Es. n. 214 pag. 810

Semplifica la seguente espressione: $tg(\frac{\pi}{4}-\frac{\alpha}{2})-tg(\frac{\pi}{4}+\frac{\alpha}{2})-tg\,\alpha$.

Svolgimento. Primo metodo

Utilizzo le formule di addizione e sottrazione della tangente:

$$\frac{tg(\pi/4)-tg(\alpha/2)}{1+tg(\pi/4)tg(\alpha/2)}-\frac{tg(\pi/4)+tg(\alpha/2)}{1-tg(\pi/4)tg(\alpha/2)}-tg\,\alpha=$$

$$\frac{1-tg(\alpha/2)}{1+tg(\alpha/2)}-\frac{1+tg(\alpha/2)}{1-tg(\alpha/2)}-tg\,\alpha=$$

$$\frac{(1-tg\,\alpha/2)^2-(1+tg\,\alpha/2)^2}{1-tg^2\alpha/2}-tg\,\alpha=$$

$$\frac{-4\,tg\,\alpha/2}{1-tg^2\alpha/2}-tg\,\alpha$$

Applico la formula parametrica per la tangente: $tg\,\alpha=\frac{2t}{1-t^2}$ con $t=tg\frac{\alpha}{2}$:

$$-2\,tg\,\alpha-tg\,\alpha=-3\,tg\,\alpha \quad .$$

Svolgimento. Secondo metodo

Osservo che $tg(\frac{\pi}{4}\pm\frac{\alpha}{2})=tg(\frac{\pi/2\pm\alpha}{2})$ e applico la formula di bisezione della tangente:

$$tg(\frac{\pi/2-\alpha}{2})-tg(\frac{\pi/2+\alpha}{2})-tg\,\alpha=$$

$$\frac{sen(\pi/2-\alpha)}{1+cos(\pi/2-\alpha)}-\frac{sen(\pi/2+\alpha)}{1+cos(\pi/2+\alpha)}-tg\,\alpha$$

Applico le formule degli archi associati:

$$\frac{cos\,\alpha}{1+sen\,\alpha}-\frac{cos\,\alpha}{1-sen\,\alpha}-tg\,\alpha=$$

$$\frac{cos\,\alpha-sen\,\alpha\,cos\,\alpha-cos\,\alpha-sen\,\alpha\,cos\,\alpha}{1-sen^2\alpha}-tg\,\alpha=$$

$$-\frac{2\,sen\,\alpha\,cos\,\alpha}{cos^2\alpha}-tg\,\alpha=-2\,tg\,\alpha-tg\,\alpha=-3\,tg\,\alpha \quad .$$

Es. n. 221 pag. 810

Verifica la seguente identità: $ctg^2 \frac{\alpha}{2} = 2\,ctg\,\alpha + tg\,\frac{\alpha}{2}$.

Svolgimento

Opero sul 1° membro: $ctg^2 \frac{\alpha}{2} = \frac{1}{tg^2\,\alpha/2} = \frac{1+cos\,\alpha}{1-cos\,\alpha}$.

Opero sul 2° membro:

$$4\frac{cos\,\alpha}{sen\,\alpha} \cdot \frac{1}{sen\,\alpha} + \frac{1-cos\,\alpha}{1+cos\,\alpha} = \frac{4\,cos\,\alpha}{1-cos^2\,\alpha} + \frac{1-cos\,\alpha}{1+cos\,\alpha} = \frac{4\,cos\,\alpha + (1-cos\,\alpha)^2}{1-cos^2\,\alpha} =$$

$$\frac{(1+cos\,\alpha)^2}{1-cos^2\,\alpha} = \frac{1+cos\,\alpha}{1-cos\,\alpha} \quad \text{c.v.d.}$$

Ho applicato ad entrambi i membri la formula di bisezione della tangente (quella irrazionale, grazie alla presenza dei quadrati).

Es. n. 222 pag. 810

Verifica la seguente identità: $\dfrac{sen\,\alpha/2\,cos\,\alpha/2}{cos\,\alpha}=4\,ctg\,\alpha\cdot csc\,\alpha+tg^2\dfrac{\alpha}{2}$.

Svolgimento

Opero sul 1° membro: $\dfrac{1/2\,sen\,\alpha}{cos\,\alpha}-\dfrac{1-cos\,\alpha}{2}=\dfrac{1}{2}\dfrac{sen\,\alpha}{cos\,\alpha}-\dfrac{1-cos\,\alpha}{2}$.

Opero sul 2° membro: $\dfrac{1}{2}\dfrac{sen\,\alpha}{cos\,\alpha}-\dfrac{1-cos\,\alpha}{sen\,\alpha}\cdot\dfrac{sen\,\alpha}{2}=\dfrac{1}{2}\dfrac{sen\,\alpha}{cos\,\alpha}-\dfrac{1-cos\,\alpha}{2}$ c.v.d.

Ho applicato ad entrambi i membri la formula di bisezione della tangente (questa volta una di quelle razionali).

Es. n. 223 pag. 810

Verifica la seguente identità: $\frac{1+sen\,\alpha}{cos\,\alpha}=\frac{ctg\,\alpha/2+1}{ctg\,\alpha/2-1}$.

Svolgimento

Parto dal 1° membro: $\frac{1+sen\,\alpha}{cos\,\alpha}$.

Applico le formule di duplicazione: $\frac{1+2\,sen\,\alpha/2\,cos\,\alpha/2}{cos^2\alpha/2-sen^2\alpha/2}$.

Applico la 1^ rel fond: $\frac{cos^2\alpha/2+sen^2\alpha/2+2\,sen\,\alpha/2\,cos\,\alpha/2}{cos^2\alpha/2-sen^2\alpha/2}$.

Scompongo: $\frac{(cos\,\alpha/2+sen\,\alpha/2)^2}{(cos\,\alpha/2+sen\,\alpha/2)(cos\,\alpha/2-sen\,\alpha/2)}$.

Semplifico: $\frac{cos\,\alpha/2+sen\,\alpha/2}{cos\,\alpha/2-sen\,\alpha/2}$.

Divido num. e den. per $sen\,\alpha/2$: $\frac{ctg\,\alpha/2+1}{ctg\,\alpha/2-1}$ c.v.d.