Il calcolo combinatorio è quella parte della matematica che risponde alla domanda "in quanti modi diversi si può verificare un certo evento o si può realizzare una determinata situazione?"

Esempi

- Una ragazza ha a disposizione tre magliette, due paia di pantaloni e tre paia di scarpe.
  In quanti modi diversi può vestirsi?
- Un insegnante di matematica si trova in una classe di 21 studenti.
  In quanti modi diversi può scegliere tre "volontari" per le interrogazioni?
- La password per accedere ad un dispositivo elettronico deve essere composta da tre lettere e due cifre. Quante sono le possibili password?

Osservazione: la domanda precedente è lievemente ambigua, in quanto non abbiamo precisato in maniera chiara cosa intendiamo per "modi diversi".

Nell'esempio dell'insegnante:

- sicuramente, la scelta di Paperino, Topolino, Pippo e quella di Paperino, Topolino, Pluto costituiscono due "modi diversi di scegliere i volontari, in quanto presentano (almeno) un elemento diverso;
- la scelta di Paperino, Topolino, Pippo e quella di Pippo, Paperino, Topolino devono essere considerate come diverse? Non è chiaro; dipende se l'insegnante vuole prendere in considerazione anche l'ordine di svolgimento delle interrogazioni;
- la scelta di Paperino, Paperino, Paperino può essere considerata come accettabile? Non è chiaro; dipende dalle intenzioni dell'insegnante (se accetta delle ripetizioni, ovvero di interrogare più volte di seguito la stessa persona o se vuole prima "finire il giro" delle interrogazioni).

Attenzione:

- a volte, il testo dell'esercizio specifica cosa dobbiamo intendere per “modi diversi” o “scelte diverse” (in particolare, se ci deve essere per forza qualche elemento differente, o se basta che l'ordine degli elementi sia differente; se gli elementi possono essere ripetuti o meno);
- più spesso, dobbiamo essere noi a dedurre dal contesto qual è la richiesta.

  Ad esempio, nel quesito sulle possibili password, è in genere sottinteso che l'ordine degli elementi (lettere e cifre) sia importante, e che tali elementi possano essere ripetuti.

Somme e prodotti.

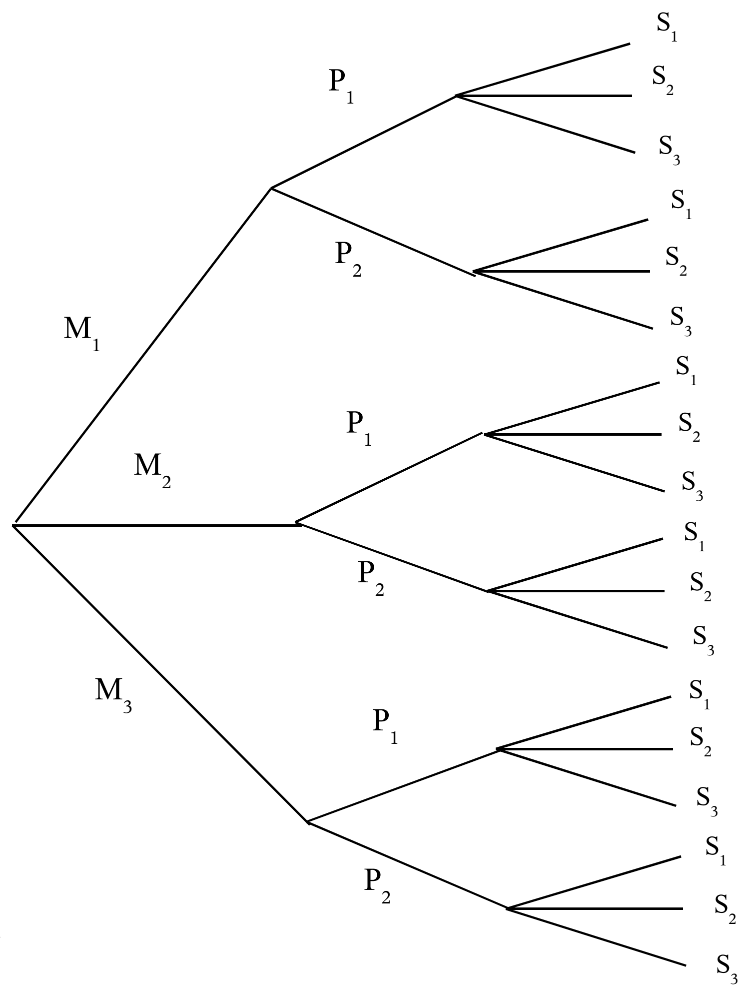
In genere, nel testo di un problema non ci viene chiesto in quanti modi può essere realizzata una determinata condizione, ma abbiamo a che fare con diverse condizioni, che possono essere collegate tra loro in diversi modi, i più frequenti dei quali sono la “E” (congiunzione logica) e la “O” (disgiunzione logica, spesso interpretata in senso esclusivo, come l' “AUT” latino).

