Appunti di matematica

5^F linguistico

2009 - 2010

IIS "A. Rosmini" - Grosseto

Appunti sulle funzioni trascendenti

Indice

Le funzioni goniometriche

Equazioni e disequazioni goniometriche

Funzioni esponenziali

1. Potenze con esponente reale

Nel corso dei tuoi studi di matematica, hai incontrato per la prima volta il concetto di potenza nella scuola media; l'hai poi ripreso alle superiori, estendendo in diverse occasioni il suo significato. Riprendiamo brevemente in esame i casi a te noti, per compiere quindi un ulteriore, e probabilmente ultimo, passo di questo cammino.

◆ Potenze con esponente intero positivo

La definizione di partenza è quella di potenza come "moltiplicazione ripetuta":

a^n è il prodotto di n fattori uguali ad a: $\boldsymbol{a^n = \underbrace{a \cdot a \cdot a \cdot \ldots \cdot a}_{n\ fattori}}$.

Perché questa scrittura abbia significato, la base a può essere un qualunque numero reale, mentre l'esponente n deve essere un numero naturale (cioè intero e positivo) maggiore di zero.

Come certamente ricorderai, dalla precedente definizione derivano le seguenti proprietà delle potenze.

1) Il *prodotto di due potenze aventi la stessa base* è una potenza che ha:

- la *stessa base* delle potenze date
- come esponente la *somma degli esponenti.*

In formula: $\boldsymbol{a^x \cdot a^y = a^{x+y}}$.

Esempi: $2^3 \cdot 2^5 = 2^{3+5} = 2^8$; $4^2 \cdot 4^3 = 4^{2+3} = 4^5$; $5^3 \cdot 5 = 5^{3+1} = 5^4$.

Infatti: $2^3 \cdot 2^5 = \underbrace{(2 \cdot 2 \cdot 2)}_{3\ fattori} \cdot \underbrace{(2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2)}_{5\ fattori} = \underbrace{2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2}_{8\ fattori} = 2^8$.

2) Il *quoziente di due potenze aventi la stessa base* è una potenza che ha:

- la *stessa base* delle potenze date
- come esponente la *differenza degli esponenti.*

In formula: $\boldsymbol{a^x : a^y = a^{x-y}}$.

Esempi: $5^7 : 5^3 = 5^{7-3} = 5^4$; $7^4 : 7^3 = 7^{4-3} = 7^1 = 7$; $3^5 : 3 = 3^{5-1} = 3^4$.

Infatti: $5^7 : 5^3 = \frac{5^7}{5^3} = \frac{\overbrace{5 \cdot 5 \cdot 5 \cdot 5 \cdot 5 \cdot 5 \cdot 5}^{7\ fattori}}{\underbrace{5 \cdot 5 \cdot 5}_{3\ fattori}} = \overbrace{5 \cdot 5 \cdot 5 \cdot 5}^{4\ fattori} = 5^4$

avendo semplificato i tre fattori del denominatore con tre dei sette fattori a numeratore.

3) La *potenza di una potenza* è una potenza che ha:

- la *stessa base* della potenza data
- come esponente il *prodotto degli esponenti.*

In formula: $(a^x)^y = a^{xy}$.

Esempi: $(3^4)^2 = 3^{4\cdot 2} = 3^8$; $(4^2)^3 = 4^{2\cdot 3} = 4^6$; $(2^3)^3 = 2^{3\cdot 3} = 2^9$.

Infatti: $(3^4)^2 = \underbrace{3^4\cdot 3^4}_{2\ fattori} = \underbrace{3\cdot 3\cdot 3\cdot 3}_{4\ fattori}\cdot\underbrace{3\cdot 3\cdot 3\cdot 3}_{4\ fattori} = 3^8$.

4) La *potenza di un prodotto* si può svolgere elevando a potenza i singoli fattori del prodotto.

In formula: $(a\cdot b)^x = a^x\cdot b^x$.

Esempi: $(3\cdot 4)^2 = 3^2\cdot 4^2$; $(4\cdot 6)^3 = 4^3\cdot 6^3$; $2^4\cdot 5^4 = (2\cdot 5)^4 = 10^4 = 10.000$.

Infatti: $(3\cdot 4)^2 = \underbrace{(3\cdot 4)\cdot(3\cdot 4)}_{2\ fattori} = \underbrace{3\cdot 3}_{2\ fattori}\cdot\underbrace{4\cdot 4}_{2\ fattori} = 3^2\cdot 4^2$.

5) La *potenza di un quoziente* si può svolgere elevando a potenza i singoli termini del quoziente.

In formula: $\left(\frac{a}{b}\right)^x = \frac{a^x}{b^x}$.

Esempi: $\left(\frac{5}{3}\right)^2 = \frac{5^2}{3^2}$; $\left(\frac{4}{7}\right)^5 = \frac{4^5}{7^5}$; $\frac{12^3}{4^3} = \left(\frac{12}{4}\right)^3 = 3^3 = 27$.

Infatti: $\left(\frac{5}{3}\right)^2 = \underbrace{\left(\frac{5}{3}\right)\cdot\left(\frac{5}{3}\right)}_{2\ fattori} = \frac{\overbrace{5\cdot 5}^{2\ fattori}}{\underbrace{3\cdot 3}_{2\ fattori}} = \frac{5^2}{3^2}$.

Ricorda che non esiste nessuna proprietà che si possa applicare alla somma di potenze o alla potenza di una somma:

- $5^3 + 5^2 = 125 + 25 = 150$ e non $5^5 = 3125$;
- $5^5 - 5^2 = 3125 - 25 = 3100$ e non $5^3 = 125$;
- $(4+3)^2 = 7^2 = 49$ e non $4^2 + 3^2 = 16 + 9 = 25$;
- $(12-6)^3 = 6^3 = 216$ e non $12^3 - 6^3 = 1728 - 216 = 1512$.

In breve, possiamo dire che:

- *la potenza di un prodotto è uguale al prodotto delle potenze;*
- *la potenza di un quoziente è uguale al quoziente delle potenze;*
- *la potenza di una somma <u>non</u> è uguale alla somma delle potenze.*

◆ Potenze con esponente uguale a zero

In seguito, abbiamo applicato la seconda delle precedenti proprietà alla divisione tra due potenze aventi, oltre alla stessa base, anche lo stesso esponente.

Abbiamo ottenuto, ad esempio: $5^3 : 5^3 = 5^{3-3} = 5^0$, ma ci siamo trovati in difficoltà nel dare un significato al risultato ottenuto. Abbiamo però svolto l'operazione in questo modo:

$$5^3 : 5^3 = \frac{5^3}{5^3} = \frac{\overbrace{5\cdot 5\cdot 5}^{3\ fattori}}{\underbrace{5\cdot 5\cdot 5}_{3\ fattori}} = 1$$ semplificando i fattori a numeratore con quelli a denominatore.

Poiché un'operazione deve ammettere un unico risultato, indipendentemente dal modo in cui viene eseguita, è necessario che $5^0=1$, ovvero che il risultato ottenuto applicando la proprietà delle potenze sia uguale a quello ottenuto tramite la proprietà invariantiva delle frazioni.
Poiché questo ragionamento può essere ripetuto per ogni valore della base, abbiamo quindi definito $\boldsymbol{a^0=1}$ per ogni valore reale della base *a*, tranne che per $a=0$.

Nota: la scrittura 0^0 resta priva di significato, perché non può essere ottenuta tramite il ragionamento precedente. Infatti: $0^3 : 0^3 = 0 : 0$ *operazione indeterminata* .

◆ Potenze con esponente intero negativo

Abbiamo quindi applicato la seconda proprietà alla divisione tra due potenze aventi la stessa base ed in cui l'esponente del dividendo (il primo termine) era minore dell'esponente del divisore (il secondo termine). Ad esempio: $5^3 : 5^7 = 5^{3-7} = 5^{-4}$.
Anche in questo caso, però, non era chiaro come dovesse essere interpretato il risultato ottenuto.
Abbiamo allora svolto l'operazione con un diverso procedimento:

$$5^3 : 5^7 = \frac{5^3}{5^7} = \frac{\overbrace{5\cdot5\cdot5}^{3\ fattori}}{\underbrace{5\cdot5\cdot5\cdot5\cdot5\cdot5\cdot5}_{7\ fattori}} = \frac{1}{\underbrace{5\cdot5\cdot5\cdot5}_{4\ fattori}} = \frac{1}{5^4}$$

semplificando i tre fattori del numeratore con tre dei sette fattori del denominatore.
Anche in questo caso, poiché un'operazione deve ammettere un unico risultato, indipendentemente dal modo in cui viene svolta, è necessario che $5^{-4}=1/5^4$, ovvero che il risultato ottenuto applicando la proprietà delle potenze sia uguale a quello ottenuto tramite la proprietà invariantiva delle frazioni.
Ripetendo questo ragionamento per un generico valore della base, abbiamo definito una potenza che ha per base un qualunque numero reale *a* diverso da zero e per esponente un numero intero negativo $-n$. Tale quantità è uguale alla potenza avente per base $1/a$ (ovvero l'inversa o reciproca della base data) ed esponente *n* (ossia l'opposto di quello iniziale).

In simboli: $\boldsymbol{a^{-n} = \frac{1}{a^n} = \left(\frac{1}{a}\right)^n}$.

Nota: anche nel caso dell'esponente negativo, la base non può essere uguale a zero, perché, altrimenti, si otterrebbe una divisione per zero (operazione priva di significato). Ad esempio: $0^{-2} = \frac{1}{0^2}$ *operazione impossibile* .

Applichiamo la precedente definizione a qualche esempio:

- $2^{-3} = \left(\frac{1}{2}\right)^3 = \frac{1}{8}$; $(-3)^{-2} = \left(-\frac{1}{3}\right)^2 = \frac{1}{9}$; $\left(\frac{1}{4}\right)^{-3} = 4^3 = 64$; $\left(-\frac{5}{8}\right)^{-2} = \left(-\frac{8}{5}\right)^2 = \frac{64}{25}$.

- **Potenze con esponente razionale**

All'inizio del terzo anno avremmo dovuto definire una potenza la cui base è un numero reale a (con qualche limitazione) ed il cui esponente è una frazione p/q . Tale potenza si definisce come il radicale che ha per indice q e per radicando a^p .

In simboli: $\boldsymbol{a^{\frac{p}{q}}=\sqrt[q]{a^p}}$.

Normalmente, se l'esponente è razionale, si considera solo il caso in cui la base a sia positiva o nulla: $a\geq 0$; in caso contrario, infatti, si potrebbero ottenere scritture prive di significato (radici con indici pari di numeri negativi).

Ad esempio, la potenza $(-5)^{\frac{3}{4}}$ è priva di significato nell'insieme dei numeri reali, perché:

$(-5)^{\frac{3}{4}}=\sqrt[4]{(-5)^3}=\sqrt[4]{-125}$ che non ammette risultato in $\mathbb{R}$.

Combinando le regole precedenti, possiamo definire la potenza con esponente razionale negativo:

$$\boldsymbol{a^{-\frac{p}{q}}=\frac{1}{a^{p/q}}=\frac{1}{\sqrt[q]{a^p}}} .$$

In questo caso, la base a può essere un numero reale positivo, ma non uguale a zero: $a>0$.

Esempi

- $3^{2/7}=\sqrt[7]{3^2}=\sqrt[7]{9}$;
- $6^{-3/5}=(\frac{1}{6})^{3/5}=\sqrt[5]{\frac{1}{6^3}}=\frac{1}{\sqrt[5]{216}}$;
- $(\frac{2}{3})^{-2/3}=(\frac{3}{2})^{2/3}=\sqrt[3]{(\frac{3}{2})^2}=\sqrt[3]{\frac{9}{4}}$;
- $(-6)^{3/8}=\sqrt[8]{(-6)^3}=\sqrt[8]{-216}$ *non ha risultato* ;
- $0^{-\frac{1}{2}}=\frac{1}{0^{1/2}}=\frac{1}{0}$ *non ha risultato* .

Può sembrare che la nostra idea di definire una potenza ad esponente frazionario come una radice sia del tutto arbitraria. Cerchiamo quindi di giustificare questa regola.

Ricordiamo che, per definizione di radice quadrata:

- $\sqrt{a}=b$ se e solo se $b^2=a$.

Possiamo esprimere questa relazione anche dicendo che:

- $\sqrt{a}=$ "il numero che, elevato al quadrato, fornisce per risultato a", ovvero: $(\sqrt{a})^2=a$.

La regola che abbiamo appena introdotto afferma che: $\sqrt{a}=a^{1/2}$.

Ci chiediamo, quindi, se per il simbolo $a^{1/2}$ sarà valida la stessa proprietà di $\sqrt{a}$.
La risposta è affermativa in quanto, applicando la terza proprietà delle potenze, otteniamo:

- $(a^{1/2})^2 = a^{\frac{1}{2}\cdot 2} = a$; ovvero:
- $a^{1/2} =$ "il numero che, elevato al quadrato, fornisce per risultato *a*".

E' quindi giustificata la definizione che afferma l'equivalenza dei simboli $\sqrt{a}$ e $a^{1/2}$, in quanto entrambi hanno lo stesso significato.
Ripetendo queste considerazioni in forma generale, si arriva alla definizione data:

- $a^{\frac{p}{q}} = \sqrt[q]{a^p}$ in quanto entrambi questi simboli rappresentano:

"il numero che, elevato alla potenza di esponente *q*, fornisce per risultato a^p ". Infatti:

- $(a^{\frac{p}{q}})^q = a^{\frac{p}{q}\cdot q} = a^p$ per la proprietà della potenza di una potenza;
- $(\sqrt[q]{a^p})^q = a^p$ per la definizione di radice.

◆ **Potenze con esponente irrazionale**

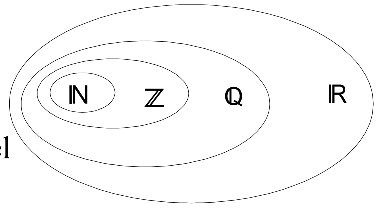


Fig. 1 Insiemi numerici

Nei paragrafi precedenti abbiamo ripercorso le varie estensioni del concetto di potenza, nel corso delle quali:

- abbiamo rinunciato alla richiesta che la base potesse essere un qualunque numero reale, limitandoci a prendere la base tra i numeri reali positivi;
- ma, in compenso, abbiamo allargato l'insieme in cui è definito l'esponente, passando dai soli numeri interi positivi a tutti i numeri naturali (insieme ℕ, grazie all'aggiunta dello zero), poi ai numeri interi relativi (insieme ℤ), ed infine ai numeri razionali (insieme ℚ).

Ci chiediamo se questo procedimento può proseguire, e se è possibile definire una potenza il cui esponente sia un numero irrazionale, e quindi se è possibile far variare l'esponente sull'intero insieme ℝ dei numeri reali.
La risposta è positiva, ma non potremo darne una spiegazione molto rigorosa.

Come esempio particolare, cercheremo di dare un significato al simbolo $2^{\sqrt{2}}$.
Il numero $\sqrt{2} \simeq 1{,}41421$ è *irrazionale*, ovvero *decimale illimitato non periodico*.
Non posso scrivere tutte le infinite cifre decimali di $\sqrt{2}$, ma posso considerare la successione crescente delle sue approssimazioni per difetto:

1; 1,4; 1,41; 1,414; 1,4142; ...

Prendendone la potenza di base 2, otterrò la corrispondente successione di potenze:

2^1; $2^{1,4}$; $2^{1,41}$; $2^{1,414}$; $2^{1,4142}$; ...

Ognuna di tali potenze ha come esponente un numero razionale, quindi ne posso calcolare il valore trasformando la potenza in radice (con la definizione del paragrafo precedente) e calcolando il valore della radice con la calcolatrice:

$$2^1=2 \quad ; \quad 2^{1,4}\simeq 2{,}639 \quad ; \quad 2^{1,41}\simeq 2{,}657 \quad ; \quad 2^{1,414}\simeq 2{,}6647 \quad ; \quad 2^{1,4142}\simeq 2{,}66512 \quad ; \ldots$$

Posso poi considerare la successione decrescente delle approssimazioni per eccesso di $\sqrt{2}$:

2; 1,5; 1,42; 1,415; 1,4143; ...

e la corrispondente successione delle potenze in base 2:

$$2^2=4 \quad ; \quad 2^{1,5}\simeq 2{,}828 \quad ; \quad 2^{1,42}\simeq 2{,}676 \quad ; \quad 2^{1,415}\simeq 2{,}6666 \quad ; \quad 2^{1,4143}\simeq 2{,}66530 \quad ; \ldots$$

Ho quindi due successioni di potenze tali che:

- i valori della prima sono sempre inferiori ai valori della seconda;
- i valori della prima sono crescenti;
- i valori della seconda sono decrescenti.

Puoi allora vedere che i valori delle due successioni si avvicinano indefinitamente, in modo che la distanza che le separa tenda a zero. Posso allora definire $2^{\sqrt{2}}$ come il numero irrazionale a cui tendono (cioè: "si avvicinano") le precedenti successioni di potenze quando i loro esponenti tendono a $\sqrt{2}$.

In termini ancora più intuitivi, immagina che la prima successione sia un "treno" che si muove verso destra sulla retta reale, e la seconda successione un "treno" che si muove verso sinistra. Il valore $2^{\sqrt{2}}$ è l'ascissa del punto che rimane "schiacciato" tra i due treni quando il numero di cifre che considero per l'esponente diventa sempre più grande.

Se hai una calcolatrice scientifica, ma non troppo moderna, puoi trovare il valore numerico approssimato di $2^{\sqrt{2}}$ con la seguente sequenza di tasti: 2; x^y ; 2; $\sqrt{\ }$; = ottenendo $2^{\sqrt{2}}\simeq 2{,}66514$.

Generalizzando tali considerazioni, possiamo definire delle potenze a^x aventi come *esponente x un qualunque numero reale, sia razionale che irrazionale.*

D'ora in avanti assumeremo che la *base a debba essere un numero reale positivo e diverso da 1*:

- Non diamo ad *a* valori negativi o nulli perché potremmo ottenere scritture prive di significato.

  Esempi: $(-1)^{\frac{1}{2}}=\sqrt{-1}$, che non esiste in $\mathbb{R}$; $0^{-1}=\frac{1}{0}$ *operazione impossibile.*

- Non è poi interessante assegnare alla base il valore $a=1$, perché $1^x=1$ per qualunque valore reale di *x*. La relazione $y=1^x$ rappresenta quindi una funzione costante, il cui grafico cartesiano è la retta di equazione $y=1$, parallela all'asse *x*.

Nota. A scanso di equivoci, precisiamo che per tutte le generalizzazioni del concetto di potenza che abbiamo esposto valgono le "vecchie" proprietà delle potenze che conosci dal primo anno.

Puoi quindi continuare tranquillamente ad utilizzarle, non solo per le potenze con esponente naturale, ma anche se l'esponente è un qualunque numero reale.

2. La funzione esponenziale

- **Definizione**

Si chiamano *funzioni esponenziali* quelle in cui la *variabile indipendente x figura all'esponente* di una data potenza.

Ad esempio, sono funzioni esponenziali: $y=10^x$, $y=(3/5)^x$.

Le più semplici funzioni esponenziali hanno la forma $y=a^x$, dove, come abbiamo visto nel paragrafo precedente, l'esponente *x* può essere un qualunque numero reale, mentre la base *a* è un numero reale positivo, ma diverso da 1: $x \in \mathbb{R}$; $a>0$, ma $a \neq 1$.

L'importanza delle funzioni esponenziali deriva dal fatto che numerose grandezze fisiche, chimiche, economiche, ecc. variano secondo leggi esponenziali. Con vostro grande dispiacere, mi è difficile darvi esempi specifici.

Il comportamento della funzione esponenziale, e di conseguenza l'andamento del suo grafico (chiamato *curva esponenziale*) varia a seconda del valore della base *a*.

Esattamente, dobbiamo distinguere le seguenti eventualità:

- la *base* è un numero *a maggiore di* 1
- la *base* è un numero *a positivo, ma minore di* 1.

- **La funzione $y=a^x$ nel caso $a>1$**

Tracciamo il grafico della funzione esponenziale $y=2^x$, la cui base $a=2$ è un numero reale maggiore di 1.

Compiliamo quindi la relativa tabella di corrispondenza:

x	-3	-2	-1	0	1	2	3
y	1/8	1/4	1/2	1	2	4	8

Otteniamo il grafico di figura 2, da cui possiamo osservare alcune proprietà che continuano a essere valide anche per ogni altra funzione esponenziale $y=a^x$ con $a>1$.

Per convincertene, puoi provare a disegnare per punti il grafico della funzione $y=3^x$.

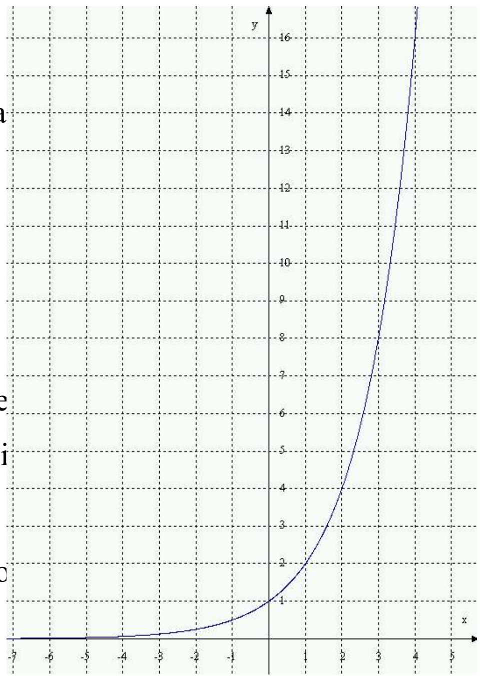


Fig. 2 Funzione y=2^x

Per una funzione esponenziale del tipo $y=a^x$ con $a>1$ valgono le seguenti proprietà.

- Il grafico della funzione interseca l'asse *y* nel punto di coordinate $(0,1)$.

  Infatti, assegnando $x=0$, ottengo $y=a^0=1$.

- Il grafico è interamente situato al di sopra dell'asse *x*.

  Infatti, qualunque sia il valore che attribuiamo alla variabile *x*, il corrispondente valore della funzione è sempre positivo: $y=a^x>0 \quad \forall x \in \mathbb{R}$.

- Il *dominio* della funzione è l'insieme $\mathbb{R}$ dei numeri reali.

  Infatti, come abbiamo visto nel precedente paragrafo, ad ogni valore reale attribuito all'esponente *x*, corrisponde sempre uno ed un solo valore della variabile *y*, quindi la funzione è definita $\forall x \in \mathbb{R}$.

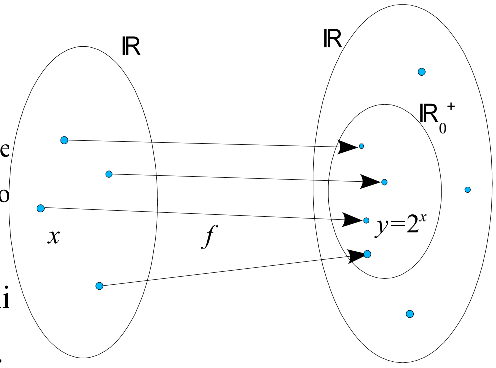


Fig. 3 Dominio e codominio della funzione esponenziale

- Il *codominio* della funzione è l'insieme dei numeri reali strettamente positivi, che a volte viene indicato con $\mathbb{R}_0^+$.

  Non affermiamo solo che i valori della funzione sono *sempre* numeri positivi, ma anche che essi comprendono *tutti* i numeri positivi. Infatti, puoi vedere dal grafico di figura 2 che, fissato un qualunque valore di *y* tale che $y>0$, esiste sempre un punto della curva esponenziale che ammette quel valore come ordinata.

- La funzione è *crescente*, ovvero, se i valori di *x* crescono, allora aumentano anche i corrispondenti valori di $y=a^x$.

