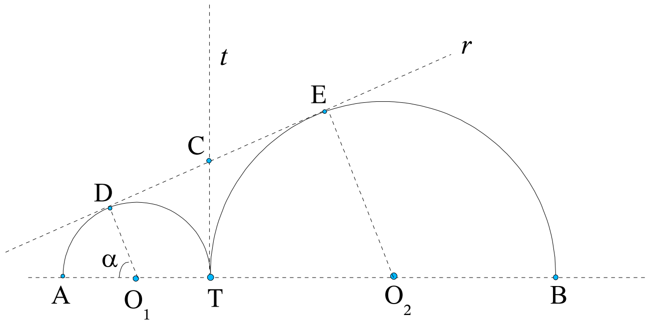
4. In un triangolo ABC, isoscele sulla base AB, il perimetro misura 28 *cm*. Indicati con M il punto medio di AC e con N il punto medio di BC, il quadrilatero ABNM ha perimetro che misura 22 *cm*. Spiega di quale quadrilatero si tratta e calcola le misure dei lati del triangolo.

5. La durata di un volo da Parigi a New York, a causa dei venti che nel nostro emisfero spirano generalmente da ovest verso est, è 1 ora in più della durata del volo da New York a Parigi. Inoltre, le due città appartengono a diversi fusi orari, per cui un volo che parte da Parigi alle 12 del mattino arriva a New York alle 15, mentre un volo che parte da New York alle 18 arriva a Parigi alle 8 del mattino

   Calcola la durata del volo da New York a Parigi e la differenza di fuso orario tra le due città.

6. Dimostra (*precisando in maniera chiara ipotesi e tesi*) che la bisettrice di un angolo è il luogo geometrico dei punti equidistanti dai lati dell'angolo.

7. Due circonferenze di centri O_1 e O_2 sono tangenti esternamente nel punto T alla retta *t* e sono poi tangenti alla retta *r* nei punti D ed E rispettivamente (*vedi figura*). Inoltre, AT è un diametro della prima circonferenza, BT è un diametro della seconda circonferenza e C è il punto di intersezione tra le tangenti *t* ed *r*.



a. Spiega di che genere è il quadrilatero O_1O_2ED.

b. Ponendo $A\hat{O}_1D=\alpha$, determina in funzione di α le ampiezze dei angoli dei triangoli AO_1D e BO_2E.

c. Dimostra che il triangolo O_1CO_2 è rettangolo in C.

d. Dimostra che il triangolo DTE è rettangolo in T.

<u>2^F</u> - Correzione compito n°2

1.

a. $\begin{cases} \dfrac{6x+6y-2x+2y}{12}=\dfrac{6x+3y}{12} \\ x^2+2x+1=x^2-1+y \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 2x-5y=0 \\ 2x-y=-2 \end{cases} \Rightarrow$

$\begin{cases} 4y=-2 \;\Rightarrow\; y=-1/2 \\ 2x=-5/2 \;\Rightarrow\; x=-5/4 \end{cases} \Rightarrow \; Sol: \; (-\frac{5}{4},-\frac{1}{2})$.

b. $\begin{cases} x^2-4x+4=x^2-4+2y \\ y^2+4y+4+1-y^2=6+x \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 2x+y=4 \\ x=4y-1 \end{cases} \Rightarrow$

$\begin{cases} 8y-2+y=4 \;\Rightarrow\; 9y=6 \;\Rightarrow\; y=2/3 \\ x=4\cdot 2/3-1=5/3 \end{cases} \Rightarrow \; Sol: \; (\frac{5}{3},\frac{2}{3})$.

c. Confrontando la 2^ e la 3^ eq, ricaviamo: $\begin{cases} x=y-z+1 \\ z=2x-y \\ -1=2x-y \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} z=-1 \\ x-y=2 \\ 2x-y=-1 \end{cases}$.

Sottraiamo quindi la 2^ eq. dalla 3^: $\begin{cases} z=-1 \\ x=-3 \\ y=-5 \end{cases} \Rightarrow \; Sol: \; (-3,-5,-1).$.

2. Indichiamo con x il costo di una penna in € e con y il costo di un quaderno in €. Quiindi:

$\begin{cases} 2x+3y=9 \\ 8x+5y=22 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 8x+12y=36 \\ 8x+5y=22 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 7y=14 \;\Rightarrow\; y=2 \\ 2x+6=9 \;\Rightarrow\; x=1{,}5 \end{cases}$.

Quindi una penna costa 1,5 € ed un quaderno costa 2 €.

3. Indichiamo rispettivamente con x, y, z il numero di partite vinte, pareggiate e perse.

Esprimiamo in forma algebrica le informazioni del testo: $\begin{cases} x+y+z=42 \\ 3x+y=80 \\ y+z=x-2 \end{cases}$.

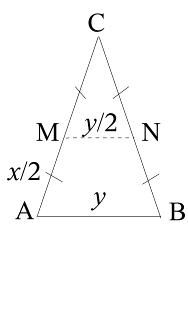
Sottraiamo la 3^ eq. dalla 1^: $2x=44 \;\Rightarrow\; x=22$.

Sostituiamo nella 2^ eq: $66+y=80 \;\Rightarrow\; y=14$.

Sostituiamo nella 1^ eq: $22+14+z=42 \;\Rightarrow\; z=6$.

Quindi la squadra ha vinto 22 partite, ne ha pareggiate 14 e ne ha perse 6.

4. Indichiamo con x ed y rispettivamente le misure in cm del lato e della base del triangolo isoscele. Quindi: $AC=BC=x$, $AM=BN=x/2$, $AB=y$, mentre $MN=y/2$ perché il segmento che congiunge i punti medi dei lati di un triangolo è parallelo al terzo lato (e quindi ABNM è un trapezio) ed uguale alla sua metà.



Imponiamo le condizioni fornite dal testo:

$\begin{cases} 2x+y=28 \\ x+3/2\,y=22 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 2x+y=28 \\ 2x+3y=44 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 2y=16 \;\Rightarrow\; y=8 \\ x+3/2\cdot 8=22 \;\Rightarrow\; x=10 \end{cases}$.

Quindi il lato obliquo misura 10 *cm* e la base misura 8 *cm*.

5. Indichiamo con x ed y rispettivamente la durata in ore del volo da Parigi a New York e quella del volo da New York a Parigi. Sappiamo dal testo che $x=y+1$.

   Indichiamo poi con z la differenza di fuso orario tra Parigi e New York, per cui la differenza di fuso orario tra New York e Parigi sarà $-z$.

   La durata del viaggio di andata sarà quindi: $x=z+15-12=z+3$, mentre quella del visggio di ritorno sarà: $y=-z+14$ (perché dalle 18 alle 8 del giorno dopo passano 14 ore).

   Sostituendo la 1^ eq. nella seconda, ricaviamo: $\begin{cases} y-z=2 \\ y+z=14 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y=8 \\ z=6 \end{cases}$.

   Quindi la durata del volo da New York a Parigi è di 8 ore, mentre la differenza tra fuso orario di Parigi e quello di New York è di 6 ore.
6. Vedi pag. G143 del tuo libro di testo.
7.
   a. Si tratta di un trapezio rettangolo. Infatti, i raggi O_1D e O_2E passanti per i punti di tangenza sono perpendicolari alla tangente *t*, e quindi paralleli tra loro.
   b. Il triangolo AO_1D è isoscele, in quanto O_1A e O_1D sono raggi della stessa circonferenza, per cui $O_1\hat{A}D=O_1\hat{D}A=90°-\alpha/2$; $D\hat{O}_1T=180°-\alpha$ in quanto supplementare di $A\hat{O}_1D$; $T\hat{O}_2E=A\hat{O}_1D=\alpha$ perché angoli corrispondenti formati dalle parallele O_1D e O_2E tagliate dalla trasversale AB; $E\hat{O}_2B=180°-\alpha$ perché supplementare di $T\hat{O}_2E$; $O_2\hat{B}E=O_2\hat{E}B=\alpha/2$ perché anche il triangolo BO_2E è isoscele.
   c. La retta CO_1 è bisettrice dell'angolo $D\hat{O}_1T$ per il teorema sulle tangenti condotte da un punto esterno ad una circonferenza; in maniera analoga, CO_2 è bisettrice di $T\hat{O}_2E$.

      Quindi: $C\hat{O}_1T=90°-\alpha/2$, $C\hat{O}_2T=\alpha/2$ e $O_1\hat{C}O_2=90°$ c.v.d.
   d. Le rette TD e TE sono perpendicolari tra loro perché sono perpendicolari alle rette O_1C e O_2C (sempre per il teorema delle tangenti condotte da un punto esterno ad una circonferenza), che a loro volta sono perpendicolari tra loro per la dim. precedente.

      Oppure: poiché $CD=CT=CE$ (ancora per il teorema delle tangenti condotte da un punto esterno ad una circonferenza), allora i punti D, T, E appartengono alla circonferenza di centro C e diametro DE, per cui $D\hat{T}E=90°$ perché angolo alla circonferenza che insiste su una semicirconferenza.

Negli esercizi sui radicali, considera come positivi o nulli tutti i fattori contenuti nei radicandi.

1. Semplifica, se possibile, i seguenti radicali:

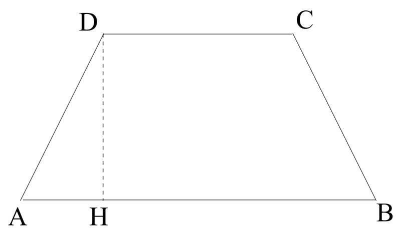
$$\sqrt[12]{8000} \;;\; \sqrt{1+\frac{9}{16}} \;;\; \sqrt[6]{x^6(x-1)^9} \;;\; \sqrt{a^4-4a^2+4} \;;\; \sqrt{1+\frac{1}{x^4}+\frac{2}{x^2}} \;.$$

2. Svolgi le seguenti operazioni contenenti radicali e semplifica i risultati ottenuti:

$$\sqrt{a^3+3a^2+a+3}\cdot\sqrt{\frac{a^2+1}{a+3}} \;;\; \sqrt[3]{\frac{1}{2}-\frac{1}{5}}\cdot\sqrt{10} \;;\; (\sqrt[3]{2a^2b^3})^5 \;;\; \sqrt[3]{\sqrt{a^6}} \;;\; \sqrt{a^3+4a^2+4a} \;;$$

$$\sqrt{18}+\sqrt{12}+\sqrt[6]{27}+\sqrt{2} \;;\; (\sqrt{2}+\sqrt{5})^2-(2+\sqrt{10})^2+\sqrt{160}+(2\sqrt{2}-\sqrt{3})(2\sqrt{2}+\sqrt{3}) \;.$$

3. In un trapezio isoscele, la base maggiore misura $(3+2\sqrt{2})cm$, la base minore $3cm$ e l'altezza $(3\sqrt{2}-1)cm$. Calcola:



   a. l'area del trapezio;
   b. la somma delle aree dei quadrati costruiti sulle diagonali;
   c. la somma delle aree dei quadrati costruiti sui lati.

4. Risolvi le seguenti equazioni e disequazioni contenenti radicali:

$$\frac{1}{x^2-2}+\frac{1}{x^2-2x\sqrt{2}+2}=\frac{2}{x^2+2x\sqrt{2}+2} \;;\; x(1-\sqrt{2})\geq\sqrt{2}-2 \;.$$

5. Calcola: $\sqrt{1+2000\sqrt{1+2001\sqrt{1+2002\sqrt{1+2003\cdot2005}}}}$.

6. Enuncia (*tutto*) e dimostra (*solo la parte svolta*) il teorema sui quadrilateri circoscrivibili ad una circonferenza.

7. Dato il triangolo equilatero ABC, considera un punto P appartenente al minore dei due archi AC della circonferenza circoscritta ad ABC.
   a. Calcola l'ampiezza in gradi dell'angolo $A\hat{P}B$.
   b. Prendi su PB il punto Q tale che $PQ=PA$ e dimostra che il triangolo APQ è equilatero.
   c. Dimostra che il triangolo APC è congruente al triangolo AQB.
   d. Dimostra che $PB=PA+PC$.

