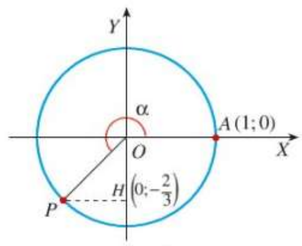
1. In un settore circolare di raggio r, il perimetro del settore è il quadruplo della lunghezza dell'arco.

   Determina l'area del settore.

2. Calcola $sen\,\alpha$ e $cos\,\alpha$ sapendo che $tg\,\alpha=\frac{24}{7}$ e $0<\alpha<\frac{\pi}{2}$.



3. Calcola $\frac{2\cos\alpha+sen\,\alpha}{tg\,\alpha}$, dove α è l'angolo indicato in figura.

4. Verifica la seguente identità: $tg\,\theta+\frac{2}{tg\,\theta}=\frac{sen^2\theta+2\cos^2\theta}{sen\,\theta\cos\theta}$.

5. Scrivi l'equazione della retta passante per il punto $P(0,-4)$ e che forma con il semiasse positivo delle ascisse un angolo α tale che $sen\,\alpha=3/5$ e $0<\alpha<\pi/2$.

6. Ricava l'equazione cartesiana della curva di equazioni parametriche $\begin{cases} x=3\cos\theta \\ y=4\,sen\,\theta \end{cases}$.

   Determina le sue caratteristiche principali.

7. Riduci al primo quadrante e calcola: $\frac{\cos 330°}{sen\,120°}+\frac{sen^2(-150°)\cdot sen\,210°}{\cos 420°}$.

8. Traccia il grafico della curva di equazione $y=\frac{3}{2}\cos(\frac{3}{2}x+\frac{\pi}{4})-1$.

   Descrivi le principali caratteristiche della curva ottenuta.

<u>4^F</u> *- Correzione compito n°1a*

1. Imponiamo: $2r+\alpha r=4\alpha r \Rightarrow \alpha=\frac{2}{3}rad$. Quindi: $A_{sett}=\frac{1}{2}\alpha r^2=\frac{1}{3}r^2$.
2. Mettiamo a sistema la prima e la seconda relazione fondamentale:

   $$\begin{cases} sen^2\alpha+cos^2\alpha=1 \\ \frac{sen\,\alpha}{cos\,\alpha}=\frac{24}{7} \Rightarrow sen\,\alpha=\frac{24}{7}cos\,\alpha \end{cases} \Rightarrow \frac{576}{49}cos^2\alpha+cos^2\alpha=1 \Rightarrow cos^2\alpha=\frac{49}{625} \Rightarrow$$

   $cos\,\alpha=\frac{7}{25} \Rightarrow sen\,\alpha=\frac{24}{7}\cdot\frac{7}{25}=\frac{24}{25}$. I segni sono positivi per le limitazioni su α.
3. La figura fornisce $sen\,\alpha=y_P=-\frac{2}{3}$.

   Dalla 1^ rel. fond. ricaviamo: $cos\,\alpha=-\sqrt{1-sen^2\alpha}=-\sqrt{1-\frac{4}{9}}=-\frac{\sqrt{5}}{3}$,

   e dalla 2^ rel. fond: $tg\,\alpha=\frac{sen\,\alpha}{cos\,\alpha}=\frac{-2/3}{-\sqrt{5}/3}=\frac{2}{\sqrt{5}}$.

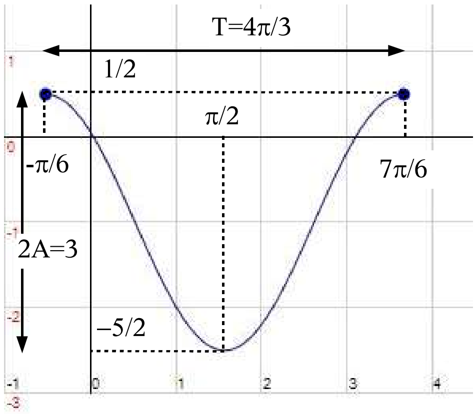
   Quindi: $\frac{2\,cos\,\alpha+sen\,\alpha}{tg\,\alpha}=(-\frac{2\sqrt{5}}{3}-\frac{2}{3})\cdot\frac{\sqrt{5}}{2}=-\frac{5+\sqrt{5}}{3}$.
4. Operiamo sul secondo membro: $\frac{sen^2\theta+2\,cos^2\theta}{sen\,\theta\,cos\,\theta}=\frac{sen\,\theta}{cos\,\theta}+2\frac{cos\,\theta}{sen\,\theta}=tg\,\theta+\frac{2}{tg\,\theta}$ c.v.d.
5. Calcoliamo: $cos\,\alpha=\sqrt{1-sen^2\alpha}=\sqrt{1-(\frac{3}{5})^2}=\frac{4}{5} \Rightarrow m=tg\,\alpha=\frac{sen\,\alpha}{cos\,\alpha}=\frac{3/5}{4/5}=\frac{3}{4}$.

   L'equazione della retta è quindi: $y=\frac{3}{4}x-4$.
6. Ricaviamo $\begin{cases} cos\,\theta=x/3 \\ sen\,\theta=y/4 \end{cases}$ e sostituiamo nella 1^ rel. fond: $cos^2\theta+sen^2\theta=1 \Rightarrow \frac{x^2}{9}+\frac{y^2}{16}=1$.

   Si tratta quindi di un'ellisse di centro l'origine degli assi e semiassi $a=3$, $b=4$.
7. $cos\,330°=cos\,30°=\sqrt{3}/2$; $sen\,120°=sen\,60°=\sqrt{3}/2$; $sen(-150°)=-sen\,30°=-1/2$;
   $sen\,210°=-sen\,30°=-1/2$; $cos\,420°=cos\,60°=1/2$.

   Ricaviamo quindi: $\frac{\sqrt{3}/2}{\sqrt{3}/2}+\frac{(-1/2)^2\cdot(-1/2)}{1/2}=1-\frac{1}{4}=\frac{3}{4}$.
8. Possiamo partire dal grafico della funzione $y=cos\,x$ e applicarvi nell'ordine:
   - una contrazione orizzontale di un fattore $2/3$;
   - una traslazione orizzontale di $\pi/6$ verso sx;
   - una dilatazione verticale di un fattore $3/2$;
   - una traslazione verticale di una unità verso il basso.

Otteniamo così una curva avente periodo $T=\frac{2\pi}{\omega}=\frac{2\pi}{3/2}=\frac{4}{3}\pi$ e ampiezza $A=\frac{3}{2}$, che compie un'oscillazione completa tra i punti $A(-\frac{\pi}{6},\frac{1}{2})$ e $B(\frac{7}{6}\pi,\frac{1}{2})$, che sono dei massimi per la funzione, ed ha un minimo nel punto $C(\frac{\pi}{2},-\frac{5}{2})$.

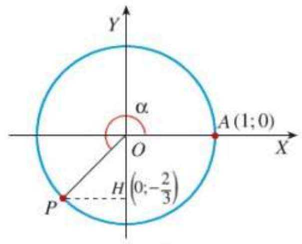


1. Supponi che la Terra sia una sfera di raggio $R=6.371\,km$. Due località si trovano sullo stesso meridiano e la loro distanza (sulla superficie della Terra) è $d=570\,km$.

   Determina la differenza delle loro latitudini.

2. Calcola $sen\,\alpha$ e $cos\,\alpha$ sapendo che $tg\,\alpha=\frac{7}{24}$ e $0<\alpha<\frac{\pi}{2}$.

3. Calcola $\frac{1}{cos\,\alpha}-\frac{1}{sen\,\alpha}$, dove α è l'angolo indicato in figura.



4. Verifica la seguente identità: $\frac{2}{sen\,x}=\frac{sen\,x}{1+cos\,x}+\frac{1+cos\,x}{sen\,x}$.

5. Scrivi l'equazione della retta passante per il punto $P(0,5)$ e che forma con il semiasse positivo delle ascisse un angolo α tale che $cos\,\alpha=4/5$ e $0<\alpha<\pi/2$.

6. Ricava l'equazione cartesiana della curva di equazioni parametriche $\begin{cases} x=4\,cos\,\theta \\ y=3\,sen\,\theta \end{cases}$.

   Determina le sue caratteristiche principali.

7. Riduci al primo quadrante e calcola: $\sqrt{\frac{1-sen\,120°}{1-sen\,300°}}+\sqrt{\frac{1+cos(-60°)}{1+cos\,120°}}$.

8. Traccia il grafico della curva di equazione $y=\frac{3}{2}sen(\frac{3}{2}x+\frac{\pi}{4})-1$.

   Descrivi le principali caratteristiche della curva ottenuta.