  In simboli: se $x_1<x_2$, allora $a^{x_1}<a^{x_2}$.

  Oppure, se $x_1>x_2$, allora $a^{x_1}>a^{x_2}$. Sul grafico, questo corrisponde al fatto che la curva esponenziale “sale” se ci spostiamo su di essa da sinistra verso destra, cioè nella direzione delle *x* crescenti.

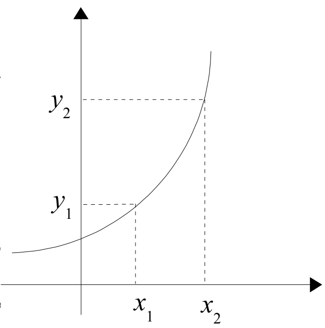


Fig. 4 Funzione crescente

- Essendo crescente, la funzione data è *iniettiva*, ovvero a valori distinti di *x* corrispondono sempre valori distinti di *y*. In simboli: $x_1 \neq x_2 \quad \Leftrightarrow \quad y_1 \neq y_2$.
- Confrontando la curva esponenziale con la retta parallela all'asse *x* di equazione $y=1$, si deduce che: $a^x>1 \quad \Rightarrow \quad x>0$; $a^x=1 \quad \Rightarrow \quad x=0$; $0<a^x<1 \quad \Rightarrow \quad x<0$.
- Osserviamo che: *se* $x \to +\infty$ *allora* $y \to +\infty$; ossia, se *x* assume valori positivi che crescono indefinitamente, allora anche i corrispondenti valori di $y=a^x$ crescono in maniera illimitata. In sintesi, si dice che a^x *tende a più infinito, per x che tende a più infinito.*
- Inoltre: *se* $x \to -\infty$ *allora* $y \to 0$; ossia, se *x* assume valori negativi che crescono indefinitamente in valore assoluto, allora i corrispondenti valori di $y=a^x$ tendono a zero. Sinteticamente si dice che a^x *tende a zero, per x che tende a meno infinito.*
- Dal punto di vista geometrico, poiché la curva esponenziale si avvicina indefinitamente all'asse *x*, si dice che tale retta costituisce un *asintoto orizzontale sinistro* per quella curva.

- **La funzione $y=a^x$ nel caso $0<a<1$**

Come esempio, tracciamo il grafico della funzione esponenziale $y=(1/2)^x$ la cui base, $a=1/2$, è un numero reale positivo e minore di 1.

Compiliamo una tabella di corrispondenza:

x	-3	-2	-1	0	1	2	3
y	8	4	2	1	1/2	1/4	1/8

Otteniamo il grafico di figura 5, da cui possiamo osservare alcune proprietà che continuano a essere valide anche per ogni altra funzione esponenziale $y=a^x$ con $0<a<1$.

Per convincertene, puoi provare a disegnare per punti il grafico della funzione $y=(1/3)^x$.

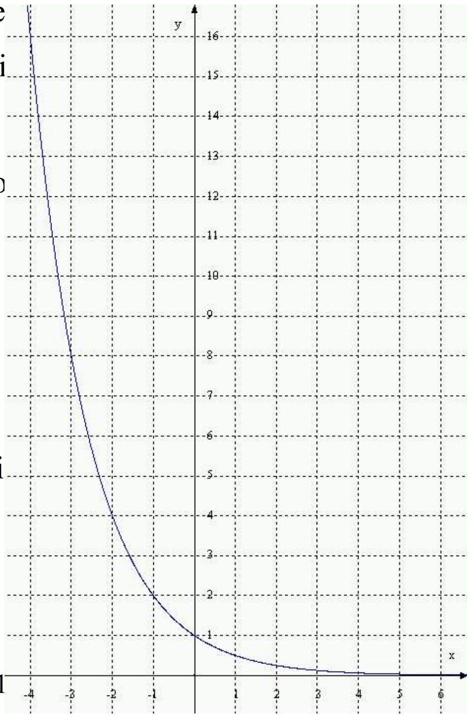


Fig. 5 Funzione y=(1/2)^x

Per una funzione esponenziale del tipo $y=a^x$ con $0<a<1$ valgono le seguenti proprietà.

- Il grafico della funzione interseca ancora l'asse *y* nel punto di coordinate $(0,1)$.

  Infatti, assegnando $x=0$, ottengo $y=a^0=1$.
- Il grafico è sempre interamente situato al di sopra dell'asse *x*.

  Infatti, qualunque sia il valore che attribuiamo alla variabile *x*, il corrispondente valore della funzione è sempre positivo:

  $y=a^x>0 \quad \forall x \in \mathbb{R}$.
- Il *dominio* della funzione è ancora l'insieme $\mathbb{R}$ dei numeri reali.
- Il *codominio* della funzione è sempre l'insieme dei numeri reali strettamente positivi $\mathbb{R}_0^+$.
- La funzione è *decrescente*, ovvero, se i valori di *x* crescono, allora i corrispondenti valori di $y=a^x$ decrescono. In simboli: se $x_1<x_2$, allora $a^{x_1}>a^{x_2}$.

  Oppure, se $x_1>x_2$, allora $a^{x_1}<a^{x_2}$. Sul grafico, questo corrisponde al fatto che la curva esponenziale "scende" se ci spostiamo su di essa da sinistra verso destra, cioè nella direzione delle *x* crescenti.

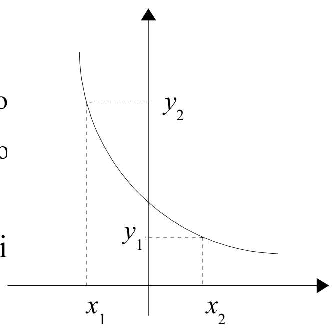


Fig. 6 Funzione decrescente

- Essendo decrescente, la funzione data è *iniettiva*, ovvero a valori distinti di *x* corrispondono sempre valori distinti di *y*.

  In simboli: $x_1 \neq x_2 \iff y_1 \neq y_2$.
- Confrontando la curva esponenziale con la retta parallela all'asse *x* di equazione $y=1$, si deduce che:

$a^x > 1 \;\Rightarrow\; x < 0$; $a^x = 1 \;\Rightarrow\; x = 0$; $0 < a^x < 1 \;\Rightarrow\; x > 0$.

- Osserviamo che: *se* $x \to +\infty$ *allora* $y \to 0$; ossia, se *x* assume valori positivi che crescono indefinitamente, allora anche i corrispondenti valori di $y = a^x$ tendono a zero. In sintesi, si dice che a^x *tende a zero, per x che tende a più infinito.*
- Inoltre: *se* $x \to -\infty$ *allora* $y \to +\infty$; ossia, se *x* assume valori negativi che crescono indefinitamente in valore assoluto, allora i corrispondenti valori di $y = a^x$ crescono in maniera illimitata. Sinteticamente si dice che a^x *tende a più infinito, per x che tende a meno infinito.*
- Dal punto di vista geometrico, poiché la curva esponenziale si avvicina indefinitamente all'asse *x*, si dice che tale retta costituisce un *asintoto orizzontale destro* per quella curva.

Osserva in particolare le proprietà che cambiano rispetto al caso in cui $a > 1$.

Confrontando le tabelle di corrispondenza relative alle funzioni $y = 2^x$ e $y = (1/2)^x$, puoi notare che una delle due si ottiene dall'altra cambiando segno ai valori di *x*.

Questa proprietà è vera per ogni coppia di funzioni esponenziali le cui basi siano l'una l'inversa dell'altra, come $y = a^x$ e $y = (1/a)^x$.

Infatti, partendo da $y = a^x$ e cambiando segno alla *x*, ottengo: $y = a^{-x} = (a^{-1})^x = (\frac{1}{a})^x$.

In termini geometrici, questo significa che, partendo da un punto di coordinate (x, y) che appartiene al grafico di una delle due funzioni e cambiando segno alla *x*, otteniamo un punto di coordinate $(-x, y)$ che appartiene al grafico dell'altra funzione.

Possiamo quindi dire che *i grafici delle funzioni esponenziali* $y = a^x$ *e* $y = (1/a)^x$ *sono simmetrici rispetto all'asse y.*

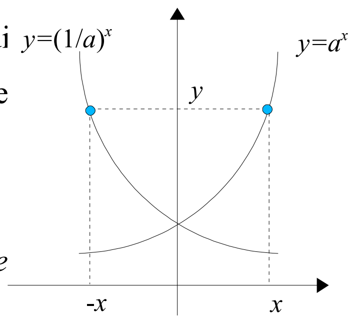


Fig. 7 Simmetria rispetto asse y

3. Equazioni e disequazioni esponenziali

Un'equazione è detta **esponenziale** quando *l'incognita compare ad esponente di una potenza.*

Un'equazione esponenziale si dice **elementare** quando è riducibile alla forma $a^x = k$, dove k è un qualunque numero reale, mentre a è un numero reale positivo e diverso da 1.

L'equazione esponenziale elementare $a^x = k$ esprime la domanda: "qual è l'esponente x a cui devo innalzare la base a per ottenere il risultato k"?

Sono equazioni esponenziali elementari le seguenti:

- $2^x = 8$; $5^x = \frac{1}{25}$; $(\frac{1}{2})^x = 16$; $(\frac{1}{3})^x = -1$.

Per analogia, diciamo che una **disequazione** è **esponenziale** ed **elementare** se si può scrivere in una delle seguenti forme: $a^x < k$; $a^x \le k$; $a^x > k$; $a^x \ge k$.

La relazione $a^x = k$ viene detta *equazione associata* a tali disequazioni.

I seguenti sono esempi di disequazioni esponenziali elementari:

- $2^x > 8$; $5^x \ge \frac{1}{25}$; $(\frac{1}{2})^x \le 16$; $(\frac{1}{3})^x < -1$.

◆ **Caso $a > 1$**

Esempio 1

Cerchiamo la soluzione dell'equazione esponenziale elementare $2^x = 8$.

L'equazione esponenziale che intendiamo risolvere è del tipo $f(x) = g(x)$, dove:

- $f(x) = 2^x$ è la funzione esponenziale di base 2, il cui grafico è una curva esponenziale ad andamento crescente;
- $g(x) = 8$ è una funzione costante, il cui grafico è la retta parallela all'asse x che taglia l'asse y nel punto $(0, 8)$.

Osserviamo che $f(x) = g(x)$ è l'equazione risolvente del sistema:

$\begin{cases} y = f(x) \\ y = g(x) \end{cases}$, il cui significato geometrico è la ricerca dei punti di intersezione tra le due curve. La domanda "per quale valore di x la quantità $f(x)$ è uguale alla quantità $g(x)$?" equivale quindi alla domanda "qual è l'ascissa del punto (o dei punti) di intersezione tra la curva esponenziale e la retta?"

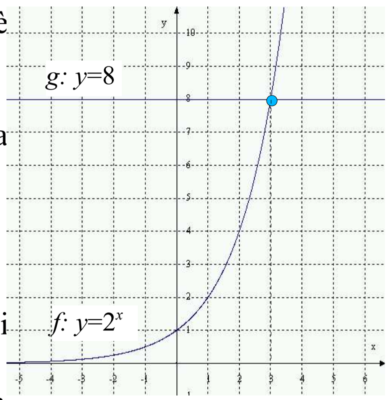


Fig. 8 Equazione $2^x=8$

Vediamo dal grafico che si ha un solo punto di intersezione di coordinate $(3, 8)$.

Deduciamo quindi che l'equazione assegnata ammette l'unica soluzione $x = 3$.

Infatti, sostituendo $x = 3$ nell'equazione data, ottengo: $2^3 = 8$ *vera!*

In realtà, per un'equazione così semplice, era inutile utilizzare la rappresentazione grafica. Avrei potuto semplicemente scrivere il secondo membro come una potenza in base 2: $2^x=8 \Rightarrow 2^x=2^3$.

A questo punto ricordiamo che, essendo la funzione esponenziale con base 2 crescente, essa è *iniettiva*, quindi due potenze aventi la stessa base (nel nostro caso 2) possono dare lo stesso risultato solo se i loro esponenti sono uguali. In simboli: $a^{f(x)}=a^{g(x)} \quad \Rightarrow \quad f(x)=g(x)$.

Nel nostro caso, quindi: $2^x=2^3 \quad \Rightarrow \quad x=3$, come ricavato in precedenza.

Dall'equazione, con l'aiuto del grafico, posso determinare le soluzioni delle disequazioni associate.

- La disequazione $2^x<8$ è del tipo $f(x)<g(x)$, quindi ha come soluzioni quei valori di *x* in corrispondenza dei quali il grafico della funzione $y=f(x)$ si trova al di sotto del grafico della funzione $y=g(x)$.

  Nel nostro caso, la curva esponenziale $y=2^x$ si trova al di sotto della retta $y=8$ per i valori di *x* che si trovano a *sinistra* di $x=3$, quindi: $2^x<8 \quad \Rightarrow \quad x<3$.
- In maniera analoga, la disequazione $2^x>8$ è del tipo $f(x)>g(x)$, quindi ha come soluzioni quei valori di *x* in corrispondenza dei quali il grafico della funzione $y=f(x)$ si trova al di sopra del grafico della funzione $y=g(x)$.

  Nel nostro caso, la curva esponenziale $y=2^x$ si trova al di sopra della retta $y=8$ per i valori di *x* che si trovano a *destra* di $x=3$, quindi: $2^x>8 \quad \Rightarrow \quad x>3$.
- Ovviamente si ha: $2^x\leq 8 \quad \Rightarrow \quad x\leq 3$ e $2^x\geq 8 \quad \Rightarrow \quad x\geq 3$.

Esempio 2

Risolviamo l'equazione esponenziale $5^x=\frac{1}{25}$ e le disequazioni ad essa associate.

Come nel caso precedente, l'equazione data è risolubile algebricamente in quanto il suo secondo membro è esprimibile come potenza di base 5; abbiamo infatti:

$$5^x=\frac{1}{25} \quad \Rightarrow \quad 5^x=\left(\frac{1}{5}\right)^2 \quad \Rightarrow \quad 5^x=5^{-2} \quad \Rightarrow \quad x=-2 \quad .$$

L'ultimo passaggio segue dal fatto che la funzione esponenziale individua una corrispondenza biunivoca tra dominio e codominio; quindi due potenze nella stessa base possono dare lo stesso risultato solo se i loro esponenti sono uguali.

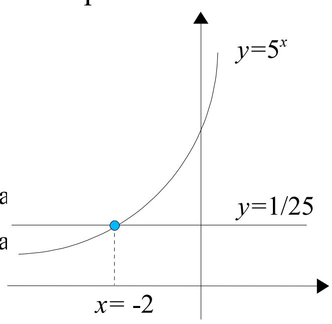


Fig. 9 Equazione $5^x=1/25$

Per risolvere le corrispondenti disequazioni esponenziali, ci serviamo della soluzione dell'equazione associata ed osserviamo che la base $a=5$ è maggiore di 1, per cui la relativa funzione esponenziale è crescente. Dalla figura 9 osservo quindi che:

- $5^x<\frac{1}{25} \Rightarrow x<-2$; $5^x>\frac{1}{25} \Rightarrow x>-2$; $5^x\leq\frac{1}{25} \Rightarrow x\leq -2$; $5^x\geq\frac{1}{25} \Rightarrow x\geq -2$.

Esempio 3

Vogliamo risolvere l'equazione esponenziale $2^x = -3$.

Dal punto di vista algebrico, osservo che il primo membro è positivo per ogni valore reale di *x*, mentre il secondo membro è un numero negativo. Questo ci fa capire che l'equazione data non ha soluzioni, ovvero è impossibile.

Alla stessa conclusione arriviamo anche osservando che la curva esponenziale di equazione $f(x) = 2^x$ e la retta di equazione $g(x) = -3$ non hanno punti in comune.

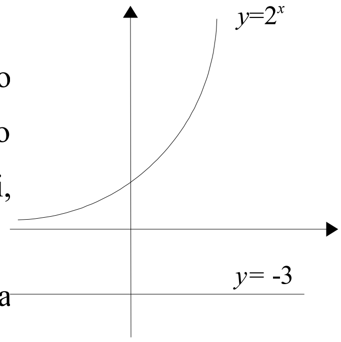


Fig. 10 Equazione $2^x = -3$

E' immediato risolvere le disequazioni associate:

- $2^x < -3 \quad \Rightarrow \quad non\, ha\, soluzioni$; $2^x \leq -3 \quad \Rightarrow \quad non\, ha\, soluzioni$;
- $2^x > -3 \quad \Rightarrow \quad vera \quad \forall x \in \mathbb{R}$; $2^x \geq -3 \quad \Rightarrow \quad vera \quad \forall x \in \mathbb{R}$.

◆ **Caso $\mathbf{0 < a < 1}$**

Esempio 4a

Risolviamo l'equazione esponenziale elementare $\left(\frac{1}{3}\right)^x = 3$ e le disequazioni ad essa associate.

L'equazione data è del tipo $f(x) = g(x)$, dove:

- $f(x) = \left(\frac{1}{3}\right)^x$ è la funzione esponenziale di base $1/3$, il cui grafico è una curva esponenziale ad andamento decrescente;
- $g(x) = 3$ è una funzione costante, il cui grafico è la retta parallela all'asse *x* che taglia l'asse *y* nel punto $(0, 3)$.

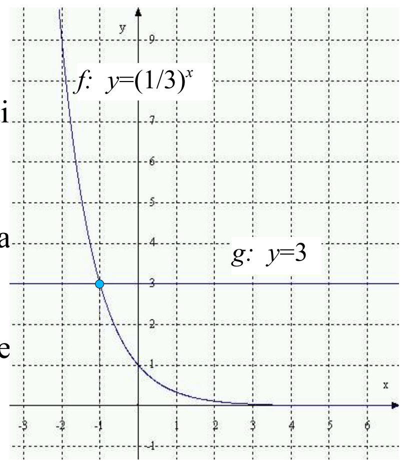


Fig. 11 Equazione $(1/3)^x = 3$

Come in precedenza, possiamo osservare che l'equazione $f(x) = g(x)$ è la risolvente del sistema:

$\begin{cases} y = f(x) \\ y = g(x) \end{cases}$, il cui significato geometrico è la ricerca dei punti di intersezione tra le due curve. La domanda "per quale valore di *x* la quantità $f(x)$ è uguale alla quantità $g(x)$?" equivale quindi alla domanda "qual è l'ascissa del punto (o dei punti) di intersezione tra la curva esponenziale e la retta?"

Vediamo dal grafico che si ha un solo punto di intersezione di coordinate $(-1, 3)$.

Deduciamo quindi che l'equazione assegnata ammette l'unica soluzione $x = -1$.

Infatti, sostituendo $x = -1$ nell'equazione data, ottengo: $(1/3)^{-1} = 3 \quad vera\,!$

Volendo invece utilizzare un metodo algebrico, avremmo potuto scrivere il secondo membro come una potenza in base $1/3$:

$$\left(\frac{1}{3}\right)^x=3 \quad \Rightarrow \quad \left(\frac{1}{3}\right)^x=\left(\frac{1}{3}\right)^{-1} \quad \Rightarrow \quad x=-1$$

Come in precedenza, l'ultimo passaggio segue dal fatto che la funzione esponenziale di base $1/3$ è decrescente, e quindi *iniettiva*. Pertanto due potenze di base $1/3$ possono dare lo stesso risultato solo se i loro esponenti sono uguali. In simboli: $a^{f(x)}=a^{g(x)} \quad \Rightarrow \quad f(x)=g(x)$.

Dall'equazione e dal grafico possiamo risolvere le disequazioni associate:

- La disequazione $(1/3)^x<3$ è del tipo $f(x)<g(x)$, quindi ha come soluzioni quei valori di x in corrispondenza dei quali il grafico della funzione $y=f(x)$ si trova al di sotto del grafico della funzione $y=g(x)$.

  Nel nostro caso, la curva esponenziale $y=(1/3)^x$ si trova al di sotto della retta $y=3$ per i valori di x che si trovano a *destra* di $x=-1$, quindi: $(1/3)^x<3 \quad \Rightarrow \quad x>-1$.
- Invece, la disequazione $(1/3)^x>3$ è del tipo $f(x)>g(x)$, quindi ha come soluzioni quei valori di x in corrispondenza dei quali il grafico della funzione $y=f(x)$ si trova al di sopra del grafico della funzione $y=g(x)$.

  Nel nostro caso, la curva esponenziale $y=(1/3)^x$ si trova al di sopra della retta $y=3$ per i valori di x che si trovano a *sinistra* di $x=-1$, quindi: $(1/3)^x>3 \quad \Rightarrow \quad x<-1$.
- E' ovvio che: $(1/3)^x\leq 3 \quad \Rightarrow \quad x\geq -1$ e $(1/3)^x\geq 3 \quad \Rightarrow \quad x\leq -1$.

Osservando che $1/3=3^{-1}$, avremmo anche potuto risolvere l'esercizio anche riportandoci al caso in cui la base è maggiore di 1. Infatti:

- $\left(\frac{1}{3}\right)^x=3 \quad \Rightarrow \quad (3^{-1})^x=3 \quad \Rightarrow \quad 3^{-x}=3^1 \quad \Rightarrow \quad -x=1 \quad \Rightarrow \quad x=-1$

che è lo stesso risultato ottenuto in precedenza.

Per le disequazioni, ottengo:

- $\left(\frac{1}{3}\right)^x<3 \quad \Rightarrow \quad 3^{-x}<3^1 \quad \Rightarrow \quad -x<1 \quad \Rightarrow \quad x>-1$;
- $\left(\frac{1}{3}\right)^x>3 \quad \Rightarrow \quad 3^{-x}>3^1 \quad \Rightarrow \quad -x>1 \quad \Rightarrow \quad x<-1$.

I risultati sono gli stessi del metodo precedente, ma sono ottenuti con un ragionamento piuttosto diverso: questa volta ho a che fare con funzioni esponenziali *crescenti* perché la base 3 è maggiore di 1, per cui non devo cambiare verso nel passare dalla disuguaglianza tra potenze a quella tra esponenti. Si ha però un cambiamento di verso nel passaggio successivo, in quanto cambio di segno entrambi i membri della disequazione.

◆ Discussione riassuntiva

Per risolvere graficamente l'equazione esponenziale elementare $\boldsymbol{a^x = k}$:

- traccio la curva esponenziale $y = a^x$, ricordando che essa ha andamento crescente se $a > 0$ e decrescente se $0 < a < 1$;
- traccio la retta di equazione $y = k$ (parallela all'asse delle ascisse);
- il valore di *x* che risolve l'equazione è l'ascissa del punto di intersezione tra la retta e la curva.

Poiché la funzione esponenziale è iniettiva, ogni valore di *y* appartenente al codominio (i numeri reali positivi) è immagine di uno ed un solo valore di *x*. Pertanto l'equazione:

- non ha soluzioni se $k < 0$ (perché la curva esponenziale si estende nel I e II quadrante, mentre la retta $y = k$ si trova nel III e IV quadrante)
- non ha soluzioni per $k = 0$ (perché la curva esponenziale non interseca l'asse *x*)
- ha una ed una sola soluzione se $k > 0$.

Il valore numerico esatto della soluzione si può trovare in maniera elementare solo se *k* può essere scritto come potenza di *a*. In questo caso $\boldsymbol{a^x = a^q} \Leftrightarrow \boldsymbol{x = q}$, ovvero: "se due potenze nella stessa base sono uguali, anche i loro esponenti devono essere uguali".

Nota. Ripetiamo ancora che questa proprietà è una conseguenza del fatto che la funzione esponenziale $y = a^x$ è iniettiva, per cui: $x_1 \neq x_2 \Leftrightarrow f(x_1) \neq f(x_2)$.
Se così non fosse, si potrebbero avere valori uguali di *y* in corrispondenza di valori distinti della variabile *x*. Per esempio, in figura 12 si ha $x_1 \neq x_2$, ma $f(x_1) = f(x_2)$, in quanto la funzione rappresentata non è iniettiva.