2^F - Correzione compito n°3

1.

- $\sqrt[12]{8000}=\sqrt[12]{2^6\cdot 5^3}=\sqrt[4]{2^2\cdot 5}=\sqrt[4]{20}$;
- $\sqrt{1+\frac{9}{16}}=\sqrt{\frac{25}{16}}=\frac{5}{4}$;
- $\sqrt[6]{x^6(x-1)^9}=\sqrt{x^2(x-1)^3}=x(x-1)\sqrt{x-1}$;
- $\sqrt{a^4-4a^2+4}=\sqrt{(a^2-2)^2}=a^2-2$;
- $\sqrt{1+\frac{1}{x^4}+\frac{2}{x^2}}=\sqrt{\frac{x^4+1+2x^2}{x^4}}=\sqrt{\frac{(x^2+1)^2}{x^4}}=\frac{x^2+1}{x^2}$.

2.

- $\sqrt{(a^2+1)(a+3)}\cdot\sqrt{\frac{a^2+1}{a+3}}=\sqrt{(a^2+1)^2}=a^2+1$;
- $\sqrt[3]{\frac{3}{10}}\cdot\sqrt{10}=\sqrt[6]{\frac{3^2}{10^2}}\cdot\sqrt[6]{10^3}=\sqrt[6]{3^2\cdot 10}=\sqrt[6]{90}$;
- $(\sqrt[3]{2a^2b^3})^5=\sqrt[3]{2^5a^{10}b^{15}}=2a^3b^5\sqrt[3]{4a}$;
- $\sqrt[3]{\sqrt{a^6}}=\sqrt[6]{a^6}=a$;
- $\sqrt{a^3+4a^2+4a}=\sqrt{a(a+2)^2}=(a+2)\sqrt{a}$;
- $\sqrt{18}+\sqrt{12}+\sqrt[6]{27}+\sqrt{2}=3\sqrt{2}+2\sqrt{3}+\sqrt{3}+\sqrt{2}=4\sqrt{2}+3\sqrt{3}$;
- $2+2\sqrt{10}+5-4-4\sqrt{10}-10+4\sqrt{10}+8-3=2\sqrt{10}-2$.

3. $AD^2=AH^2+DH^2=(\sqrt{2})^2+(3\sqrt{2}-1)^2=2+18-6\sqrt{2}+1=21-6\sqrt{2}\,cm$.

   a. $Area=\frac{(AB+CD)\cdot DH}{2}=\frac{(6+2\sqrt{2})(3\sqrt{2}-1)}{2}=9\sqrt{2}-3+6-\sqrt{2}=(8\sqrt{2}+3)\,cm^2$;

   b. $AC^2+BD^2=2BD^2=2(BH^2+DH^2)=2[(3+\sqrt{2})^2+(3\sqrt{2}-1)^2]=$
   $2(9+6\sqrt{2}+2+18-6\sqrt{2}+1)=60\,cm^2$;

   c. $AB^2+CD^2+2AD^2=(3+2\sqrt{2})^2+3^2+2\cdot(21-6\sqrt{2})=9+12\sqrt{2}+8+9+42-12\sqrt{2}=68\,cm^2$.

4.

   a. $\frac{1}{(x+\sqrt{2})(x-\sqrt{2})}+\frac{1}{(x-\sqrt{2})^2}=\frac{2}{(x+\sqrt{2})^2} \Rightarrow$

   $\frac{(x+\sqrt{2})(x-\sqrt{2})+(x+\sqrt{2})^2}{(x+\sqrt{2})^2(x-\sqrt{2})^2}=\frac{2(x-\sqrt{2})^2}{(x+\sqrt{2})^2(x-\sqrt{2})^2} \Rightarrow \qquad C.E:\ x\neq\pm\sqrt{2}$

   $x^2-2+x^2+2x\sqrt{2}+2=2x^2-4x\sqrt{2}+4 \Rightarrow 6x\sqrt{2}=4 \Rightarrow x=\frac{\sqrt{2}}{3}$ *sol. acc.*

b. $x(1-\sqrt{2})\geq\sqrt{2}-2 \;\Rightarrow\; x\leq\dfrac{\sqrt{2}(1-\sqrt{2})}{1-\sqrt{2}} \;\Rightarrow\; x\leq\sqrt{2}$.

5. Usiamo ripetutamente il prodotto notevole $(n-1)(n+1)=n^2-1$:

$\sqrt{1+2000\sqrt{1+2001\sqrt{1+2002\sqrt{1+2003\cdot 2005}}}}=$

$\sqrt{1+2000\sqrt{1+2001\sqrt{1+2002\sqrt{1+2004^2-1}}}}=$

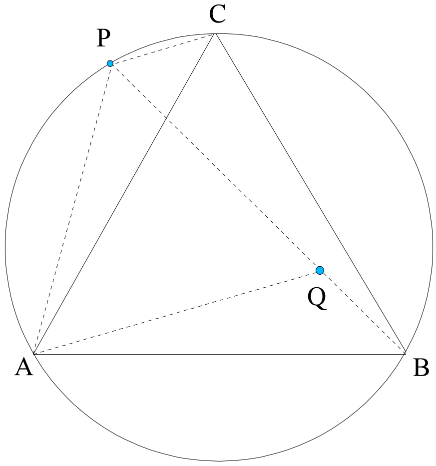
$\sqrt{1+2000\sqrt{1+2001\sqrt{1+2002\cdot 2004}}}=\sqrt{1+2000\sqrt{1+2001\sqrt{1+2003^2-1}}}=$

$\sqrt{1+2000\sqrt{1+2001\cdot 2003}}=\sqrt{1+2000\sqrt{1+2002^2-1}}=$

$\sqrt{1+2000\cdot 2002}=\sqrt{1+2001^2-1}=2001$.

6. Vedi pag. G193 del libro di testo.

7.



a. $A\hat{P}B=A\hat{C}B=60°$, in quanto angoli alla circonferenza che insistono sull'arco AB.

b. Il triangolo APQ è isoscele per costruzione, in quanto $PQ=PA$, ed ha l'angolo al vertice $A\hat{P}B=60°$ per la dim. precedente; quindi anche gli angoli alla base $P\hat{A}Q=P\hat{Q}A=60°$, pertanto il triangolo è equilatero.

c. Consideriamo i triangoli APC e AQB. Essi hanno:

- $AB=AC$ per ipotesi;
- $AP=AQ$ per costruzione;
- $P\hat{A}C=Q\hat{A}B=60°-C\hat{A}Q$ per differenza.

Quindi $APC=AQB$ per il primo criterio di congruenza dei triangoli c.v.d.

In particolare: $PC=QB$.

d. $PB=PQ+QB=PA+PC$ per le dim. precedenti c.v.d.

1. Risolvi le seguenti equazioni con il metodo più adeguato:

   $4x^2-0{,}09=0$; $(x+1)^2=2$; $x^2\sqrt{2}-x=0$; $x^2=\sqrt{3}-2$;

   $\frac{9}{16}x^2=0$; $4x^2-4x=-1$; $-\frac{1}{2}x^2-\frac{3}{2}x+2=0$; $x^2-2x+3=0$;

   $x^2+\frac{6}{5}x+\frac{8}{25}=0$; $(2x+3)(3x-2)=0$; $x^2+4x-1=0$.

2. Risolvi la seguente equazione fratta: $\frac{x}{x^2-4}+\frac{1}{x^2-2x}+\frac{11}{6x^2+12x}=0$.

3. Semplifica le seguenti frazioni algebriche: $\frac{x^2-4}{2x^2+x-6}$; $\frac{x^2+x-2}{2x^2-x-10}$; $\frac{3x^2-7x-6}{x^2-x-6}$.

4. Una maestra porta in classe 60 caramelle da distribuire equamente tra i suoi alunni. Quel giorno, però, 5 alunni sono assenti, per cui ciascuno degli altri riceve una caramella in più.

   Qual è il numero totale di alunni della classe?

5. Il prezzo di un capo di abbigliamento subisce uno sconto pari all'x%. Successivamente, il prezzo scontato subisce un ulteriore ribasso, sempre dell'x%. Dopo i due sconti il prezzo del capo è diventato il 64% del prezzo iniziale. Qual è la percentuale x di sconto?

6. Un ciclista percorre una distanza $d=90\,km$ ad una velocità v costante. Se la sua velocità fosse stata superiore di $2\,km/h$, sarebbe arrivato al traguardo mezz'ora prima.

   Calcola la velocità v del ciclista.

7. In un rettangolo ABCD il lato AB supera di $3a$ il lato BC. Il rettangolo è equivalente ad un rombo, che ha la diagonale maggiore che supera di $2a$ la misura di AB e la diagonale minore che è inferiore di $7a$ al triplo di BC. Calcola le misure di AB e BC.

2^F - Correzione compito n°4

1.

- $4x^2 - \frac{9}{100} = 0 \;\Rightarrow\; x^2 = \frac{9}{400} \;\Rightarrow\; x = \pm\frac{3}{20}$;
- $(x+1)^2 = 2 \;\Rightarrow\; x+1 = \pm\sqrt{2} \;\Rightarrow\; x = -1 \pm \sqrt{2}$;
- $x(x\sqrt{2}-1) = 0 \;\Rightarrow\; x_1 = 0;\; x_2 = \frac{1}{\sqrt{2}}$;
- $x^2 = \sqrt{3} - 2 = 0$ non ha soluzioni perché $\sqrt{3} - 2 < 0$;
- $\frac{9}{16}x^2 = 0 \;\Rightarrow\; x_1 = x_2 = 0$;
- $4x^2 - 4x + 1 = 0 \;\Rightarrow\; (2x-1) = 0 \;\Rightarrow\; x_1 = x_2 = \frac{1}{2}$;
- $-\frac{1}{2}x^2 - \frac{3}{2}x + 2 = 0 \;\Rightarrow\; x^2 + 3x - 4 = 0 \;\Rightarrow\; (x+4)(x-1) = 0 \;\Rightarrow\; x_1 = -4;\; x_2 = 1$;
- $x^2 - 2x + 3 = 0$ non ha soluzioni perché $\frac{\Delta}{4} = 1 - 3 < 0$;
- $25x^2 + 30x + 8 = 0 \;\Rightarrow\; x = \frac{-15 \pm \sqrt{225-200}}{25} = \frac{-15 \pm 5}{25} \;\Rightarrow\; x_1 = -\frac{4}{5};\; x_2 = -\frac{2}{5}$;
- $(2x+3)(3x-2) = 0 \;\Rightarrow\; x_1 = -\frac{3}{2};\; x_2 = \frac{2}{3}$;
- $x^2 + 4x - 1 = 0 \;\Rightarrow\; x = -2 \pm \sqrt{4+1} = -2 \pm \sqrt{5}$.

2. $\frac{x}{(x+2)(x-2)} + \frac{1}{x(x-2)} + \frac{11}{6x(x+2)} = 0 \;\Rightarrow\; \frac{6x^2 + 6(x+2) + 11(x-2)}{6x(x+2)(x-2)} = 0$; $C.E: \; x \neq 0 \;\wedge\; x \neq \pm 2$;

$6x^2 + 17x - 10 = 0 \;\Rightarrow\; x = \frac{-17 \pm \sqrt{289+240}}{12} = \frac{-17 \pm 23}{12} \;\Rightarrow\; x_1 = -\frac{10}{3};\; x_2 = \frac{1}{2};\; sol. acc.$

3.