Riprendiamo l'esempio della ragazza che ha a disposizione tre magliette, due paia di pantaloni e tre paia di scarpe.

Per decidere come vestirsi, dovrà quindi: scegliere la maglietta "E" scegliere i pantaloni "E" scegliere le scarpe.

Dal momento che si tratta della <u>congiunzione logica</u> di scelte "<u>indipendenti</u>" (in cui l'una non influenza l'altra), allora il numero di modi diversi in cui la ragazza potrà vestirsi sarà: $3 \cdot 2 \cdot 3 = 18$, corrispondente al <u>prodotto</u> del numero di "modi" in cui può essere effettuata ogni singola scelta.

Una giustificazione intuitiva è fornita dal diagramma ad albero in figura, in cui le varie "scelte" sono rappresentate come "rami" dell'albero, o percorsi alternativi.

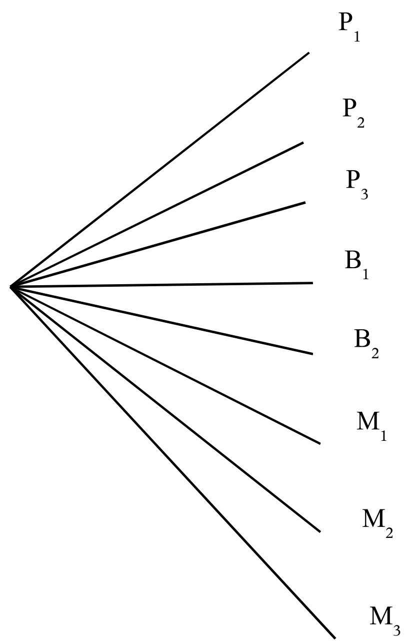


Supponiamo, invece, di doverci spostare da un luogo ad un altro, e di avere la scelta tra tre possibili percorsi a piedi, due in bicicletta e tre in motorino.

Dobbiamo quindi scegliere se andare a piedi "*O*" in bicicletta "*O*" in motorino.

Dal momento che si tratta della <u>disgiunzione logica</u> di scelte "<u>incompatibili</u>" l'una con l'altra (in quanto prendere uno dei mezzi esclude gli altri due), allora il numero di percorsi possibili sarà: $3+2+3=8$ corrispondente alla <u>somma</u> del numero di "modi" in cui può essere effettuata ogni singola scelta.

Anche in questo caso, una giustificazione intuitiva può essere fornita da un diagramma ad albero.



Proviamo a generalizzare.

Se dobbiamo compiere delle "scelte" S_1, S_2, ... , S_n, ciascuna delle quali può essere compiuta in un certo numero di "modi" m_1, m_2, ... , m_n, allora:

- la combinazione $S_1 \wedge S_2 \wedge \ldots \wedge S_n$, corrispondente alla congiunzione logica delle condizioni, può essere realizzata in $m_1 \cdot m_2 \cdot \ldots \cdot m_n$ modi diversi, purché le varie scelte siano "indipendenti", ovvero ognuna non influenzi il realizzarsi delle altre;
- la combinazione $S_1 \vee S_2 \vee \ldots \vee S_n$, corrispondente alla disgiunzione logica delle condizioni, può essere realizzata in $m_1 + m_2 + \ldots + m_n$ modi diversi, purché le varie scelte siano "incompatibili", ovvero si escludano a vicenda.

