2^D - MATEMATICA compito n°2 - 2023-24

1. Semplifica, se possibile, i seguenti radicali:

$\sqrt[9]{a^3+8+6a^2+12a}$; $\sqrt[6]{\frac{1}{9}+a^2+\frac{2}{3}a}$; $\sqrt[6]{a^6+b^6}$; $\sqrt[6]{\frac{x^2+2x+1}{a^2+4a+4}}$;

$\sqrt{x^2+\frac{a^4}{x^2}+2a^2}$; $\sqrt[6]{1728}$; $\sqrt[3]{\frac{(a-1)^6 a^4}{27}}$; $\sqrt{\frac{18a^5(x+3)^3}{x^4}}$.

2. Svolgi le seguenti operazioni contenenti radicali e, se possibile, semplifica i risultati ottenuti:

$\sqrt[3]{\frac{a^2-b^2}{a^3-b^3}}\cdot\sqrt[3]{\frac{a}{b}+\frac{b}{a}+1}:\sqrt[3]{\frac{1}{a}+\frac{1}{b}}$; $\sqrt{\frac{a}{(a-b)^4}}\cdot\sqrt{\frac{a^2}{b^2}+\frac{b^2}{a^2}-2}:\sqrt{2+\frac{a}{b}+\frac{b}{a}}$;

$\sqrt{a\sqrt[3]{a}}$; $(2-\sqrt{2})^3$; $(2\sqrt{5}+1)(2\sqrt{5}-1)-(\sqrt{5}-1)^2-(\sqrt{5}-3)^2:2$.

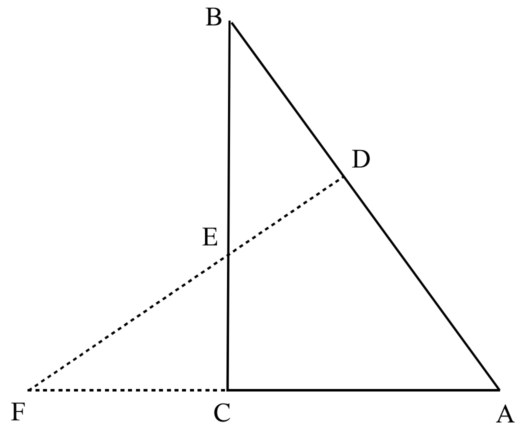
3. Risolvi la seguente equazione (*e razionalizza il risultato ottenuto*):

$$\frac{2}{x\sqrt{2}-1}+\frac{\sqrt{2}+1}{2x^2-1}=\frac{\sqrt{2}+1}{x\sqrt{2}+1}$$.

4. Il parallelogramma ABCD ha lati $AB=1\,cm$, $BC=2{,}5\,cm$ e la diagonale AC perpendicolare ai lati AB e CD. Calcola le lunghezze (*esatte*) delle diagonali AC e BD.

5. Enuncia e dimostra il teorema sui quadrilateri circoscrivibili ad una circonferenza (*solo la condizione necessaria*).

6. Dato il triangolo ABC, rettangolo in C, prendiamo sull'ipotenusa AB un punto D tale che $AC=AD$.
Dal punto D conduciamo la perpendicolare ad AB che interseca il cateto BC in E ed il prolungamento del cateto AC in F. Dimostra che:



a. AE è bisettrice dell'angolo $\hat{A}$;
b. i triangoli BDE e CEF sono uguali;
c. le rette CD e BF sono parallele (*può forse essere utile porre* $C\hat{E}D=2\alpha$);
d. il quadrilatero BFCD è inscrivibile in una circonferenza.

Alunno/a: ________________________________ Classe: **2^D**

Esercizio	*Punteggio*
1	/16
2	/16
3	/8
4	/8
5	/10
6	/32
Totale	/90

Voto approssimato: $\frac{punteggio\ \ totale}{10}+2=$ Voto finale:

Per ogni esercizio, il punteggio viene assegnato sulla base di:

(A) **Completezza**: sviluppo e scelta del procedimento concettuale o dei contenuti teorici;

(B) **Calcolo**: utilizzo degli algoritmi e delle procedure di calcolo;

(C) **Linguaggio**: utilizzo del linguaggio specifico della disciplina (anche grafico e simbolico) adeguato;

(D) Argomentazione: giustificare motivare e verificare i procedimenti utilizzati e le soluzioni ottenute.