4^F - Correzione compito n°1b

1. $\alpha = \frac{d}{R} \simeq \frac{570\, km}{6.371\, km} \simeq 0{,}0895\, rad \simeq 10{,}3°$.

2. Mettiamo a sistema la prima e la seconda relazione fondamentale:

$$\begin{cases} sen^2 \alpha + cos^2 \alpha = 1 \\ \frac{sen\, \alpha}{cos\, \alpha} = \frac{7}{24} \Rightarrow sen\, \alpha = \frac{7}{24} cos\, \alpha \end{cases} \Rightarrow \frac{49}{576} cos^2 \alpha + cos^2 \alpha = 1 \Rightarrow cos^2 \alpha = \frac{576}{625} \Rightarrow$$

$cos\, \alpha = \frac{24}{25} \Rightarrow sen\, \alpha = \frac{7}{24} \cdot \frac{24}{25} = \frac{7}{25}$. I segni sono positivi per le limitazioni su α.

3. La figura fornisce $sen\, \alpha = y_P = -\frac{2}{3}$.

   Dalla 1^ rel. fond. ricaviamo: $cos\, \alpha = -\sqrt{1 - sen^2 \alpha} = -\sqrt{1 - \frac{4}{9}} = -\frac{\sqrt{5}}{3}$.

   Quindi: $\frac{1}{cos\, \alpha} - \frac{1}{sen\, \alpha} = -\frac{3}{\sqrt{5}} + \frac{3}{2} = \frac{3\sqrt{5} - 6}{2\sqrt{5}} = \frac{15 - 6\sqrt{5}}{10}$.

4. Operiamo sul secondo membro: $\frac{sen\, x}{1 + cos\, x} + \frac{1 + cos\, x}{sen\, x} = \frac{sen^2 x + (1 + cos\, x)^2}{sen\, x (1 + cos\, x)} =$

$\frac{sen^2 x + 1 + 2 cos\, x + cos^2 x}{sen\, x (1 + cos\, x)} = \frac{2 + 2 cos\, x}{sen\, x (1 + cos\, x)} = \frac{2(1 + cos\, x)}{sen\, x (1 + cos\, x)} = \frac{2}{sen\, x}$ c.v.d.

5. Calcoliamo: $sen\, \alpha = \sqrt{1 - cos^2 \alpha} = \sqrt{1 - (\frac{4}{5})^2} = \frac{3}{5} \Rightarrow m = tg\, \alpha = \frac{sen\, \alpha}{cos\, \alpha} = \frac{3/5}{4/5} = \frac{3}{4}$.

   L'equazione della retta è quindi: $y = \frac{3}{4} x + 5$.

6. Ricaviamo $\begin{cases} cos\, \theta = x/4 \\ sen\, \theta = y/3 \end{cases}$ e sostituiamo nella 1^ rel. fond: $cos^2 \theta + sen^2 \theta = 1 \Rightarrow \frac{x^2}{16} + \frac{y^2}{9} = 1$.

   Si tratta quindi di un'ellisse di centro l'origine degli assi e semiassi $a = 4$, $b = 3$.

7. $sen\, 120° = sen\, 60° = \sqrt{3}/2$; $sen\, 300° = -sen\, 60° = -\sqrt{3}/2$; $cos(-60°) = cos(60°) = 1/2$;

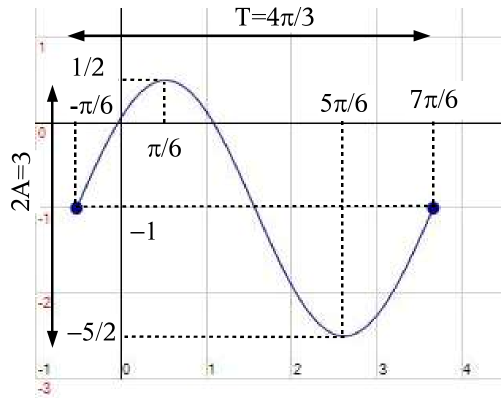
   $cos\, 120° = -cos\, 60° = -1/2$. Ricaviamo quindi:

$$\sqrt{\frac{1 - \sqrt{3}/2}{1 + \sqrt{3}/2}} + \sqrt{\frac{1 + 1/2}{1 - 1/2}} = \sqrt{\frac{2 - \sqrt{3}}{2 + \sqrt{3}}} + \sqrt{3} = \sqrt{\frac{(2 - \sqrt{3})^2}{(2 + \sqrt{3})(2 - \sqrt{3})}} + \sqrt{3} = 2 - \sqrt{3} + \sqrt{3} = 2 .$$

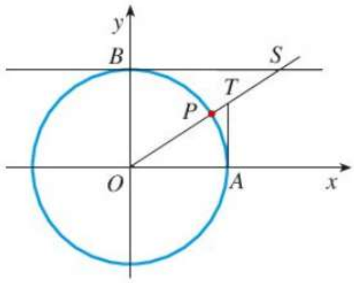
8. Possiamo partire dal grafico della funzione $y = sen\, x$ e applicarvi nell'ordine:
   - una contrazione orizzontale di un fattore $2/3$;
   - una traslazione orizzontale di $\pi/6$ verso sx;
   - una dilatazione verticale di un fattore $3/2$;

- una traslazione verticale di una unità verso il basso.

Otteniamo così una curva avente periodo $T=\frac{2\pi}{\omega}=\frac{2\pi}{3/2}=\frac{4}{3}\pi$ e ampiezza $A=\frac{3}{2}$, che compie un'oscillazione completa tra i punti $A(-\frac{\pi}{6},\frac{1}{2})$ e $B(\frac{7}{6}\pi,\frac{1}{2})$, ha un massimo nel punto $(\frac{\pi}{6},\frac{1}{2})$ ed un minimo in $(\frac{5}{6}\pi,-\frac{5}{2})$.



1. Sapendo che $sen\,\alpha = |sen\,210°|$, indica quali sono le possibili ampiezze dell'angolo α.
2. Sapendo che $tg\,\alpha = -1/3$ e che $-\pi/2 < \alpha < 0$, calcola $sen\,\alpha$.
3. Dato il punto $P(cos\,\alpha, sen\,\alpha)$ nel primo quadrante, traccia per $B(0,1)$ la parallela all'asse *x* e per $A(1,0)$ la parallela all'asse *y* fino ad incontrare rispettivamente in S ed in T il prolungamento di OT. Sapendo che $sen\,\alpha = 3/5$, calcola $\overline{ST}$.



4. La retta di equazione $5x - 12y - 1 = 0$ forma un angolo α con il semiasse positivo delle ascisse. Calcola $sen\,\alpha$.
5. La retta *r* è tangente alla circonferenza goniometrica nel punto $P(\sqrt{3}/2; 1/2)$. Calcola il coefficiente angolare della retta *r*.
6. Un settore circolare AOB di ampiezza α radianti e raggio $\overline{OA} = \overline{OB} = r$ ha area uguale al doppio del quadrato della lunghezza dell'arco AB. Determina l'ampiezza α e l'area *S* del settore.
7. Traccia il grafico della curva di equazione $y = -\frac{3}{4} sen(2x + \frac{3}{2}\pi)$.

   Spiega come puoi dedurlo da quello della curva di equazione $y = sen\,x$ e precisane in particolare il periodo, l'ampiezza e le coordinate del punto di intersezione con l'asse *y*.
8. Esprimi in funzione di $\cos\alpha$ e/o $sen\,\alpha$: $\frac{tg(\pi+\alpha) + tg\,\alpha}{sen(\pi+\alpha)} - \frac{1}{cos(\pi+\alpha)}$.
9. Verifica la seguente identità: $(sen\,\alpha + cos\,\alpha)^2 - 1 = \frac{2\,tg\,\alpha}{1 + tg^2\alpha}$.
10. Determina il dominio della funzione: $y = arc\,sen\frac{2x-3}{x-1}$.
11. Dimostra che $tg(arc\,cos\,2x) = \frac{\sqrt{1-4x^2}}{2x} \quad \forall x \neq 0$.

<u>4^A</u> - Correzione compito n°1

1. Sappiamo che $|sen\,210°|=|-1/2|=1/2$.

   Possiamo quindi avere: $\alpha=30°+k\,360°\ \vee\ \alpha=150°+k\,360°,\ k\in\mathbb{Z}$.