In maniera sintetica (anche se vaga ed imprecisa):

- <u>alla "E" corrisponde il prodotto</u>;
- <u>alla "O" corrisponde la somma</u>.

Disposizioni semplici

Riprendiamo l'esempio dell'insegnante che deve programmare le interrogazioni.

Supponiamo che la classe sia composta da 21 studenti, che l'insegnante voglia interrogarne uno al giorno, e che voglia programmare le interrogazioni per le prossime 5 lezioni, sentendo cinque persone diverse. Quindi l'insegnante ha:

- 21 modi di scegliere il primo studente;
- 20 modi di scegliere il secondo (perché non vuole richiamare il primo);
- 19 modi di scegliere il terzo;
- 18 modi di scegliere il quarto;
- 17 modi di scegliere il quinto.

Poiché le varie scelte sono collegate da una congiunzione logica ("E"), allora il numero di modi in cui l'insegnante può programmare le interrogazioni è:

$$21 \cdot 20 \cdot 19 \cdot 18 \cdot 17 = 2.441.880$$

(sì, nel calcolo combinatorio i risultati crescono in maniera inaspettata al crescere dei dati).

Generalizziamo l'esempio precedente.

Abbiamo un insieme composto da un numero n di elementi, ne vogliamo scegliere k (tutti diversi tra loro) e li vogliamo ordinare. Avremo quindi:

- n modi di scegliere il primo elemento;
- $n-1$ modi di scegliere il secondo elemento;
- $n-2$ modi di scegliere il terzo elemento;
- ...
- $n-k+1$ modi di scegliere il k-simo elemento.

Poiché le varie scelte sono collegate tra loro da una congiunzione logica ("E"), allora il numero di modi in cui possiamo scegliere e ordinare k elementi, tutti diversi tra loro, in un insieme che ne contiene n è: $n\cdot(n-1)\cdot(n-2)\cdot\ldots\cdot(n-k+1)$.

Ci sarebbe qualcosa da dire sul fatto che in questo caso le scelte non sono indipendenti tra loro, ma ne riparleremo meglio parlando di probabilità.

Disposizioni con ripetizione

Cosa cambia se l'insegnante vuole scegliere e ordinare i 5 alunni, ma questi non devono necessariamente essere diversi (ovvero, uno stesso studente può essere interrogato più volte)?

Non molto. L'insegnante ha:

- 21 modi di scegliere il primo studente;
- ancora 21 modi di scegliere il secondo studente (che può anche essere lo stesso);
- 21 modi di scegliere il terzo studente;
- 21 modi di scegliere il quarto studente;
- 21 modi di scegliere il quinto studente.

Poiché le varie scelte sono collegate da una congiunzione logica ("E"), allora il numero di modi in cui l'insegnante può programmare le interrogazioni è: $21 \cdot 21 \cdot 21 \cdot 21 \cdot 21 = 21^5 = 4.084.101$.

Anche questo esempio può essere facilmente generalizzato.

Se abbiamo un insieme composto da un numero n di elementi, ne vogliamo <u>scegliere k (non necessariamente diversi tra loro), e li vogliamo ordinare</u>, avremo:

- n modi di scegliere il primo elemento;
- n modi di scegliere il secondo elemento;
- n modi di scegliere il terzo elemento;
- ...
- n modi di scegliere il k-simo elemento.

Poiché le varie scelte sono collegate tra loro da una congiunzione logica ("E"), allora il <u>numero di modi in cui possiamo scegliere e ordinare k elementi, non necessariamente diversi tra loro, in un insieme che ne contiene n</u> è:

$$\underbrace{n \cdot n \cdot \ldots \cdot n}_{k\,\text{fattori}} = n^k \; .$$

Sì, in questo caso le scelte sono veramente indipendenti tra loro.