- $2x^2 + x - 6 = 0 \;\Rightarrow\; x = \frac{-1 \pm \sqrt{1+48}}{4} = \frac{-1 \pm 7}{4} \;\Rightarrow\; x_1 = -2;\; x_2 = \frac{3}{2}$;

  $\frac{x^2 - 4}{2x^2 + x - 6} = \frac{(x+2)(x-2)}{2(x+2)(x-3/2)} = \frac{x-2}{2x-3}$.
- $2x^2 - x - 10 = 0 \;\Rightarrow\; x = \frac{1 \pm \sqrt{1+80}}{4} = \frac{1 \pm 9}{4} \;\Rightarrow\; x_1 = -2;\; x_2 = \frac{5}{2}$;

  $\frac{x^2 + x - 2}{2x^2 - x - 10} = \frac{(x+2)(x-1)}{2(x+2)(x-5/2)} = \frac{x-1}{2x-5}$.
- $3x^2 - 7x - 6 = 0 \;\Rightarrow\; x = \frac{7 \pm \sqrt{49+72}}{6} = \frac{7 \pm 11}{6} \;\Rightarrow\; x_1 = -\frac{2}{3};\; x_2 = 3$;

$$\frac{3x^2-7x-6}{x^2-x-6}=\frac{3(x+2/3)(x-3)}{(x-3)(x+2)}=\frac{3x+2}{x+2} \quad .$$

4. Se indichiamo con x il numero totale di alunni della classe, ognuno di loro dovrebbe ricevere $60/x$ caramelle; quando invece gli alunni sono $x-5$, ognuno di loro riceve $60/(x-5)$ caramelle. Sappiamo che la seconda quantità deve superare di una unità la prima:
$$\frac{60}{x-5}=\frac{60}{x}+1 \Rightarrow \frac{60x-60(x-5)-x(x-5)}{x(x-5)}=0 \Rightarrow 60x-60x+300-x^2+5x=0 \Rightarrow$$
$$x^2-5x-300=0 \Rightarrow (x-20)(x+15)=0 \Rightarrow x_1=20;\ x_2=-15 \quad .$$
Dovendo porre $C.E:\ x\in\mathbb{N};\ x>5$, la seconda soluzione non risulta accettabile, per cui la classe è composta da 20 alunni.
5. Se indichiamo con p il prezzo iniziale del capo, tale prezzo diverrà $(1-x)p$ dopo il primo sconto e $(1-x)^2 p$ dopo il secondo. Il testo ci informa che:
$$(1-x)^2 p=0{,}64\,p \Rightarrow (1-x)^2=0{,}64 \Rightarrow 1-x=\pm 0{,}8 \Rightarrow x_1=0{,}2;\ x_2=1{,}8 \quad .$$
Dovendo porre $C.E:\ 0<x<1$, la seconda soluzione non risulta accettabile, per cui la percentuale di sconto è del 20%.
6. Esprimendo la velocità v in km/h , allora il tempo in ore impiegato dal ciclista a percorrere la distanza d è: $t_1=90/v$.
Quando la sua velocità in km/h diventa $v+2$, il tempo diventa $t_2=90/(v+2)$.
Sappiamo che il primo tempo deve superare di mezz'ora il secondo:
$$\frac{90}{v}=\frac{90}{v+2}+\frac{1}{2} \Rightarrow \frac{180(v+2)-180v-v(v+2)}{v(v+2)}=0 \Rightarrow 180v+360-180v-v^2-2v=0 \Rightarrow$$
$$v^2+2v-360=0 \Rightarrow (v+20)(v-18)=0 \Rightarrow v_1=-20;\ v_2=18 \quad .$$
Dovendo porre $C.E:\ v>0$, la prima soluzione non risulta accettabile, per cui la velocità del ciclista è $v=18\,km/h$.
7. Ponendo $BC=x$, avremo $AB=x+3a$, per cui l'area del rettangolo è $S_{rett}=x(x+3a)$.
Le diagonali del rombo misurano $D=x+a$, $d=3x-7a$, per cui l'area del rombo vale:
$S_{rombo}=\frac{1}{2}(x+5a)(3x-7a)$. Imponiamo che i due quadrilateri siano equivalenti:
$$x(x+3a)=\frac{1}{2}(x+5a)(3x-7a) \Rightarrow 2x^2+6ax=3x^2+8ax-35a^2 \Rightarrow$$
$$x^2+2ax-35a^2=0 \Rightarrow (x+7a)(x-5a)=0 \Rightarrow x_1=-7a;\ x_2=5a \quad .$$
Dobbiamo però imporre che tutti i segmenti utilizzati abbiano misura positiva o nulla.
In particolare, dalla misura di d ricaviamo la $C.E:\ x\geq\frac{7}{3}a$.
Quindi la prima soluzione non è accettabile, e ricaviamo $BC=5a$, $AB=8a$.

1. Risolvi le seguenti equazioni di grado superiore al secondo:

$$\frac{1}{16}x^8=0 \;;\quad \frac{1}{125}x^9+1=0 \;;\quad -x^8+16=0 \;;\quad 4(x-1)^4=25 \;;\quad x^4-3x^2+2=0 \;;$$

$$x^6-5x^4+3x^3-15x=0 \;;\quad 2x^3+2x^2-7x-6=0 \;;\quad \frac{x^2-1}{x^2-4}-\frac{1}{x^2}+\frac{12}{4x^2-x^4}=0 \;.$$

2. Risolvi i seguenti sistemi di secondo grado o di grado superiore al secondo:

$$\begin{cases} x^2-2xy=-1 \\ 2x+y-3=0 \end{cases} ;\quad \begin{cases} x^2+y^2=5 \\ y=x^2-3 \end{cases} ;\quad \begin{cases} x^2+y^2=2xy \\ x+y=2\sqrt{2} \end{cases} .$$

3. Barbara ha appena completato un puzzle rettangolare formato da 1500 pezzi, 156 dei quali ne costituiscono la "cornice". Calcola il numero di tessere disposte lungo ciascun lato del puzzle. (*Puoi supporre che, a parte le "sporgenze" e le "rientranze", tutte le tessere abbiano forma rettangolare e che siano tutte congruenti*).

4. Il lato del quadrato ABCD misura *a*. Determina sul lato CD un punto P in modo che risulti:

$$\overline{PA}^2+\overline{PB}^2=\frac{21}{8}a^2 \quad .$$

5. Un rombo avente perimetro $2p=20\,cm$ è circoscritto ad una circonferenza di raggio $r=\sqrt{6}\,cm$. Determina le lunghezze delle diagonali del rombo.

<u>2^F</u> *- Correzione compito n°5*

1.

a. $\frac{1}{16}x^8=0 \Rightarrow x^8=0 \Rightarrow x=0 \quad (molt.8)$;

b. $\frac{1}{125}x^9+1=0 \Rightarrow x^9=-125 \Rightarrow x=-\sqrt[9]{5^3}=-\sqrt[3]{5}$;

c. $-x^8+16=0 \Rightarrow x^8=16 \Rightarrow x=\pm\sqrt[8]{2^4}=\pm\sqrt{2}$;

d. $4(x-1)^4=25 \Rightarrow (x-1)^4=\frac{25}{4} \Rightarrow x-1=\pm\sqrt[4]{\frac{25}{4}} \Rightarrow x=1\pm\sqrt{\frac{5}{2}}$;

e. $x^4-3x^2+2=0 \Rightarrow (x^2-1)(x^2-2)=0 \Rightarrow x=\pm 1 \vee x=\pm\sqrt{2}$;

f. $x^6-5x^4+3x^3-15x=0 \Rightarrow x(x^5-5x^3+3x^2-15)=0 \Rightarrow$

$x[x^3(x^2-5)+3(x^2-5)]=0 \Rightarrow x(x^2-5)(x^3+3)=0 \Rightarrow x=0 \vee x=\pm\sqrt{5} \vee x=-\sqrt[3]{3}$;

g. $2x^3+2x^2-7x-6=0$. Indicando con $P(x)$ il polinomio a primo membro, osserviamo che $P(-2)=-16+8+14-6=0$, per cui $P(x)$ è divisibile per $(x+2)$; eseguendo la divisione, anche con lo schema di Ruffini, ricaviamo il quoziente $Q(x)=2x^2-2x-3$.

Quindi: $(x+2)(2x^2-2x-3)=0 \Rightarrow x_1=-2;\ x_{23}=\frac{1\pm\sqrt{7}}{2}$.

h. $\frac{x^2-1}{x^2-4}-\frac{1}{x^2}-\frac{12}{x^2(x^2-4)}=0 \Rightarrow \frac{x^2(x^2-1)-(x^2-4)-12}{x^2(x^2-4)}=0 \Rightarrow \quad C.E: \ x\neq 0 \wedge x\neq\pm 2$

$x^4-2x^2-8=0 \Rightarrow (x^2-4)(x^2+2)=0 \Rightarrow x^2=4 \vee x^2=-2$.

La prima eq. ha sol. $x=\pm 2$ non accettabili, mentre la seconda eq. non ha sol.

2.

a. $\begin{cases} y=3-2x \\ x^2-2x(3-2x)+1=0 \Rightarrow 5x^2-6x+1=0 \Rightarrow x=\frac{3\pm\sqrt{9-5}}{3} \Rightarrow \end{cases}$

$\left[\begin{array}{l} x_1=1/5 \Rightarrow y_1=3-\frac{2}{5}=\frac{13}{5} \\ x_2=1 \Rightarrow y_2=3-2=1 \end{array}\right.$; $\quad Sol: \ (\frac{1}{5};\frac{13}{5});\ (1,1)$.

b. $\begin{cases} y=x^2-3 \\ x^2+(x^2-3)^2=5 \Rightarrow x^4-5x^2+4=0 \Rightarrow (x^2-1)(x^2-4)=0 \Rightarrow \end{cases}$

$\left[\begin{array}{l} x_{12}=\pm 1 \Rightarrow y_{12}=-2 \\ x_{34}=\pm 2 \Rightarrow y_{34}=1 \end{array}\right.$; $\quad Sol: \ (-1,-2);\ (1,-2);\ (-2,1);\ (2,1)$.

c. Ricaviamo dalla prima eq: $x^2-2xy+y^2=0 \Rightarrow (x-y)^2=0 \Rightarrow x-y=0 \Rightarrow y=x$.

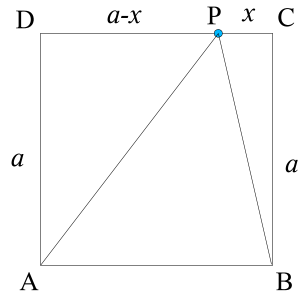
Sostituiamo nella seconda: $2y=2\sqrt{2} \Rightarrow y=\sqrt{2}$. $\qquad Sol: \ (\sqrt{2},\sqrt{2}) \ doppia$.

3. Indichiamo con x il numero di tessere lungo il lato verticale e con y il numero di tessere lungo il lato orizzontale, in modo che il puzzle sia costituito da x righe e y colonne. Quindi il numero di pezzi del puzzle è xy, mentre il numero dei pezzi lungo la cornice è $2x+2y-4$, in quanto i 4 pezzi nei vertici vanno contati una sola volta. Pertanto:

$$\begin{cases} xy=1500 \\ 2x+2y-4=156 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y=80-x \\ x(80-x)=1500 \end{cases} \Rightarrow x^2-80x+1500=0 \Rightarrow (x-30)(x-50)=0 .$$

Abbiamo quindi le soluzioni: $\begin{cases} x_1=30 \\ y_1=50 \end{cases}$ e $\begin{cases} x_2=50 \\ y_2=30 \end{cases}$.

Esse corrispondono a due puzzle aventi le stesse dimensioni ma ruotati di 90° l'uno rispetto all'altro.



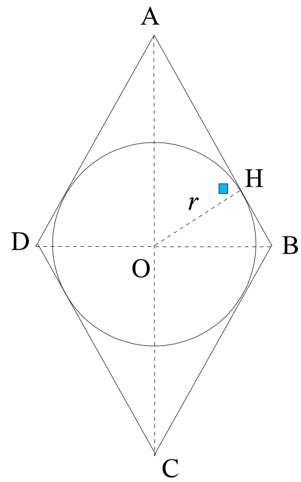
4. Poniamo $CP=x \Rightarrow DP=a-x$ con $0\le x\le a$.

Per il teorema di Pitagora: $AP^2=a^2+(a-x)^2$ e $BP^2=a^2+x^2$. Quindi:

$$a^2+(a-x)^2+a^2+x^2=\frac{21}{8}a^2 \Rightarrow 16x^2-16ax+3a^2=0 \Rightarrow$$

$$x=\frac{8a\pm\sqrt{64a^2-48a^2}}{16}=\frac{8a\pm4a}{16} \Rightarrow x_1=\frac{1}{4}a;\ x_2=\frac{3}{4}a .$$

Le due soluzioni danno luogo a due triangoli ABP congruenti che si corrispondono in una simmetria.