2. Sappiamo che $tg\,\alpha=\frac{sen\,\alpha}{\cos\alpha}=-\frac{1}{3}\ \Rightarrow\ \cos\alpha=-3\,sen\,\alpha$.

   Per la prima relazione fondamentale:

   $sen^2\alpha+\cos^2\alpha=1\ \Rightarrow\ sen^2\alpha+9\,sen^2\alpha=1\ \Rightarrow\ sen^2\alpha=1/10$.

   Dal momento che $-\pi/2<\alpha<0$, dobbiamo scegliere $sen\,\alpha=-\frac{1}{\sqrt{10}}$.

3. Poiché $sen\,\alpha=3/5$ e $0<\alpha<\pi/2$: $cos\,\alpha=\sqrt{1-sen^2\alpha}=4/5$.

   Dal triangolo rettangolo OAT vediamo che: $OT=\frac{OA}{cos\,\hat{O}}=\frac{1}{cos\,\alpha}=\frac{5}{4}$.

   Dal triangolo rettangolo OBS, invece: $OS=\frac{OB}{sen\,\hat{S}}=\frac{1}{sen\,\alpha}=\frac{5}{3}$.

   Quindi: $ST=OS-OT=\frac{5}{3}-\frac{5}{4}=\frac{5}{12}$.

4. Sappiamo che $tg\,\alpha=m=\frac{5}{12}\ \Rightarrow\ \cos\alpha=\frac{12}{5}sen\,\alpha$.

   Sostituiamo nella prima relazione fondamentale:

   $\frac{144}{25}sen^2\alpha+sen^2\alpha=1\ \Rightarrow\ sen^2\alpha=\frac{25}{169}\ \Rightarrow\ sen\,\alpha=\frac{5}{13}$, in quanto $0<\alpha<\frac{\pi}{2}$.

5. Il coefficiente angolare del raggio OP è: $m_{OP}=\frac{y_P}{x_P}=\frac{1}{\sqrt{3}}$.

   Poiché la tangente è perpendicolare al raggio, il coefficiente angolare della retta r è:

   $m_r=-\frac{1}{m_{OP}}=-\sqrt{3}$.

6. L'area del settore circolare misura: $S=\frac{1}{2}\alpha r^2$.

   Dal testo sappiamo che: $S=2l^2=2\alpha^2r^2$.

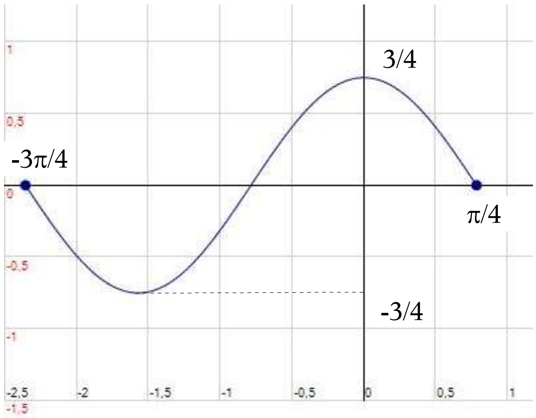
   Uguagliamo le due espressioni: $2\alpha^2r^2=\frac{1}{2}\alpha r^2\ \Rightarrow\ \alpha(4\alpha-1)=0$.

   Le soluzioni possibili sono dunque:

   - $\alpha=0;\ S=0$ (di dubbia accettabilità);
   - $\alpha=\frac{1}{4}rad;\ S=\frac{1}{8}r^2$.

7. Dopo avere tracciato il grafico della funzione $y = sen\,x$, vi applichiamo:

- una contrazione orizzontale di un fattore 1/2;
- una traslazione orizzontale di $3\pi/4$ verso sx;
- una contrazione verticale di un fattore 3/4;
- una simmetria rispetto all'asse *x*.



Il periodo è $\frac{2\pi}{\omega} = \frac{2\pi}{2} = \pi$; l'ampiezza è $A = \frac{3}{4}$ (data dal valore assoluto del coefficiente del seno); l'intersezione con l'asse *y*:

$$x = 0 \;\Rightarrow\; y = -\frac{3}{4} sen \frac{3}{2}\pi = \frac{3}{4} \;\Rightarrow\; (0, \frac{3}{4}) \quad .$$

Osserviamo quindi che il punto di intersezione con l'asse *y* coincide con un massimo della funzione.

8. $$\frac{tg(\pi+\alpha)+tg\,\alpha}{sen(\pi+\alpha)} - \frac{1}{cos(\pi+\alpha)} = \frac{tg\,\alpha + tg\,\alpha}{-sen\,\alpha} - \frac{1}{-cos\,\alpha} = -\frac{2}{cos\,\alpha} + \frac{1}{cos\,\alpha} = -\frac{1}{cos\,\alpha} \quad .$$

9. 1° membro: $(sen\,\alpha + cos\,\alpha)^2 - 1 = sen^2\alpha + 2\,sen\,\alpha\,cos\,\alpha + cos^2\alpha - 1 = 2\,sen\,\alpha\,cos\,\alpha$;

   2° membro: $\frac{2\,tg\,\alpha}{1+tg^2\alpha} = 2\frac{sen\,\alpha}{cos\,\alpha} : (1 + \frac{sen^2\alpha}{cos^2\alpha}) = 2\frac{sen\,\alpha}{cos\,\alpha} \cdot \frac{cos^2\alpha}{cos^2\alpha + sen^2\alpha} = 2\,sen\,\alpha\,cos\,\alpha$ c.v.d.

10. La funzione arco seno è definita quando il suo argomento è compreso tra -1 ed 1:

$$\frac{2x-3}{x-1} \geq -1 \;\Rightarrow\; \frac{3x-4}{x-1} \geq 0 \;\Rightarrow\; S_1 :\; x < 1 \;\vee\; x \geq \frac{4}{3} \quad ;$$

$$\frac{2x-3}{x-1} \leq 1 \;\Rightarrow\; \frac{x-2}{x-1} \leq 0 \;\Rightarrow\; S_2 :\; 1 < x \leq 2 \quad ; \quad S_{tot} = S_1 \cap S_2 :\; \frac{4}{3} \leq x \leq 2 \quad .$$

11. Se poniamo $arc\,cos\,2x = \alpha$, sappiamo che $2x = cos\,\alpha$.

   Quindi: $tg(arc\,cos\,2x) = tg\,\alpha = \frac{sen\,\alpha}{cos\,\alpha} = \frac{\sqrt{1-cos^2\alpha}}{cos\,\alpha} = \frac{\sqrt{1-4x^2}}{2x}$.

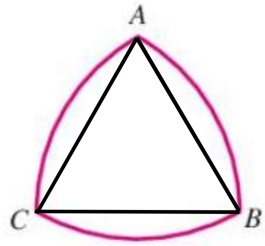
   Non deve essere considerato il caso $sen\,\alpha < 0$ perché da $arc\,cos\,2x = \alpha$ segue $0 \leq \alpha \leq \pi$.

1. Un settore circolare ha perimetro 12 *m* ed area 9 m^2.

   Calcola la misura del raggio e dell'angolo al centro (in radianti ed in gradi).

2. A partire dal triangolo equilatero ABC (*in nero*), di lato 2 *m*, viene costruito il triangolo mistilineo ABC (*in viola*), delimitato da tre archi di circonferenza di centro A, B, C e raggio uguale al lato del triangolo.

   Calcola con tre cifre significative l'area del triangolo mistilineo.

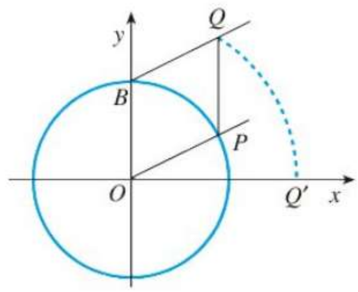


3. Dato il punto $A(0,1)$, calcola le coordinate del punto A' ottenuto da A tramite una rotazione di un angolo $\alpha=-2/3\pi$ di centro l'origine.

4. Calcola seno, coseno e tangente di un angolo α tale che $sen\alpha=2cos\alpha$ e $\pi<\alpha<3/2\pi$.

5. Dato il punto $P(cos\alpha, sen\alpha)$ nel primo quadrante, e costruito il parallelogramma OPQB, traccia la circonferenza di centro O e raggio OQ che incontra l'asse delle ascisse in Q'.

   Calcola l'ascissa di Q'.



6. La retta di equazione $x-2y+6=0$ forma un angolo α con il semiasse positivo delle ascisse.

   Calcola $cos\alpha$.