<u>*2^D*</u> *- Correzione compito n°2*

1.

a. $\sqrt[9]{a^3+8+6a^2+12a}=\sqrt[9]{(a+2)^3}=\sqrt[3]{a+2}$;

b. $\sqrt[6]{\frac{1}{9}+a^2+\frac{2}{3}a}=\sqrt[6]{\frac{9a^2+6a+1}{9}}=\sqrt[6]{\frac{(3a+1)^2}{3^2}}=\sqrt[3]{\frac{3a+1}{3}}$;

c. $\sqrt[6]{a^6+b^6}$ non si semplifica;

d. $\sqrt[6]{\frac{x^2+2x+1}{a^2+4a+4}}=\sqrt[6]{\frac{(x+1)^2}{(a+2)^2}}=\sqrt[3]{\frac{x+1}{a+2}}$;

e. $\sqrt{x^2+\frac{a^4}{x^2}+2a^2}=\sqrt{\frac{x^4+a^4+2a^2x^2}{x^2}}=\sqrt{\frac{(x^2+a^2)^2}{x^2}}=\frac{x^2+a^2}{x}$;

f. $\sqrt[6]{1728}=\sqrt[6]{2^6\cdot 3^3}=2\sqrt{3}$;

g. $\sqrt[3]{\frac{(a-1)^6a^4}{27}}=\frac{a(a-1)^2}{3}\sqrt[3]{a}$;

h. $\sqrt{\frac{18a^5(x+3)^3}{x^4}}=\frac{3a^2(x+3)}{x^2}\sqrt{2a(x+3)}$.

2.

a. $\sqrt[3]{\frac{(a+b)(a-b)}{(a-b)(a^2+ab+b^2)}}\cdot\sqrt[3]{\frac{a^2+ab+b^2}{ab}}\cdot\sqrt[3]{\frac{ab}{a+b}}=1$;

b. $\sqrt{\frac{a}{(a-b)^4}}\cdot\sqrt{\frac{a^4+b^4-2a^2b^2}{a^2b^2}}:\sqrt{\frac{2ab+a^2+b^2}{ab}}=\sqrt{\frac{a}{(a-b)^4}}\cdot\sqrt{\frac{(a+b)^2(a-b)^2}{a^2b^2}}\cdot\sqrt{\frac{ab}{(a+b)^2}}=$

$\sqrt{\frac{1}{b(a-b)^2}}=\frac{1}{(a-b)\sqrt{b}}$;

c. $\sqrt{a\sqrt[3]{a}}=\sqrt{\sqrt[3]{a^3\cdot a}}=\sqrt[6]{a^4}=\sqrt[3]{a^2}$;

d. $(2-\sqrt{2})^3=8-12\sqrt{2}+12-2\sqrt{2}=20-14\sqrt{2}$;

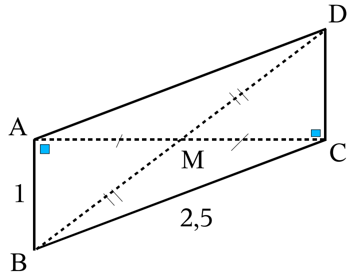
e. $(2\sqrt{5}+1)(2\sqrt{5}-1)-(\sqrt{5}-1)^2-(\sqrt{5}-3)^2:2=20-1-(5-2\sqrt{5}+1)-(5-6\sqrt{5}+9):2=$

$19-6+2\sqrt{5}-7+3\sqrt{5}=6+5\sqrt{5}$.