5. *Primo metodo*. Indichiamo con x ed y le semidiagonali del rombo, con l il lato del rombo e con r il raggio del cerchio inscritto nel rombo.

Per il teorema di Pitagora: $x^2+y^2=l^2$. Inoltre, l'area S del rombo è:

$$S=\frac{2x\cdot 2y}{2} \text{, ma anche } S=\frac{4l\cdot r}{2} \text{. Quindi: } \begin{cases} x^2+y^2=5^2 \\ xy=5\sqrt{6} \end{cases} \Rightarrow$$

$$\begin{cases} y=5\sqrt{6}/x \\ x^2+\dfrac{150}{x^2}=25 \end{cases} \Rightarrow x^4-25x^2+150=0 \Rightarrow (x^2-10)(x^2-15)=0 .$$

Tenendo conto delle C.E. $x>0 \wedge y>0$, le soluzioni accettabili sono:

$$x_1=\sqrt{10} \Rightarrow y_1=\frac{5\sqrt{6}}{\sqrt{10}}=\sqrt{15} \text{ e } x_2=\sqrt{15} \Rightarrow y_2=\frac{5\sqrt{6}}{\sqrt{15}}=\sqrt{10} \text{ espresse in } cm.$$

Anche in questo caso le sol. corrispondono a due rombi congruenti ma ruotati di 90° l'uno rispetto all'altro.

Secondo metodo (*solo accennato*). Indichiamo con x e y le due parti AH e BH in cui il lato del rombo viene diviso dal punto di tangenza H; x e y sono quindi le proiezioni dei cateti OA e OB sull'ipotenusa AB del triangolo rettangolo OAB. Abbiamo quindi le condizioni: $x+y=l=5$ e $xy=r^2=150$ (2° teorema di Euclide applicato al triangolo rettangolo OAB) che, messe a sistema, portano alle stesse conclusioni ottenute in precedenza.

1. Risolvi con metodo grafico le seguenti disequazioni di secondo grado:

$-x^2+3x\geq 0$; $x^2+x+2>0$; $x^2+3x+5\leq 0$; $x^2-6x+9\leq 0$;

$x^2-x-2>0$; $-x^2+8x-16>0$; $x^2-2x-3\leq 0$; $-2x^2-\sqrt{5}\leq 0$;

$x^2-16x>0$; $-x^2-x\sqrt{2}<0$; $16x^2>0$; $(2x-1)^2>4$.

2. Risolvi le seguenti disequazioni di grado superiore al secondo:

$(x+1)(9-x^2)\geq 0$; $x^3-x^2-4x+4\geq 0$; $x^2-x^4>0$.

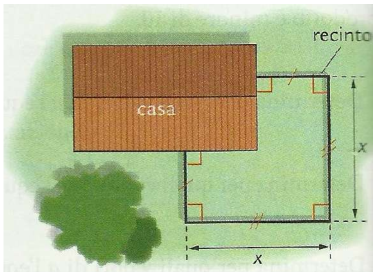
3. Risolvi le seguenti disequazioni fratte:

$\frac{3-x}{x^2-4x}\geq 0$; $\frac{x^2}{x^2+1}>0$; $\frac{1}{x}\geq\frac{1}{x-1}$.

4. Risolvi i seguenti sistemi di disequazioni:

$\begin{cases} x^2-2x\geq 0 \\ 4-x>0 \end{cases}$; $\begin{cases} -x^2+3x-7<0 \\ x^2+x+1/4\geq 0 \end{cases}$.

5. Intorno a due muri di una casa si vuole costruire un recinto avente i lati a due a due uguali (*vedi figura*) utilizzando 30 *m* di rete. Indica con *x* la lunghezza in metri di ciascuno dei due lati maggiori del recinto.



   a. Stabilisci per quali valori di *x* è possibile costruire il recinto.

   b. Verifica se l'area del recinto può essere maggiore di 75 m^2.

   c. Determina per quali valori di *x* l'area del recinto assume valori minori di 63 m^2.

<u>2^F</u> *- Correzione compito n°6*

1.

a. $-x(x-3)=0 \Rightarrow x_1=0;\ x_2=3.\quad Sol.dis:\ 0\le x\le 3$;

b. $x^2+x+2=0 \Rightarrow \Delta<0 \Rightarrow \emptyset.\quad Sol.dis:\ \forall x\in\mathbb{R}$;

c. $x^2+3x+5=0 \Rightarrow \Delta<0 \Rightarrow \emptyset.\quad Sol.dis:\ \emptyset$;

d. $(x-3)^2=0 \Rightarrow x_1=x_2=3.\quad Sol.dis:\ x=3$;

e. $(x-2)(x+1)=0 \Rightarrow x_1=-1;\ x_2=2.\quad Sol.dis:\ x<-1 \vee x>2$;

f. $-(x-4)^2=0 \Rightarrow x_1=x_2=4.\quad Sol.dis:\ \emptyset$;

g. $(x-3)(x+1)=0 \Rightarrow x_1=-1;\ x_2=3.\quad Sol.dis:\ -1\le x\le 3$;

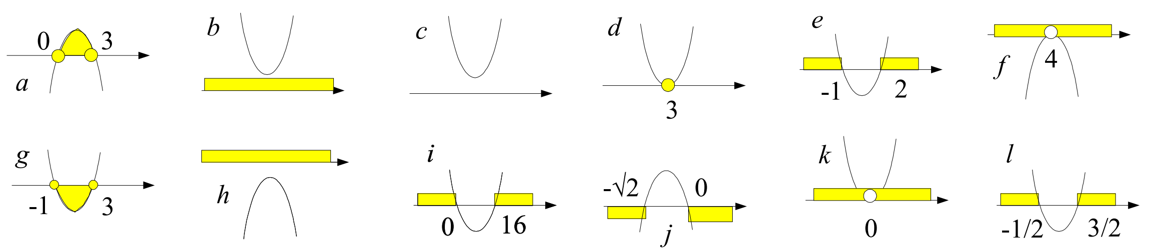
h. $-(2x^2+\sqrt{5})=0 \Rightarrow \emptyset.\quad Sol.dis:\ \forall x\in\mathbb{R}$;

i. $x(x-16)=0 \Rightarrow x_1=0;\ x_2=16.\quad Sol.dis:\ x<0 \vee x>16$;

j. $-x(x+\sqrt{2})=0 \Rightarrow x_1=-\sqrt{2};\ x_2=0.\quad Sol.dis:\ x<-\sqrt{2} \vee x>0$;

k. $16x^2=0 \Rightarrow x_1=x_2=0.\quad Sol.dis: \forall x\ne 0$;

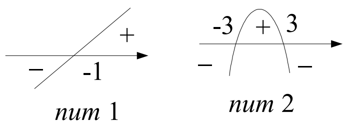
l. $(2x-1)^2=4 \Rightarrow 2x-1=\pm 2 \Rightarrow x_1=-\frac{1}{2};\ x_2=\frac{3}{2}.\quad Sol.dis:\ x<-\frac{1}{2} \vee x>\frac{3}{2}$.



2.

a. $(x+1)(9-x^2)\ge 0$

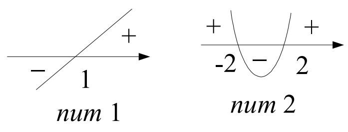
$Sol:\ x\le -3 \vee -1\le x\le 3$.



		-3		-1		3		
	-	-	-	o	+	+	+	*num* 1
	-	o	+	+	+	o	-	*num* 2
	+	o	-	o	+	o	-	*f(x)*

b. $(x-1)(x^2-4)\ge 0$

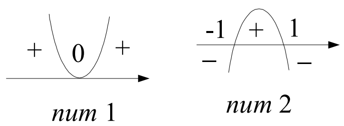
$Sol:\ -2\le x\le 1 \vee x\ge 2$.



		-2		1		2		
	-	-	-	o	+	+	+	*num* 1
	+	o	-	-	-	o	+	*num* 2
	-	o	+	o	-	o	+	*f(x)*

c. $x^2(1-x^2)>0$

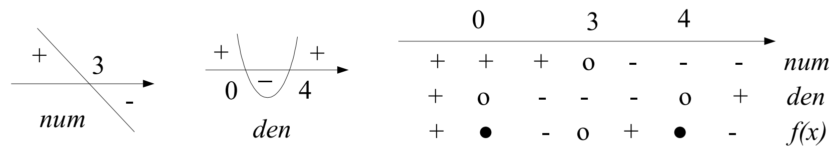
$Sol:\ -1<x<1 \wedge x\ne 0$.



		-1		0		1		
	+	+	+	o	+	+	+	*num* 1
	-	o	+	+	+	o	-	*num* 2
	-	o	+	o	+	o	-	*f(x)*

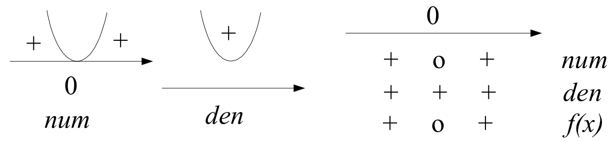
3.

a. $\dfrac{3-x}{x^2-4x}\geq 0$



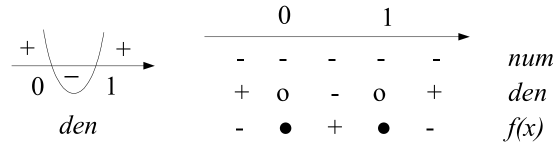
$Sol:\ \ x<0\ \vee\ 3\leq x<4$.

b. $\dfrac{x^2}{x^2+1}>0$



$Sol:\ \ \forall\, x\neq 0$.

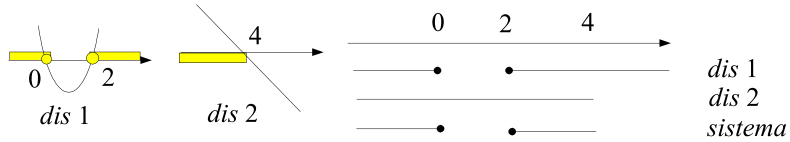
c. $\dfrac{1}{x}-\dfrac{1}{x-1}\geq 0\ \Rightarrow\ \dfrac{x-1-x}{x(x-1)}\geq 0\ \Rightarrow\ \dfrac{-1}{x(x-1)}\geq 0$



$Sol:\ \ 0<x<1$.

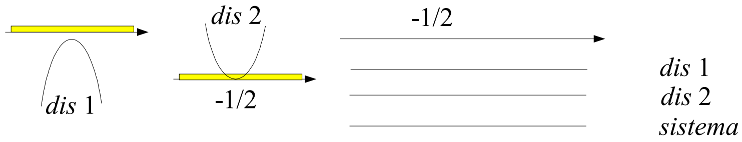
4.

a. $\begin{cases} x^2-2x\geq 0 \\ 4-x>0 \end{cases}$



$Sol:\ \ x\leq 0\ \vee\ 2\leq x<4$.

b. $\begin{cases} -x^2+3x-7<0 \\ x^2+x+1/4\geq 0 \end{cases}$



$Sol:\ \ \forall\, x\in\mathbb{R}$.

5.

a. Se la lunghezza dei lati maggiori del recinto è *x*, quella di ciascuno dei lati minori è $15-x$, mentre la lunghezza di ciascuna delle parti del muro coperte dal recinto è: $x-(15-x)=2x-15$. Imponendo che tali misure siano positive, ricaviamo: $7{,}5\leq x\leq 15$ (in metri).

Come avviene spesso, è molto dubbio se accettare o meno i casi limite.

b. Per calcolarne l'area, possiamo vedere il recinto come differenza tra un quadrato di lato *x* ed uno di lato $2x-15$, oppure come l'unione tra due rettangoli di lati *x* e $15-x$ a cui viene sottratto un quadrato di lato $15-x$. In entrambi i casi ricaviamo: $S(x)=-3x^2+60x-225$.