7. Verifica la seguente identità: $sen^4\alpha-4sen^2\alpha+cos^4\alpha=\dfrac{ctg^4\alpha-4ctg^2\alpha-3}{ctg^4\alpha+2ctg^2\alpha+1}$.

8. Traccia il grafico della curva di equazione $y=|1-2sen(x+\pi/6)|$, spiegando come puoi dedurlo da quello della curva di equazione $y=sen\,x$.

9. Nel triangolo ABC, rettangolo in A, gli angoli acuti di vertici B e C misurano rispettivamente β e γ, l'angolo esterno di vertice C misura δ e $tg\beta=2/3$. Calcola $sen\gamma$ e $tg\delta$.

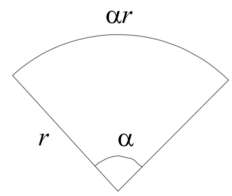
10. Esprimi in funzione di $cos\alpha$ e/o $sen\alpha$:

$$\frac{1}{2}sen(\pi-\alpha)+cos(\pi+\alpha)-\frac{3}{2}tg(\frac{\pi}{2}-\alpha)-\frac{3}{2}ctg(-\alpha)+3sen(\frac{\pi}{2}+\alpha)-\frac{1}{2}cos(\frac{\pi}{2}-\alpha)$$.

11. Calcola: $sen1°+sen2°+sen3°+...+sen357°+sen358°+sen359°$.

4^C - *Correzione compito n°1*

1. Ricordiamo che la lunghezza dell'arco di circonferenza e l'area del settore circolare sono date rispettivamente da: $l=\alpha r$, $S=\alpha r^2/2$.



Imponiamo quindi: $\begin{cases} 2r+\alpha r=12 \\ \alpha r^2/2=9 \end{cases}$. Ricaviamo dalla seconda: $\alpha=\frac{18}{r^2}$.

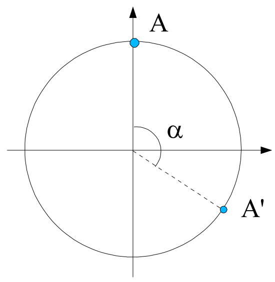
Sostituiamo nella prima: $2r+\frac{18}{r}=12 \Rightarrow 2r^2-12r+18=0 \Rightarrow 2(r-3)^2 \Rightarrow r=3$.

Quindi il raggio misura $r=3\,m$ e l'angolo al centro $\alpha=2\,rad\simeq 114{,}6°$.

2. L'area del triangolo mistilineo si ottiene sommando le aree dei tre settori circolari (tutti uguali tra loro) e togliendo due volte l'area del triangolo equilatero:

$$A_{tr\,mist}=3\,A_{sett\,circ}-2\,A_{tr\,eq}=3\cdot\frac{1}{2}\frac{\pi}{3}l^2-2\cdot\frac{\sqrt{3}}{4}l^2=2(\pi-\sqrt{3})m^2\simeq 2{,}82\,m^2 \quad .$$

3. Il punto A' viene ottenuto dal punto A tramite una rotazione di 120° in senso antiorario intorno all'origine, e quindi le sue coordinate sono:



$$A'\equiv(cos(-30°),sen(-30°))\equiv(\sqrt{3}/2,-1/2) \quad .$$

4. $sen\,\alpha=2\,cos\,\alpha \Rightarrow tg\,\alpha=\frac{sen\,\alpha}{cos\,\alpha}=2$;

Per la prima relazione fondamentale:

$$sen^2\alpha+cos^2\alpha=1 \Rightarrow 4\,cos^2\alpha+cos^2\alpha=1 \Rightarrow cos^2\alpha=\frac{1}{5} \Rightarrow cos\,\alpha=-\frac{1}{\sqrt{5}} \quad ;$$

$sen\,\alpha=2\,cos\,\alpha=-\frac{2}{\sqrt{5}}$, avendo utilizzato la condizione $\pi<\alpha<\frac{3}{2}\pi$.

5. Osserviamo che $x_P^2+y_P^2=cos^2\alpha+sen^2\alpha=1$, per cui il punto P appartiene alla circonferenza goniometrica. Di conseguenza $OB=PQ=1$ e

$$OQ=\sqrt{x_Q^2+y_Q^2}=\sqrt{cos^2\alpha+(1+sen\,\alpha)^2}=\sqrt{cos^2\alpha+1+2\,sen\,\alpha+sen^2\alpha}=\sqrt{2(1+sen\,\alpha)} \quad .$$

Infine $x_{Q'}=OQ=\sqrt{2(1+sen\,\alpha)}$.

6. Sappiamo che $tg\,\alpha=m=1/2$. Quindi $\frac{sen\,\alpha}{cos\,\alpha}=\frac{1}{2} \Rightarrow cos\,\alpha=2\,sen\,\alpha$.

Sostituendo nella prima relazione fondamentale:

$5\,sen^2\alpha=1 \Rightarrow sen\,\alpha=\frac{1}{\sqrt{5}} \Rightarrow cos\,\alpha=\frac{2}{\sqrt{5}}$, in quanto $0<\alpha<\frac{\pi}{2}$.

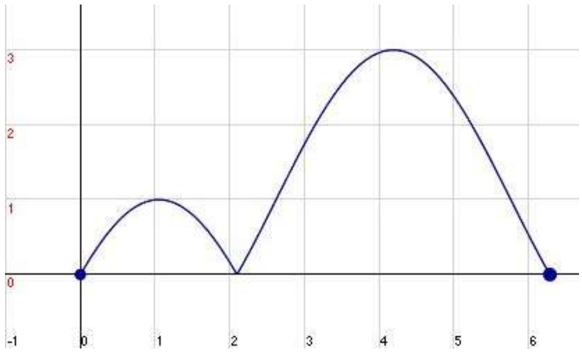
7. Partiamo dal secondo membro, applichiamo la definizione di cotangente e moltiplichiamo numeratore e denominatore per $sen^4\alpha$:

$$\frac{ctg^4\alpha-4\,ctg^2\alpha-3}{ctg^4\alpha+2\,ctg^2\alpha+1}=\frac{cos^4\alpha-4\,cos^2\alpha\,sen^2\alpha-3\,sen^4\alpha}{cos^4\alpha+2\,cos^2\alpha\,sen^2\alpha+sen^4\alpha}=$$

$$\frac{cos^4\alpha-4(1-sen^2\alpha)\,sen^2\alpha-3\,sen^4\alpha}{(cos^2\alpha+sen^2\alpha)^2}=sen^4\alpha-4\,sen^2\alpha+cos^4\alpha \quad \text{c.v.d.}$$

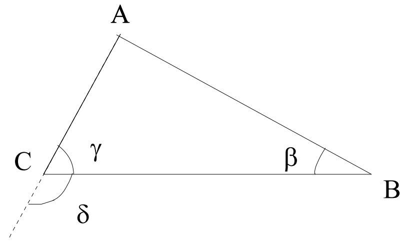
Abbiamo utilizzato sia a numeratore che a denominatore la prima relazione fondamentale.

8. Una volta tracciato il grafico della funzione $y=sen\,x$, applichiamo su di esso:
   - una traslazione orizzontale di $\pi/6$ verso sinistra;
   - una dilatazione verticale di un fattore 2;
   - una simmetria rispetto all'asse delle ascisse;
   - una traslazione di 1 unità verso l'alto;
   - il valore assoluto (per cui applichiamo la simmetria rispetto all'asse delle ascisse solo agli intervalli in cui la funzione assume segno negativo).



Poiché la funzione ha periodo 2π, possiamo rappresentarla nell'intervallo $[0, 2\pi]$.

9. Poiché $tg\,\beta=\frac{sen\,\beta}{cos\,\beta}=\frac{2}{3} \Rightarrow sen\,\beta=\frac{2}{3}cos\,\beta \Rightarrow$



$$\frac{4}{9}cos^2\beta+cos^2\beta=1 \Rightarrow \frac{13}{9}cos^2\beta=1 \Rightarrow cos\,\beta=\frac{3}{\sqrt{13}}\ .$$

Vediamo che $\gamma=90°-\beta$ e $\delta=180°-\gamma=90°+\beta$.

Quindi: $sen\,\gamma=sen(90°-\beta)=cos\,\beta=\frac{3}{\sqrt{13}}$ e $tg\,\delta=tg(90°+\beta)=-ctg\,\beta=-\frac{3}{2}$.