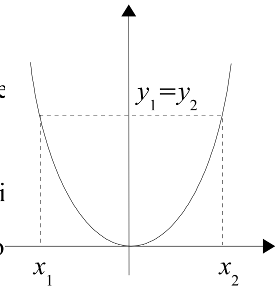


Fig. 12 Funzione non iniettiva

Esempi:

- $7^x = 49 \Rightarrow 7^x = 7^2 \Rightarrow x = 2$;
- $3^x = \frac{1}{27} \Rightarrow 3^x = 3^{-3} \Rightarrow x = -3$;
- $\left(\frac{1}{2}\right)^x = 16 \Rightarrow \left(\frac{1}{2}\right)^x = \left(\frac{1}{2}\right)^{-4} \Rightarrow x = -4$; oppure: $2^{-x} = 2^4 \Rightarrow -x = 4 \Rightarrow x = -4$;
- $\left(\frac{1}{5}\right)^x = \frac{1}{5} \Rightarrow x = 1$; oppure: $5^{-x} = 5^{-1} \Rightarrow -x = -1 \Rightarrow x = 1$;
- $7^x = 1 \Rightarrow 7^x = 7^0 \Rightarrow x = 0$;
- $5^x = \sqrt{5} \Rightarrow 5^x = 5^{1/2} \Rightarrow x = \frac{1}{2}$;
- $4^x = 0$ *non ha soluzioni* ;
- $6^x = -6$ *non ha soluzioni* .

- Consideriamo ora l'equazione $2^x=3$.

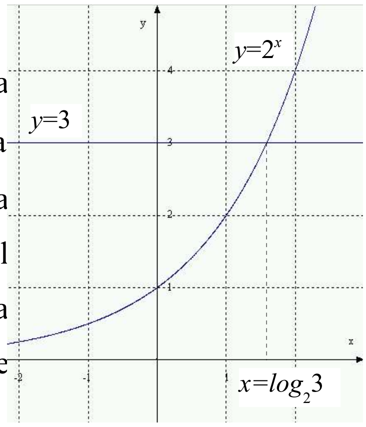


Fig. 13 Equazione $2^x=3$

E' evidente dal grafico che essa ammette un'unica soluzione compresa tra 1 e 2, in quanto la curva esponenziale di equazione $y=2^x$ e la retta $y=3$ hanno un punto di intersezione, la cui ascissa è compresa tra $x=1$ e $x=2$. Questa volta, però, non sappiamo determinare il valore della soluzione ricorrendo alle operazioni algebriche di nostra conoscenza, in quanto 3 non può essere scritto in maniera elementare come potenza in base 2.

Il risultato dell'equazione, che potremmo descrivere come: "*x*= l'esponente a cui devo elevare 2 per ottenere 3", viene detto in maniera più formale "*logaritmo in base* 2 *di* 3", o, in simboli: $x=\log_2 3$. Il suo valore numerico preciso può essere determinato con la calcolatrice.

Il concetto di logaritmo ci permette di dire che l'equazione esponenziale elementare $a^x=k$:
- per $k>0$ ammette l'unica soluzione $x=\log_a k$;
- per $k\leq 0$ non ammette soluzioni.

A volte conviene agire su entrambi i membri per ottenere potenze con la stessa base (le equazioni che seguono non sono veramente elementari, perché l'esponente non è semplicemente *x*):

- $49^x=7 \quad \Rightarrow \quad (7^2)^x=7 \quad \Rightarrow \quad 7^{2x}=7^1 \quad \Rightarrow \quad 2x=1 \quad \Rightarrow \quad x=\frac{1}{2}$;
- $4^{2x+1}=32 \quad \Rightarrow \quad (2^2)^{2x+1}=2^5 \quad \Rightarrow \quad 2^{4x+2}=2^5 \quad \Rightarrow \quad 4x+2=5 \quad \Rightarrow \quad x=\frac{3}{4}$;
- $4^x=\frac{1}{8} \quad \Rightarrow \quad 2^{2x}=2^{-3} \quad \Rightarrow \quad 2x=-3 \quad \Rightarrow \quad x=-\frac{3}{2}$.

Per risolvere graficamente una disequazione esponenziale elementare:
- risolvo l'equazione associata;
- se la disequazione è della forma $a^x>k$ la soluzione è data dall'intervallo dei valori in cui la curva esponenziale $y=a^x$ si trova al di sopra della retta di equazione $y=k$;
- se la disequazione è della forma $a^x<k$ la soluzione è data dall'intervallo dei valori in cui la curva esponenziale $y=a^x$ si trova al di sotto della retta di equazione $y=k$.

Puoi verificare che:
- per $k\leq 0$ la disequazione $a^x>k$ è vera per ogni valore reale di *x*, mentre la disequazione $a^x<k$ non ha soluzioni;

- per $k>0$, si trova la soluzione dell'equazione associata e si lascia lo stesso verso della disequazione di partenza se $a>1$, mentre si cambia verso se $0<a<1$.

Ho cercato di riassumere questi risultati nella seguente tabella. Non cercare di memorizzarla, e meno ancora di utilizzarla meccanicamente, ma prova a verificarne la sua esattezza con il metodo grafico.

$k\leq 0$	$k>0$	
$\forall a>0, a\neq 1$	$a>1$	$0<a<1$
$a^x>k \Rightarrow \forall x\in\mathbb{R}$	$a^x>k \Rightarrow x>\log_a k$	$a^x>k \Rightarrow x<\log_a k$
$a^x<k \Rightarrow \emptyset$	$a^x<k \Rightarrow x<\log_a k$	$a^x<k \Rightarrow x>\log_a k$

Per controllare l'esattezza dei seguenti esempi, è consigliabile tracciarne i relativi grafici:

- $2^x>-1 \Rightarrow \textit{vera}\ \forall x\in\mathbb{R}$;
- $(\frac{1}{2})^x>0 \Rightarrow \textit{vera}\ \forall x\in\mathbb{R}$;
- $3^x<0 \Rightarrow \textit{non ha soluzioni}$;
- $(\frac{1}{3})^x<-2 \Rightarrow \textit{non ha soluzioni}$;
- $2^x>8 \Rightarrow 2^x>2^3 \Rightarrow x>3$;
- $3^x\geq 1 \Rightarrow 3^x\geq 3^0 \Rightarrow x\geq 0$;
- $(\frac{1}{2})^x\leq 4 \Rightarrow (\frac{1}{2})^x\leq(\frac{1}{2})^{-2} \Rightarrow x\geq -2$; oppure: $2^{-x}\leq 2^2 \Rightarrow -x\leq 2 \Rightarrow x\geq -2$;
- $(\frac{1}{3})^x<3 \Rightarrow (\frac{1}{3})^x<(\frac{1}{3})^{-1} \Rightarrow x>-1$; oppure: $3^{-x}<3^1 \Rightarrow -x<1 \Rightarrow x>-1$.

◆ Alcune equazioni e disequazioni esponenziali non elementari

Consideriamo alcune equazioni particolari in cui, applicando le proprietà delle potenze, i due membri sono riducibili a due potenze aventi la stessa base, del tipo: $a^{f(x)}=a^{g(x)}$.

Come abbiamo visto in precedenza, poiché la funzione esponenziale è iniettiva, l'uguaglianza delle potenze aventi la stessa base implica l'uguaglianza degli esponenti. Quindi l'equazione esponenziale si trasforma nell'equazione algebrica: $f(x)=g(x)$.

Esempi

- $3\cdot 9^x=\sqrt[3]{9} \Rightarrow 3\cdot 3^{2x}=3^{\frac{2}{3}} \Rightarrow 3^{2x+1}=3^{\frac{2}{3}} \Rightarrow 1+2x=\frac{2}{3} \Rightarrow x=-\frac{1}{6}$;
- $8^{-x}=\frac{4^x}{32} \Rightarrow 2^{-3x}=\frac{2^{2x}}{2^5} \Rightarrow 2^{-3x}=2^{2x-5} \Rightarrow -3x=2x-5 \Rightarrow x=1$;

- $8^{2x} \cdot 4^{3x} = 16^{4x+5} \Rightarrow 2^{6x} \cdot 2^{6x} = 2^{4 \cdot (4x+5)} \Rightarrow 2^{12x} = 2^{16x+20} \Rightarrow 12x = 16x + 20 \Rightarrow x = -5$;
- $3^{x^2} = \frac{1}{3^{(4-5x)}} \Rightarrow 3^{x^2} = 3^{(5x-4)} \Rightarrow x^2 = 5x - 4 \Rightarrow x^2 - 5x + 4 = 0 \Rightarrow x_1 = 1 ; x_2 = 4$.

Anche nel caso delle disequazioni cerchiamo, applicando le proprietà delle potenze, di esprimere entrambi i membri come potenze aventi la stessa base, e quindi di ricondurci alla forma $a^{f(x)} > a^{g(x)}$ oppure $a^{f(x)} < a^{g(x)}$.

A questo punto distinguiamo i casi in cui la base sia maggiore di 1 o compresa tra 0 ed 1.

- Se $a > 1$, la corrispondente funzione esponenziale è crescente.
  Ne segue che: $a^{f(x)} > a^{g(x)} \Leftrightarrow f(x) > g(x)$.

  La relazione che intercorre tra le potenze si conserva anche facendo riferimento ai rispettivi esponenti. In pratica, quando "eliminiamo" le basi dobbiamo lasciare lo stesso verso della disequazione iniziale.

- Se invece $0 < a < 1$, la corrispondente funzione esponenziale è decrescente.
  Pertanto: $a^{f(x)} > a^{g(x)} \Leftrightarrow f(x) < g(x)$.

  Quindi la relazione tra le potenze si trasforma nella relazione inversa che intercorre tra i rispettivi esponenti. In pratica, "mandando via" le basi dobbiamo cambiare verso rispetto alla disequazione di partenza.

Esempi

- $3^5 x > 9 \cdot 27^{(x+4)} \Rightarrow 3^{5x} > 3^2 \cdot 3^{3 \cdot (x+4)} \Rightarrow 3^{5x} > 3^{3x+14} \Rightarrow 5x > 3x + 14 \Rightarrow x > 7$;
- $(\frac{1}{3})^{1-4x} > (\frac{1}{9})^{x+1} \Rightarrow (\frac{1}{3})^{1-4x} > (\frac{1}{3})^{2x+2} \Rightarrow 1 - 4x < 2x + 2 \Rightarrow x > -\frac{1}{6}$;

Volendo, possiamo sempre ricondurci al caso in cui la base sia maggiore di uno:

- $(\frac{1}{3})^{1-4x} > (\frac{1}{9})^{x+1} \Rightarrow (3^{-1})^{1-4x} > (3^{-2})^{x+1} \Rightarrow 3^{4x-1} > 3^{-2x-2} \Rightarrow 4x - 1 > -2x - 2 \Rightarrow x > -\frac{1}{6}$.

Funzioni logaritmiche

1. Logaritmi

◆ Definizioni

Cominciamo con alcune osservazioni elementari:

- l'addizione possiede un'operazione inversa, detta sottrazione:

  $a+b=c \quad \Leftrightarrow \quad a=c-b \quad \Leftrightarrow \quad b=c-a$;

- la moltiplicazione possiede un'operazione inversa, detta divisione:

  $a\cdot b=c \quad \Leftrightarrow \quad a=\dfrac{c}{b} \quad \Leftrightarrow \quad b=\dfrac{c}{a}$.

Contrariamente alla addizione ed alla moltiplicazione, *l'operazione di elevamento a potenza possiede* __due__ *operazioni inverse*, chiamate **estrazione di radice** e **logaritmo**.

Infatti, nella relazione $a^b=c$, la *base a* e l'*esponente b* giocano due ruoli diversi, e quindi *l'operazione di elevamento a potenza non è commutativa*: $a^b \neq b^a$.

Quindi, se conosco *b* e *c* e voglio trovare *a*, devo seguire un certo procedimento; se invece conosco *a* e *c* e voglio trovare *b*, devo seguire un altro, ben diverso, procedimento. Ad esempio:

- Nell'equazione $x^2=9$, cerchiamo il numero *x* che, elevato al quadrato, dà per risultato 9; sono dati l'esponente ed il risultato della potenza, mentre *la base è incognita*.

  L'operazione inversa è allora l'*estrazione di radice*: $x=\sqrt{9}=3$ (prendo solo la soluzione positiva perché in questo capitolo ci interessa solo il caso in cui la base sia maggiore di zero).

- Nell'equazione $3^x=9$ ci chiediamo qual è l'esponente *x* a cui elevare il 3 per ottenere 9; sono dati la base e il risultato della potenza , mentre *l'esponente è incognito*.

  Tale esponente viene detto *logaritmo*; quindi $x=\log_3 9=2$ (leggi "logaritmo in base 3 di 9"); il logaritmo fornisce quindi la seconda operazione inversa dell'elevamento a potenza.

Le seguenti relazioni sono quindi del tutto equivalenti:

$$\boldsymbol{a^b=c \quad \Leftrightarrow \quad a=\sqrt[b]{c} \quad \Leftrightarrow \quad b=\log_a c}$$

con le limitazioni che abbiamo già visto: $a>0$, $a\neq 1$, $c>0$.

Possiamo quindi dire che, ogni volta che in precedenza abbiamo risolto un'equazione esponenziale, abbiamo anche calcolato il valore di un logaritmo. Ad esempio, se consideriamo l'equazione esponenziale elementare $2^x=8$, vediamo che la sua unica soluzione è $x=3$, in quanto questo è l'*esponente* che, assegnato alla base $a=2$, dà come risultato il numero $c=8$.

Diremo quindi che 3 è il *logaritmo* in base 2 di 8, e scriveremo: $\log_2 8=3$.

In maniera analoga, diremo che:

- $\log_2 32=5$ perché $2^5=32$;
- $\log_3 \frac{1}{81}=-4$ perché $3^{-4}=\frac{1}{81}$;
- $\log_{\frac{1}{2}} 64=-6$ perché $\left(\frac{1}{2}\right)^{-6}=64$;
- $\log_{10} 1000=3$ perché $10^3=1000$;
- $\log_{\frac{1}{10}} 100=-2$ perché $\left(\frac{1}{10}\right)^{-2}=100$.

In generale, diamo la seguente definizione:

*Si chiama **logaritmo** di un numero reale k in una data base a, l'esponente x al quale si deve elevare quella base per ottenere il numero k stesso. Il numero k viene detto **argomento** del logaritmo.*

In simboli: $\log_a k=x \Leftrightarrow a^x=k$.

Osserva che si hanno le seguenti limitazioni:

- come abbiamo visto, la base a deve essere positiva e maggiore di 1;
- l'argomento k deve essere positivo, perché l'equazione $a^x=k$ non ha soluzioni per $k\leq 0$.

◆ Calcolare il logaritmo dati la base e l'argomento

Come abbiamo appena visto, questo problema si riduce a quello di risolvere un'equazione esponenziale. Se, ad esempio, vogliamo determinare il valore di $\log_2 32$, possiamo indicare con x il logaritmo cercato: $\log_2 32=x$ e convertire questa uguaglianza in forma esponenziale:

$$2^x=32 \Rightarrow 2^x=2^5 \Rightarrow x=5 .$$

Possiamo quindi affermare che: $\log_2 32=5$.

Esempi

- $\log_3 \frac{1}{27}=x \Rightarrow 3^x=\frac{1}{27} \Rightarrow 3^x=3^{-3} \Rightarrow x=-3$;
- $\log_{\frac{1}{9}} 3=x \Rightarrow \left(\frac{1}{9}\right)^x=3 \Rightarrow 3^{-2x}=3^1 \Rightarrow -2x=1 \Rightarrow x=-\frac{1}{2}$;
- $\log_4 \sqrt{2}=x \Rightarrow 4^x=\sqrt{2} \Rightarrow 2^{2x}=2^{1/2} \Rightarrow 2x=\frac{1}{2} \Rightarrow x=\frac{1}{4}$;
- $\log_{10}(-1)=x \Rightarrow 10^x=-1 \Rightarrow$ *non ha soluzione* ;
- $\log_2 1=x \Rightarrow 2^x=1 \Rightarrow 2^x=2^0 \Rightarrow x=0$;
- $\log_3 0=x \Rightarrow 3^x=0 \Rightarrow$ *non ha soluzione* ;

- Supponiamo di voler calcolare $\log_2 3$. In questo caso, l'argomento del logaritmo non può essere scritto in maniera elementare come potenza della base (cioè 3 non è una potenza di 2). Quindi, ponendo $x=\log_2 3$, arriviamo all'equazione esponenziale $2^x=3$, che abbiamo già visto a pagina 16, e della quale possiamo dire soltanto che ha una soluzione compresa tra 1 e 2 (infatti $2^1=2$, $2^2=4$ e $2<3<4$). Il logaritmo cercato, però, è un numero irrazionale, ovvero possiede infinite cifre decimali non periodiche.
  Di conseguenza, l'espressione $\log_2 3$ "rimane così", non può essere scritta in forma più semplice. Se necessario, possiamo calcolarne un valore approssimato con la calcolatrice.

Osserva poi che, per ogni valore di *a* positivo e diverso da 1:

- $\boldsymbol{\log_a 1=0}$, in quanto $a^0=1$;
- $\boldsymbol{\log_a a=1}$, in quanto $a^1=a$.

◆ Calcolare l'argomento dati la base e il logaritmo

Ammettiamo di sapere che $\log_5 x=2$: vogliamo calcolare il valore dell'argomento *x*, ovvero vogliamo determinare quel numero *x* il cui logaritmo in base 5 è uguale a 2.
Applicando la definizione di logaritmo, otteniamo: $x=5^2=25$. Infatti: $\log_5 25=2$.
Quindi, per trovare l'argomento dati la base ed il logaritmo, basta calcolare una potenza.

Esempi

- $\log_{\frac{1}{2}} x=-4 \quad \Rightarrow \quad x=\left(\frac{1}{2}\right)^{-4}=16$;
- $\log_4 x=\frac{1}{2} \quad \Rightarrow \quad x=4^{1/2}=\sqrt{4}=2$;
- $\log_{\frac{2}{3}} x=-2 \quad \Rightarrow \quad x=\left(\frac{2}{3}\right)^{-2}=\frac{9}{4}$;
- $\log\frac{1}{2} x=3 \quad \Rightarrow \quad x=\left(\frac{1}{2}\right)^3=\frac{1}{8}$;
- $\log_9 x=\frac{3}{2} \quad \Rightarrow \quad x=9^{3/2}=\sqrt{9^3}=3^3=27$.

◆ Calcolare la base dati l'argomento e il logaritmo

Sapendo che $\log_x 16=2$, vogliamo determinare il valore della base *x*, ovvero cerchiamo il numero che elevato ad esponente 2 dà per risultato 16. Ho quindi: $x^2=16 \quad \Rightarrow \quad x=4$.

Ricordiamo che l'equazione di secondo grado pura $x^2=16$ ammette le due soluzioni opposte $x=\pm 4$, ma la condizione sulla base del logaritmo ci impone di scartare la soluzione negativa.

In conclusione, per trovare la base, dati il logaritmo ed il suo argomento, si calcola una radice o, cosa del tutto equivalente, una potenza con esponente razionale).

Nel caso in cui l'esponente non sia uguale a 2, per risolvere l'equazione $x^a = b$ conviene elevare entrambi i membri dell'equazione alla potenza di esponente $1/a$:

$x^a = b \quad \Rightarrow \quad (x^a)^{1/a} = b^{1/a} \quad \Rightarrow \quad x = b^{1/a}$.

Esempi

- $\log_x \frac{9}{4} = 2 \quad \Rightarrow \quad x^2 = \frac{9}{4} \quad \Rightarrow \quad x = (\frac{9}{4})^{1/2} = \sqrt{\frac{9}{4}} = \frac{3}{2}$;
- $\log_x 9 = -2 \quad \Rightarrow \quad x^{-2} = 9 \quad \Rightarrow \quad x = 9^{-1/2} = \frac{1}{\sqrt{9}} = \frac{1}{3}$;
- $\log_x 81 = \frac{4}{3} \quad \Rightarrow \quad x^{4/3} = 81 \quad \Rightarrow \quad x = 81^{3/4} = \sqrt[4]{81^3} = 3^3 = 27$;
- $\log_x \sqrt{2} = \frac{3}{2} \quad \Rightarrow \quad x^{3/2} = \sqrt{2} \quad \Rightarrow \quad x = (\sqrt{2})^{2/3} = (2^{1/2})^{2/3} = 2^{1/3} = \sqrt[3]{2}$;
- $\log_x 3 = \frac{1}{3} \quad \Rightarrow \quad x^{1/3} = 3 \quad \Rightarrow \quad x = 3^3 = 27$.

2. La funzione logaritmica

◆ L'inversa di una funzione

Rivediamo velocemente alcuni concetti visti nel corso degli anni precedenti:

Dati due insiemi A e B, si dice **relazione** o **corrispondenza** tra A e B una legge che ad alcuni elementi dell'insieme A faccia corrispondere degli elementi dell'insieme B.

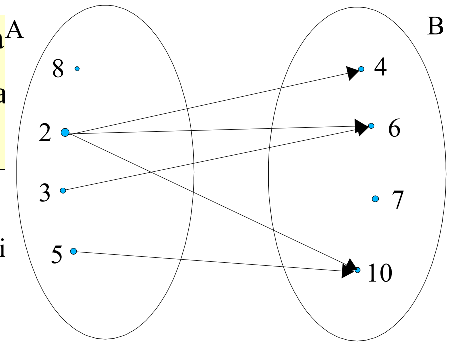


Fig. 1 Corrispondenza tra due insiemi

Una relazione può essere rappresentata tramite un *diagramma sagittale*.
Ad esempio, quello in fig.1 rappresenta la legge che fa corrispondere ad ogni elemento dell'insieme A i suoi multipli in B.

- Il **dominio** (o *insieme di definizione* o *campo di esistenza*) di una relazione da A verso B è l'*insieme formato da tutti gli elementi di A che hanno almeno un corrispondente nell'insieme B.*
- Il **codominio** o *immagine* di una relazione da A verso B è l'*insieme formato da tutti gli elementi di B che sono i corrispondenti di almeno un elemento di A*.

In parole povere, il dominio della relazione è quel sottoinsieme dell'insieme di partenza formato da tutti gli elementi dai quali “parte almeno una freccia”, mentre il codominio è quel sottoinsieme dell'insieme di arrivo formato da tutti quegli elementi sui quali “arriva almeno una freccia”. Nell'esempio di fig. 1, il dominio della relazione è il sottoinsieme $\{2,3,5\}\subset A$, mentre il codominio è il sottoinsieme $\{4,6,10\}\subset B$.

Può succedere che una relazione tra gli elementi di due insiemi verifichi le seguenti condizioni:

- *ogni elemento di A ammette un corrispondente elemento di B;*
- *tale elemento di B è unico.*

Una relazione di questo tipo si chiama **funzione** o **applicazione** da A in B.

In altri termini, una relazione tra due insiemi A e B è una funzione se, ad ogni elemento del primo insieme, essa associa uno ed un solo elemento del secondo insieme.
Poiché una funzione fa corrispondere ad ogni elemento di A un unico elemento di B, essa viene chiamata anche **corrispondenza univoca**.
In questo caso, ad ogni elemento x appartenente all'insieme A corrisponde un determinato elemento y appartenente all'insieme B. Per indicare che che y è funzione di x si scrive: $y=f(x)$.