Imponiamo $S(x)=-3x^2+50x-225>75\ \Rightarrow\ -3x^2+60x-300>0\ \Rightarrow\ -3(x-10)^2>0$.

Poiché $\Delta=0$ e $a<0$, tale disequazione non ha soluzioni, per cui l'area del recinto non può assumere valori maggiori di 75 m^2.

c. Imponiamo $S(x)=-3x^2+60x-225<63\ \Rightarrow\ -3x^2+60x-288<0$.

$$3x^2-60x+288=0\ \Rightarrow\ x=\frac{30\pm 6}{3}\ \Rightarrow\ x_1=8;\ \ x_2=12$$.

Le sol della disequazione sarebbero i valori appartenenti agli intervalli $x<8\ \vee\ x>12$, ma, tenendo conto delle condizioni di esistenza, ricaviamo che l'area del recinto assume valori minori di 63 m^2 quando $7{,}5\leq x<8\ \vee\ 12<x\leq 15$ (sempre in metri).

<u>2^A</u> - *Matematica*

Esercizi per il ripasso estivo

Disequazioni di secondo grado

1. $2x^2+x-6<0$; $2x^2-1>0$ $R: -2<x<\frac{3}{2}; x<-\frac{\sqrt{2}}{2}\, o\, x>\frac{\sqrt{2}}{2}$
2. $3(2x+1)^2\geq 0$; $-1-x^2\geq 0$ $R: \forall x\in\mathbb{R}; \emptyset$
3. $x^2+3x+6>0$; $(2x-1)(3x+2)\leq 0$ $R: \forall x\in\mathbb{R}; -\frac{2}{3}\leq x\leq\frac{1}{2}$
4. $4x^2>0$; $x^2+6x+4<0$ $R: \forall x\neq 0; -3-\sqrt{5}<x<-3+\sqrt{5}$
5. $x^2+16<0$; $-x^2+4x-4\geq 0$ $R: \emptyset; x=2$
6. $9x-x^2\geq 0$; $3x^2+12x+9\leq 0$ $R: 0\leq x\leq 9; -3\leq x\leq -1$
7. $18-x^2\geq 0$; $9x^2+6x>0$ $R: -3\sqrt{2}\leq x\leq 3\sqrt{2}; x<-\frac{2}{3}\, o\, x>0$
8. $x(x-10)>-16$; $x^2+2\sqrt{2}x-6<0$ $R: x<2\, o\, x>8; -3\sqrt{2}<x<\sqrt{2}$
9. $3x^2-18x\leq 0$; $x(x-8)\geq -15$ $R: 0\leq x\leq 6; x\leq 3\, o\, x\geq 5$
10. $9x^2-2>0$; $3x^2-2x-1<0$ $R: x<-\frac{\sqrt{2}}{3}\, o\, x>\frac{\sqrt{2}}{3}; -\frac{1}{3}<x<1$

Disequazioni fratte

11. $\frac{x^2-4x+3}{2-x}>0$; $\frac{x^2-3x+2}{x-3}\geq 0$ $R: x<1\;\; o\;\; 2<x<3;\;\; 1\leq x\leq 2\;\; o\;\; x>3$
12. $\frac{x^2-4x-5}{x^2-2x}\leq 0$; $\frac{x+2}{x}>\frac{6-x}{2}$ $R: -1\leq x<0\; o\; 2<x\leq 5;\;\; x>0,\; ma\;\; x\neq 2$
13. $\frac{4-x^2}{x-1}\leq 0$; $\frac{x^2+3x}{x+2}\geq 0$ $R: -2\leq x<1\; o\; x\geq 2; -3\leq x<-2\, o\, x\geq 0$
14. $\frac{x^2-3x}{x^2-3x+2}\leq 0$; $\frac{x-3}{x}>\frac{2}{3}-\frac{x+3}{x^2}$ $R: 0\leq x<1\; o\; 2<x\leq 3;\; \forall x\neq 0\;\; e\;\; x\neq 3$
15. $\frac{x^2+2}{x^2+4x+4}>0$; $9+\frac{1}{x^2}>\frac{6}{x}$ $R: \forall x\neq -2; \mathbb{R}-\{0,\frac{1}{3}\}$

Disequazioni di grado superiore al secondo

16. $4x^3-10x^2+48x>0$ $R: x>0$

17. $3x^3>5x^2-2x$ $R: 0<x<\frac{2}{3}\ o\ x>1$

18. $x^3>6x^2-8x$ $0<x<2\ o\ x>4$

19. $x^3>x^2+2x$ $R: -1<x<0\ o\ x>2$

20. $2x^3+3x^2-2x-3>0$ $R: -\frac{3}{2}<x<-1\ o\ x>1$

Sistemi di disequazioni

21. $\begin{cases} x^2+x-2<0 \\ 1-2x\geq 0 \end{cases}$; $\begin{cases} x+6-x^2\geq 0 \\ 3x>0 \end{cases}$ $R: -2<x\leq\frac{1}{2}; 0<x\leq 3$

22. $\begin{cases} x^2>0 \\ 2x^2-1\geq 0 \\ x^2+1>0 \end{cases}$; $\begin{cases} x^2-2x-3<0 \\ 2x^2-11x+15\leq 0 \\ 3x^2+7>0 \end{cases}$ $R: x\leq-\frac{\sqrt{2}}{2}\ o\ x\geq\frac{\sqrt{2}}{2}; \frac{5}{2}\leq x<3$

23. $\begin{cases} 2x^2+x-1\leq 0 \\ 2x+1>0 \end{cases}$; $\begin{cases} x^2-6x+9>0 \\ x-2\leq 0 \end{cases}$ $R: -\frac{1}{2}<x\leq\frac{1}{2}; x\leq 2$

24. $\begin{cases} 5x-\frac{1}{2}>3x-4 \\ 1-9x^2\geq 0 \\ 5x^2-3x+9>0 \end{cases}$; $\begin{cases} x^2-5\geq 0 \\ x^2-5x\geq 0 \\ (x-5)^2>0 \end{cases}$ $R: -\frac{1}{3}\leq x\leq\frac{1}{3}; x\leq-\sqrt{5}\ o\ x>5$

25. $\begin{cases} x^2-10x+25<0 \\ 3x-5\geq 0 \end{cases}$; $\begin{cases} x^2-2x+5>0 \\ 2x-4\geq 0 \end{cases}$ $R: \emptyset; x\geq 2$

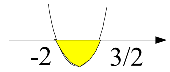
Problemi sulla similitudine dal libro di testo:

a partire da pag. G 419: n° 87, 97, 114, 129, 144, 161, 249, 250, 252, 253.

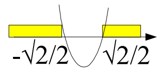
<u>2^A</u> - *Soluzione esercizi vacanze estive*

Disequazioni di secondo grado

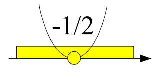
1. $2x^2+x-6=0 \Rightarrow x=\frac{-1\pm 7}{4} \Rightarrow x_1=-2;\ x_2=\frac{3}{2}$. $Sol:\ -2<x<\frac{3}{2}$.



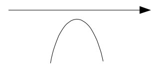
$2x^2-1=0 \Rightarrow x^2=\frac{1}{2} \Rightarrow x=\frac{\pm\sqrt{2}}{2}$. $Sol:\ x<-\frac{\sqrt{2}}{2} \vee x>\frac{\sqrt{2}}{2}$.



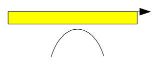
2. $3(2x+1)^2=0 \Rightarrow x=-\frac{1}{2}$. $Sol:\ \forall x\in\mathbb{R}$.



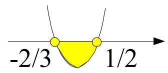
$-1-x^2=0 \Rightarrow x^2=-1 \Rightarrow l'eq.\ non\ ha\ sol.\quad Sol.\ dis:\ \emptyset$.



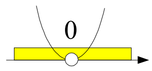
3. $x^2+3x+6=0 \Rightarrow \Delta<0 \Rightarrow l'eq.\ non\ ha\ sol.\quad Sol.\ dis:\ \forall x\in\mathbb{R}$.



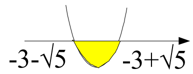
$(2x-1)(3x+2)=0 \Rightarrow x_1=-\frac{2}{3};\ x_2=\frac{1}{2}$. $Sol:\ -\frac{2}{3}\le x\le\frac{1}{2}$



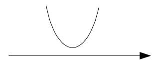
4. $4x^2=0 \Rightarrow x=0$. $Sol.\ dis:\ \forall x\neq 0$.



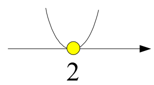
$x^2+6x+4=0 \Rightarrow x=-3\pm\sqrt{5}$. $Sol:\ -3-\sqrt{5}<x<-3+\sqrt{5}$.



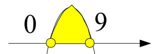
5. $x^2+16=0 \Rightarrow x^2=-16 \Rightarrow l'eq.\ non\ ha\ sol.\quad Sol.\ dis:\ \emptyset$



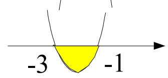
$-(x-2)^2=0 \Rightarrow x=2$. $Sol.\ dis:\ x=2$.



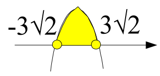
6. $x(9-x)=0 \Rightarrow x_1=0;\ x_2=9$. $Sol:\ 0\le x\le 9$.



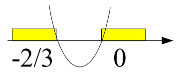
$3(x+3)(x+1)=0 \Rightarrow x_1=-3;\ x_2=-1$. $Sol:\ -3\le x\le -1$.



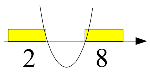
7. $x^2=18 \Rightarrow x=\pm 3\sqrt{2}$. $Sol:\ -3\sqrt{2}\le x\le 3\sqrt{2}$.



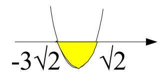
$3x(3x+2)=0 \Rightarrow x_1=-\frac{2}{3};\ x_2=0$. $Sol:\ x<-\frac{2}{3} \vee x>0$.



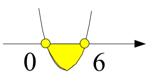
8. $x^2-10x+16=0 \Rightarrow x_1=2;\ x_2=8$. $Sol:\ x<2 \vee x>8$.



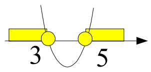
$x^2+2\sqrt{2}x-6=0 \Rightarrow x=-\sqrt{2}\pm\sqrt{8} \Rightarrow x_1=-3\sqrt{2};\ x_2=2\sqrt{2}.\ Sol:\ -3\sqrt{2}<x<\sqrt{2}.$



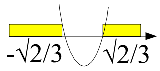
9. $3x(x-6)=0 \Rightarrow x_1=0;\ x_2=6$. $Sol:\ 0\le x\le 6$.



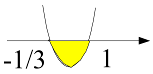
$x^2-8x+15=0 \Rightarrow x_1=3;\ x_2=5$. $Sol:\ x\le 3 \vee x\ge 5$.



10. $9x^2-2=0 \Rightarrow x=\pm\frac{\sqrt{2}}{3}$. $Sol:\ x<-\frac{\sqrt{2}}{3} \vee x>\frac{\sqrt{2}}{3}$.