10. $\frac{1}{2}sen(\pi-\alpha)+cos(\pi+\alpha)-\frac{3}{2}tg(\frac{\pi}{2}-\alpha)-\frac{3}{2}ctg(-\alpha)+3\,sen(\frac{\pi}{2}+\alpha)-\frac{1}{2}cos(\frac{\pi}{2}-\alpha)=$

$$\frac{1}{2}sen\,\alpha-cos\,\alpha-\frac{3}{2}ctg\,\alpha+\frac{3}{2}ctg\,\alpha+3\,cos\,\alpha-\frac{1}{2}sen\,\alpha=2\,cos\,\alpha\ .$$

11. Dei 359 termini della somma, uno è direttamente uguale a zero $(sen\,180°)$, mentre gli altri formano 179 coppie del tipo: $sen\,1°+sen\,359°$, $sen\,2°+sen\,358°$ ... e, in generale: $sen\,n°+sen(360-n)°$ che sono uguali a zero per le formule degli archi associati.

Quindi l'intera somma ha come risultato zero.

1. Esprimi in radianti: $\alpha° = 52°$. Esprimi in gradi: $\beta_{rad} = \frac{11}{12}\pi\, rad$.

2. Determina, giustificando la risposta, la misura in radianti della somma degli angoli interni di un poligono di *n* lati. Supponendo che il poligono sia regolare, calcola la misura in radianti di ciascuno dei suoi angoli.

3. Calcola: $\frac{1}{1-tg^2\frac{\pi}{3}} - \frac{1}{1-tg^2\frac{\pi}{6}} - \frac{1}{\cos^2\frac{\pi}{3} - sen^2\frac{\pi}{3}}$.

4. Inserisci il simbolo >, = o < giustificando la risposta:

   $cos\,40° \ldots cos\,43°$; $sen\,10° \ldots tg\,10°$; $tg\,15°$ ... $tg\,195°$; $sen\,14° \ldots sen^2\,14°$.

5. Nel triangolo ABC, rettangolo in A, è noto che $AB = 3$ e $sen\,\hat{C} = 1/5$.

   Calcola AC e $cos\,\hat{B}$.

6. Calcola seno e coseno dell'angolo α che la retta $y = \frac{3}{4}x - 2$ forma con l'asse delle ascisse.

7. Utilizzando le relazioni fondamentali, verifica che: $sen^4 x - cos^4 x = 1 - 2\,cos^2 x$.

8. Determina il dominio della funzione $y = arc\,sen\frac{1-x}{1+x}$.

9. Calcola $tg\,arc\,sen\,x$. In quale intervallo è definito il risultato? Come hai scelto il segno?

10. Le equazioni del moto di un punto materiale sono: $\begin{cases} x = 3\,cos\,t + 1 \\ y = 2\,sen\,t - 2 \end{cases}$.

    Determina l'equazione cartesiana della traiettoria, spiega di quale curva si tratta e disegnala.

11. Descrivi la funzione $f(x) = 3\,cos(2x + \frac{\pi}{2}) - 1$ e tracciane il grafico.

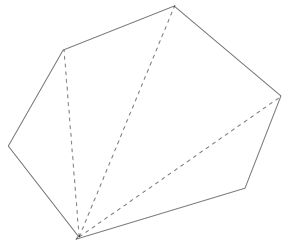
    Dal grafico tracciato deduci, spiegando il procedimento, quello della funzione $g(x) = \frac{1}{f(x)}$.

4^A - Correzione compito n°1

1. $\alpha_{rad}=\frac{\pi}{180°}\alpha°=\frac{\pi}{180°}\cdot 52°=\frac{13}{45}\pi\, rad$;

   $\beta°=\frac{180°}{\pi}\beta_{rad}=\frac{180°}{\pi}\cdot\frac{11}{12}\pi\, rad=165°$.

2. La somma degli angoli interni di un poligono di *n* lati misura $(n-2)\pi$ radianti, in quanto, tracciando le diagonali uscenti da un vertice, il poligono può essere decomposto in $n-2$ triangoli, per ciascuno dei quali la somma degli angoli interni è π radianti.

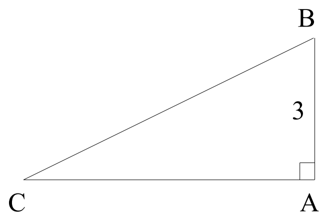


   Se poi il poligono è regolare, allora gli angoli interni sono congruenti, per cui la loro ampiezza è: $\frac{n-2}{n}\pi$ radianti.

3. $\frac{1}{1-(\sqrt{3})^2}-\frac{1}{1-(\sqrt{3}/3)^2}-\frac{1}{(1/2)^2-(\sqrt{3}/2)^2}=-\frac{1}{2}-\frac{3}{2}+2=0$.

4.
   - $cos\,40°>cos\,43°$ perché la funzione $y=cos\,x$ è decrescente nel 1° quadrante;
   - $sen\,10°<tg\,10°$ perché $sen\,10°=tg\,10°\cdot cos\,10°$ e $cos\,10°<1$;
   - $tg\,15°=tg\,195°$ perché la funzione $y=tg\,x$ ha periodo $T=180°$;
   - $sen\,14°>sen^2\,14°$ perché $sen\,14°<1$.

5. $BC=\frac{AB}{sen\,\hat{C}}=\frac{3}{1/5}=15$;



   $cos\,\hat{C}=\sqrt{1-sen^2\hat{C}}=\sqrt{1-\frac{1}{25}}=\frac{2}{5}\sqrt{6}$;

   $AC=BC\cdot cos\,\hat{C}=15\cdot\frac{2}{5}\sqrt{6}=6\sqrt{6}$;

   $cos\,\hat{B}=\frac{AB}{BC}=\frac{3}{15}=\frac{1}{5}$.

6. Sappiamo che $tg\,\alpha=3/4$ e che α è un angolo acuto, in quanto $m>0$. Quindi:

   $cos\,\alpha=\frac{1}{\sqrt{1+tg^2\alpha}}=\frac{1}{\sqrt{1+(3/4)^2}}=\frac{4}{5}$;

   $sen\,\alpha=\sqrt{1-cos^2\alpha}=\sqrt{1-(\frac{4}{5})^2}=\frac{3}{5}$.

7. Scomponiamo e applichiamo due volte di seguito la 1^ rel. fondamentale:

   $sen^4x-cos^4x=(sen^2x+cos^2x)(sen^2x-cos^2x)=1\cdot(1-cos^2x-cos^2x)=1-2\,cos^2x$.

8. Dobbiamo imporre: $-1 \le \dfrac{1-x}{1+x} \le 1$.

1^ condizione: $\dfrac{1-x}{1+x}+1 \ge 0 \Rightarrow \dfrac{2}{1+x} \ge 0 \Rightarrow x > -1$ (che usiamo in seguito).

2^ condizione: $\dfrac{1-x}{1+x}-1 \le 0 \Rightarrow \dfrac{-2x}{1+x} \le 0 \Rightarrow -2x \le 0 \Rightarrow x \ge 0$

$C.E.:\ x \ge 0$ (intersezione delle due condizioni).

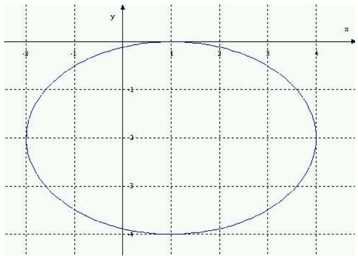
9. Poniamo $y = arc\,sen\,x \Rightarrow x = sen\,y$.

Quindi: $tg\,arc\,sen\,x = tg\,y = \dfrac{sen\,y}{cos\,y} = \dfrac{x}{\sqrt{1-x^2}}$.

Il risultato è definito per $1-x^2>0 \Rightarrow -1<x<1$.

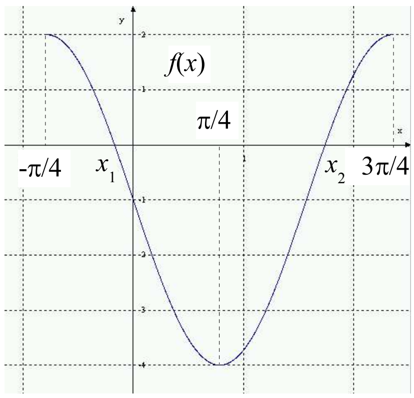
Abbiamo scelto il valore positivo in quanto $-\dfrac{\pi}{2}<y<\dfrac{\pi}{2}$, e quindi $cos\,y>0$.

10.Ricaviamo $cos\,t = \dfrac{x-1}{3}$, $sen\,t = \dfrac{y+2}{2}$, eleviamo al quadrato e sommiamo. Per la 1^ rel. fondamentale: $\dfrac{(x-1)^2}{9}+\dfrac{(y+2)^2}{4}=1$.