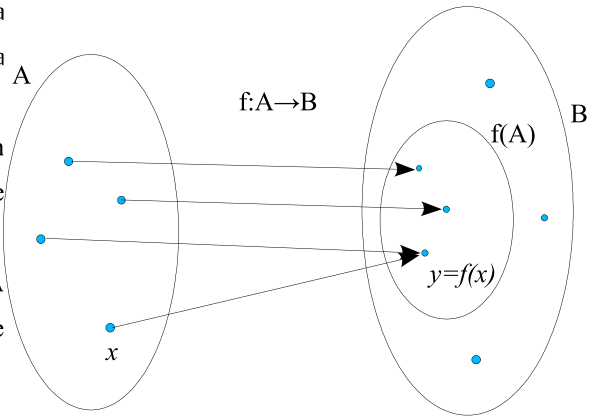


Fig. 2 Funzione dall'insieme A nell'insieme B

Osserva che, nel caso delle funzioni, il dominio coincide con l'intero insieme di partenza A.

L'insieme delle funzioni si può classificare nella maniera seguente:

- Una funzione da A verso B si dice **iniettiva** se *ad elementi diversi dell'insieme di partenza corrispondono elementi diversi dell'insieme di arrivo*, ovvero se *non accade mai che due elementi distinti di A abbiano la stessa immagine in B*.
- Una funzione da A verso B si dice **suriettiva** se *ogni elemento di B è il corrispondente di almeno un elemento di A*, ovvero se il *codominio coincide con l'insieme di arrivo*.
- Una funzione da A verso B si dice **biiettiva** o **corrispondenza biunivoca** se è *sia iniettiva che suriettiva*, ovvero se:
    - *ogni elemento dell'insieme A ha uno e un solo corrispondente nell'insieme B*, e inoltre
    - *ogni elemento dell'insieme B è il corrispondente di uno e un solo elemento dell'insieme A.*

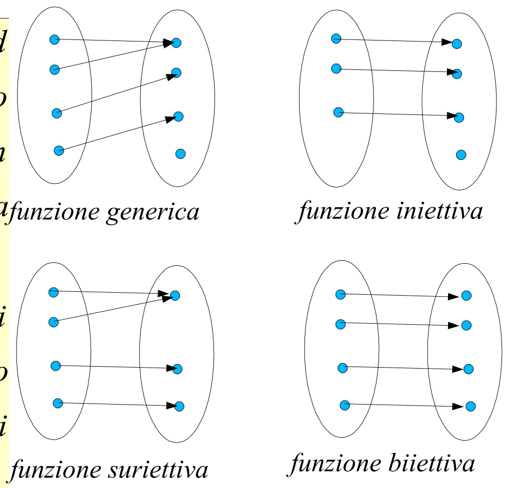


Fig. 3 Classificazione delle funzioni

Ogni volta che si stabilisce una relazione tra l'insieme A e l'insieme B, viene definita anche un'altra relazione, questa volta dall'insieme B all'insieme A, che viene detta *relazione inversa* di quella data, e si ottiene semplicemente "invertendo le frecce" che nel diagramma sagittale collegano gli elementi di A a quelli di B.

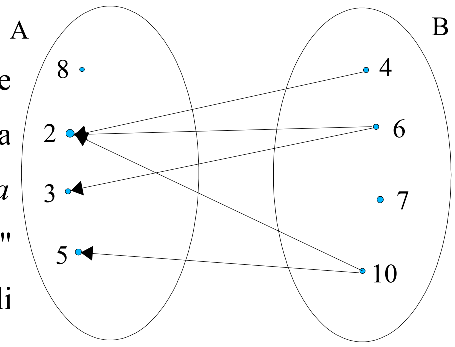


Fig. 4 Relazione inversa

In termini più formali, se R è la relazione data ed R^{-1} la sua relazione inversa, si ha: $x=R^{-1}(y) \Leftrightarrow y=R(x)$, dove x è un generico elemento dell'insieme A ed y un generico elemento dell'insieme B.

Ad esempio, la figura 4 mostra la relazione inversa di quella rappresentata in figura 1, che associa ad ogni elemento dell'insieme B i suoi divisori nell'insieme A.

Anche una funzione ammette sempre una relazione inversa, che però in genere non è una funzione.

In quale caso la relazione inversa di una funzione sarà anch'essa una funzione? Esaminando i vari casi riportati in figura 3, dovresti renderti conto che questo avviene se e soltanto se la funzione è biunivoca. Diciamo quindi che:

- una funzione viene detta **invertibile** se *ammette una funzione inversa*, cioè se *la sua relazione inversa è anch'essa una funzione*;
- *una funzione è invertibile se e soltanto se è biunivoca.*

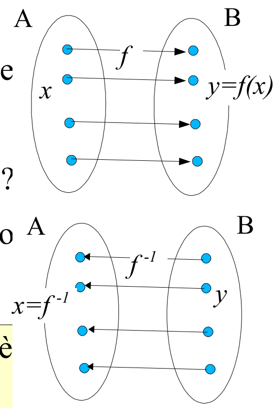


Fig. 5 Una funzione invertibile e la sua funzione inversa

Volendo utilizzare una descrizione formale, se f è una funzione invertibile ed f^{-1} è la sua funzione inversa, si ha:

- $\forall x \in A$ esiste uno ed un solo $y \in B$ tale che $y = f(x)$;
- $\forall y \in B$ esiste uno ed un solo $x \in A$ tale che $x = f^{-1}(y)$ (vedi fig. 5).

Nei ragionamenti precedenti ci siamo aiutati con la rappresentazione di relazioni e funzioni tramite diagrammi sagittali. In matematica, però, almeno nel caso molto frequente in cui gli insiemi di partenza e di arrivo coincidono con l'insieme dei numeri reali, o con un suo sottoinsieme, è in genere più utile rappresentare queste corrispondenze tramite il loro *grafico cartesiano*. In pratica, come sappiamo dagli anni precedenti, se l'elemento y è in relazione con l'elemento x, oppure se $y = f(x)$, allora la coppia ordinata (x, y) individua un punto del piano cartesiano che appartiene al grafico della corrispondenza.

Le definizioni precedenti, tradotte nel linguaggio cartesiano, ci dicono che:

- una curva sul piano cartesiano è il *grafico di una funzione* se *ogni retta parallela all'asse y incontra la curva al massimo in punto*;
- una curva sul piano cartesiano è il *grafico di una funzione biunivoca,* e quindi *invertibile* se, oltre alla proprietà precedente, anche *ogni retta parallela all'asse x incontra la curva al massimo in un punto*.

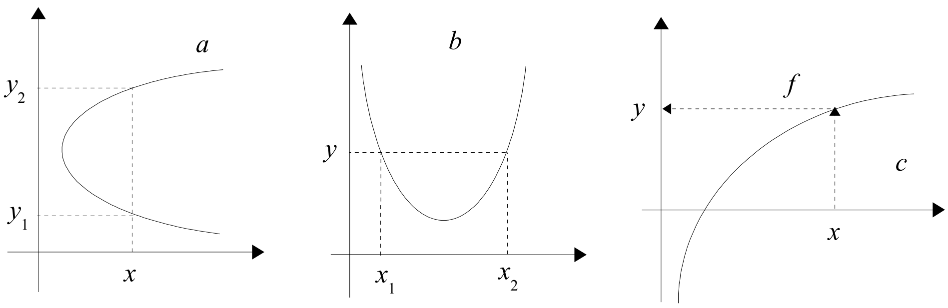


Fig. 6 Relazione; funzione; funzione invertibile.

Ad esempio:

- il grafico di fig. 6a rappresenta una relazione, ma non una funzione, in quanto ad un valore di x corrispondono due distinti valori di y;
- il grafico di fig. 6b rappresenta una funzione, in quanto ad ogni valore di x corrisponde un solo valore di y. Tale funzione, però, non è invertibile, in quanto un valore di y è immagine di due distinti valori di x;
- il grafico di fig. 6c rappresenta una funzione invertibile, in quanto ad ogni valore di x corrisponde un solo valore di y e, viceversa, ogni valore di y è immagine di un solo valore di x.

Supponiamo di avere stabilito che una funzione è invertibile. Come possiamo trovare l'espressione analitica della sua funzione inversa e, quindi, determinare il grafico di quest'ultima?

- Se $y = f(x)$ è l'equazione della nostra funzione, dobbiamo prima “invertire” questa formula, ricavando x in funzione di y: $x = f^{-1}(y)$;

- Quindi, poiché vogliamo continuare ad indicare con x la variabile indipendente e con y quella dipendente, “scambiamo” di nome le due variabili, ricavando: $y=f^{-1}(x)$.

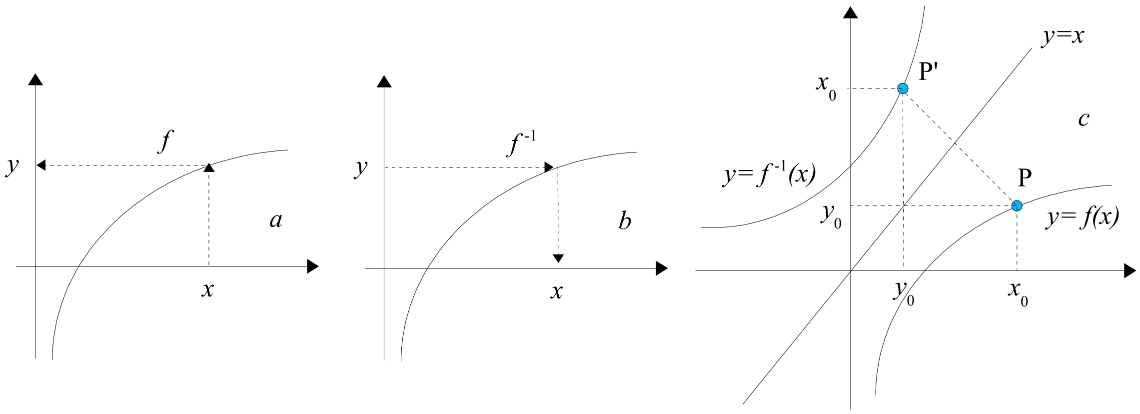


Fig. 7 Dal grafico di una funzione a quello della sua inversa.

Sul piano cartesiano, il primo di questi passaggi non modifica il grafico della funzione, ma cambia solo la direzione della corrispondenza, che anziché andare da x verso y, è diretta da y verso x; questo corrisponde al passaggio dalla figura 7a alla 7b.

Il secondo passaggio, invece, modifica il grafico spostando il punto P di coordinate (x_0, y_0) nel punto P' di coordinate (y_0, x_0) , in cui l'ascissa e l'ordinata sono state “scambiate” tra loro; vedi figura 7c. Potremmo dimostrare che:

l'operazione di “scambiare” tra di loro le coordinate di un punto equivale ad applicare al punto la simmetria rispetto alla retta di equazione $y=x$, bisettrice del primo e del terzo quadrante.
In conclusione, se conosciamo il grafico della funzione invertibile $y=f(x)$, per determinarne il grafico della funzione inversa $y=f^{-1}(x)$, è sufficiente applicare alla curva una simmetria rispetto alla bisettrice del primo e del terzo quadrante.

Esempio. Prendi la funzione invertibile $f: \quad y=2x-1$.

Per trovarne la funzione inversa, ricava la variabile x: $f^{-1}: \quad x=\frac{y+1}{2}$.

Quindi scambia x con y: $f^{-1}: \quad y=\frac{x+1}{2}$.

Sia f che f^{-1} sono funzioni lineari, e quindi i loro grafici sono delle rette; tali rette sono simmetriche rispetto alla bisettrice del 1° e 3° quadrante (vedi figura 8).

Ad esempio, il punto $P(4,7)$ sulla prima retta corrisponde nella simmetria al punto $P'(7,4)$, che si trova sulla seconda retta ed ha coordinate “scambiate” rispetto a P.

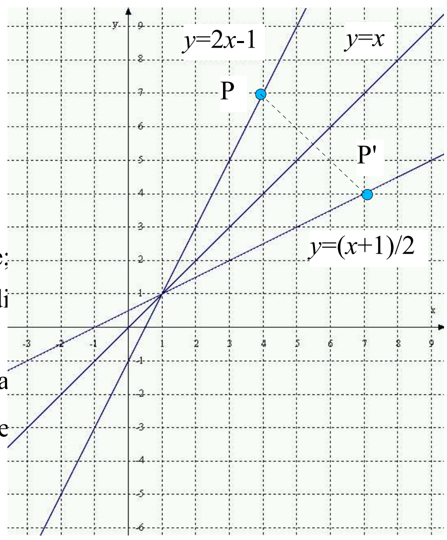


Fig. 8 Rette simmetriche rispetto alla bisettrice del 1° e 3° quadrante

- **La funzione $y = \log_a x$ nel caso $a > 1$**

Consideriamo la funzione esponenziale $y = 2^x$, già studiata in precedenza.

Questa funzione è crescente, e pertanto individua una corrispondenza biunivoca tra l'insieme dei numeri reali $\forall x \in \mathbb{R}$, che ne rappresenta il dominio, e quello dei numeri reali positivi $y > 0$, che ne è il codominio.

La funzione è quindi invertibile, e la sua funzione inversa avrà dominio e codominio scambiati rispetto alla funzione data. Per trovarne l'espressione analitica dobbiamo ricavare *x* in funzione di *y*: se $y = 2^x$, allora *x* è l'esponente a cui va elevata la base 2 per ottenere *y*, e quindi è il logaritmo in base 2 di *y*: $x = \log_2 y$. Questa funzione ha ancora come grafico la curva esponenziale, ma la corrispondenza associata "parte" dai valori di *y* e "arriva" a quelli di *x*.

Poiché, però, siamo abituati ad avere l'insieme di partenza sull'asse delle ascisse e l'insieme di arrivo sull'asse delle ordinate, dobbiamo "scambiare" tra di loro la *x* e la *y* o, geometricamente, eseguire una simmetria rispetto alla bisettrice del 1° e del 3° quadrante.

In definitiva, la funzione inversa di $y = 2^x$ è: $y = \log_2 x$.

Come conferma, compila la tabella di corrispondenza della funzione logaritmica in base 2 e osserva che essa si può ottenere da quella della funzione esponenziale con la stessa base, semplicemente scambiando la colonna delle *x* con quella delle *y*:

x	1/8	1/4	1/2	1	2	4	8
y	-3	-2	-1	0	1	2	3

Come ulteriore conferma, osserva anche, dalla figura 9, che i grafici delle due funzioni sono simmetrici rispetto alla bisettrice del 1° e del 3° quadrante.

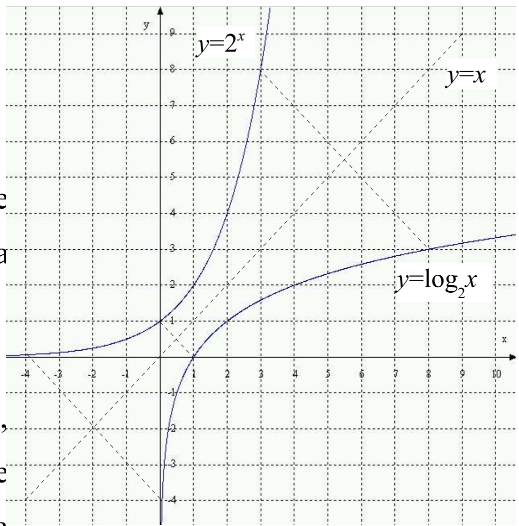


Fig. 9 Funzione logaritmica in base 2 *come inversa della funzione esponenziale*

Come abbiamo fatto per la funzione esponenziale, cerchiamo anche per la funzione logaritmica di capire dall'esempio precedente quali proprietà valgono per la funzione logaritmica del tipo $y = \log_a x$ con $a > 1$.

- Il dominio della funzione è l'insieme dei numeri reali strettamente positivi.

  Infatti, il logaritmo è definito solo quando l'argomento è positivo, quindi $\log_a x$ esiste per $x > 0$.

- Il codominio della funzione è l'insieme $\mathbb{R}$ dei numeri reali.

  Infatti, puoi capire dal grafico di figura 9 che, fissato un qualunque valore reale di *y*, esiste sempre un punto della curva logaritmica che ammette quel valore come ordinata. Inoltre, dominio e codominio della funzione logaritmica devono essere uguali rispettivamente al codominio e al dominio della funzione esponenziale.

- La curva logaritmica interseca l'asse *x* nel punto di coordinate $(1,0)$.

  Infatti, ponendo $x=1$, ottengo: $y=\log_a 1=0$. Inoltre, questa proprietà corrisponde a quella delle curve esponenziali di passare per il punto di coordinate $(0,1)$.
- Il segno della funzione è il seguente:

  $\log_a x<0 \quad \Leftrightarrow \quad 0<x<1 \quad ; \quad \log_a x=0 \quad \Leftrightarrow \quad x=1 \quad ; \quad \log_a x>0 \quad \Leftrightarrow \quad x>1$.

  Ovvero, la funzione assume valori positivi per $x>1$ e negativi per $0<x<1$.
- La funzione è *crescente*, ovvero, se i valori di *x* crescono, allora aumentano anche i corrispondenti valori di $y=\log_a x$. In simboli: se $x_1<x_2$, allora $\log_a x_1<\log_a x_2$.

  Oppure, se $x_1>x_2$, allora $\log_a x_1>\log_a x_2$. Sul grafico, questo corrisponde al fatto che la curva logaritmica "sale" se ci spostiamo su di essa da sinistra verso destra, cioè nella direzione delle *x* crescenti.
- Essendo crescente, la funzione data è *iniettiva*, ovvero a valori distinti di *x* corrispondono sempre valori distinti di *y*. In simboli: $x_1\neq x_2 \quad \Leftrightarrow \quad y_1\neq y_2$.
- Osserviamo che: *se* $x\rightarrow+\infty$ *allora* $y\rightarrow+\infty$; ossia, se *x* assume valori positivi che crescono indefinitamente, allora anche i corrispondenti valori di $y=\log_a x$ crescono in maniera illimitata. In sintesi, si dice che $\log_a x$ *tende a più infinito, per x che tende a più infinito*.
- Invece: *se* $x\rightarrow 0$ *allora* $y\rightarrow-\infty$; ossia, se *x* assume valori che tendono a zero, allora i corrispondenti valori di $y=\log_a x$ sono negativi e crescono indefinitamente in valore assoluto. In sintesi, si dice che $\log_a x$ *tende a meno infinito, per x che tende a zero.*
- Dal punto di vista geometrico, poiché la curva logaritmica si avvicina indefinitamente all'asse *y*, si dice che tale retta costituisce un *asintoto verticale* per quella curva.

◆ La funzione $y=\log_a x$ nel caso $0<a<1$

Prendiamo come esempio la funzione logaritmica $y=\log_{1/2} x$, la cui base è un numero positivo e minore di uno.

Tale funzione è l'inversa della funzione esponenziale $y=(1/2)^x$ avente la stessa base; di conseguenza, il grafico della funzione logaritmica si otterrà per simmetria rispetto alla bisettrice del 1° e 3° quadrante dal diagramma della funzione esponenziale (fig. 10).

Questo è più evidente se provi a calcolare la tabella di corrispondenza della funzione logaritmica:

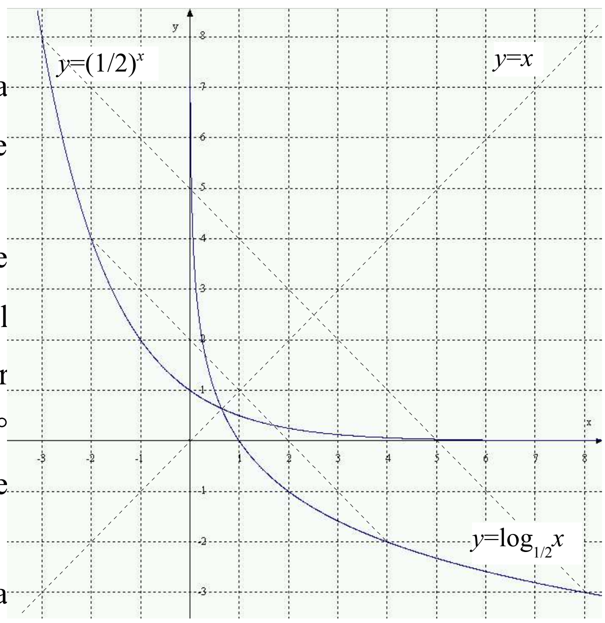


Fig. 10 Funzione logaritmica in base 1/2 *come inversa della funzione esponenziale*

x	8	4	2	1	1/2	1/4	1/8
y	-3	-2	-1	0	1	2	3

Puoi osservare che la tabella della funzione logaritmica si ottiene da quella della funzione esponenziale "scambiando" le x con le y.

Enunciamo le proprietà della funzione logaritmica $y=\log_a x$ nel caso $a>1$:

- Il dominio della funzione è ancora l'insieme $x>0$ dei numeri reali strettamente positivi.
- Il codominio della funzione è sempre l'insieme $\mathbb{R}$ dei valori reali di y.
- La curva logaritmica interseca ancora l'asse x nel punto di coordinate $(1,0)$.
- Il segno della funzione è il seguente:

  $\log_a x<0 \quad \Leftrightarrow \quad x>1 \quad ; \quad \log_a x=0 \quad \Leftrightarrow \quad x=1 \quad ; \quad \log_a x>0 \quad \Leftrightarrow \quad 0<x<1$.

  Ovvero, la funzione assume valori positivi per $0<x<1$ e negativi per $x>1$.
- La funzione è *decrescente*, ovvero, se i valori di x crescono, allora i corrispondenti valori di $y=\log_a x$ diminuiscono. In simboli: se $x_1<x_2$, allora $\log_a x_1>\log_a x_2$.

  Oppure, se $x_1>x_2$, allora $\log_a x_1<\log_a x_2$. Sul grafico, questo corrisponde al fatto che la curva logaritmica "scende" se ci spostiamo su di essa da sinistra verso destra, cioè nella direzione delle x crescenti.
- Essendo decrescente, la funzione data è sempre *iniettiva*, ovvero a valori distinti di x corrispondono sempre valori distinti di y. In simboli: $x_1\neq x_2 \quad \Leftrightarrow \quad y_1\neq y_2$.
- Osserviamo che: *se* $x\to+\infty$ *allora* $y\to-\infty$; ossia, se x assume valori positivi che crescono indefinitamente, allora anche i corrispondenti valori di $y=\log_a x$ sono negativi e crescono indefinitamente in valore assoluto. In sintesi, si dice che $\log_a x$ *tende a meno infinito, per x che tende a più infinito*.
- Invece: *se* $x\to 0$ *allora* $y\to+\infty$; ossia, se x assume valori che tendono a zero, allora i corrispondenti valori di $y=\log_a x$ crescono in maniera illimitata. In sintesi, si dice che $\log_a x$ *tende a più infinito, per x che tende a zero.*
- Dal punto di vista geometrico, poiché la curva logaritmica si avvicina indefinitamente all'asse y, si dice che tale retta costituisce un *asintoto verticale* per quella curva.

Osserva in particolare le proprietà che cambiano rispetto al caso in cui $a>1$.

Confrontando le tabelle di corrispondenza relative alle funzioni $y=\log_2 x$ e $y=\log_{1/2} x$, puoi notare che una delle due si ottiene dall'altra cambiando segno ai valori di y.

Questa proprietà è vera per ogni coppia di funzioni logaritmiche le cui basi siano l'una l'inversa dell'altra, come $y=\log_a x$ e $y=\log_{1/a} x$.

Infatti, se $y=\log_a x$, allora $x=a^y$; cambiando segno alla *y* ottengo: $x=a^{-y}=(a^{-1})^y=(1/a)^y$, e quindi, per la definizione di logaritmo: $y=\log_{1/a} x$.

In termini geometrici, questo significa che, partendo da un punto di coordinate (x, y) che appartiene al grafico di una delle due funzioni e cambiando segno alla *y*, otteniamo un punto di coordinate $(x, -y)$ che appartiene al grafico dell'altra funzione.