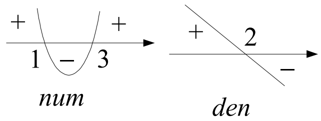


$$3x^2-2x-1=0 \;\Rightarrow\; x=\frac{1\pm 2}{3} \;\Rightarrow\; x_1=-\frac{1}{3};\; x_2=1 \quad . \quad Sol:\; -\frac{1}{3}<x<1 \quad .$$



Disequazioni fratte

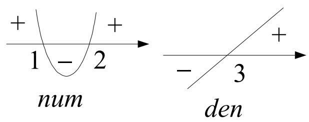
11. $\dfrac{x^2-4x+3}{2-x}>0$



		1		2		3		
	+	o	-	-	-	o	+	num
	+	+	+	o	-	-	-	den
	+	o	-	●	+	o	-	f(x)

$Sol:\; x<1 \;\vee\; 2<x<3 \quad .$

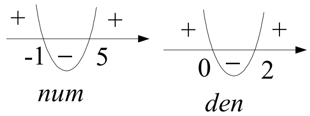
$\dfrac{x^2-3x+2}{x-3}\geq 0$



		1		2		3		
	+	o	-	o	+	+	+	num
	-	-	-	-	-	o	+	den
	-	o	+	o	-	●	+	f(x)

$Sol:\; 1\leq x\leq 2 \;\vee\; x>3 \quad .$

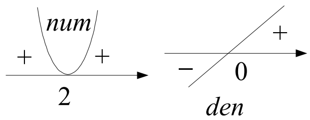
12. $\dfrac{x^2-4x-5}{x^2-2x}\leq 0$



		-1		0		2		5		
	+	o	-	-	-	-	-	o	+	num
	+	+	+	o	-	o	+	+	+	den
	+	o	-	●	+	●	-	o	+	f(x)

$Sol:\; -1\leq x<0 \;\vee\; 2<x\leq 5.$

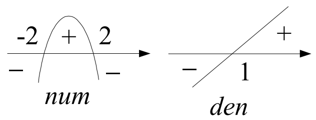
$\dfrac{x+2}{x}-\dfrac{6-x}{2}>0 \;\Rightarrow\; \dfrac{x^2-4x+4}{2x}>0$



		0		2		
	+	+	+	o	+	num
	-	o	+	+	+	den
	-	●	+	o	+	f(x)

$Sol:\; x>0 \;\wedge\; x\neq 2 \quad .$

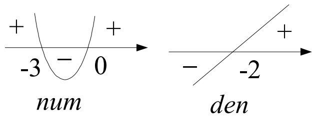
13. $\dfrac{4-x^2}{x-1}\leq 0$



		-2		1		2		
	-	o	+	+	+	o	-	num
	-	-	-	o	+	+	+	den
	+	o	-	●	+	o	-	f(x)

$Sol:\; -2\leq x<1 \;\vee\; x\geq 2 \quad .$

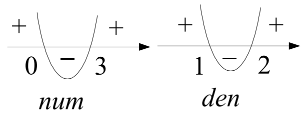
$\dfrac{x^2+3x}{x+2}\geq 0$



		-3		-2		0		
	+	o	-	-	-	o	+	num
	-	-	-	o	+	+	+	den
	-	o	+	●	-	o	+	f(x)

$Sol:\; -3\leq x<-2 \;\vee\; x\geq 0 \quad .$

14. $\dfrac{x^2-3x}{x^2-3x+2}\leq 0$

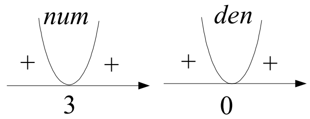


		0		1		2		3		
	+	o	-	-	-	-	-	o	+	num
	+	+	+	o	-	o	+	+	+	den
	+	o	-	●	+	●	-	o	+	f(x)

$Sol:\; 0\leq x<1 \;\vee\; 2<x\leq 3 \quad .$

$$\frac{x-3}{x}-\frac{2}{3}+\frac{x+3}{x^2}>0 \;\Rightarrow\; \frac{3x(x-3)-2x^2+3(x+3)}{3x^2}>0 \;\Rightarrow\; \frac{3x^2-9x-2x^2+3x+9}{3x^2}>0 \;\Rightarrow$$

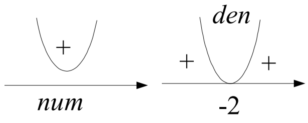
$\dfrac{x^2-6x+9}{3x^2}>0$



		0		3		
	+	+	+	o	+	num
	+	o	+	+	+	den
	+	●	+	o	+	f(x)

$Sol:\; \forall x\neq 0 \;\wedge\; x\neq 3 \quad .$

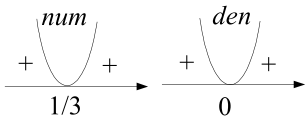
15. $\dfrac{x^2+2}{x^2+4x+4}>0$



	-2		
+	+	+	*num*
+	o	+	*den*
+	●	+	*f(x)*

$Sol:\ \forall x \neq -2$.

$9+\dfrac{1}{x^2}-\dfrac{6}{x}>0 \Rightarrow \dfrac{9x^2-6x+1}{x^2}>0$

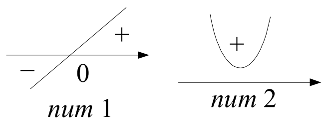


	0		1/3		
+	+	+	o	+	*num*
+	o	+	+	+	*den*
+	●	+	o	+	*f(x)*

$Sol:\ \forall x \neq 0 \ \wedge\ x \neq 1/3$.

Disequazioni di grado superiore al secondo

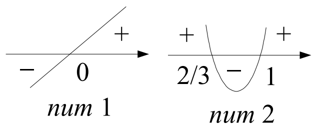
16. $2x(2x^2-5x+24)>0$



	0		
-	o	+	*num 1*
+	+	+	*num 2*
-	o	+	*f(x)*

$Sol:\ x>0$.

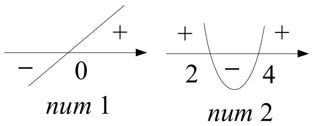
17. $x(3x^2-5x+2)>0$



	0		2/3		1		
-	o	+	+	+	+	+	*num*
+	+	+	o	-	o	+	*den*
-	o	+	●	-	●	+	*f(x)*

$Sol:\ 0<x<\dfrac{2}{3} \ \vee\ x>1$.

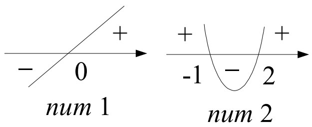
18. $x(x^2-6x+8)>0$



	0		2		4		
-	o	+	+	+	+	+	*num*
+	+	+	o	-	o	+	*den*
-	o	+	●	-	●	+	*f(x)*

$Sol:\ 0<x<2 \ \vee\ x>4$.

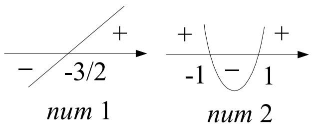
19. $x(x^2-x-2)>0$



	-1		0		2		
-	-	-	o	+	+	+	*num*
+	o	-	-	-	o	+	*den*
-	●	+	o	-	●	+	*f(x)*

$Sol:\ -1<x<0 \ \vee\ x>2$.

20. $(2x+3)(x^2-1)>0$

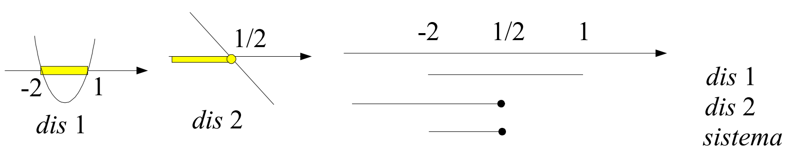


	-3/2		-1		1		
-	o	+	+	+	+	+	*num*
+	+	+	o	-	o	+	*den*
-	o	+	●	-	●	+	*f(x)*

$Sol:\ -\dfrac{3}{2}<x<-1 \ \vee\ x>1$.

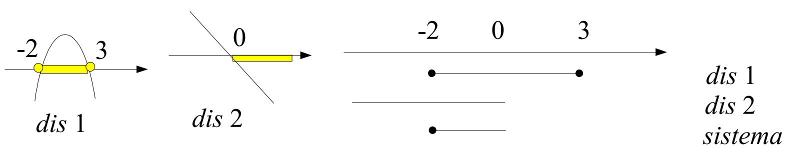
Sistemi di disequazioni

21. $\begin{cases} x^2+x-2<0 \\ 1-2x \geq 0 \end{cases}$



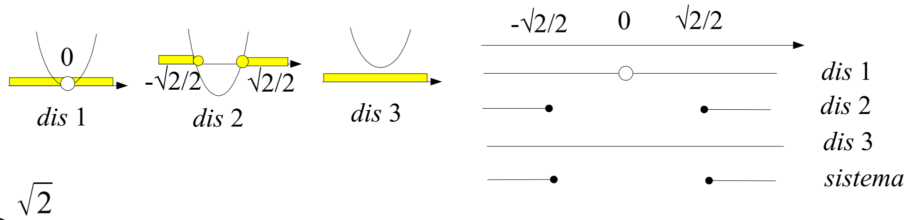
$Sol:\ -2<x\leq\dfrac{1}{2}$.

$\begin{cases} -x^2+x+6 \geq 0 \\ 3x>0 \end{cases}$



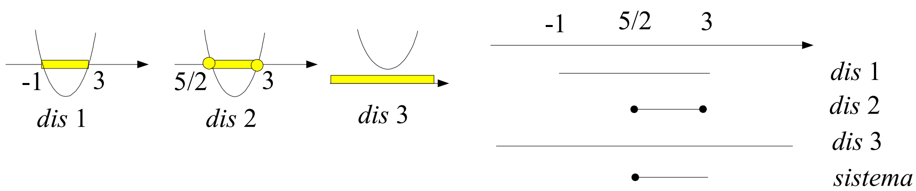
$Sol:\ 0<x\leq 3$.

22. $\begin{cases} x^2>0 \\ 2x^2-1\geq 0 \\ x^2+1>0 \end{cases}$



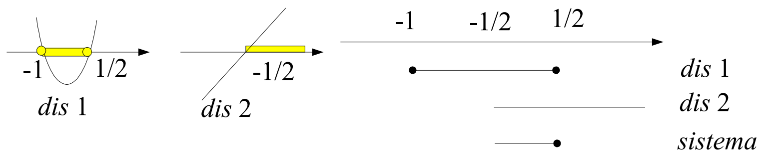
$Sol: \ x\leq -\dfrac{\sqrt{2}}{2} \ \vee \ x\geq \dfrac{\sqrt{2}}{2}$.

$\begin{cases} x^2-2x-3<0 \\ 2x^2-11x+15\leq 0 \\ 3x^2+7>0 \end{cases}$



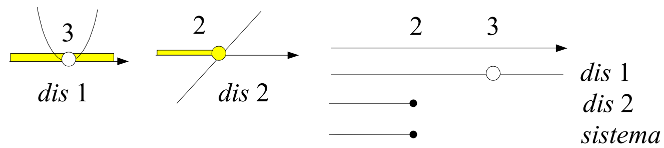
$Sol: \ \dfrac{5}{2}\leq x<3$.

23. $\begin{cases} 2x^2+x-1\leq 0 \\ 2x+1>0 \end{cases}$



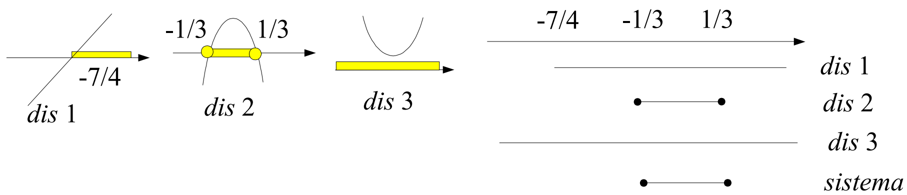
$Sol: \ -\dfrac{1}{2}<x\leq \dfrac{1}{2}$.

$\begin{cases} x^2-6x+9>0 \\ x-2\leq 0 \end{cases}$



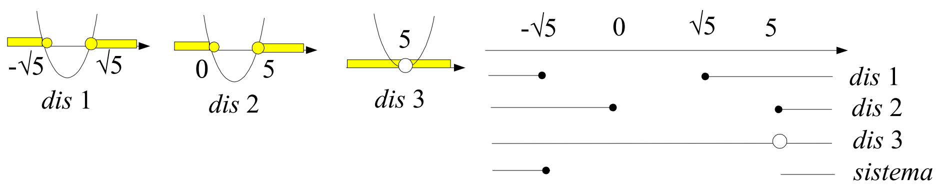
$Sol: \ x\leq 2$.

24. $\begin{cases} 2x+7/2>0 \\ 1-9x^2\geq 0 \\ 5x^2-3x+9>0 \end{cases}$



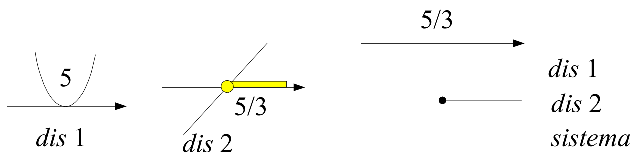
$Sol: \ -\dfrac{1}{3}\leq x\leq \dfrac{1}{3}$.