3. $\frac{2}{x\sqrt{2}-1}+\frac{\sqrt{2}+1}{(x\sqrt{2}+1)(x\sqrt{2}-1)}=\frac{\sqrt{2}+1}{x\sqrt{2}+1}$; $\quad C.E:\ x\neq\pm\frac{1}{\sqrt{2}}$

$2(x\sqrt{2}+1)+\sqrt{2}+1=(\sqrt{2}+1)(x\sqrt{2}-1)\ \Rightarrow\ 2x\sqrt{2}+2+\sqrt{2}+1=2x-\sqrt{2}+x\sqrt{2}-1\ \Rightarrow$

$x(2-\sqrt{2})=4+2\sqrt{2}\ \Rightarrow\ x=\frac{2(2+\sqrt{2})}{2-\sqrt{2}}=\frac{2(2+\sqrt{2})^2}{(2+\sqrt{2})(2-\sqrt{2})}=\frac{2(4+4\sqrt{2}+2)}{4-2}=6+4\sqrt{2}$ *sol. acc.*



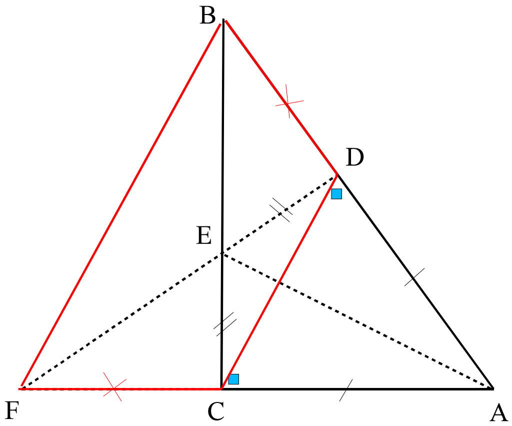
4. Per il teo. di Pitagora: $AC=\sqrt{BC^2-AB^2}=\sqrt{(\frac{5}{2})^2-1^2}=\frac{\sqrt{21}}{2}$.

   Poiché le diagonali di un parallelogramma si intersecano nel loro punto medio: $AM=MC/2=\sqrt{21}/4$.

   Applichiamo ancora il teo. di Pitagora al triangolo ABM:

   $BM=\sqrt{AB^2+AM^2}=\sqrt{1^2+(\frac{\sqrt{21}}{4})^2}=\frac{\sqrt{37}}{1}$. Quindi $BD=2\,BM=\frac{\sqrt{37}}{2}$.

5. Vedi libro di testo, teorema 9 pag. 684.
6.



   a. I triangoli ACE e ADE sono uguali per il criterio di uguaglianza dei triangoli rettangoli ($AC=AD$ per ipotesi; AE in comune; $A\hat{C}E=A\hat{D}E=90°$ per ipotesi - in altri termini EC ed ED sono i segmenti di tangente condotti dal punto E alla circonferenza di centro A e raggio AC). In particolare $C\hat{A}E=D\hat{A}E$ c.v.d.
   b. I triangoli BDE e CEF sono uguali per il secondo criterio di uguaglianza ($CE=DE$ per dim. punto *a*; $E\hat{C}F=E\hat{D}B=90°$ per ipotesi; $C\hat{E}F=D\hat{E}B$ perché opposti al vertice) c.v.d.
   c. I triangoli CDE e BED sono isosceli per le dimostrazioni dei punti *a* e *b*; inoltre hanno angoli al vertice uguali $C\hat{E}D=B\hat{E}D=2\alpha$ perché opposti al vertice, per cui hanno angoli alla base uguali, che misurano tutti $90°-\alpha$. Quindi le rette CD e BF sono parallele perché, tagliate dalla trasversale BC, formano angoli alterni interni uguali: $D\hat{C}E=E\hat{B}F=90°-\alpha$ c.v.d.
   d. Il quadrilatero BFCD è un trapezio (per il punto *c*) isoscele (per il punto *b*). Di conseguenza, gli angoli adiacenti a ciascuna base sono uguali tra loro, e quelli adiacenti ad una base sono supplementari a quelli adiacenti all'altra, per cui gli angoli opposti sono supplementari c.v.d. (per chiarezza, se poniamo $\hat{B}=\hat{F}=\beta$, allora $\hat{C}=\hat{D}=180°-\beta$, e quindi $\hat{B}+\hat{C}=180°$).