Possiamo quindi dire che *i grafici delle funzioni logaritmiche* $y=\log_a x$ *e* $y=\log_{1/a} x$ *sono simmetrici rispetto all'asse x.*

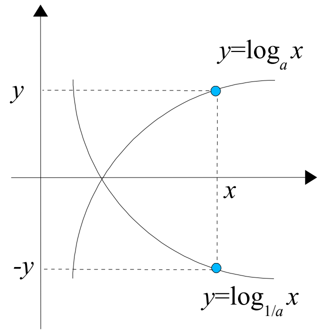


Fig. 11 Simmetria rispetto asse x

Alcune osservazioni conclusive:

- E' superfluo dire che anche la funzione logaritmica, in apparenza così astratta, viene studiata per la sua importanza nelle scienze naturali ed umane. Pur sapendo di spezzarvi il cuore, mi sembra inutile fornirvi degli esempi che non saremmo in grado di approfondire.
- Nelle applicazioni pratiche si usano quasi sempre due sole basi in cui calcolare i logaritmi: la base 10, che porta ai cosiddetti *logaritmi decimali*, e la base *e*, simbolo che indica un numero irrazionale il cui valore approssimato è $e\simeq 2{,}718$, il quale genera i cosiddetti *logaritmi naturali* o *neperiani*. Nota che entrambe queste basi sono maggiori di 1, e quindi le rispettive funzioni logaritmiche sono crescenti.
- Attenzione: le calcolatrici scientifiche e i libri delle scuole superiori indicano semplicemente con **log** il logaritmo in base 10, che pertanto viene sottintesa, e con **ln** il logaritmo naturale, mentre la maggior parte dei testi universitari indica con **log** il logaritmo naturale. Noi seguiremo la prima convenzione.
- Osserva che, poiché il nostro sistema di numerazione è in base dieci, risulta particolarmente semplice calcolare la parte intera del logaritmo decimale di un qualunque numero, grande o piccolo a piacere. Infatti:

  $\log 10=1$; $\log 100=\log 10^2=2$; $\log 1000=\log 10^3=3$; $\log 10.000=\log 10^4=4$ ...

  $\log 1=0$;

  $\log 0{,}1=\log\frac{1}{10}=\log 10^{-1}=-1$; $\log 0{,}01=\log\frac{1}{100}=\log 10^{-2}=-2$; $\log 0{,}001=\log\frac{1}{1000}=\log 10^{-3}=-3$ ...

  Quindi, ad esempio:

  - $\log 72.369$ è un numero compreso tra 4 e 5, perché il suo argomento è compreso tra 10^4 e 10^5, e la funzione logaritmica in base 10 è crescente;
  - $\log 0{,}0000034$ è un numero compreso tra -6 e -5, perché il suo argomento è compreso tra 10^{-6} e 10^{-5}, e la funzione logaritmica in base 10 è crescente;
  - se $\log x\simeq 3{,}41$, allora *x* è compreso tra $10^3=1.000$ e $10^4=10.000$;
  - se $\log x\simeq -0{,}3$, allora *x* è compreso tra $10^{-1}=0{,}1$ e $10^0=1$.

3. Equazioni e disequazioni logaritmiche

Un'equazione è detta **logaritmica** quando *l'incognita compare ad argomento di un logaritmo.*

Un'equazione logaritmica si dice **elementare** quando è riducibile alla forma $\log_a x = k$, dove *k* è un qualunque numero reale, mentre *a* è un numero reale positivo e diverso da 1.

Una **disequazione** viene detta **logaritmica elementare** quando ha una delle seguenti forme:

$\log_a x \leq 0$ o $\log_a x < 0$ o $\log_a x > 0$ o $\log_a x \geq 0$.

- **Caso** $\boldsymbol{a > 1}$

Esempio 1

Risolviamo l'equazione $\log_3 x = 2$.

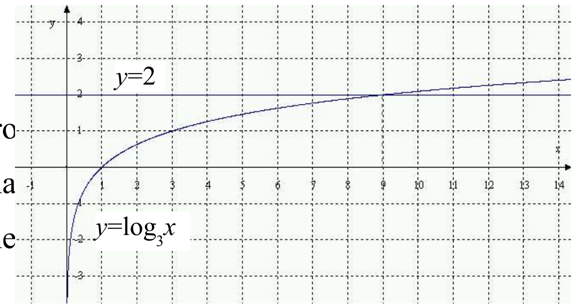


Fig. 12 Equazione $\log_3 x = 2$

Si tratta di un problema che abbiamo già risolto, ovvero quello di determinare l'argomento di un logaritmo una volta noti base ed esponente. Applicando la definizione di logaritmo: $\log_3 x = 2 \quad \Rightarrow \quad x = 3^2 = 9$.

Allo stesso risultato arriviamo anche per via grafica, ovvero disegnando i grafici delle funzioni $y = \log_3 x$ (curva logaritmica ad andamento crescente) e $y = 2$ (retta parallela all'asse *x*) e osservando che essi si intersecano nel punto di ascissa $x = 9$.

Il grafico, però, ci aiuta a risolvere le disequazioni "associate":

- La disequazione $\log_3 x < 2$ è risolta per i valori di *x* in corrispondenza dei quali la funzione logaritmica si trova "al di sotto" della retta, e quindi "a sinistra" di $x = 9$. Dobbiamo però tenere conto del fatto che la funzione logaritmica $y = \log_a x$ è definita solo per $x > 0$.
  Quindi: $\log_3 x < 2 \quad \Rightarrow \quad 0 < x < 9$.
- In maniera simile, la disequazione $\log_3 x > 2$ è risolta per i valori di *x* in corrispondenza dei quali la funzione logaritmica si trova "al di sopra" della retta, e quindi "a destra" di $x = 9$, ma sempre nel dominio della funzione logaritmica. Quindi: $\log_3 x > 2 \quad \Rightarrow \quad x > 9$.
- Nelle disequazioni $\log_3 x \leq 2$ e $\log_3 x \geq 2$, devo aggiungere alle soluzioni anche l'ascissa del punto di intersezione tra le due curve. Quindi: $\log_3 x \leq 2 \quad \Rightarrow \quad 0 < x \leq 9$ e $\log_3 x \geq 2 \quad \Rightarrow \quad x \geq 9$.
  Osserva che il valore $x = 0$ non può far parte delle soluzioni, perché $\log_a 0$ non è definito.

Esempio 2

Risolviamo l'equazione logaritmica elementare $\log_2 x = -1$.

Per la definizione di logaritmo: $\log_2 x=-1 \quad \Rightarrow \quad x=2^{-1}=\frac{1}{2}$.

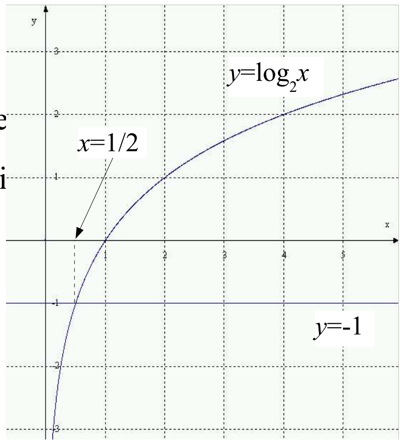


Fig. 13 Equazione $\log_2 x$=-1

Come conferma, osservo dal grafico cartesiano che i grafici delle funzioni $y=\log_2 x$ e $y=-1$ si intersecano in un punto la cui ascissa è $x=1/2$.

Per le disequazioni associate si ha:

- $\log_2 x>-1 \quad \Rightarrow \quad x>\frac{1}{2}$; $\log_2 x<-1 \quad \Rightarrow \quad 0<x<\frac{1}{2}$;
- $\log_2 x\geq -1 \quad \Rightarrow \quad x\geq\frac{1}{2}$; $\log_2 x\leq -1 \quad \Rightarrow \quad 0<x\leq\frac{1}{2}$.

◆ **Caso** $\mathbf{0<a<1}$

Esempio 3

Risolviamo l'equazione logaritmica $\log_{1/2} x=2$.

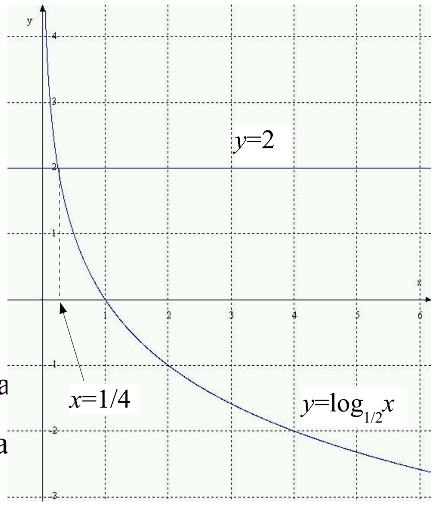


Fig. 14 Equazione $\log_{1/2} x$=2

Dalla definizione di logaritmo, ricaviamo:

- $\log_{\frac{1}{2}} x=2 \quad \Rightarrow \quad x=(\frac{1}{2})^2=\frac{1}{4}$.

Per risolvere le disequazioni associate tracciamo il grafico della funzione logaritmica $y=\log_{1/2} x$ e osserviamo che essa interseca la retta di equazione $y=2$ nel punto di ascissa $x=1/4$.

Questa volta, però, tenendo conto dell'andamento decrescente della funzione logaritmica, abbiamo:

- $\log_{\frac{1}{2}} x>2 \quad \Rightarrow \quad 0<x<\frac{1}{4}$; $\log_{\frac{1}{2}} x<2 \quad \Rightarrow \quad x>\frac{1}{4}$;
- $\log_{\frac{1}{2}} x\geq 2 \quad \Rightarrow \quad 0<x\leq\frac{1}{4}$; $\log_{\frac{1}{2}} x\leq 2 \quad \Rightarrow \quad x\geq\frac{1}{4}$.

Esempio 4

Risolviamo l'equazione logaritmica $\log_{1/3} x=-2$.

Dalla definizione di logaritmo:

- $\log_{1/3} x=-2 \quad \Rightarrow \quad x=(\frac{1}{3})^{-2}=9$.

Dal grafico cartesiano ricaviamo invece:

- $\log_{1/3} x<-2 \quad \Rightarrow \quad x>9$;
- $\log_{1/3} x>-2 \quad \Rightarrow \quad 0<x<9$;

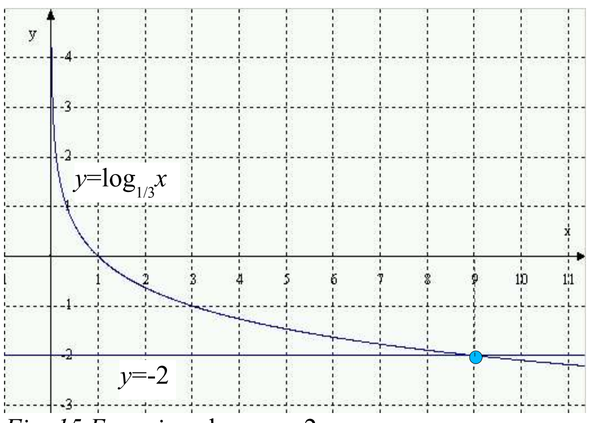


Fig. 15 Equazione $\log_{1/3} x$=-2

- $\log_{1/3} x \leq -2 \quad \Rightarrow \quad x \geq 9$; $\log_{1/3} x \geq -2 \quad \Rightarrow \quad 0 < x \leq 9$.

◆ **Discussione riassuntiva**

Per risolvere graficamente l'equazione logaritmica elementare $\boldsymbol{\log_a x = k}$:

- traccio la curva logaritmica $y = \log_a x$, ricordando che essa ha andamento crescente se $a > 0$ e decrescente se $0 < a < 1$;
- traccio la retta di equazione $y = k$ (parallela all'asse delle ascisse);
- il valore di x che risolve l'equazione è l'ascissa del punto di intersezione tra la retta e la curva.

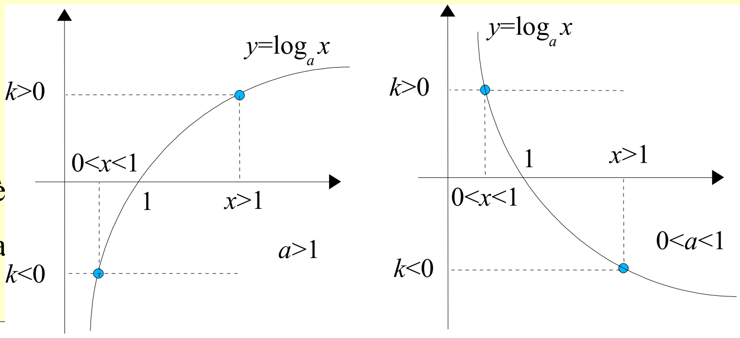


Fig. 16 Equazione $\log_a x=k$

Poiché la funzione logaritmica è iniettiva, ogni valore reale di y è immagine di uno ed un solo valore reale positivo di x. Pertanto:

- l'equazione $\log_a x = k$ ammette sempre una ed una sola soluzione reale positiva: $x = a^k$, per ogni valore reale di k.

Inoltre, la risoluzione grafica di figura 16 ci permette di dire che:

- se $a > 1$, la soluzione è maggiore di 1 per $k > 0$, ed è compresa tra 0 ed 1 per $k < 0$;
- per $k = 0$, la soluzione è $x = 1$ per ogni valore di a;
- se $0 < a < 1$, la soluzione è maggiore di 1 per $k < 0$, ed è compresa tra 0 ed 1 per $k > 0$.

Per risolvere graficamente una disequazione logaritmica elementare:

- risolvo l'equazione associata;
- se la disequazione è della forma $\log_a x > k$ la soluzione è data dall'intervallo dei valori in cui la curva logaritmica $y = \log_a x$ si trova al di sopra della retta di equazione $y = k$;
- se la disequazione è della forma $\log_a x < k$ la soluzione è data dall'intervallo dei valori in cui la curva logaritmica $y = \log_a x$ si trova al di sotto della retta di equazione $y = k$.

Puoi verificare che la seguente tabella sintetizza i risultati ottenuti. Come al solito, non cercare di utilizzarla in maniera meccanica, ma controlla dai grafici di figura 16 la sua correttezza.

$a > 0$	$0 < a < 1$
$\log_a x \leq k \quad \Rightarrow \quad 0 < x \leq a^k$	$\log_a x \leq k \quad \Rightarrow \quad x \geq a^k$
$\log_a x \geq k \quad \Rightarrow \quad x \geq a^k$	$\log_a x \geq k \quad \Rightarrow \quad 0 < x \leq a^k$

Per risolvere una disequazione logaritmica elementare in maniera puramente algebrica, puoi:

- risolvere l'equazione associata;
- lasciare lo stesso verso della disequazione di partenza se $a>1$; cambiare verso se $0<a<1$;
- eventualmente, imporre che l'argomento del logaritmo sia positivo.

Per controllare che i seguenti esempi siano corretti, è consigliabile tracciare i relativi grafici:

- $\log_{3/4} x=-2 \quad \Rightarrow \quad x=(\frac{3}{4})^{-2}=\frac{16}{9}$;
- $\log_3 x=\frac{1}{2} \quad \Rightarrow \quad x=3^{1/2}=\sqrt{3}$;
- $\log_4 x>0 \quad \Rightarrow \quad x>4^0 \quad \Rightarrow \quad x>1$;
- $\log_5 x\leq-\frac{1}{2} \quad \Rightarrow \quad 0<x\leq 5^{-1/2} \quad \Rightarrow \quad 0<x\leq\frac{1}{\sqrt{5}}$;
- $\log_{1/3} x>-2 \quad \Rightarrow \quad 0<x<(\frac{1}{3})^{-2} \quad \Rightarrow \quad 0<x<\frac{1}{9}$;
- $\log_{1/2} x<1 \quad \Rightarrow \quad x>(\frac{1}{2})^1 \quad \Rightarrow \quad x>\frac{1}{2}$;
- $\log x\geq 3 \quad \Rightarrow \quad x\geq 10^3 \quad \Rightarrow \quad x\geq 1000$.

◆ Proprietà dei logaritmi

Le proprietà delle potenze, che conosciamo almeno dalla prima superiore, possono essere lette “al contrario” come proprietà dei loro esponenti, ovvero dei logaritmi.

Enunciamo le principali proprietà dei logaritmi, accennandone una spiegazione.

Nota. Assumiamo che l'argomento di un logaritmo deve essere sempre un numero reale positivo.

- $\mathbf{\log_a (x\cdot y)=\log_a x+\log_a y}$.

Ovvero: *il logaritmo del prodotto di due o più fattori è uguale alla somma dei logaritmi dei singoli fattori*. Ad esempio: $\log_2(8\cdot 4)=\log_2 32=5$; $\log_2 8+\log_2 4=3+2=5$. Equivale a dire che, nel prodotto di potenze con la stessa base, gli esponenti si sommano.

Spiegazione. Se poniamo $\log_a x=M$ e $\log_a y=N$, abbiamo per la definizione di logaritmo $x=a^M$ e $y=a^N$. Quindi: $\log_a(x\cdot y)=\log_a(a^M\cdot a^N)=\log_a(a^{M+N})=M+N=\log_a x+\log_a y$.

- $\mathbf{\log_a (\frac{x}{y})=\log_a x-\log_a y}$.

Quindi: *il logaritmo del rapporto di due quantità è uguale alla differenza tra i logaritmi delle due* *quantità*. Ad esempio: $\log_2(\frac{2}{32})=\log_2(\frac{1}{16})=-4$; $\log_2 2-\log_2 32=1-5=-4$. Equivale alla proprietà che, nella divisione tra due potenze con la stessa base, gli esponenti si sottraggono.

Spiegazione. Se poniamo $\log_a x=M$ e $\log_a y=N$, abbiamo per la definizione di logaritmo $x=a^M$ e $y=a^N$.

Quindi: $\log_a(\frac{x}{y})=\log_a(\frac{a^M}{a^N})=\log_a(a^{M-N})=M-N=\log_a x-\log_a y$.

Come caso particolare di questa proprietà, otteniamo:

- $\mathbf{\log_a(\frac{1}{x})=\log_a 1-\log_a x=-\log_a x}$.

Quindi, *il logaritmo dell'inverso di un numero è uguale all'opposto del logaritmo del numero dato*, se entrambi i logaritmi sono presi nella stessa base. Ad esempio: $\log_2(1/8)=-3=-\log_2 8$.
Equivale alla nostra definizione di potenza con esponente negativo: $a^{-x}=1/a^x$.

Spiegazione. Ponendo $\log_a x=M$, e quindi $x=a^M$, otteniamo: $\log_a(\frac{1}{x})=\log_a(\frac{1}{a^M})=\log_a(a^{-M})=-M=-\log_a x$.

- $\mathbf{\log_a x^n=n\cdot\log_a x}$ **.**

Quindi, *il logaritmo di una potenza è uguale al prodotto dell'esponente per il logaritmo della base.* Ad esempio: $\log_2 4^3=\log_2 64=6$; $3\cdot\log_2 4=3\cdot 2=6$. Equivale alla proprietà che, nella potenza di una potenza, gli esponenti si moltiplicano.

Spiegazione. Ponendo $\log_a x=M$, cioè $x=a^M$, otteniamo: $\log_a(x^n)=\log_a((a^M)^n)=\log_a(a^{M\cdot n})=M\cdot n=n\cdot\log_a x$.

Come caso particolare, ricordando che $\sqrt[n]{x}=x^{\frac{1}{n}}$, si ricava:

- $\mathbf{\log_a\sqrt[n]{x}=\frac{1}{n}\cdot\log_a x}$.

Quindi, *il logaritmo di una radice è uguale al rapporto tra il logaritmo del radicando e l'indice della radice*. Ad esempio: $\log_3\sqrt{81}=\log_3 9=2$*;* $\frac{1}{2}\cdot\log_3 81=\frac{1}{2}\cdot 4=2$.

Attenzione. Non esiste una proprietà riguardante il logaritmo di una somma o di una differenza. In particolare: $\log_a(x\pm y)\neq\log_a x\pm\log_a y$. Ad esempio: $\log_2(8+8)=\log_2 16=4$, ma $\log_2 8+\log_2 8=3+3=6$. Questo fatto è l'equivalente della mancanza di una proprietà per la somma di potenze con la stessa base.

◆ Cambiare la base di un logaritmo

Spesso è utile trasformare un logaritmo scritto in una base in uno avente lo stesso valore ma scritto in una base diversa. A questo scopo si applica la seguente formula:

- $\mathbf{\log_b x = \dfrac{\log_a x}{\log_a b}}$.

In altri termini, il logaritmo di un numero nella "vecchia" base *b* è uguale al logaritmo dello stesso numero nella "nuova" base *a* diviso per il logaritmo nella "nuova" base *a* della "vecchia" base *b*.

Ad esempio: $\log_4 64 = 3$; $\dfrac{\log_2 64}{\log_2 4} = \dfrac{6}{2} = 3$.

Spiegazione. Poniamo: $\log_b x = M$, $\log_a x = N$, $\log_a b = P$. Dobbiamo quindi dimostrare che $M = N/P$.

Dalla definizione di logaritmo segue che $x = b^M$, $x = a^N$, $b = a^P$.

Confrontando tra loro le prime due formule, ricaviamo: $b^M = a^N$.

Sostituendo $b = a^P$, otteniamo: $a^{PM} = a^N$, da cui, uguagliando gli esponenti: $PM = N$ e, utilizzando il principio di equivalenza: $M = N/P$, come volevamo dimostrare.

Questa formula può talvolta rendere lievemente più semplice il calcolo di un logaritmo:

- $\log_8 128 = \dfrac{\log_2 128}{\log_2 8} = \dfrac{7}{3}$; $\log_{27} 81 = \dfrac{\log_3 81}{\log_3 27} = \dfrac{4}{3}$.

Un caso particolare della formula del cambiamento di base è:

- $\mathbf{\log_b a = \dfrac{\log_a a}{\log_a b} = \dfrac{1}{\log_a b}}$.

Quindi, il logaritmo nella "vecchia" base *b* della "nuova" base *a* è l'inverso del logaritmo in cui scambio tra loro base ed argomento. Ad esempio: $\log_4 2 = \dfrac{1}{\log_2 4} = \dfrac{1}{2}$.

Spiegazione. Se poniamo $\log_b a = M$, dalla definizione di logaritmo ricaviamo: $a = b^M$, e quindi $b = a^{1/M}$.

Applicando ancora la definizione di logaritmo, otteniamo:

$\log_a b = \dfrac{1}{M} = \dfrac{1}{\log_b a}$, il che è equivalente a ciò che volevamo dimostrare.

Poiché le calcolatrici scientifiche possono fornire solo logaritmi in base 10 o in base *e*, la formula del cambiamento di base ci serve a calcolare il valore numerico approssimato dei logaritmi aventi una base generica.

Ad esempio, per calcolare $\log_2 3$, lo trasformiamo in $\dfrac{\log 3}{\log 2}$ e calcoliamo il valore di quest'ultima espressione premendo i seguenti tasti:

3 log ÷ 2 log =

Otteniamo così il valore approssimato $\log_2 3 \simeq 1{,}58496$.

◆ **Usare i logaritmi per svolgere dei calcoli numerici**

Una curiosità storica: prima che si diffondessero le calcolatrici tascabili, i logaritmi venivano utilizzati per svolgere in maniera semplice, anche se approssimata, delle espressioni numeriche complesse.

Osserva, infatti, che le proprietà dei logaritmi ci permettono di trasformare potenze e radici in moltiplicazioni e divisioni e queste ultime in addizioni e sottrazioni, e quindi ci fanno passare da operazioni "complesse" ad operazioni "semplici", che possono essere più facilmente svolte con carta e penna.

In una situazione idealizzata, immagina di avere un libro che faccia corrispondere ad ogni numero positivo il suo logaritmo in una certa base, ad esempio 10, e, viceversa, ad ogni logaritmo il numero di partenza. Libri del genere erano chiamati "Tavole dei logaritmi", ed è probabile che i vostri nonni li abbiano utilizzati.

Supponiamo adesso di volere calcolare l'espressione $\frac{\sqrt[5]{3{,}4^3 \cdot 2{,}7^2}}{1{,}2}$.