$\begin{cases} x^2-5\geq 0 \\ x^2-5x\geq 0 \\ (x-5)^2>0 \end{cases}$



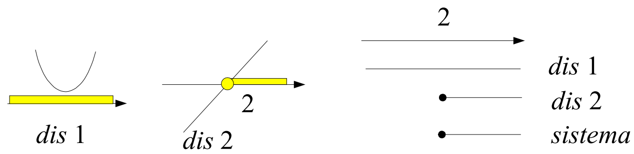
$Sol: \ x\leq -\sqrt{5} \ \vee \ x>5$.

25. $\begin{cases} x^2-10x+25<0 \\ 3x-5\geq 0 \end{cases}$

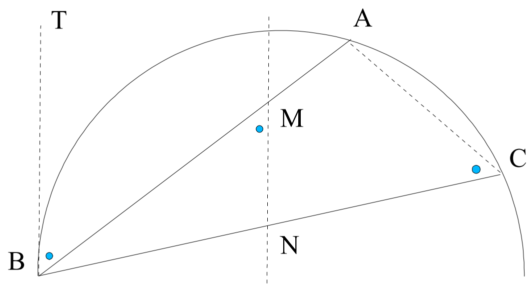


$Sol: \ \emptyset$.

$\begin{cases} x^2-2x+5>0 \\ 2x-4\geq 0 \end{cases}$



$Sol: \ x\geq 2$.



Ipotesi:

- BT tangente alla circonferenza;
- $MN \parallel BT$.

Tesi:

- $ABC \sim NBM$.

Dimostrazione.

- $N\hat{M}B = M\hat{B}T$ perché angoli alterni interni formati dalle rette parallele MN e BT tagliate dalla trasversale BT;
- $A\hat{C}B = A\hat{B}T$ in quanto angoli alla circonferenza che insistono sull'arco AB.

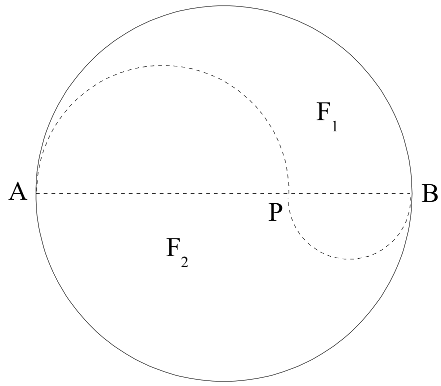
  Ricorda che un angolo alla circonferenza deve avere il vertice appartenente alla circonferenza, mentre i lati possono essere entrambe corde, oppure una corda ed una tangente alla circonferenza.

I triangoli ABC e NBM sono simili per il primo criterio, in quanto hanno:

- $A\hat{B}C$ in comune;
- $N\hat{M}B = A\hat{C}B$ per la proprietà transitiva dell'uguaglianza.

Caso particolare. Se AB e BC sono congruenti e perpendicolari, allora la retta tangente e la corda AC sono parallele.

2^A - Esercizio n° 97 pag. G 419



Indichiamo con:

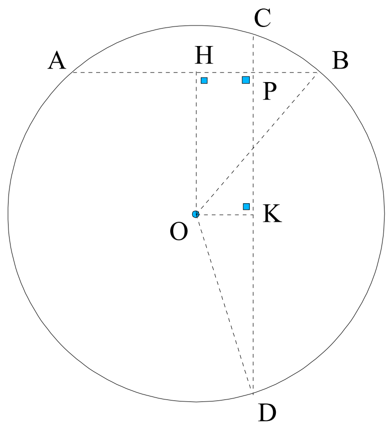
- r il raggio della circonferenza di diametro AB;
- x il raggio della circonferenza di diametro AP;
- quindi $r-x$ il raggio della circonferenza di diametro PB.

Le aree delle figure F_1 ed F_2 sono rispettivamente:

- $A_1=\pi r^2-\pi x^2+\pi(r-x)^2=2\pi r(r-x)$;
- $A_2=\pi r^2+\pi x^2-\pi(r-x)^2=2\pi rx$.

Il loro rapporto è quindi: $\dfrac{A_1}{A_2}=\dfrac{r-x}{r}$ c.v.d.

2^A - Esercizio n° 114 pag. G 422



Poniamo $PB = x \Rightarrow AP = \frac{11}{4} x$.

Imponiamo: $AP + PB = 30\,cm \Rightarrow x + \frac{11}{4} x = 30 \Rightarrow x = 8$.

Quindi: $PB = 8\,cm$, $AP = 22\,cm$.

Poiché la perpendicolare ad una corda passante per il centro della circonferenza divide la corda stessa in due parti congruenti: $BH = 15\,cm \Rightarrow PH = OK = 7\,cm$.

Perciò $OH = 27 - 7 = 20\,cm$.

Applichiamo il teorema di Pitagora al triangolo rettangolo OBH:

$OB = \sqrt{OH^2 + BH^2} = \sqrt{20^2 + 15^2} = 25\,cm$.

Applichiamo il teorema di Pitagora al triangolo rettangolo OKD:

$KD = \sqrt{OD^2 - OK^2} = \sqrt{25^2 - 7^2} = 24\,cm \Rightarrow CD = 2\,KD = 48\,cm$.

Poniamo $CP = y$ e applichiamo il teorema delle corde:

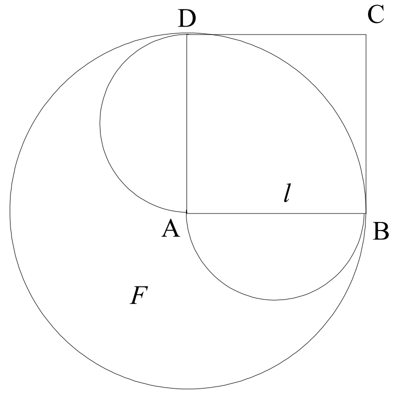
$CP \cdot PD = AP \cdot PB \Rightarrow y(48 - y) = 22 \cdot 8 \Rightarrow y^2 - 48y + 176 = 0 \Rightarrow y_1 = 4;\ y_2 = 44$.

Quindi: $CP = 4\,cm$ e $PD = 44\,cm$ (o viceversa).

La lunghezza della circonferenza è $l_{circ} = 2\pi\,OB = 50\pi\,cm$.

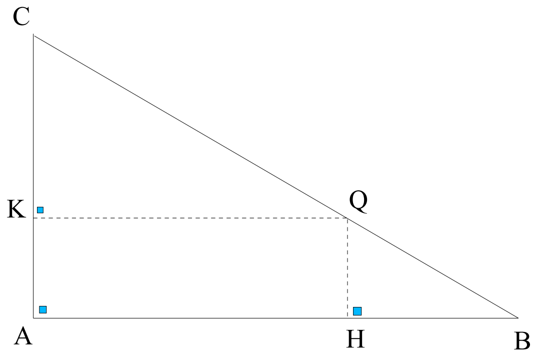
<u>2^A</u> *- Esercizio n° 129 pag. G 424*

La figura F è composta dai $3/4$ del cerchio di centro A e raggio AB, a cui vengono tolti due semicerchi di diametro AB.



Quindi: $Area_F = \frac{3}{4}\pi AB^2 - \pi\left(\frac{AB}{2}\right)^2 = \frac{3}{4}\pi l^2 - \pi\left(\frac{l}{2}\right)^2 = \frac{1}{2}\pi l^2$.

<u>2^A</u> *- Esercizio n° 144 pag. G 426*



Poniamo $AC=x \Rightarrow AB=\frac{4}{3}x$.

Impostiamo l'equazione:

$x\cdot\frac{4}{3}x=384 \Rightarrow x^2=\frac{3}{4}\cdot 384=288 \Rightarrow x=12\sqrt{2}$.

Quindi: $AC=12\sqrt{2}\,cm$ e $AB=16\sqrt{2}\,cm$;

$BC=20\sqrt{2}\,cm \Rightarrow 2\,p_{ABC}=48\sqrt{2}\,cm$.

I triangoli rettangoli ABC, BQH e CQK sono tutti simili per il primo criterio.

Poiché $BQ=\frac{3}{7}CQ \Rightarrow BQ=\frac{3}{10}BC\,;\; CQ=\frac{7}{10}BC$, i rispettivi rapporti di similitudine sono:

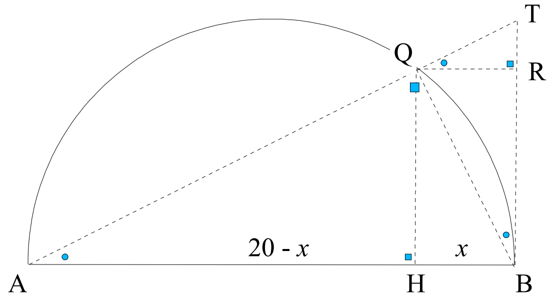
- $k_1=3/7$ per passare dal triangolo CQK al triangolo BQH;
- $k_2=3/10$ per passare dal triangolo ABC al triangolo BQH;
- $k_1=7/10$ per passare dal triangolo ABC al triangolo CQK.

Di conseguenza:

- $2\,p_{BQH}=k_2\cdot 2\,p_{ABC}=\frac{3}{10}\cdot 48\sqrt{2}=\frac{72}{5}\sqrt{2}\,cm\simeq 20{,}36\,cm$;
- $2\,p_{CQK}=k_3\cdot 2\,p_{ABC}=\frac{7}{10}\cdot 48\sqrt{2}=\frac{168}{5}\sqrt{2}\,cm\simeq 47{,}52\,cm$;
- $2\,p_{AHQK}=2(KQ+QH)=2(k_3\cdot AB+k_2\cdot AC)=2(\frac{7}{10}\cdot 16\sqrt{2}+\frac{3}{10}\cdot 12\sqrt{2})=\frac{148}{5}\sqrt{2}\,cm\simeq 59{,}2\,cm$;
- $S_{BQH}=k_2^2 S_{ABC}=\frac{9}{100}\cdot 384=\frac{864}{25}\,cm^2=34{,}56\,cm^2$;
- $S_{CKQ}=k_3^2 S_{ABC}=\frac{49}{100}\cdot 384=\frac{4704}{25}\,cm^2=188{,}16\,cm^2$;
- $S_{AHQK}=S_{ABC}-S_{BQH}-S_{CKQ}=384-34{,}56-188{,}16=161{,}28\,cm^2$.

Osservazioni:

- Era possibile risolvere il problema anche calcolando le misure di tutti i segmenti che compaiono in figura. L'uso del rapporto di similitudine, tuttavia, ci permette di ottenere dei risultati anche quando non conosciamo le misure dei lati corrispondenti in una similitudine, ma soltanto il loro rapporto.
- Ricordiamo che, a meno che non sia richiesto diversamente, nei compiti di matematica si cercano i risultati esatti, mentre nei compiti di fisica (o delle altre scienze applicate) sono richiesti dei risultati approssimati (con il corretto numero di cifre significative). In ogni caso, è necessario indicare se il risultato fornito è esatto, (e quindi utilizzare il segno di uguaglianza), o approssimato (utilizzando il simbolo di uguaglianza approssimata).
- Oltre all'ambiguità precedente, credo che i risultati dei perimetri forniti dal libro di testo siano errati (probabilmente perché usa il valore 2 anziché $\sqrt{2}$).



Il triangolo AQB è rettangolo, in quanto l'angolo alla circonferenza $A\hat{Q}B$ insiste su una semicirconferenza.

Poniamo $QR=HB=x \Rightarrow AH=20-x$.

Applichiamo il primo teorema di Euclide:

$$AQ^2=AB\cdot AH=20(20-x) \Rightarrow AQ=\sqrt{20(20-x)}$$.

Impostiamo l'equazione:

$$10\,QR+3\,AQ=120 \Rightarrow 3\sqrt{20(20-x)}=120-10\,x$$.