Si tratta di un'ellisse di centro $C(1,-2)$, semiassi $a=3$, $b=2$ e assi di simmetria paralleli agli assi cartesiani.

11.Si tratta di una funzione armonica, la cui equazione è del genere $f(x)=A\cos(\omega x+\phi)+k$ avente periodo $T=2\pi/\omega=\pi$, ampiezza $A=3$, traslata verso il basso di $k=-1$.

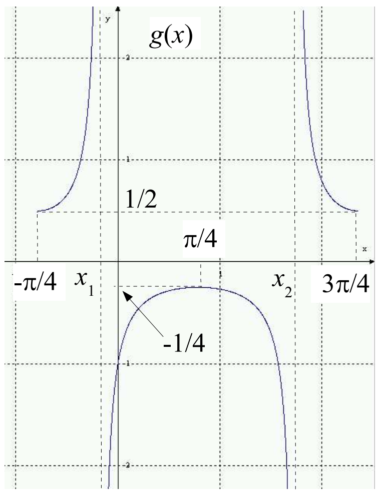


Essa assume:

- valore massimo per: $2x+\dfrac{\pi}{2}=0 \Rightarrow x=-\dfrac{\pi}{4}$;
- valore minimo per: $2x+\dfrac{\pi}{2}=\pi \Rightarrow x=\dfrac{\pi}{4}$;
- ed ha un “nodo” per: $2x+\dfrac{\pi}{2}=\dfrac{\pi}{2} \Rightarrow x=0$.

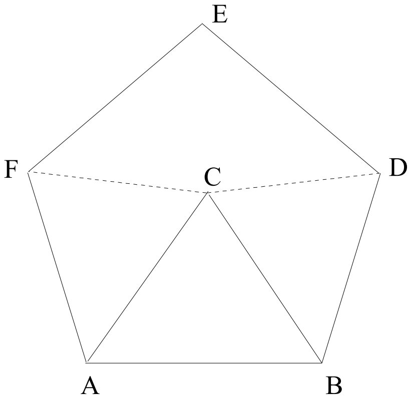
Per tracciare il grafico della funzione $g(x)$, ricordiamo che:

- se $f(x)\to 0$, allora $g(x)\to\infty$;
- se $f(x)$ è crescente, allora $g(x)$ è decrescente, e viceversa.



1. Esprimi in radianti: $\alpha° = 144°$. Esprimi in gradi: $\beta_{rad} = \frac{7}{36}\pi\, rad$.

2. Sapendo che il pentagono ABDEF in figura è regolare e che il triangolo ABC è equilatero, calcola l'ampiezza in radianti dell'angolo convesso $F\hat{C}D$.



3. Calcola: $\dfrac{tg^2\frac{\pi}{4} - sen^2\frac{\pi}{4} - tg^2\frac{\pi}{4}\, sen^2\frac{\pi}{4} + \frac{1}{2}\, sen\frac{\pi}{3}}{\frac{1}{2}\cos\frac{\pi}{6}}$.

4. Inserisci il simbolo >, = o < giustificando la risposta:

   $sen\,100° \ldots sen\,105°$; $sen\,45° \ldots \cos 45°$; $sen\,70° \ldots tg\,70°$; $tg\,54° \ldots tg^2\,54°$.

5. Nel triangolo ABC, rettangolo in A, è noto che $BC = 10$ e $\cos\hat{C} = 1/3$.

   Calcola AB e $sen\,\hat{B}$.

6. Calcola seno e coseno dell'angolo α che la retta $y = -2x + 5$ forma con l'asse delle ascisse.

7. Utilizzando le relazioni fondamentali, verifica che: $\dfrac{1 - tg^2 x}{1 + tg^2 x} = 1 - 2\,sen^2 x$.

8. Determina il dominio della funzione $y = arc\cos(2 - x^2)$.

9. Calcola $sen\,arc\,tg\,x$. In quale intervallo è definito il risultato?

10. Le equazioni del moto di un punto materiale sono: $\begin{cases} x = tg\,t \\ y = \dfrac{1}{\cos t} \end{cases}$.

    Determina l'equazione cartesiana della traiettoria, spiega di quale curva si tratta e disegnala.

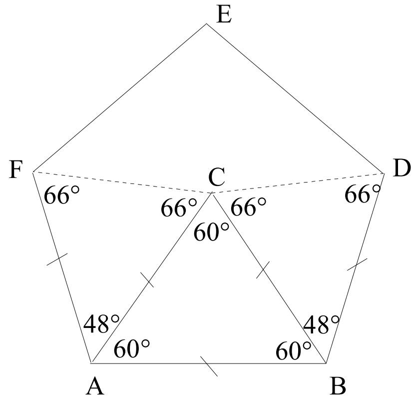
11. Descrivi la funzione $f(x) = 2\,sen(3x - \frac{\pi}{2}) + 1$ e tracciane il grafico.

    Dal grafico tracciato deduci, spiegando il procedimento, quello della funzione $g(x) = \sqrt{f(x)}$.

4^F - Correzione compito n°1

1. $\alpha_{rad}=\frac{\pi}{180°}\alpha°=\frac{\pi}{180°}\cdot 144°=\frac{4}{5}\pi\, rad$; $\beta°=\frac{180°}{\pi}\beta_{rad}=\frac{180°}{\pi}\cdot\frac{7}{36}\pi\, rad=35°$.

2. La somma delle ampiezze degli angoli interni di un pentagono è $3\cdot 180°=540°=3\pi\, rad$, quindi ciascuno degli angoli interni misura $540°:5=108°=3\pi/5\, rad$.



Poiché il triangolo ABC è equilatero, ciascuno dei suoi angoli interni misura $60°=\pi/3\, rad$, per cui:

$F\hat{A}C=D\hat{B}C=108°-60°=48°=4\pi/15\, rad$.

Poiché i triangoli AFC e BCD sono isosceli di base CF e CD:

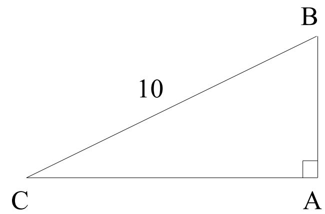
$A\hat{C}F=B\hat{C}D=(180°-48°)/2=66°=11\pi/30\, rad$.

Quindi: $F\hat{C}D_{conv}=360°-60°-2\cdot 66°=168°=14\pi/15\, rad$.

3. $\frac{1^2-(\sqrt{2}/2)^2-1^2\cdot(\sqrt{2}/2)^2+1/2\cdot\sqrt{3}/2}{1/2\cdot\sqrt{3}/2}=\frac{1-1/2-1/2+\sqrt{3}/4}{\sqrt{3}/4}=1$.

4.
- $sen\,100°>sen\,105°$ perché la funzione $y=sen\,x$ è decrescente nel 2° quadrante;
- $sen\,45°=cos\,45°$ perché il raggio vettore giace sulla bisettrice del 1° e 3° quadrante;
- $sen\,70°<tg\,70°$ perché $sen\,70°=tg\,70°\cdot cos\,70°$ e $cos\,70°<1$;
- $tg\,54°<tg^2\,54°$ perché $tg\,54°>1$.

5. $sen\,\hat{C}=\sqrt{1-cos^2\hat{C}}=\sqrt{1-\frac{1}{9}}=\frac{2}{3}\sqrt{2}$;



$AB=BC\cdot sen\,\hat{C}=10\cdot\frac{2}{3}\sqrt{2}=\frac{20}{3}\sqrt{2}$;

$AC=BC\cdot cos\,\hat{C}=10/3$; $sen\,\hat{B}=\frac{AC}{BC}=\frac{10/3}{10}=\frac{1}{3}$.

6. Sappiamo che $tg\,\alpha=-2$ e che α è un angolo ottuso, in quanto $m<0$. Quindi:

$cos\,\alpha=\frac{-1}{\sqrt{1+tg^2\alpha}}=\frac{-1}{\sqrt{1+(-2)^2}}=-\frac{1}{\sqrt{5}}$; $sen\,\alpha=\sqrt{1-cos^2\alpha}=\sqrt{1-(-\frac{1}{\sqrt{5}})^2}=\frac{2}{\sqrt{5}}$.