Consideriamone il logaritmo, ad esempio in base 10: $\log \frac{\sqrt[5]{3{,}4^3 \cdot 2{,}7^2}}{1{,}2}$.

Applichiamo successivamente le diverse proprietà dei logaritmi fino a che non abbiamo solo addizioni e sottrazioni:

$$\log \frac{\sqrt[5]{3{,}4^3 \cdot 2{,}7^2}}{1{,}2} = \log \sqrt[5]{3{,}4^3 \cdot 2{,}7^2} - \log 1{,}2 = \frac{1}{5} \log (3{,}4^3 \cdot 2{,}7^2) - \log 1{,}2 =$$
$$\frac{1}{5} \log 3{,}4^3 + \log 2{,}7^2 - \log 1{,}2 = \frac{1}{5} \cdot (3 \cdot \log 3{,}4 + 2 \cdot \log 2{,}7) - \log 1{,}2$$

Ora prendiamo dalle nostre tavole il valore approssimato dei logaritmi ottenuti:

$$\log 3{,}4 \simeq 0{,}53 \quad ; \quad \log 2{,}7 \simeq 0{,}43 \quad ; \quad \log 1{,}2 \simeq 0{,}08$$

e svolgiamo i calcoli, che sono assai più semplici che in partenza:

$$\frac{1}{5} \cdot (3 \cdot \log 3{,}4 + 2 \cdot \log 2{,}7) - \log 1{,}2 \simeq \frac{1}{5} \cdot (3 \cdot 0{,}53 + 2 \cdot 0{,}43) - 0{,}08 \simeq 0{,}41 \quad .$$

Il risultato ottenuto è però il logaritmo decimale dell'espressione che volevamo calcolare. Utilizziamo ancora le tavole "al contrario" per passare dal logaritmo al numero di partenza, cioè per calcolare un'esponenziale: $10^{0{,}41} \simeq 2{,}57$. Questo è il risultato approssimato dell'espressione data.

Ti potrai chiedere come è possibile che un solo libro contenga i logaritmi di infiniti numeri, grandi o piccoli a piacere. In realtà, grazie alle proprietà dei logaritmi, ci basta conoscere il logaritmo decimale dei numeri compresi tra 1 e 10.

Infatti, se sappiamo che $\log 3{,}4 \simeq 0{,}53$, allora:

- $\log 340.000 = \log (3{,}4 \cdot 100.000) = \log 3{,}4 + \log 100.000 \simeq 0{,}53 + 5 \simeq 5{,}53$;
- $\log 0{,}00034 = \log \frac{3{,}4}{10.000} = \log 0{,}34 - \log 10.000 \simeq 0{,}53 - 4 \simeq -3{,}47$.

In altre parole:

- ogni volta che un numero viene moltiplicato per 10, il suo logaritmo decimale aumenta di una unità;
- ogni volta che un numero viene diviso per 10, il suo logaritmo decimale diminuisce di una unità.

◆ Alcune equazioni logaritmiche non elementari

Consideriamo alcune equazioni particolari in cui, applicando le proprietà dei logaritmi, i due membri sono riducibili a due logaritmi aventi la stessa base, del tipo: $\log_a f(x) = \log_a g(x)$.

Poiché la funzione logaritmica è iniettiva, due logaritmi aventi la stessa base possono avere lo stesso valore solo se i loro argomenti sono uguali: $f(x)=g(x)$.

Questa condizione è necessaria, ma non sufficiente per la risoluzione dell'equazione logaritmica. Infatti, i valori che risolvono l'equazione algebrica $f(x)=g(x)$ sono soluzioni dell'equazione logaritmica di partenza solo se essi rendono strettamente positivi gli argomenti di tutti i logaritmi che compaiono nell'equazione data.

Ad esempio, per la risoluzione dell'equazione $\log_a f(x)=\log_a g(x)$, dobbiamo imporre $f(x)=g(x)$ con le condizioni di esistenza $f(x)>0$ e $g(x)>0$.

Esempio 1

Consideriamo l'equazione logaritmica $2\log x-\log(x+6)=\log 3$.

Applicando le proprietà dei logaritmi, otteniamo: $\log\frac{x^2}{x+6}=\log 3$.

Poiché la funzione logaritmica è iniettiva, possiamo uguagliare i due argomenti:

$$\frac{x^2}{x+6}=3 \quad\Rightarrow\quad x^2-3x-18=0 \quad\Rightarrow\quad x_1=6; \quad x_2=-3 \ .$$

Imponendo le condizioni di esistenza $\begin{cases} x>0 \\ x+6>0 \end{cases}$, che equivalgono alla richiesta che gli argomenti dei logaritmi dell'equazione data siano positivi, verifichiamo che la soluzione x_1 è accettabile, mentre x_2 non è accettabile. L'equazione ha quindi l'unica soluzione $x=6$.

Verifica: sostituendo $x=6$ nell'equazione data, otteniamo:

$2\log 6-\log(6+6)=\log 6^2-\log 12=\log(36/12)=\log 3$, come richiesto.

Osserva che per le equazioni logaritmiche non è necessario risolvere il sistema di disequazioni formato dalle condizioni di esistenza, ma è sufficiente verificare che ciascuna delle soluzioni trovate verifichi tutte le disequazioni che compongono tale sistema.

Esempio 2

Prendiamo l'equazione logaritmica $\log_2(x^2-5)=2+\log_2 x$.

Può essere preferibile “trasportare” i logaritmi a primo membro:

$$\log_2(x^2-5)-\log_2 x=2 \quad\Rightarrow\quad \log_2\frac{x^2-5}{x}=2 \ .$$

In alternativa, potremmo porre $2=\log_2 4$ e ricavare: $\log_2(x^2-5)=\log_2 4+\log_2 x \quad\Rightarrow\quad \log_2(x^2-5)=\log_2(4x)$.

Dalla definizione di logaritmo, segue che: $\frac{x^2-5}{x}=2^2 \quad\Rightarrow\quad x^2-4x-5=0$.

Tenendo conto delle condizioni di esistenza $\begin{cases} x^2-5>0 \\ x>0 \end{cases}$, ricaviamo le soluzioni:

$$\begin{array}{ll} x_1=5 & accettabile \\ x_2=-1 & non\,accettabile \end{array} \quad .$$

Esempio 3

Risolviamo l'equazione $\log(3-2x)-\log(x-1)=\log(x-4)-\log 2$.

Può essere più semplice “trasportare” i logaritmi da un membro all'altro in modo che siano collegati con delle somme: $\log(3-2x)+\log 2=\log(x-1)+\log(x-4)$, da cui:

$$\log[2(3-2x)]=\log[(x-1)(x-4)] \quad \Rightarrow \quad 6-4x=x^2-5x+4 \quad \Rightarrow \quad x^2-x-2=0 \quad .$$

Se, invece, applichiamo subito la proprietà della differenza di logaritmi, otteniamo un'equazione fratta:

$$\log\frac{3-2x}{x-1}=\log\frac{x-4}{2} \quad \Rightarrow \quad \frac{3-2x}{x-1}=\frac{x-4}{2} \quad .$$

In questo caso, le condizioni di esistenza sono: $\begin{cases} 3-2x>0 \\ x-1>0 \\ x-4>0 \end{cases}$.

Ricaviamo le soluzioni: $\begin{array}{ll} x_1=2 & non\,accettabile \\ x_2=-1 & non\,accettabile \end{array}$.

Esempio 4

Consideriamo l'equazione $\log_3 x+2\log_9 x=2$.

Per poter applicare le proprietà dei logaritmi, dobbiamo avere un'unica base.

Per la formula del cambiamento di base: $\log_9 x=\dfrac{\log_3 x}{\log_3 9}=\dfrac{\log_3 x}{2}$.

Otteniamo quindi: $\log_3 x+\log_3 x=2 \quad \Rightarrow \quad 2\log_3 x=2 \quad \Rightarrow \quad \log_3 x=1 \quad \Rightarrow \quad x=3$.

La soluzione ottenuta è accettabile, perché verifica la condizione di esistenza $x>0$.

In alternativa, avremmo potuto applicare la proprietà della somma di logaritmi:

$$\log_3 x+\log_3 x=2 \quad \Rightarrow \quad \log_3 x^2=2 \quad \Rightarrow \quad x^2=9 \quad \Rightarrow \quad x=\pm 3 \quad .$$

La condizione di esistenza ci impone però di escludere la soluzione negativa.

◆ Alcune disequazioni logaritmiche non elementari

Anche in questo caso cerchiamo, applicando le proprietà dei logaritmi, di esprimere entrambi i membri come logaritmi aventi la stessa base, e quindi di ricondurci ad una delle forme

$$\log_a f(x)>\log_a g(x) \quad \text{oppure} \quad \log_a f(x)<\log_a g(x) \quad .$$

Dobbiamo però distinguere i casi in cui la base sia maggiore di 1 o compresa tra 0 ed 1.

- Se $a>1$, la corrispondente funzione logaritmica è crescente.

  Quindi: $\log_a f(x)>\log_a g(x) \quad \Leftrightarrow \quad f(x)>g(x)$.

La relazione che intercorre tra i logaritmi si conserva anche facendo riferimento ai rispettivi argomenti. In pratica, quando "eliminiamo" i logaritmi dobbiamo lasciare lo stesso verso della disequazione iniziale.

- Se invece $0<a<1$, la corrispondente funzione logaritmica è decrescente.
  Pertanto: $\log_a f(x)>\log_a g(x) \quad \Leftrightarrow \quad f(x)<g(x)$.

  Quindi la relazione tra i logaritmi si trasforma nella relazione inversa che intercorre tra i rispettivi argomenti. In pratica, "facendo sparire" i logaritmi dobbiamo cambiare verso rispetto alla disequazione di partenza.

Diversamente dalle disequazioni esponenziali, però, alla disequazione tra gli argomenti dobbiamo aggiungere le condizioni di esistenza che impongono all'argomento dei logaritmi che compaiono nella disequazione di partenza di essere strettamente positivo.

Ad esempio, la disequazione $\log_a f(x)>\log_a g(x)$ è equivalente al sistema:

$$\begin{cases} f(x)>g(x) \\ f(x)>0 \\ g(x)>0 \end{cases} \quad se\, a>1 \qquad e \qquad \begin{cases} f(x)<g(x) \\ f(x)>0 \\ g(x)>0 \end{cases} \quad se\, 0<a<1 \quad .$$

Esempio 1

Consideriamo la disequazione logaritmica $\log_5(x+2)>\log_5(7x-1)$.

Imponiamo le condizioni di esistenza dei logaritmi: $\begin{cases} x+2>0 \\ 7x-1>0 \end{cases} \Rightarrow \quad x>\frac{1}{7}$.

Poiché la base è maggiore di 1, la funzione logaritmica è crescente e la disuguaglianza tra i logaritmi si conserva inalterata anche tra i loro argomenti:

$$x+2>7x-1 \quad \Rightarrow \quad x<\frac{1}{2} \quad .$$

Tenendo conto della condizione di esistenza, ricaviamo:

$$\begin{cases} x>\dfrac{1}{7} \\ x<\dfrac{1}{2} \end{cases} \Rightarrow \quad \frac{1}{7}<x<\frac{1}{2}$$ che è la soluzione cercata.

Esempio 2

Risolviamo la disequazione $\log_{3/4}(3-x)>\log_{3/4}(2x+5)$.

Imponiamo le condizioni di esistenza dei logaritmi:

$$\begin{cases} 3-x>0 \\ 2x+5>0 \end{cases} \Rightarrow \quad -\frac{5}{2}<x<3 \quad .$$

Poiché la base è minore di 1, la funzione logaritmica è decrescente e la disuguaglianza che intercorre tra i logaritmi si trasforma nella relazione inversa tra i loro argomenti:

$$3-x<2x+5 \quad \Rightarrow \quad x>-\frac{2}{3} \quad .$$

Tenendo conto della condizione di esistenza, otteniamo:

$$\begin{cases} x>-\dfrac{2}{3} \\ -\dfrac{5}{2}<x<3 \end{cases} \quad \Rightarrow \quad -\frac{2}{3}<x<3 \quad \text{che è la soluzione richiesta.}$$

Naturalmente, questo è equivalente a risolvere un unico sistema comprendente le condizioni di esistenza e la disequazione tra gli argomenti: $\begin{cases} 3-x>0 \\ 2x+5>0 \\ 3-x<2x+5 \end{cases}$.

Esempio 3

Prendiamo in considerazione la disequazione $\log_{1/2}(2-x^2)\geq 0$.

Imponiamo la condizione di esistenza: $2-x^2>0 \quad \Rightarrow \quad -\sqrt{2}<x<\sqrt{2}$.

Poiché la base è minore di 1, otteniamo:

$$2-x^2\leq\left(\frac{1}{2}\right)^0 \quad \Rightarrow \quad 2-x^2\leq 1 \quad \Rightarrow \quad 1-x^2\leq 0 \quad \Rightarrow \quad x\leq -1 \ \ \textit{oppure} \ \ x\geq 1 \quad .$$

Sarebbe equivalente scrivere $0=\log_{1/2}1$, e quindi:

$$\log_{1/2}(2-x^2)\geq\log_{1/2}1 \quad \Rightarrow \quad 2-x^2\leq 1 \quad .$$

Tenendo conto della condizione di esistenza, otteniamo la soluzione complessiva:

$$-\sqrt{2}<x\leq -1 \ \ \textit{oppure} \ \ 1\leq x<\sqrt{2} \quad .$$

Esercizi su esponenziali e logaritmi

Esprimi sotto forma di radicale e semplifica:

1. $125^{-1/2}$; $8^{4/3}$; $25^{-3/2}$ $R: \frac{\sqrt{5}}{25}; 16; \frac{1}{125}$
2. $(\frac{27}{8})^{-2/3}$; $(\frac{16}{81})^{-1/4}$; $(\frac{1}{243})^{-3/5}$ $R: \frac{4}{9}; \frac{3}{2}; 27$
3. $49^{1/2}$; $25^{-1/2}$; $0{,}008^{2/3}$ $R: 7; \frac{1}{5}; 0{,}04$
4. $(\frac{25}{16})^{-3/2}$; $(\frac{3}{4})^{-2}$; $(\frac{3}{4})^{-1/2}$ $R: \frac{64}{125}; \frac{16}{9}; \frac{2\sqrt{3}}{3}$
5. $4^{3/2}$; $81^{3/4}$; $25^{-3/2}$ $R: 8; 27; \frac{1}{125}$
6. $0{,}027^{2/3}$; $16^{-3/4}$; $(\frac{9}{4})^{-3/2}$ $R: 0{,}09; \frac{1}{8}; \frac{8}{27}$
7. $(\frac{81}{256})^{3/4}$; $(\frac{81}{16})^{-1/4}$; $10^{-3/2}$ $R: \frac{27}{64}; \frac{2}{3}; \frac{\sqrt{10}}{100}$

Trasforma in potenze ad esponente razionale:

8. $\sqrt[3]{5}$; $\sqrt{3}$; $\sqrt[8]{a^3}$ $R: 5^{1/3}; 3^{1/2}; a^{3/8}$
9. $\frac{1}{\sqrt[6]{2}}$; $\frac{1}{\sqrt[5]{3^4}}$; $\frac{1}{\sqrt[8]{b^7}}$ $R: 2^{-1/6}; 3^{-4/5}; b^{-7/8}$
10. $\sqrt[3]{3^2}$; $\frac{1}{\sqrt[3]{5^2}}$; $\sqrt[5]{a^3}$ $R: 3^{2/3}; 5^{-2/3}; a^{3/5}$

Calcola utilizzando le proprietà delle potenze e riporta il risultato sotto forma di radicale:

11. $\sqrt{2}\cdot\sqrt[3]{2}$; $\sqrt{2}:\sqrt[3]{2}$; $\sqrt[3]{\sqrt{2}}$ $R: \sqrt[6]{32}; \sqrt[6]{2}; \sqrt[6]{2}$
12. $(\sqrt[3]{2})^9$; $\sqrt[4]{5^3}:\sqrt{5}$; $\sqrt[3]{3}\cdot\sqrt[3]{3^2}$ $R: 8; \sqrt[4]{5}; 3$
13. $\sqrt[3]{2^2}\cdot\sqrt[6]{2}$; $\sqrt[3]{2^2}\cdot\frac{1}{\sqrt[6]{2}}$; $\sqrt{3}\cdot\sqrt[4]{3}\cdot\frac{1}{\sqrt[8]{3}}$ $R: \sqrt[6]{32}; \sqrt{2}; \sqrt[8]{3^5}$

Risolvi aiutandoti, se necessario, con il grafico:

14. $3^x > 9$; $5^x = 5$; $2^x \leq 16$ $R: x > 2; x = 1; x \leq 4$
15. $4^x \geq 0$; $3^x = -\frac{1}{3}$; $(\frac{1}{5})^x < -5$ $R: \mathbb{R}; \emptyset; \emptyset$

16. $(\frac{5}{3})^x=1$; $(\frac{1}{2})^x>8$; $(\frac{1}{3})^x\le\frac{1}{81}$ $R: x=0\,;x<-3\,;x\ge 4$

17. $(\frac{2}{3})^x=\frac{4}{9}$; $(\frac{3}{2})^x<\frac{2}{3}$; $2^x\ge\sqrt[3]{2}$ $R: x=2\,;x<-1\,;x\ge\frac{1}{3}$

18. $3^x\le\frac{1}{\sqrt{27}}$; $4^x=2$; $4^x\le 8$ $R: x\le-\frac{3}{2}\,;x=\frac{1}{2}\,;x\le\frac{3}{2}$

19. $9^x=3$; $5^x<25$; $4^x>\frac{1}{2}$ $R: x=\frac{1}{2}\,;x<2\,;x>-\frac{1}{2}$

20. $10^x=0{,}01$; $27^x\le\frac{1}{3}$; $9^x\ge 27$ $R: x=-2\,;x\le-\frac{1}{3}\,;x\ge\frac{3}{2}$

21. $3^x>1$; $2^x\le 1$; $3^x>3$ $R: x>0\,;x\le 0\,;x>1$

22. $(\frac{1}{2})^x>1$; $(\frac{1}{5})^x\ge 5$; $(\frac{2}{3})^x<\frac{4}{9}$ $R: x<0\,;x\le-1\,;x>2$

23. $(\frac{1}{2})^x>4$; $3^x\ge\frac{1}{9}$; $25^x>5$ $R: x<-2\,;x\ge-2\,x>\frac{1}{2}$

24. $2^x\ge\frac{1}{8}$; $(\frac{3}{2})^x\le\frac{4}{9}$; $(\frac{2}{3})^x\ge\frac{27}{8}$ $R: x\ge-3\,;x\le-2\,;x\le-3$

25. $(\frac{1}{3})^x>-1$; $5^x<-5$; $3^x\le 0$ $R: \mathbb{R}\,;\emptyset\,;\emptyset$

Determina il valore dei seguenti logaritmi.

26. $\log_2 8$; $\log_5 25$; $\log_3 81$ $R: 3\,;2\,;4$

27. $\log_2\frac{1}{4}$; $\log_3\frac{1}{27}$; $\log_3\frac{1}{81}$ $R: -2\,;-3\,;-4$

28. $\log_{1/2} 2$; $\log_{1/2} 8$; $\log_{1/5} 0{,}00032$ $R: -1\,;-3\,;5$

29. $\log_2\frac{1}{64}$; $\log_3\frac{1}{243}$; $\log_{1/5} 0{,}008$ $R: -6\,;-5\,;3$

30. $\log_3(-\frac{1}{3})$; $\log_{32} 8$; $\log_{16}\frac{1}{8}$ $R:$ *non esiste* $;\frac{3}{5};-\frac{3}{4}$

31. $\log_{1/2} 0{,}25$; $\log_{0,5} 0{,}125$; $\log_3\frac{1}{81}$ $R: 2\,;3\,;-4$

32. $\log_2 0{,}25$; $\log_4 0{,}125$; $\log_{1/2}\frac{1}{8}$ $R: -2\,;-\frac{3}{2}\,;3$

33. $\log_{\sqrt{3}} 3$; $\log_3\sqrt[4]{3}$; $\log_{36} 216$ $R: 2\,;\frac{1}{4}\,;\frac{3}{2}$

34. $\log_2\sqrt[3]{4}$; $\log_2\sqrt{\sqrt{2}}$; $\log_2\sqrt[3]{\sqrt{\frac{1}{2}}}$ $R: \frac{2}{3}\,;\frac{1}{4}\,;-\frac{1}{6}$

35. $\log_{2/5}\frac{25}{4}$; $\log_{81}\sqrt{27}$; $\log_5\sqrt[3]{25}$ $R: -2; \frac{3}{8}; \frac{2}{3}$

36. $\log_{\sqrt{2}}16$; $\log_9\sqrt[4]{3}$; $\log_2\frac{1}{4}$ $R: 8; \frac{1}{8}; -2$

37. $\log_4 4$; $\log_3\frac{1}{27}$; $\log_{1/9}3$ $R: 1; -3; -\frac{1}{2}$

38. $\log_{1/2}\frac{1}{8}$; $\log_2 1$; $\log_2 0$ $R: 3; 0;$ *non esiste*

39. $\log_8 4$; $\log_4\sqrt{2}$; $\log_{81}27$ $R: \frac{2}{3}; \frac{1}{4}; \frac{3}{4}$

Determina la base dei seguenti logaritmi:

40. $\log_x 9=2$; $\log_x 27=3$; $\log_x 64=3$ $R: 2; 3; 4$

41. $\log_x\frac{1}{27}=-3$; $\log_x\frac{1}{16}=-2$; $\log_x\frac{1}{25}=-2$ $R: 3; 4; 5$

42. $\log_x\sqrt{2}=-\frac{1}{4}$; $\log_x\sqrt[5]{\frac{1}{4}}=-\frac{2}{5}$; $\log_x\sqrt[3]{\frac{1}{9}}=-\frac{2}{9}$ $R: \frac{1}{4}; 2; 27$

43. $\log_x\sqrt{27}=\frac{3}{2}$; $\log_x 125=3$; $\log_x\frac{243}{32}=-2{,}5$ $R: 3; 5; \frac{4}{9}$

44. $\log_x\sqrt{5}=-\frac{1}{2}$; $\log_x\frac{1}{81}=-2$; $\log_x\frac{16}{81}=-4$ $R: \frac{1}{5}; 9; \frac{3}{2}$

45. $\log_x\frac{1}{625}=4$; $\log_x 64=-3$; $\log_x\frac{1}{81}=-2$ $R: \frac{1}{5}; \frac{1}{4}; 9$

46. $\log_x\frac{9}{25}=2$; $\log_x 2=\frac{1}{2}$; $\log_x\frac{1}{27}=-3$ $R: \frac{3}{5}; 4; 3$

47. $\log_x\sqrt[5]{16}=\frac{4}{5}$; $\log_x\frac{8}{27}=-\frac{3}{2}$; $\log_x\frac{1}{625}=4$ $R: 2; \frac{9}{4}; \frac{1}{5}$

Determina l'argomento dei seguenti logaritmi:

48. $\log_3 x=4$; $\log_5 x=3$; $\log_9 x=0{,}5$ $R: 81; 125; 3$

49. $\log_{1/3}x=-2$; $\log_{3/2}x=1$; $\log_{1/2}x=-7$ $R: 9; \frac{3}{2}; 128$

50. $\log_5 x=1$; $\log_{3/2}x=-2$; $\log_{2/3}x=\frac{5}{2}$ $R: 5; \frac{4}{9}; \frac{4}{9}\sqrt{\frac{2}{3}}$

51. $\log_{\sqrt{5}}x=1$; $\log_{1/6}x=-3$; $\log_{3/4}x=\frac{1}{2}$ $R: \sqrt{5}; 216; \frac{\sqrt{3}}{2}$

52. $\log_3 x = 3$; $\log_{32} x = \frac{4}{5}$; $\log_{3/4} x = \frac{2}{3}$ $R: 27; 16; \sqrt[3]{\frac{9}{16}}$