Permutazioni semplici

Supponiamo ora che l'insegnante abbia già scelto 5 alunni, e voglia semplicemente calcolare il numero di “liste” o ordinamenti che può ottenere con i loro nomi. L'insegnante può:

- scegliere il primo nome dell'elenco in 5 modi;
- scegliere il secondo nome dell'elenco in 4 modi;
- scegliere il terzo nome dell'elenco in 3 modi;
- scegliere il quarto nome dell'elenco in 2 modi;
- scegliere il quinto nome dell'elenco in un solo modo.

Pertanto l'insegnante può ottenere un numero di “elenchi” pari a: $5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 120$.

Il prodotto di un numero naturale per i numeri naturali che lo precedono (fino ad 1) viene chiamato fattoriale del numero, e si indica facendo seguire il numero da un punto esclamativo.

Quindi il risultato che abbiamo trovato può essere scritto $5! = 120$.

In generale, se abbiamo un insieme composto da k elementi tutti diversi tra loro e li vogliamo ordinare, abbiamo:

- k modi di scegliere il primo elemento;
- $k-1$ modi di scegliere il secondo elemento;
- $k-2$ modi di scegliere il terzo elemento;
- ...
- 1 modo di scegliere il k-simo elemento.

Poiché le varie scelte sono collegate tra loro da una congiunzione logica ("E"), allora il numero di modi in cui possiamo ordinare k elementi diversi tra loro è: $k\cdot(k-1)\cdot(k-2)\ldots\cdot 1=k!$.

Combinazioni semplici

Supponiamo ora che l'insegnante voglia ancora scegliere 5 studenti in una classe che ne contiene 21, ma non voglia ordinarli (magari perché gli studenti verranno interrogati insieme, oppure perché devono formare un gruppo che presenterà una relazione o parteciperà ad una conferenza): in quanti modi può farlo?

In questo caso non abbiamo un procedimento diretto per calcolare il numero di scelte possibili, ma dobbiamo arrivarci combinando i due risultati precedenti.

Riprendiamo il problema che abbiamo risolto inizialmente, che richiedeva di:

scegliere 5 studenti nel gruppo di 21 “E” ordinare i 5 studenti scelti.

Avendo due condizioni collegate da una congiunzione logica, applichiamo la regola del prodotto:

$$\boxed{\begin{array}{c}\text{n° modi di scegliere e}\\ \text{ordinare 5 elementi da}\\ \text{un gruppo di 21}\end{array}} = \boxed{\begin{array}{c}\text{n° modi di scegliere}\\ \text{5 elementi da un}\\ \text{gruppo di 21}\end{array}} \times \boxed{\begin{array}{c}\text{n° modi di}\\ \text{ordinare i 5}\\ \text{elementi scelti}\end{array}}$$

da cui, invertendo la formula:

$$\boxed{\begin{array}{c}\text{n° modi di scegliere}\\ \text{5 elementi da un}\\ \text{gruppo di 21}\end{array}} = \frac{\boxed{\begin{array}{c}\text{n° modi di scegliere e ordinare 5}\\ \text{elementi da un gruppo di 21}\end{array}}}{\boxed{\begin{array}{c}\text{n° modi di ordinare i 5}\\ \text{elementi scelti}\end{array}}}$$

Ora è sufficiente riprendere i risultati precedenti per ottenere il risultato cercato:

$$\text{n° modi di scegliere 5 elementi da un gruppo di 21} = \frac{21 \cdot 20 \cdot 19 \cdot 18 \cdot 17}{5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1} = 20.349 \quad .$$

Osservazioni:

- per come è stato definito, il risultato deve essere un numero intero; un eventuale risultato decimale indica un errore nei calcoli o nel ragionamento;
- quando utilizziamo numeri un po' più grandi, è preferibile prima ridurre la frazione ai minimi termini (o comunque semplificarla), e solo dopo svolgere i calcoli, in maniera da non superare i limiti della calcolatrice.