7. Applichiamo prima la 2^ rel. fondamentale e quindi due volte di seguito la 1^:

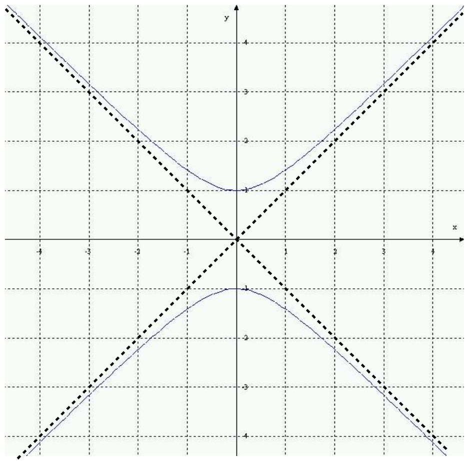
$$\frac{1-tg^2x}{1+tg^2x}=\frac{1-\frac{sen^2x}{cos^2x}}{1+\frac{sen^2x}{cos^2x}}=\frac{cos^2x-sen^2x}{cos^2x}\cdot\frac{cos^2x}{cos^2x+sen^2x}=cos^2x-sen^2x=1-2\,sen^2x \quad .$$

8. Imponiamo: $\begin{cases} 2-x^2 \geq -1 \Rightarrow 3-x^2 \geq 0 \Rightarrow -\sqrt{3} \leq x \leq \sqrt{3} \\ 2-x^2 \leq 1 \Rightarrow 1-x^2 \leq 0 \Rightarrow x \leq -1 \vee x \geq 1 \end{cases} \Rightarrow -\sqrt{3} \leq x \leq -1 \vee 1 \leq x \leq \sqrt{3}$.

9. Poniamo $y = arc\,tg\,x \Rightarrow x = tg\,y$.

Quindi: $sen\,arc\,tg\,x = sen\,y = \dfrac{tg\,y}{\sqrt{1+tg^2\,y}} = \dfrac{x}{\sqrt{1+x^2}}$.

Il risultato è definito per $1+x^2>0 \Rightarrow \forall x \in \mathbb{R}$.



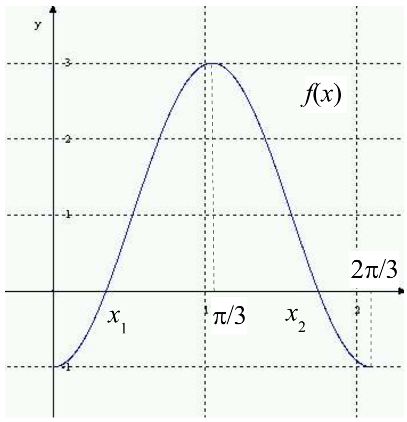
10. Ricaviamo: $cos\,t = \dfrac{1}{y}$, $sen\,t = x\,cos\,t = \dfrac{x}{y}$

e applichiamo la prima relazione fondamentale:

$\dfrac{1}{y^2} + \dfrac{x^2}{y^2} = 1 \Rightarrow x^2 - y^2 = -1$.

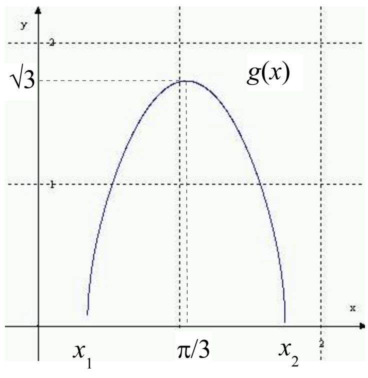
Si tratta di una iperbole equilatera avente centro nell'origine degli assi, fuochi sull'asse delle ordinate ed asintoti coincidenti con le bisettrici dei quadranti.

11. Si tratta di una funzione armonica, la cui equazione è del genere $f(x) = A\,sen(\omega x + \phi) + k$, di periodo $T = 2\pi/\omega = 2\pi/3$, ampiezza $A=3$, traslata verso l'alto di $k=1$.



Essa assume:

- valore massimo per: $3x - \dfrac{\pi}{2} = \dfrac{\pi}{2} \Rightarrow x = \dfrac{\pi}{3}$;
- valore minimo per: $3x - \dfrac{\pi}{2} = \dfrac{3}{2}\pi \Rightarrow x = \dfrac{2}{3}\pi$;
- ed ha un “nodo” per: $3x - \dfrac{\pi}{2} = 0 \Rightarrow x = \dfrac{\pi}{6}$.



Per tracciare il grafico della funzione $g(x)$, ricordiamo che:

- è definita per i valori di *x* tali che $f(x) \geq 0$;
- è tale che $g(x) \geq 0$;
- è crescente (decrescente) se $f(x)$ è crescente (decrescente).

3^C PNI – MATEMATICA compito n°7 - 2011-2012

1. Dimostra le "formule parametriche" ed una delle formule di prostaferesi a tua scelta.
2. Verifica le seguenti identità goniometriche, precisando quali formule vengono utilizzate:

$$tg^2\frac{\alpha}{2}\left(\frac{1}{sen^2\alpha/2}-2\right)=\frac{4\,sen^2\alpha/2}{sen\,\alpha\,tg\,\alpha}\quad ;\qquad \frac{1+8\cos^4\alpha-8\cos^2\alpha}{\cos 4\alpha}=1\quad ;$$

$$\cos^4\alpha+sen^2\alpha-\cos^2 2\alpha=\frac{3}{4}sen^2 2\alpha\quad ;\qquad tg(\alpha+\beta)-tg(\alpha-\beta)=\frac{2\,tg\,\beta(1+tg^2\alpha)}{1-tg^2\alpha\,tg^2\beta}\quad .$$

3. Dimostra che il lato del decagono regolare inscritto in una circonferenza è la sezione aurea del raggio. Utilizza il precedente risultato per calcolare $sen\,18°$ e $sen\,36°$.
4. Data la funzione $y=a\,sen^2x+b\,sen\,x\cos x+c\cos^2x$, determina i valori di *A*, ω, ϕ, *k*, per i quali si ha: $y=A\,sen(\omega x+\phi)+k$. Applicando tale procedimento, disegna il grafico della funzione $y_1=sen^2x+2\,sen\,x\cos x+3\cos^2x$. Spiega quale successione di trasformazioni porta il grafico di $y=sen\,x$ in quello di y_1 . Per quali valori di *a*, *b*, *c* si ottiene come grafico una retta parallela all'asse delle ascisse?
5. Determina (senza fare uso di radici) l'equazione cartesiana della curva le cui equazioni parametriche sono: $\begin{cases} x=sen\,t \\ y=sen\,2t \end{cases}$. Quali simmetrie possiede la curva?
6. Calcola $sen^2 35°+sen^2 55°$.
7. Determina le funzioni della forma $y=a\,sen\,x+b\cos x$ tali che per $x=2\pi/3$ sia $y=1$, e che l'ampiezza dell'oscillazione sia $A=2$. Disegna (in maniera precisa) il loro grafico nell'intervallo $[0,2\pi]$. Ponendo $y=s$, $x=2\pi t$, dove s rappresenta lo spostamento dall'origine di un punto P che si muova su una retta nel tempo *t*, descrivi il moto di P e ricava le leggi che forniscono velocità e accelerazione di P in funzione del tempo.

1. Vedi pagg. 91-93 del libro di testo.
2. $$tg^2\frac{\alpha}{2}\left(\frac{1}{sen^2\alpha/2}-2\right)=\frac{1-cos\,\alpha}{1+cos\,\alpha}\left(\frac{2}{1-cos\,\alpha}-2\right)=\frac{1-cos\,\alpha}{1+cos\,\alpha}\cdot\frac{2\,cos\,\alpha}{1-cos\,\alpha}=\frac{2\,cos\,\alpha}{1+cos\,\alpha}\quad ;$$

$$\frac{4\,sen^2\alpha/2}{sen\,\alpha\,tg\,\alpha}=4\cdot\frac{1-cos\,\alpha}{2}\cdot\frac{cos\,\alpha}{sen^2\alpha}=\frac{2\,cos\,\alpha(1-cos\,\alpha)}{(1+cos\,\alpha)(1-cos\,\alpha)}=\frac{2\,cos\,\alpha}{1+cos\,\alpha}\quad \text{c.v.d.}$$