53. $\log_2 x = 2$; $\log_9 x = \frac{1}{2}$; $\log_{3/5} x = -1$ $R: 4; 3; \frac{5}{3}$

54. $\log_{2/3} x = -1$; $\log_{64} x = \frac{1}{3}$; $\log_{27} x = \frac{1}{6}$ $R: \frac{3}{2}; 4; \sqrt{3}$

55. $\log_{2/3} x = \frac{2}{3}$; $\log_{3/4} x = -\frac{3}{4}$; $\log_{27} x = \frac{2}{3}$ $R: \sqrt[3]{\frac{4}{9}}; \sqrt[4]{\frac{64}{27}}; 9$

Risolvi aiutandoti, se necessario, con il grafico:

56. $\log_2 x \leq 3$; $\log_4 x > 0$; $\log_{1/2} x \geq 2$ $R: 0 < x \leq 8; x > 1; 0 < x \leq \frac{1}{4}$

57. $\log_{3/4} x < -2$; $\log_2 x < 4$; $\log_{1/2} x > 1$ $R: x > \frac{16}{9}; 0 < x < 16; 0 < x < \frac{1}{2}$

58. $\log_{1/3} x < 0$; $\log_2 x \geq \frac{1}{2}$; $\log_3 x \leq -1$ $R: x > 1; x \geq \sqrt{2}; 0 < x \leq \frac{1}{3}$

59. $\log_{1/2} x \geq -2$; $\log_2 x \leq 3$; $\log_{1/2} x > -1$ $R: 0 < x \leq 4; 0 < x \leq 8; 0 < x < 2$

60. $\log x < \frac{1}{3}$; $\log_2 x > 4$; $\log_9 x < \frac{1}{2}$ $R: 0 < x < \sqrt[3]{10}; x > 16; 0 < x < 3$

61. $\log_{1/2} x \leq 3$; $\log_5 x < 2$; $\log_{1/25} x > -\frac{1}{2}$ $R: x \geq \frac{1}{8}; 0 < x < 25; 0 < x < 5$

Risolvi le seguenti equazioni esponenziali:

62. $16^{5x-1} = 64$; $81^x = 243$; $1000^x = 0{,}1$ $R: \frac{1}{2}; \frac{5}{4}; -\frac{1}{3}$

63. $3^x = 3^{2x-1}$; $3^{-3x} = \frac{1}{9}$; $3^x \cdot 9 = \frac{1}{3}$ $R: 1; \frac{2}{3}; -3$

64. $(\frac{2}{3})^{x+1} = (\frac{3}{2})^{2x}$; $\sqrt{8^x} = \frac{1}{4}$; $2^x \cdot 4 = \frac{1}{4}$ $R: -\frac{1}{3}; -\frac{4}{3}; -4$

65. $\sqrt[3]{25^{1-x}} = \sqrt{5}$; $6^{2x} = 216^{2x-1}$; $3^{1+2x} = 81$ $R: \frac{1}{4}; \frac{3}{4}; \frac{3}{2}$

66. $3^{x^2} = 81$; $25^{x-1} = 5$; $5^{x^2+x} = 25$ $R: \pm 2; \frac{3}{2}; -2, 1$

67. $(0{,}1)^{4x} = 1000$; $8^{3x} = 32^{4x-1}$; $3^{x^2+x} = 1$ $R: -\frac{3}{4}; \frac{5}{11}; 0, -1$

68. $\sqrt[6]{3^{2x-5}} = \sqrt[3]{3^{5x-1}}$; $4 \cdot 2^{2x} = 8^x$ $R: -\frac{3}{8}; 2$

69. $3\cdot 9^{2x-1}=\sqrt{3}$; $\frac{2^{x+1}}{4^{x-1}}=\sqrt{8^x}$ $R: \frac{3}{8}; \frac{6}{5}$

70. $\frac{3^{x^2+5}}{27^{2x}}=\frac{1}{3^{x+1}}$; $4^{x-1}=\frac{1}{2^{x-x^2}}$ $R: 2,3; 1,2$

71. $\frac{3^{x-1}}{9}=\frac{27^{1-x}}{3^{2+x}}$; $\frac{\sqrt[3]{32^x}}{(2^{x+2})^{x-2}}=1$ $R: \frac{4}{5}; 3, -\frac{4}{3}$

72. $\sqrt{2}\cdot(\frac{1}{2})^{x+1}=1$; $(\frac{2}{3})^{x+1}=(\frac{27}{8})^{1-2x}$ $R: -\frac{1}{2}; \frac{4}{5}$

73. $\frac{125^{3x+1}}{25^{x+2}}=\frac{5^{3-2x}}{625^{5x-1}}$; $\frac{16^{4-x}\cdot 2}{32^{1+3x}}=\frac{4^{1+8x}}{2\cdot 64^{2x+1}}$ $R: \frac{8}{29}; \frac{17}{23}$

74. $5^{3x-1}\cdot 25^{4x+3}=125^{x+4}$; $4^{x-1}\cdot\sqrt[4]{128^{x-1}}=8^x$ $R: \frac{7}{8}; 5$

75. $\sqrt[3]{9^{4x-2}}=3\cdot\sqrt{27^{4-x}}$; $10^{x^2-11x+30}=100$ $R: 2;\ 4,7$

76. $3^{4x+7}=9^{7x-4}$; $(\frac{5}{3})^{2-3x}=(\frac{3}{5})^{4x-1}$ $R: \frac{3}{2}; -1$

77. $3^{2x-1}\cdot 9^{3x+2}=27^{x+3}$; $\frac{8^{2x}}{16^{x-3}}=\frac{32^{x+2}}{64^{1-x}}$ $R: \frac{6}{5}; \frac{8}{9}$

78. $\sqrt[4]{3^{2x+3}}=81$; $\sqrt[6]{5^{2x-5}}=\sqrt[3]{5^{5x-1}}$ $R: \frac{13}{2}; -\frac{3}{8}$

Risolvi le seguenti disequazioni esponenziali:

79. $2^{x^2-4}>8$; $3^{x-5}<27$ $R: x<-\sqrt{7}\ o\ x>\sqrt{7}; x<8$

80. $2^{x^2-1}\geq\sqrt[3]{2^{x+1}}$; $(\frac{5}{7})^{2x+1}<(\frac{7}{5})^{4x-1}$ $R: x\leq -1\ o\ x\geq\frac{4}{3}; x>0$

81. $(3^{x-1})^x\geq 27\cdot 3^x$; $(\frac{1}{2})^{2x}\geq(\frac{1}{2})^{x+\frac{3}{2}}$ $R: x\leq -1\ o\ x\geq 3; x\leq\frac{3}{2}$

82. $3^{x^2+2x}\leq 1$; $5^{4-x^2}>1$ $R: -2\leq x\leq 0; -2<x<2$

83. $(\frac{1}{3})^{x+1}>1$; $(\frac{1}{2})^{3-x}<1$ $R: x<-1; x<3$

84. $2^{x^2-4}<16$; $2^{x-5}<8$ $R: -2\sqrt{2}<x<2\sqrt{2}; x<8$

85. $3^{x^2}>81$; $3^{1-4x}>9^{x+1}$ $R: x<-2\ o\ x>2; x<-\frac{1}{6}$

86. $(\frac{4}{5})^{2x-1}\geq\frac{25}{16}$; $\frac{4^x\cdot 16^{x+1}}{8^{x-3}}<1$ $R: x\leq -\frac{1}{2}; x<-\frac{13}{3}$

87. $8^{x+2}>32^{4x+1}$; $4^{1-x}>\sqrt[3]{16}$ $R: x<\frac{1}{17}; x<\frac{1}{3}$

88. $\frac{1}{\sqrt{8^x}} > 4\sqrt{2}$; $\frac{3^{x+1}}{27^{2x}} < \frac{1}{3^{x^2+5}}$ $R: x < -\frac{5}{3}; 2 < x < 3$

Risolvi le seguenti equazioni logaritmiche:

89. $2\log x - \log(x+6) = \log 3$; $\log(x^2+2x+1) - 1 = \log(x+1)$ $R: 6; 9$

90. $\log_3(x^2+9) = 2 + \log_3(x+1)$; $\log_{1/4} x + \log_{1/2} x + \log_2 x = 1$ $R: 0, 9; \frac{1}{4}$

91. $2\log(x-1) = 1 - \log 5$; $\log x + \log(x+1) = 2\log(1-x)$ $R: 1+\sqrt{2}; \frac{1}{3}$

92. $3\log x - \log\frac{x}{2} = \log 288$; $2\log(x+3) + \log 2 = \log(3x^2+5)$ $R: 12; -1, 13$

93. $\log(x+7) + \log(x-1) - \log(x-3) = \log 33$ $R: 4, 23$

94. $\log_2(35-x^3) - \log_2 8 \cdot \log_2(5-x) = 0$ $R: 2, 3$

95. $2\log x - \log 9 = \log(x+4) + \log(x-4)$ $R: 3\sqrt{2}$

96. $\frac{1}{3}\log x^6 = \frac{1}{2}\log 81$; $\log x = \frac{1}{3}\log 27$ $R: 3; 3$

97. $\log(2x+7) - \log 2 = 2\log(x+5) - \log(5-x)$ $R: -3, -\frac{5}{4}$

98. $2\log_{2/3}(x-1) = -2$; $\log_3(3x-4) = 2$ $R: \frac{5}{2}; \frac{13}{3}$

99. $\log_6(2x-3) = 0$; $\log_2(x^2+3x+4) = 2$ $R: 2; 0, -3$

100. $\log_{4/3}(x^2-x+1) = -1$; $\log_4(x+6) + \log_4 x = 2$ $R: \frac{1}{2}; 2$

101. $\log_3(x^2+x) - \log_3(x^2-x) = 1$; $\log_5(x^2-4) - \log_5(x+2) = 2$ $R: 2; 27$

102. $\log_2 x + 2 = \log_2 7$; $2\log_2 x = 2 + \log_2(x-1)$ $R: \frac{7}{4}; 2$

103. $\log(10-2x) = \log(5-x) - \log 4$ $R: \emptyset$

104. $2\log x - \log(2x+1) + \log 3 = \log(x-2)$ $R: \emptyset$

105. $\log_3 x + 2\log_9 x = 2$; $\log_{1/2} x - \log_{1/4} x = \log_4 16$ $R: 3; \frac{1}{16}$

106. $\log_2 x - \log_8 x = 4$; $4\log_2 x - 3\log_8 x = 6$ $R: 64; 4$

107. $\log x + \log(2x-1) = \log 14 + \log(x-2)$ $R: 4, \frac{7}{2}$

108. $\log(7x-41) - \log 8 = \log(2x-7) - \log x$ $R: 7$

109. $\log x - \log(3x-\frac{3}{2}) + \log 2 = \log x + \log(x-\frac{1}{2}) + \log 3$ $R: \frac{1}{2}; \frac{3}{5}$

110. $\log(x+3)+\log(x-3)-\log 7=\log(x+1)-\log 5$ $\quad R: 4$

111. $\log(3+2x)+\log(3-2x)-2\log 3=2\log(2x+1)$ $\quad R: 0, \frac{9}{10}$

112. $3\log_2 x-33+2\log_8 x=0$; $\log_2 x+\log_4 x=9$ $\quad R: 512; 64$

113. $\log(x-3)-\log(x-4)=\log(x-2)-\log(x-1)$ $\quad R: \emptyset$

114. $\frac{4}{3}\log x^2-\frac{1}{2}\log x=\frac{13}{6}$; $\log(x^2-3x+1)=0$ $\quad R: 10; 0, 3$

Risolvi le seguenti disequazioni logaritmiche:

115. $\log(x-3)>0$; $\log(1-2x)>0$ $\quad R: x>4; x<0$

116. $\log_3(2x+1)\geq 0$; $\log_5(x-2)\leq 0$ $\quad R: x\geq 0; 2<x\leq 3$

117. $\log(x+5)>1$; $\log_3(x+3)>-2$ $\quad R: x>5; x>-\frac{26}{9}$

118. $\log_{1/2}(x-4)\geq 1$; $\log_{1/2}(x^2+4)<0$ $\quad R: 4<x\leq\frac{9}{2}; \mathbb{R}$

119. $\log_3(x+2)>1$; $\log(x^2-4x+10)<1$ $\quad R: x>1; 0<x<4$

120. $\log_2(x^2+2)<0$; $\log_{1/2}(x^2+2)\geq 0$ $\quad R: \emptyset ; \emptyset$

121. $\log_{1/2}(3x+5)>-1$ $\quad R: -\frac{5}{3}<x<-1$

122. $\log(2x^2-5x+3)<0$ $\quad R: \frac{1}{2}<x<1 \; o \; \frac{3}{2}<x<2$

123. $\log_2(x^2-1)\leq 0$ $\quad R: -\sqrt{2}\leq x<-1 \; o \; 1<x\leq\sqrt{2}$

124. $\log_{1/2}(x+2)\geq 1$ $\quad R: -2<x\leq-\frac{3}{2}$

125. $\log(x^2-1)>0$ $\quad R: x<-\sqrt{2} \; o \; x>\sqrt{2}$

126. $\log(9-x^2)<0$ $\quad R: -3<x<-2\sqrt{2} \; o \; 2\sqrt{2}<x<3$

127. $\log(x^2-3x+90)>2$ $\quad R: x<-2 \; o \; x>5$

128. $\log(x^2-8x+25)<1$ $\quad R: 3<x<5$

129. $\log x+\log(2x-1)\geq\log(2x+5)+\log 3$ $\quad R: x\geq 5$

130. $\log_{1/2}(x^2-x)>\log_{1/2}(x^2+1)$ $\quad R: -1<x<0 \; o \; x>1$

Le funzioni goniometriche

◆ Goniometria e sistemi di misura degli angoli

"*Goniometria*" è un termine derivato dal greco, il cui significato è "misura degli angoli". Misurare una grandezza significa confrontarla con un'arbitraria unità di misura, ad essa *omogenea*, ovvero dello stesso genere. Nel caso degli angoli, due sono i sistemi di misurazione più utilizzati.

Nel **sistema sessagesimale**, che abbiamo utilizzato fino a questo momento, viene utilizzato come unità di misura il **grado**, definito come la novantesima parte dell'angolo retto, ed i suoi sottomultipli:

- il **primo** = $\frac{1}{60}$ del grado;
- il **secondo** = $\frac{1}{60}$ del primo = $\frac{1}{3600}$ del grado.

Ad esempio, se la misura di un angolo è indicata come $\alpha=27°41'32''$, ciò significa che l'ampiezza di tale angolo equivale a: $\left(27+\frac{41}{60}+\frac{32}{3600}\right)^{\circ}\simeq(27{,}69222)°$.

E' probabile che la scelta di un sistema di misura in base 60, sia per gli angoli che per il tempo, derivi dal fatto che la durata dell'anno è di poco più di 360 giorni. Il numero 60 è divisore di 360, non è troppo grande, ed ha numerosi divisori, per cui può essere diviso facilmente in 2, 3, 4, 5, 6 parti uguali.

Nel **sistema radiale**, che utilizzeremo in prevalenza d'ora in poi, assumiamo come unità di misura il **radiante**. Questo è definito come l'*angolo i cui lati intercettano, su una qualunque circonferenza centrata nel suo vertice, un arco la cui lunghezza è uguale a quella del raggio.*

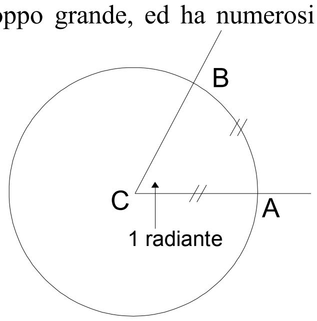


Fig. 1 Definizione di radiante

Facendo riferimento alla figura 1, diremo che l'angolo $A\hat{C}B$ misura un radiante se e soltanto se la lunghezza dell'arco AB è uguale a quella del raggio AC.

In generale, se in una circonferenza di raggio *r* un angolo al centro α insiste su un arco di lunghezza *l*, diremo che: la *misura dell'angolo in radianti è* $\alpha=\frac{l}{r}$ *, ovvero è il rapporto tra la lunghezza dell'arco su cui l'angolo insiste e la lunghezza del raggio della circonferenza.*

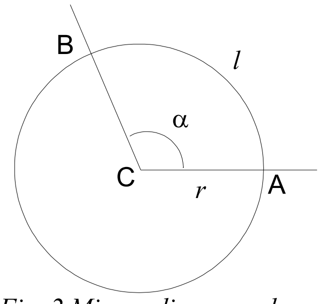


Fig. 2 Misura di un angolo in radianti

Riflettiamo sulla definizione proposta. Per una data circonferenza, cioè mantenendo costante il raggio *r*, essa è sicuramente sensata, in quanto esprime semplicemente la relazione di proporzionalità diretta che esiste tra gli archi ed i rispettivi angoli al centro, cioè il fatto che raddoppiando o triplicando la lunghezza *l* dell'arco, raddoppia o triplica l'ampiezza α del corrispondente angolo al centro.

Possiamo però chiederci se la definizione che abbiamo dato dipenda dalla scelta di una particolare circonferenza. In altri termini, lo stesso angolo considerato in due circonferenze diverse, avrà sempre la stessa misura in radianti, come è doveroso che sia?

La risposta è positiva, in quanto in due circonferenze diverse, che per comodità posso rappresentare come concentriche, gli archi su cui insiste un dato angolo al centro sono direttamente proporzionali ai rispettivi raggi. Infatti, come puoi vedere in figura 3, i settori circolari OPA e OP'A' sono simili, da cui: $\frac{l}{r}=\frac{l'}{r'}$.

Quindi il rapporto tra arco e raggio è costante, e *la definizione di radiante non dipende dalla particolare circonferenza presa in considerazione.*

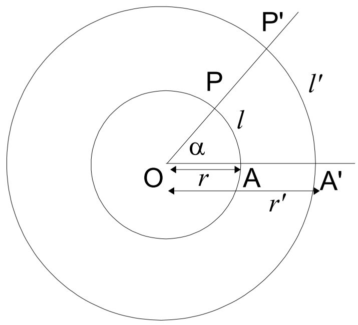


Fig. 3 La misura di α è la stessa per entrambe le circonferenze.

Probabilmente ti stai chiedendo per quale motivo sia necessario introdurre un nuovo sistema di misurazione degli angoli, e cioè il sistema radiale. Per il momento non possiamo dare una risposta del tutto soddisfacente a questa domanda; osserviamo però che:

- *abbiamo definito il radiante come il rapporto tra due grandezze omogenee* (la lunghezza dell'arco e la lunghezza del raggio); quindi tale rapporto è un *numero puro*, cioè privo di unità di misura (in pratica $metri/metri=1$);
- il sistema sessagesimale è riferito a una numerazione in base 60, mentre tutte le altre grandezze che figurano nei problemi sono, in genere, riferite al sistema metrico decimale (base 10).

Se avrai l'occasione di proseguire i tuoi studi di matematica o di fisica, ti accorgerai che, per tali motivi, scegliere il sistema radiale al posto di quello sessagesimale semplifica molto le formule utilizzate e rende meno laboriosi i calcoli. Nella pratica, però, il sistema sessagesimale è molto utilizzato; di conseguenza è opportuno (purtroppo) imparare a operare indistintamente con entrambi i sistemi fondamentali di misurazione degli angoli.

◆ Passaggio dal sistema sessagesimale al sistema radiale e viceversa

Per poter convertire la misura degli angoli dall'uno all'altro dei sistemi che utilizziamo, dobbiamo trovare l'ampiezza in radianti di un angolo del quale conosciamo la misura in gradi.

Ricordando che la misura di un angolo in radianti è data dal rapporto tra la lunghezza dell'arco su cui tale angolo insiste e la misura del raggio, osserviamo che l'angolo giro insiste sull'intera circonferenza, la cui lunghezza è $l=2\pi r$. La misura in radianti dell'angolo giro è quindi:

$360°=\alpha_{giro}=\frac{l}{r}=\frac{2\pi r}{r}=2\pi$, cioè una circonferenza "contiene" circa 6,28 radianti.

Dividendo l'uguaglianza precedente per le stesse quantità, ottengo:

$\alpha°$	0°	30°	45°	60°	90°	180°	270°	360°
α_{rad}	0	$\pi/6$	$\pi/4$	$\pi/3$	$\pi/2$	π	$3\pi/2$	2π

In generale, è valida la proporzione $\frac{\alpha°}{\alpha_{rad}}=\frac{\mathbf{180°}}{\pi}$, che ci permette di calcolare l'ampiezza di un angolo in radianti, conoscendo quella dello stesso angolo in gradi, o viceversa.

Esempi

- Se $\alpha_{rad} = 1\,rad$, allora: $\alpha° = \frac{180°\cdot 1\,rad}{\pi\,rad} = (\frac{180}{\pi})^{°} \simeq 57°17'45''$

  quindi un radiante equivale a poco meno di 60°.
- Se $\alpha° = 120°$, allora: $\alpha_{rad} = \frac{\pi\cdot 120°}{180°} = \frac{2}{3}\pi\,rad$.
- Dato $\alpha° = 37°43'20'' = (37 + \frac{43}{60} + \frac{20}{3600})^{°} \simeq (37{,}72)°$, ricavo: $\alpha_{rad} \simeq \frac{\pi\cdot 37{,}72°}{180°} \simeq 0{,}658\,rad$.
- Dato $\alpha_{rad} = 3{,}745\,rad$, ricavo: $\alpha° = \frac{180°\cdot 3{,}745\,rad}{\pi\,rad} \simeq (214{,}572)° \simeq 214°34'19''$.

Osserviamo che:

- Queste conversioni vengono svolte automaticamente dalle calcolatrici scientifiche, con modalità che dipendono dal modello utilizzato.
- In pratica, se l'ampiezza in radianti di un angolo è espressa come frazione di π, per convertirla in radianti basta sostituire $\pi \rightarrow 180°$. Ad esempio: $\frac{5}{6}\pi = \frac{5}{6}\cdot 180° = 150°$.
- Nell'improbabile caso in cui tu stia perdendo il sonno pensando a come si converte la parte decimale della misura in gradi in forma sessagesimale (primi e secondi) la risposta è: "moltiplica per 60 la parte decimale; la parte intera del risultato fornisce il numero di primi; la parte decimale del risultato va di nuovo moltiplicata per 60; la parte intera del nuovo risultato (eventualmente arrotondata) fornisce il numero di secondi". Prova a capirne il motivo.

◆ Prima definizione di seno, coseno e tangente

Prendiamo in considerazione un triangolo OPH rettangolo in H, ed in particolare uno dei suoi angoli acuti $P\hat{O}H = \alpha$ (fig. 4).

Ovviamente, le lunghezze dei lati OP, PH, OH dipendono dal particolare triangolo scelto. Possiamo però affermare che:

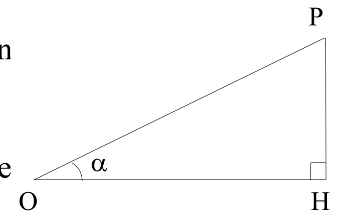


Fig. 4

i rapporti $\frac{HP}{OP}$, $\frac{OH}{OP}$, $\frac{HP}{OH}$ tra le lunghezze dei lati non dipendono dal particolare triangolo rettangolo considerato, ma solo dall'ampiezza dell'angolo α, e sono quindi funzioni di α.

Considera infatti diversi triangoli rettangoli aventi l'angolo α in comune (fig. 5): anche gli angoli acuti in P, P', P" saranno uguali per differenza, misurando $90° - \alpha$.