Esprimiamo anche l'ultimo esempio in forma generale.

In quanti modi possiamo scegliere (senza ordinarli) k elementi da un insieme che ne contiene n?

Consideriamo prima il problema di scegliere k elementi e ordinarli; dobbiamo quindi:

scegliere k elementi da un insieme che ne contiene n “E” ordinare i k elementi scelti.

Avendo una congiunzione logica, vale la regola del prodotto:

$$\boxed{\text{n}^{\circ}\text{ modi di scegliere e ordinare k elementi da un insieme di n elementi}} = \boxed{\text{n}^{\circ}\text{ modi di scegliere k elementi da un insieme di n elementi}} \times \boxed{\text{n}^{\circ}\text{ modi di ordinare i k elementi scelti}}$$

da cui, invertendo la formula:

$$\boxed{\text{n}^{\circ}\text{ modi di scegliere k elementi da un insieme di n elementi}} = \frac{\boxed{\text{n}^{\circ}\text{ modi di scegliere e ordinare k elementi da un insieme di n elementi}}}{\boxed{\text{n}^{\circ}\text{ modi di ordinare i k elementi scelti}}}$$

Utilizzando i risultati precedenti, ricaviamo:

$$\begin{matrix} \text{n° modi di scegliere } k \text{ elementi} \\ \text{da un insieme di } n \text{ elementi} \end{matrix} = \frac{n\cdot(n-1)\cdot(n-2)\cdot\ldots\cdot(n-k+1)}{k!} .$$

Questa è la formula più pratica da utilizzare per calcolare un risultato numerico.

In una dimostrazione generale, è più comodo moltiplicare num. e den. per

$(n-k)!=(n-k)\cdot(n-k-1)\cdot(n-k-2)\cdot\ldots\cdot1$, ottenendo quindi:

$$\begin{matrix} \text{n° modi di scegliere } k \text{ elementi} \\ \text{da un insieme di } n \text{ elementi} \end{matrix} = \frac{n!}{k!(n-k)!} .$$

Per questa quantità viene anche utilizzato il seguente simbolo:

$$\binom{n}{k}=\frac{n!}{k!(n-k)!}$$

che si legge "n su k", e che viene chiamata "coefficiente binomiale" (infatti il libro di testo ti spiegherà che questi numeri compaiono nel famoso triangolo di Tartaglia, che fornisce i coefficienti da utilizzare nello sviluppo delle potenze di un binomio).

Non resta che introdurre la terminologia "ufficiale".

- Il numero di modi in cui possiamo <u>scegliere e ordinare k elementi, tutti diversi tra loro</u>, in un insieme che ne contiene n viene chiamato numero di <u>disposizioni semplici di n elementi di classe k</u>:

  $D_{n,k} = n \cdot (n-1) \cdot (n-2) \cdot \ldots \cdot (n-k+1)$.

- Il numero di modi in cui possiamo <u>scegliere e ordinare k elementi, non necessariamente diversi tra loro</u>, in un insieme che ne contiene n viene chiamato numero di <u>disposizioni con ripetizione di n elementi di classe k</u>: $D'_{n,k} = n^k$;

- Il numero di modi in cui possiamo <u>ordinare k elementi (già scelti) diversi tra loro</u> viene chiamato numero di <u>permutazioni semplici di k elementi</u>: $P_k = n \cdot (n-1) \cdot (n-2) \ldots \cdot 1 = k!$;

- Il numero di modi in cui possiamo scegliere, senza ordinarli, k elementi diversi in un insieme che ne contiene n viene chiamato numero di <u>combinazioni semplici di n elementi di classe k</u>:

$$C_{n.k} = \frac{D_{n,k}}{P_k} = \binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!} = \frac{n \cdot (n-1) \cdot (n-2) \cdot \ldots \cdot (n-k+1)}{k!} \quad .$$