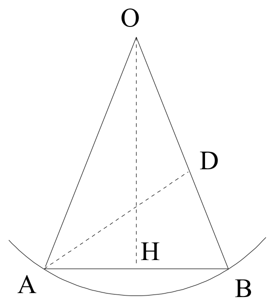
$$\frac{1+8\,cos^4\alpha-8\,cos^2\alpha}{cos\,4\alpha}=\frac{1+8\,cos^4\alpha-8\,cos^2\alpha}{2\,cos^2 2\alpha-1}=\frac{1+8\,cos^4\alpha-8\,cos^2\alpha}{2(2\,cos^2\alpha-1)^2-1}=1\quad \text{c.v.d.}$$

$$cos^4\alpha+sen^2\alpha-cos^2 2\alpha=(1-sen^2\alpha)^2+sen^2\alpha-(1-2\,sen^2\alpha)^2=3\,sen^2\alpha-3\,sen^4\alpha\quad ;$$

$$\frac{3}{4}sen^2 2\alpha=\frac{3}{4}(2\,sen\,\alpha\,cos\,\alpha)^2=3\,sen^2\alpha(1-sen^2\alpha)=3\,sen^2\alpha-3\,sen^4\alpha\quad \text{c.v.d.}$$

$$tg(\alpha+\beta)-tg(\alpha-\beta)=\frac{tg\,\alpha+tg\,\beta}{1-tg\,\alpha\,tg\,\beta}-\frac{tg\,\alpha-tg\,\beta}{1+tg\,\alpha\,tg\,\beta}=...(svolgo)...=\frac{2\,tg\,\beta(1+tg^2\alpha)}{1-tg^2\alpha\,tg^2\beta}\quad \text{c.v.d.}$$

3. Se AB è il lato del decagono regolare inscritto nella circonferenza di centro O e raggio OA, allora:



$$A\hat{O}B=\frac{360°}{10}=36° \quad \text{e} \quad O\hat{A}B=O\hat{B}A=72° \quad .$$

Conduco la bisettrice AD, che forma il triangolo ABD avente anch'esso angoli di $36°-72°-72°$, e quindi simile ad ABO. Inoltre, il triangolo ODA, avendo gli angoli in A e in O uguali, è isoscele, e quindi: $AD=OD$.

Ne segue che: $\frac{OA}{AB}=\frac{AB}{BD} \Rightarrow \frac{r}{l_{10}}=\frac{l_{10}}{r-l_{10}}$, ovvero il lato del decagono regolare inscritto nella circonferenza è uguale alla sezione aurea del raggio, in quanto è medio proporzionale tra il raggio stesso e la parte rimanente. Considerando l_{10} come incognita, ricavo:

$r^2-rl_{10}=l_{10}^2 \Rightarrow l_{10}^2+rl_{10}-r^2=0 \Rightarrow l_{10}=\frac{\sqrt{5}-1}{2}r$ (scartando la soluzione negativa).

Quindi: $sen\,18°=\frac{AH}{AO}=\frac{l_{10}/2}{r}=\frac{\sqrt{5}-1}{4} \Rightarrow cos\,18°=\sqrt{1-sen^2 18°}=\sqrt{1-(\frac{\sqrt{5}-1}{4})^2}=\frac{\sqrt{10+2\sqrt{5}}}{4}$, da cui:

$$sen\,36°=2\,sen\,18°\,cos\,18°=2\cdot\frac{\sqrt{5}-1}{4}\cdot\frac{\sqrt{10+2\sqrt{5}}}{4}=\frac{\sqrt{10-2\sqrt{5}}}{4}\quad .$$

4. Applicando le formule di duplicazione, otteniamo:

$$y=a\,sen^2x+b\,sen\,x\,cos\,x+c\,cos^2x=a\frac{1-cos\,2x}{2}+\frac{b}{2}sen\,2x+c\frac{1+cos\,2x}{2}=\frac{b}{2}sen\,2x+\frac{c-a}{2}cos\,2x+\frac{c+a}{2}\quad .$$

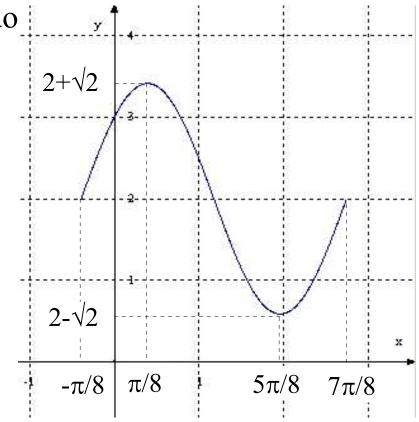
Come abbiamo visto, tale funzione può essere scritta nella forma $y=A\,sen(\omega x+\phi)+k$ ponendo:

$A=\frac{\sqrt{b^2+(c-a)^2}}{2}$, $\omega=2$, $\phi=arc\,tg\frac{c-a}{b}$, $k=\frac{c+a}{2}$, e corrisponde ad una oscillazione armonica di ampiezza *A*, periodo $T=\frac{2\pi}{\omega}=\pi$, sfasamento ϕ e valore medio *k*.

$$y'=sen^2 x+2\,sen\,x\cos x+3\cos^2 x=\frac{1-\cos 2x}{2}+sen\,2x+3\frac{1+\cos 2x}{2}=sen\,2x+\cos 2x+2=\sqrt{2}\,sen(2x+\frac{\pi}{4})+2 \quad .$$

Il grafico di y' si ottiene da quello di $y=sen\,x$ applicando nell'ordine (ad esempio):

- una "contrazione" orizzontale di un fattore 2: $x'=x/2$;
- una traslazione verso sinistra di $\pi/8$ unità: $x''=x'-\pi/8$;
- una "dilatazione verticale di un fattore $\sqrt{2}$: $y'=y\sqrt{2}$;
- una traslazione verso l'alto di 2 unità: $y''=y'+2$.



Il grafico è una retta parallela all'asse delle ascisse se:

$A=0 \Rightarrow b=0 \wedge a=c$.

5. $y=sen\,2t=2\,sen\,t\cos t=\pm 2x\sqrt{1-x^2} \Rightarrow y^2=4x^2(1-x^2)$. La curva è simmetrica rispetto ad entrambi gli assi cartesiani, e, quindi, anche rispetto all'origine degli assi.

6. Poiché $55°=90°-35°$, abbiamo: $sen^2 35°+sen^2 55°=sen^2 35°+\cos^2 35°=1$.

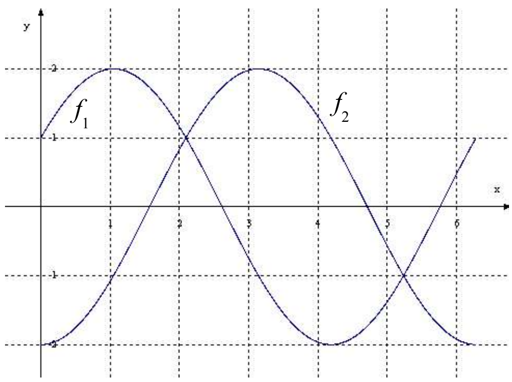
7. Impongo il passaggio per il punto $(\frac{2}{3}\pi, 1)$: $a\frac{\sqrt{3}}{2}-\frac{b}{2}=1 \Rightarrow a\sqrt{3}-b=2$.

L'ampiezza dell'oscillazione è data da $k=\sqrt{a^2+b^2}$, quindi: $a^2+b^2=4$.

Il sistema formato dalle due condizioni ammette le soluzioni: $\begin{cases} a_1=0 \\ b_1=-2 \end{cases}$ e $\begin{cases} a_2=\sqrt{3} \\ b_2=1 \end{cases}$.

Quindi il problema è verificato dalle due funzioni $f_1=-2\cos x$ (il cui grafico si traccia in maniera elementare) ed $f_2=\sqrt{3}\,sen\,x+\cos x$ che, tramite la formula dell'angolo "aggiunto", può essere scritta:

$f_2=2\,sen(x+\frac{\pi}{6})$ e, quindi, corrisponde ad una sinusoide traslata di $\pi/6$ verso sinistra e di ampiezza $A=2$.



Scrivendo le funzioni ottenute come:

$s_1=2\,sen(2\pi t-\frac{\pi}{2})$, $s_2=2\,sen(2\pi t+\frac{\pi}{6})$, vediamo che si tratta di moti armonici di ampiezza $A=2$, pulsazione

$\omega=2\pi$, frequenza $f=\frac{\omega}{2\pi}=1$, periodo $T=\frac{1}{f}=1$.

Possiamo quindi ricavare le velocità: $v_1=4\pi\cos(2\pi t-\frac{\pi}{2})$, $v_2=4\pi\cos(2\pi t+\frac{\pi}{6})$ e le

accelerazioni: $a_1=-8\pi^2 sen(2\pi t-\frac{\pi}{2})$, $a_2=-8\pi^2 sen(2\pi t+\frac{\pi}{6})$.