Prima di elevare al quadrato, dobbiamo imporre che $120-10\,x\geq 0 \Rightarrow 0\leq x\leq 12$.

In caso contrario, dovremmo verificare che le soluzioni trovate rendano vera l'equazione irrazionale di partenza.

Quindi: $9(400-20\,x)=14.400-2.400\,x+100\,x^2 \Rightarrow 100\,x^2-2.220\,x+10.800=0 \Rightarrow$

$$5\,x^2-111\,x+340=0 \Rightarrow x=\frac{111\pm 39}{10} \Rightarrow x_1=7{,}2 \quad acc\,; \quad x_2=15 \quad non\,acc.$$

Ricaviamo pertanto: $AQ=\sqrt{20(20-7.2)}=16\,cm$.

- $R\hat{Q}T=B\hat{A}T$ perché angoli corrispondenti formati dalle rette parallele RQ e AB tagliate dalla trasversale AT;
- $B\hat{A}T=R\hat{B}Q$ perché angoli alla circonferenza che insistono sull'arco BQ.

Quindi i triangoli QTR e QBR sono simili per il primo criterio in quanto hanno:

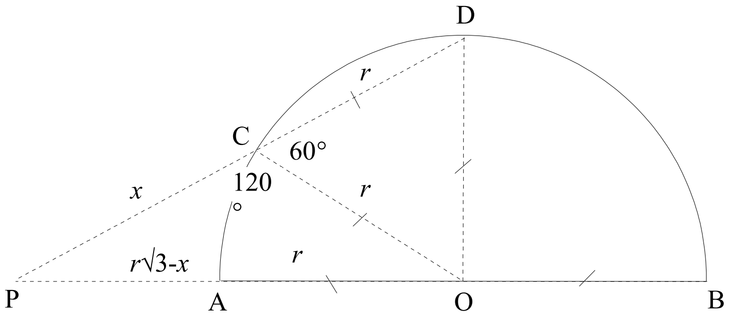
- $Q\hat{R}T=Q\hat{R}B=90°$;
- $R\hat{Q}T=R\hat{B}Q$ per la proprietà transitiva dell'uguaglianza.

Il rapporto di similitudine è il rapporto tra le lunghezze di due lati corrispondenti: $k=\frac{QR}{BR}$.

Poiché $BR=HQ$, ne calcoliamo la misura applicando il secondo teorema di Euclide al triangolo rettangolo ABQ: $HQ^2=AH\cdot BH \Rightarrow HQ=\sqrt{12{,}8\cdot 7{,}2}=9{,}6\,cm$.

Quindi: $k=\frac{QR}{BR}=\frac{7{,}2}{9{,}6}=0{,}75=\frac{3}{4}$.

<u>2^A</u> *- Esercizio n° 249 pag. G 440*



Il testo ci informa che $PA+PC=r\sqrt{3}$.

Il perimetro del triangolo PCO è:

$PA+PC+AO+CO=$

$=r\sqrt{3}+2r=r(2+\sqrt{3})$.

Il triangolo OCD è equilatero, in quanto i tre lati sono congruenti al raggio *r*.

Ne segue che: $O\hat{C}D=60°$ $\Rightarrow$ $O\hat{C}P=120°$.

Poniamo $PC=x$ $\Rightarrow$ $PA=r\sqrt{3}-x$.

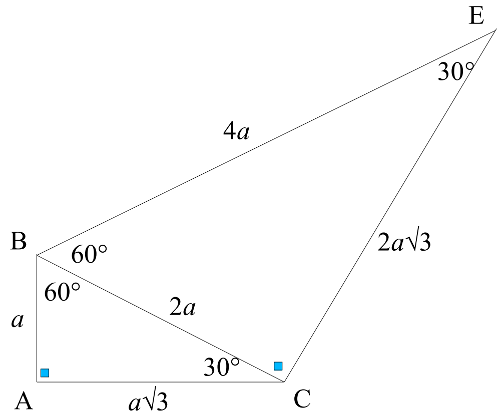
Applichiamo il teorema delle secanti:

$PC\cdot PD=PA\cdot PB$ $\Rightarrow$ $x(x+r)=(r\sqrt{3}-x)(r\sqrt{3}-x+2r)$ $\Rightarrow$

$x^2+rx=3r-2rx\sqrt{3}+x^2+2r^2\sqrt{3}-2rx$ $\Rightarrow$ $(3+2\sqrt{3})rx=(3+2\sqrt{3})r^2$ $\Rightarrow$ $x=r$.

Poiché $PC=OC=r$, il triangolo PCO è isoscele, quindi: $C\hat{P}O=C\hat{O}P=30°$.

<u>2^A</u> - Esercizio n° 250 pag. G 440



Poiché il triangolo rettangolo ABC ha l'ipotenusa di lunghezza doppia rispetto ad un cateto, è metà di un triangolo equilatero, e quindi ha gli angoli di ampiezze 30°, 60°, 90°.

Pertanto: $AC=\frac{\sqrt{3}}{2}BC=a\sqrt{3}$.

$E\hat{C}B=120°-30°=90° \Rightarrow C\hat{E}B=30°$.

Quindi anche il triangolo BCE ha gli angoli di ampiezze 30°, 60°, 90°, e pertanto è simile al triangolo ABC per il primo criterio, con rapporto di similitudine:

$k=\frac{AB}{EC}=\frac{1}{2}$.

Ricaviamo: $BE=2BC=4a$; $CE=\frac{\sqrt{3}}{2}BE=2\sqrt{3}a$.

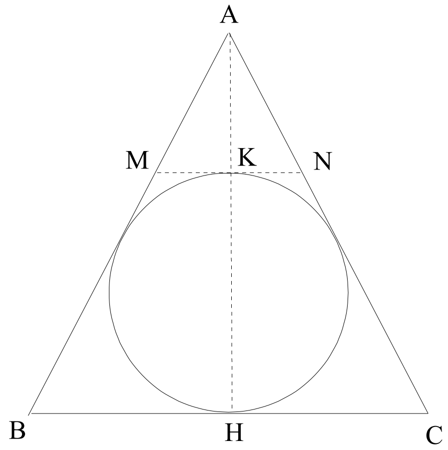
Il raggio della circonferenza inscritta nel triangolo ABC misura:

$$r_{in}=\frac{S_{ABC}}{p_{ABC}}=\frac{a^2\sqrt{3}/2}{a(3+\sqrt{3})/2}=a\cdot\frac{\sqrt{3}}{3+\sqrt{3}}\cdot\frac{3-\sqrt{3}}{3-\sqrt{3}}=\frac{\sqrt{3}-1}{2}a$$.

$$S_{ABEC}=S_{ABC}+S_{BCE}=S_{ABC}+4S_{ABC}=\frac{5}{2}a^2\sqrt{3}$$.

$$2p_{ABEC}=a+4a+2a\sqrt{3}+a\sqrt{3}=(5+3\sqrt{3})a$$.

$$\frac{S_{ABC}}{S_{BCE}}=k^2=\frac{1}{4}$$.



Poniamo $AH = x \Rightarrow BC = \frac{16}{15} x$.

Applichiamo il teorema di Pitagora al triangolo rettangolo ACH: $AH^2 + HC^2 = AC^2 \Rightarrow$

$$x^2 + \frac{64}{225} x^2 = 289 \Rightarrow x^2 = 225 \Rightarrow x = 15 \quad .$$

Quindi: $AH = 15\,cm$; $BC = 16\,cm$.

$$S_{ABC} = \frac{BC \cdot AH}{2} = \frac{16 \cdot 15}{2} = 120\,cm^2 \quad .$$

Il raggio della circonferenza inscritta misura:

$$r_{in} = \frac{S_{ABC}}{p_{ABC}} = \frac{120\,cm^2}{25\,cm} = 4{,}8\,cm \Rightarrow l_{circ} = 2\pi r_{in} = \frac{48}{5} \pi\,cm \quad .$$

I triangoli ABC e AMN sono simili per il primo criterio,in quanto hanno l'angolo $\hat{A}$ in comune e gli angoli $A\hat{B}C$ e $A\hat{M}N$ congruenti perché angoli corrispondenti formati dalle rette parallele BC e MN tagliate dalla trasversale AB.

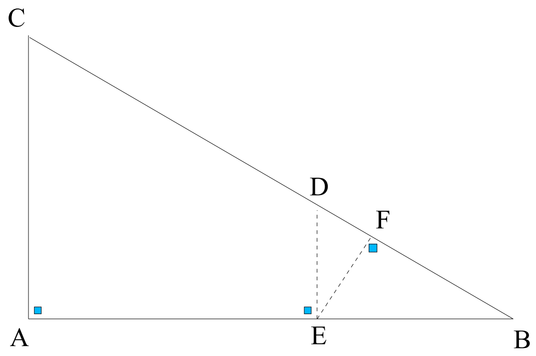
Il loro rapporto di similitudine è $k = \frac{AK}{AH} = \frac{AH - 2r_{in}}{AH} = \frac{15 - 9{,}6}{15} = 0{,}36$.

$$2\,p_{AMN} = k\,2\,p_{ABC} = 0{,}36 \cdot 50 = 18\,cm \quad .$$

Ricordiamo che i lati del triangolo equilatero e del quadrato inscritti in una circonferenza misurano rispettivamente $l_3 = r\sqrt{3}$ e $l_4 = r\sqrt{2}$, per cui il rapporto delle aree vale:

$$\frac{S_3}{S_4} = \frac{\sqrt{3}/4\, l_3^2}{l_4^2} = \frac{\sqrt{3}/4 \cdot 3 r^2}{2 r^2} = \frac{3}{8}\sqrt{3} \quad .$$

<u>2^A</u> *- Esercizio n° 253 pag. G 440*



Applichiamo il teorema di Pitagora:

$$BC=\sqrt{AB^2+AC^2}=\sqrt{24^2+45^2}=51\,cm \quad .$$

Quindi: $2\,p_{ABC}=24+45+51=120\,cm$;

$$S_{ABC}=\frac{AB\cdot AC}{2}=\frac{24\cdot 45}{2}=540\,cm^2 \quad .$$

I triangoli ABC e BDE sono simili per il primo criterio, in quanto hanno un angolo retto e l'angolo in B in comune.

Il loro rapporto di similitudine è $k_1=\frac{BD}{BC}=\frac{1}{3}$.

I triangoli BDE e DEF sono simili per il primo criterio, in quanto hanno un angolo retto e l'angolo in D in comune.

Il loro rapporto di similitudine è $k_2=\frac{DE}{BD}=\frac{AC/3}{BD}=\frac{8}{17}$.

Per la proprietà transitiva, anche i triangoli ABC e DEF sono simili.

Il loro rapporto di similitudine è $k_3=k_1\cdot k_2=\frac{8}{51}$.

$$S_{AEDC}=S_{ABC}-S_{EBD}=S_{ABC}-k_1^2 S_{ABC}=\frac{8}{9}S_{ABC}=\frac{8}{9}\cdot 540=480\,cm^2 \quad .$$

$$2\,p_{DEF}=k_3\cdot 2\,p_{ABC}=\frac{8}{51}\cdot 120=\frac{320}{17}\,cm \quad .$$

Anche il triangolo EBF è simile ad ABC con rapporto di similitudine: $k_4=\frac{BE}{BC}=\frac{AB/3}{BC}=\frac{5}{17}$.

Calcoliamo il raggio della circonferenza inscritta nel triangolo ABC:

$$r_{ABC}=\frac{S_{ABC}}{p_{ABC}}=\frac{540}{60}=9\,cm \quad .$$

Quindi il raggio della circonferenza inscritta nel triangolo EBF misura:

$$r_{EBF}=k_4 r_{ABC}=\frac{5}{17}\cdot 9=\frac{45}{17}\,cm \quad .$$

La lunghezza della circonferenza e l'area del cerchio inscritto nel triangolo EBF misurano perciò:

$$l_{EBF}=2\pi r_{EBF}=\frac{90}{17}\pi\,cm \quad ; \quad S_{EBF}=\pi r_{EBF}^2=\frac{2025}{289}\pi\,cm^2 \quad .$$