I triangoli saranno quindi simili per il primo criterio, avendo gli angoli uguali a due a due; di conseguenza i loro lati saranno in proporzione:

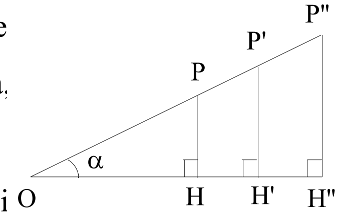


Fig. 5

$$\frac{HP}{OP} = \frac{H'P'}{OP'} = \frac{H''P''}{OP''} = \ldots \quad ; \quad \frac{OH}{OP} = \frac{OH'}{OP'} = \frac{OH''}{OP''} = \ldots \quad ; \quad \frac{HP}{OH} = \frac{H'P'}{OH'} = \frac{H''P''}{OH''} = \ldots \ .$$

Abbiamo quindi dimostrato che, in tutti i triangoli rettangoli aventi un angolo di ampiezza α, i rapporti tra i lati sono costanti; il valore di tali rapporti dipende univocamente dall'ampiezza di α, ed essi sono quindi delle *funzioni goniometriche* dell'angolo α.

I rapporti $\frac{HP}{OP}$, $\frac{OH}{OP}$, $\frac{HP}{OH}$ sono detti rispettivamente il **seno**, il **coseno** e la **tangente** dell'angolo α, mentre α è detto *argomento* di tali funzioni goniometriche.

Quindi, *dato un qualunque triangolo rettangolo avente un angolo acuto di ampiezza* α, ho:

$$\boldsymbol{sen\,\alpha=\frac{HP}{OP}=\frac{cateto\ opposto\ ad\ \alpha}{ipotenusa}}$$

$$\boldsymbol{cos\,\alpha=\frac{OH}{OP}=\frac{cateto\ adiacente\ ad\ \alpha}{ipotenusa}}$$

$$\boldsymbol{tg\,\alpha=\frac{HP}{OH}=\frac{cateto\ opposto\ ad\ \alpha}{cateto\ adiacente\ ad\ \alpha}}\quad .$$

Osserviamo che le tre funzioni goniometriche non sono indipendenti, ma tra di loro esistono le seguenti relazioni:

- $$sen^2\alpha+cos^2\alpha=\frac{HP^2}{OP^2}+\frac{OH^2}{OP^2}=\frac{OP^2}{OP^2}=1$$

  in quanto $HP^2+OH^2=OP^2$ per il teorema di Pitagora;

- $$\frac{sen\,\alpha}{cos\,\alpha}=\frac{HP}{OP}:\frac{OH}{OP}=\frac{HP}{OP}\cdot\frac{OP}{OH}=\frac{HP}{OH}=tg\,\alpha\quad .$$

Le uguaglianze $\boldsymbol{sen^2\alpha+cos^2\alpha=1}$ e $\boldsymbol{tg\,\alpha=\frac{sen\,\alpha}{cos\,\alpha}}$ sono dette rispettivamente **prima** e **seconda relazione fondamentale della goniometria**.

Esse permettono, conoscendo una sola delle tre funzioni goniometriche dell'angolo α, di ricavare le altre due (con qualche limitazione, che vedremo in seguito).

In maniera analoga potremmo definire altre tre funzioni goniometriche meno importanti, dette *cosecante*, *secante* e *cotangente* dell'angolo α, che sono le reciproche rispettivamente di seno, coseno e tangente.

Ne diamo la definizione per il caso che tu debba farne la conoscenza:

$$cosec\,\alpha=\frac{OP}{HP}=\frac{1}{sen\,\alpha}\quad;\quad sec\,\alpha=\frac{OP}{OH}=\frac{1}{cos\,\alpha}\quad;\quad cotg\,\alpha=\frac{OH}{HP}=\frac{1}{tg\,\alpha}=\frac{\cos\alpha}{sen\,\alpha}\quad .$$

◆ Funzioni goniometriche di angoli particolari

Una volta definite le funzioni goniometriche seno, coseno e tangente, potremmo aspettarci di dover imparare a calcolarne il valore in corrispondenza di un qualunque valore dell'angolo che ne costituisce l'argomento. In realtà, le funzioni goniometriche, come già quelle esponenziali e logaritmiche, fanno parte delle cosiddette *funzioni trascendenti*, cioè tali che calcolarne il valore nel caso generale supera le possibilità dell'algebra elementare.

In termini più precisi, la funzione $y=f(x)$ è *trascendente* quando, conoscendo il valore di *x*, in generale non è possibile ottenere il valore di *y* mediante un numero finito di operazioni algebriche (somme, prodotti, divisioni, potenze e radici). Se, invece, questo è possibile per ogni valore di *x*, la funzione viene detta *algebrica*.

In alcuni casi particolari, però, è possibile calcolare i valori delle funzioni goniometriche. I casi più semplici sono quelli in cui l'argomento di tali funzioni è uno degli angoli di ampiezza $\alpha=30°, 45°, 60°$, ovvero $\alpha=\pi/6, \pi/4, \pi/3$.

1° caso: $\alpha=\dfrac{\pi}{6}$

Se $\alpha=30°=\pi/6$, il triangolo rettangolo OPH è metà di un triangolo equilatero. Infatti, l'angolo $O\hat{P}H$ misura 60° per differenza e, "ribaltando" il triangolo dato rispetto all'asse di simmetria OH, ottengo un triangolo avente tre angoli di 60°, e quindi equilatero.

Il segmento OH, che è altezza e bisettrice del triangolo equilatero OPP', deve esserne anche mediana. Quindi, indicando $OP=l$, avrò $PH=l/2$.

Dal teorema di Pitagora ricavo allora:

$$OH=\sqrt{OP^2-PH^2}=\sqrt{l^2-\left(\frac{l}{2}\right)^2}=\sqrt{l^2-\frac{l^2}{4}}=\sqrt{\frac{3}{4}l^2}=\frac{\sqrt{3}}{2}l$$. Quindi:

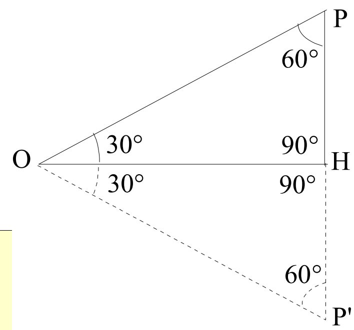


Fig. 6

- $\boldsymbol{sen\, 30°=sen\frac{\pi}{6}=\frac{PH}{OP}=\frac{1}{2}}$
- $\boldsymbol{cos\, 30°=cos\frac{\pi}{6}=\frac{OH}{OP}=\frac{\sqrt{3}}{2}}$
- $\boldsymbol{tg\, 30°=tg\frac{\pi}{6}=\frac{PH}{OH}=\frac{1}{\sqrt{3}}=\frac{\sqrt{3}}{3}}$.

Osserva che in goniometria si usa sempre razionalizzare i risultati ottenuti.

2° caso: $\alpha=\dfrac{\pi}{4}$

Se $\alpha=45°=\pi/4$, il triangolo rettangolo OPH è metà di un quadrato. Infatti, anche l'angolo $O\hat{P}H$ misura 45° per differenza, quindi OH=PH perché gli angoli opposti a tali lati sono uguali.

Allora, "ribaltando" il triangolo rispetto all'ipotenusa OP, otteniamo un quadrilatero avente quattro angoli retti e quattro lati uguali. Se pongo $OH=PH=l$, dal teorema di Pitagora ricavo:

$OP=\sqrt{OH^2+PH^2}=\sqrt{l^2+l^2}=\sqrt{2l^2}=l\sqrt{2}$. Quindi:

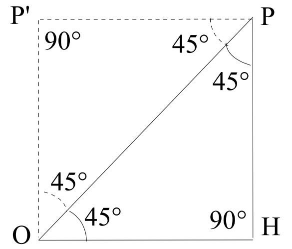


Fig. 7

- $\boldsymbol{sen\,45° = sen\frac{\pi}{4} = \frac{PH}{OP} = \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}}$
- $\boldsymbol{cos\,45° = cos\frac{\pi}{4} = \frac{OH}{OP} = \frac{\sqrt{2}}{2}}$
- $\boldsymbol{tg\,45° = tg\frac{\pi}{4} = \frac{PH}{OH} = 1}$

3° caso: $\alpha=\frac{\pi}{3}$

Se $\alpha=60°=\pi/3$, il triangolo OPH è ancora metà di un triangolo equilatero, ma questa volta PH è l'altezza e OH la metà del lato del triangolo equilatero (fig. 8).

Quindi, ponendo $OP=l$ e ripetendo il ragionamento precedente, ricavo:

$OH=\frac{l}{2}$ e $PH=\frac{\sqrt{3}}{2}l$. Ottengo perciò:

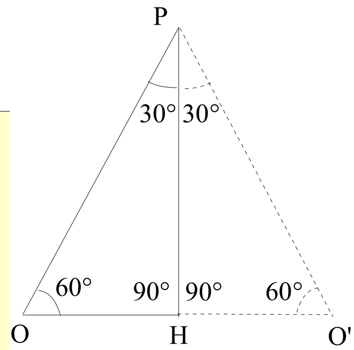


Fig. 8

- $\boldsymbol{sen\,60° = sen\frac{\pi}{3} = \frac{PH}{OP} = \frac{\sqrt{3}}{2}}$
- $\boldsymbol{cos\,60° = cos\frac{\pi}{3} = \frac{OH}{OP} = \frac{1}{2}}$
- $\boldsymbol{tg\,60° = tg\frac{\pi}{3} = \frac{PH}{OH} = \sqrt{3}}$.

Potremmo fare dei ragionamenti simili per qualche altro valore particolare dell'angolo, ma è chiaro che gli esempi precedenti non possono essere generalizzati arbitrariamente. Per valori generici dell'angolo, quindi, non possiamo calcolare esattamente il valore di una funzione goniometrica, ma soltanto ottenerne un valore approssimato con una calcolatrice scientifica. In genere, si deve digitare prima l'ampiezza dell'angolo e poi premere il tasto corrispondente alla funzione richiesta (ma alcuni modelli lavorano "al contrario").

Ad esempio, premendo: 50 sin , ottengo: $sen\,50°\simeq 0{,}76604$.

◆ Risoluzione dei triangoli rettangoli

Conoscendo i valori assunti dalle funzioni goniometriche, possiamo "risolvere" i triangoli rettangoli (e anche gli altri, ma non avremo tempo di occuparcene), cioè calcolarne i lati e gli angoli a partire dalle misure di due di essi, di cui almeno una sia quella di un lato.

Esempio 1

Del triangolo ABC, rettangolo in A, sappiamo che $CB=4\,cm$ e che $\hat{C}=25°$.

Ricavo per differenza $\hat{B}=90°-25°=65°$.

Ricordando che $sen\,\hat{C}=\frac{cateto\,opposto}{ipotenusa}=\frac{AB}{BC}$, ottengo:

$AB=BC\cdot sen\,\hat{C}=4\cdot sen\,25°\simeq 1{,}69\,cm$.

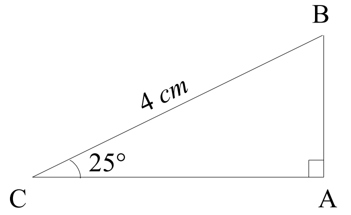


Fig. 9

Per ricavare AC potrei utilizzare il teorema di Pitagora, ma tale procedimento viene di solito considerato poco elegante, in quanto non utilizza i metodi della trigoniometria. E' preferibile applicare la relazione:

$cos\,\hat{C}=\frac{cateto\,adiacente}{ipotenusa}=\frac{AC}{BC} \Rightarrow AC=BC\cdot cos\,\hat{C}\simeq 4\cdot cos\,25°\simeq 3{,}625\,cm$, ovvero:

$sen\,\hat{B}=\frac{cateto\,opposto}{ipotenusa}=\frac{AC}{BC} \Rightarrow AC=BC\cdot sen\,\hat{B}\simeq 4\cdot sen\,65°\simeq 3{,}625\,cm$, o ancora:

$tg\,\hat{C}=\frac{cateto\,opposto}{cateto\,adiacente}=\frac{AB}{AC} \Rightarrow AC=\frac{AB}{tg\,\hat{C}}\simeq\frac{1{,}69}{tg\,25°}\simeq 3{,}625\,cm$.

Esempio 2

Del triangolo rettangolo ABC, conosciamo l'ipotenusa $a=10\,cm$ e β=30°.

Ricaviamo subito $\gamma=90°-\beta=60°$.

Come nell'esempio precedente, calcolo:

$b=a\,sen\,\beta=10\cdot sen\,30°=10\cdot\frac{1}{2}=5$.

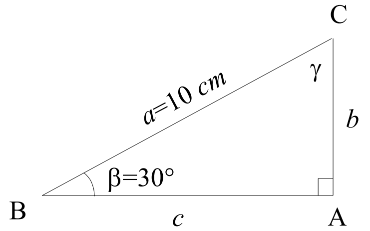


Fig. 10

L'altro cateto può essere ricavato come:

$c=a\,sen\,\gamma=10\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}=5\sqrt{3}\,cm$, oppure $c=a\,cos\,\beta=5\sqrt{3}\,cm$.

Possiamo anche usare la definizione di tangente, per la quale:

$tg\,\beta=\frac{cateto\,opposto}{cateto\,adiacente}=\frac{b}{c} \Rightarrow c=\frac{b}{tg\,\beta}=\frac{5}{\sqrt{3}/3}=5\sqrt{3}\,cm$, oppure:

$tg\,\gamma=\frac{cateto\,opposto}{cateto\,adiacente}=\frac{c}{b} \Rightarrow c=b\cdot tg\,\gamma=5\sqrt{3}\,cm$.

Esempio 3

Supponiamo di conoscere la distanza *d* tra la Terra e la Luna e di volere calcolare la distanza *x* tra la Terra ed il Sole (fig. 11).

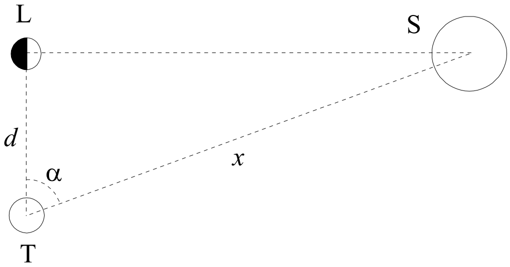


Fig. 11 Distanza Terra-Sole

Quando la Luna si trova nel primo o nell'ultimo quarto, sappiamo che la retta che congiunge il Sole e la Luna è perpendicolare alla retta che congiunge la Terra e la Luna. Se in tale momento determiniamo l'ampiezza dell'angolo Luna-Terra-Sole: $L\hat{T}S=\alpha$, sappiamo che:

$$\cos\alpha=\frac{d}{x} \quad \Rightarrow \quad x=\frac{d}{\cos\alpha} \quad .$$

◆ La circonferenza goniometrica

La definizione delle funzioni goniometriche come rapporti di lati di triangoli rettangoli ha, per i nostri obiettivi, un difetto: ci permette di parlare di seno, coseno e tangente solo di angoli acuti $(0°<\alpha<90°)$. Per molte applicazioni pratiche della goniometria è necessario generalizzare tale definizione, senza perdere nessuno dei risultati fin qui ottenuti, in modo che l'argomento di una funzione goniometrica possa essere (quasi) qualunque numero reale. In parole povere, vogliamo considerare degli "angoli" (in senso generalizzato) la cui ampiezza possa essere un qualunque numero reale, sia positivo che negativo, grande a piacere.

A questo scopo, consideriamo nel piano cartesiano la circonferenza che ha come centro l'origine e raggio uguale all'unità, chiamata *circonferenza goniometrica*.

Il punto $A(1,0)$ in cui la circonferenza goniometrica interseca il semiasse positivo delle ascisse viene assunto, per convenzione, come *origine degli archi*.

Se un punto P, a partire dall'origine A, si muove sulla circonferenza goniometrica, descrive come traiettoria l'arco AP.

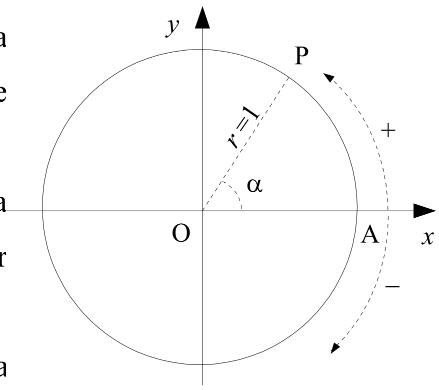


Fig. 12 Circonferenza goniometrica

Come si vede dalla figura 12, il punto P può muoversi in due versi opposti di rotazione. Per convenzione, scegliamo il verso antiorario come verso positivo, e, quindi, quello orario come verso negativo di percorrenza. Di conseguenza, l'arco AP risulta orientato nel modo seguente:

- *se P si muove in senso antiorario, allora l'arco AP si assume positivo;*
- *se P si muove in senso orario, allora l'arco AP si considera negativo.*

Adottiamo la stessa convenzione per l'angolo al centro $A\widehat{O}P$ che corrisponde all'arco AP.

Osserva poi che, a partire dall'origine degli archi A, è possibile raggiungere in infiniti modi: non solo arrivando direttamente in P, ma anche giungendovi dopo aver percorso una o più circonferenze complete, sia nel verso positivo che in quello negativo. In altri termini, dopo aver percorso un intero giro, ossia un angolo di 2π radianti, possiamo continuare il nostro moto, descrivendo la circonferenza goniometrica un numero arbitrario di volte. In questo senso, diventa perfettamente lecito considerare angoli la cui ampiezza è un qualunque numero reale, positivo o negativo, anche maggiore di 360°.

Sono quindi "associati" allo stesso punto P, nel senso che P è il secondo estremo dell'arco da essi descritto sulla circonferenza goniometrica, tutti gli angoli la cui misura è:

$$\dots \quad \alpha-3\cdot 360°; \quad \alpha-2\cdot 360°; \quad \alpha-360°; \quad \alpha; \quad \alpha+360°; \quad \alpha+2\cdot 360°; \quad \alpha+3\cdot 360° \quad \dots$$

o, in radianti:

$$\dots \quad \alpha-3\cdot 2\pi; \quad \alpha-2\cdot 2\pi; \quad \alpha-2\pi; \quad \alpha; \quad \alpha+2\pi; \quad \alpha+2\cdot 2\pi; \quad \alpha+3\cdot 2\pi \quad \dots$$

Tutti gli angoli "associati" allo stesso punto P si possono quindi descrivere con la formula:

$\alpha+k\cdot 360°$ o $\alpha+2k\pi$, dove k è un qualunque numero intero relativo (dotato di segno positivo o negativo), ovvero $k\in\mathbb{Z}$.

- **Seno e coseno di un angolo generico**

Facendo riferimento alla figura 12, chiamiamo x_P e y_P le coordinate del punto P, secondo estremo dell'arco AP. Tali coordinate dipendono dall'angolo $\alpha=A\widehat{O}P$, ovvero sono funzioni di tale angolo. Chiameremo allora:

- **seno** dell'angolo α l'*ordinata del punto P associato ad α nella circonferenza goniometrica*;
- **coseno** dell'angolo α l'*ascissa del punto P associato ad α nella circonferenza goniometrica*.

In simboli: $\boldsymbol{sen}\,\alpha=\boldsymbol{y_P}$; $\mathbf{cos}\,\alpha=\boldsymbol{x_P}$.

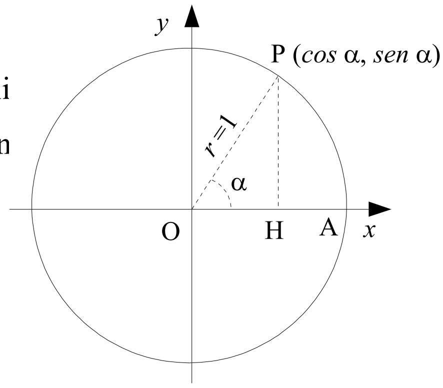


Fig. 13 Definizione di seno e coseno

Osserviamo subito che, se prendiamo in considerazione angoli acuti, questa definizione "estesa" di seno e coseno coincide con la precedente. Infatti:

- $sen\,\alpha=\dfrac{cateto\ opposto}{ipotenusa}=\dfrac{PH}{OP}=\dfrac{y_P}{r}=y_P$
- $\cos\alpha=\dfrac{cateto\ adiacente}{ipotenusa}=\dfrac{OH}{OP}=\dfrac{x_P}{r}=x_P$

in quanto il raggio della circonferenza goniometrica è unitario.

Per lo stesso motivo continua a valere la **prima relazione fondamentale della goniometria**: per il teorema di Pitagora $OH^2+PH^2=OP^2 \quad\Rightarrow\quad \mathbf{cos^2}\,\alpha+\boldsymbol{sen^2}\,\alpha=\mathbf{1}$.

Sempre per verificare la validità della prima relazione fondamentale, posso anche ricordare che l'equazione di una circonferenza di cui conosco centro e raggio è: $(x-x_C)^2+(y-y_c)^2=r^2$; poiché per la circonferenza goniometrica il centro è l'origine degli assi e il raggio è l'unità, la sua equazione è: $x^2+y^2=1$. Ma, sostituendo alle variabili le coordinate di P, ottengo di nuovo: $\cos^2\alpha+sen^2\alpha=1$.

Quindi le "nuove" definizioni di seno e coseno godono delle stesse proprietà delle vecchie, ma ora tali funzioni sono definite per qualunque valore reale del loro argomento.

- **Tangente di un angolo generico**

Introdurre la funzione tangente facendo uso della circonferenza goniometrica è più laborioso.

Conduciamo, dal punto $A(1{,}0)$, la retta t tangente alla circonferenza, la cui equazione è $x=1$.

Prolunghiamo poi il raggio OP fino ad incontrare la retta *t* nel punto T.

Come puoi vedere dalla figura 14, quando il punto P si trova nel 1° o nel 4° quadrante il raggio va prolungato dalla parte di P, mentre se P si trova nel 2° o nel 3° quadrante il prolungamento avviene dalla parte di O.

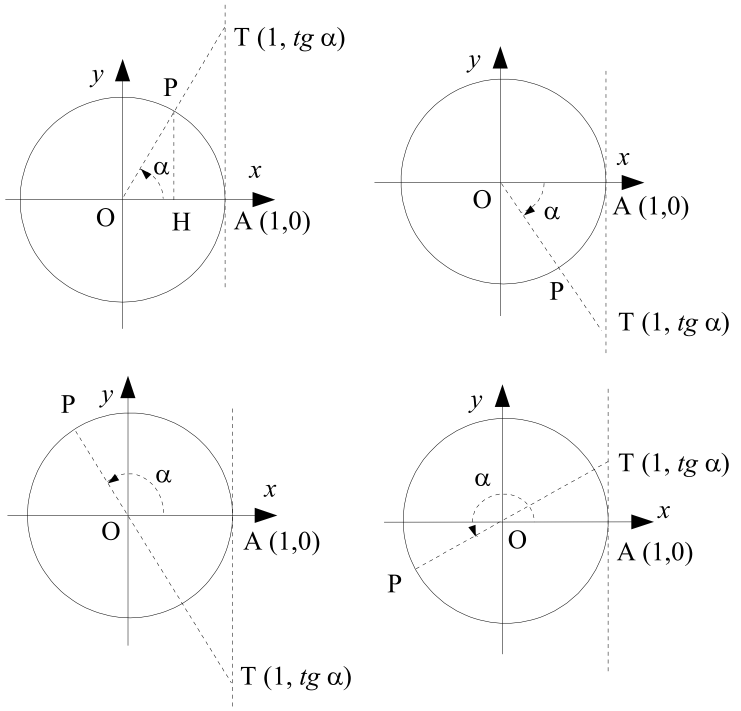


Fig. 14

Chiamiamo **tangente** dell'angolo α *l'ordinata del punto T* ottenuto con il procedimento descritto in precedenza. In simboli: $\boldsymbol{tg\,\alpha = y_T}$.

Come per il seno ed il coseno, osserviamo che, se l'angolo α è acuto, la "nuova" definizione di tangente coincide con la precedente. Infatti:

$$tg\,\alpha = \frac{cateto\,opposto}{cateto\,adiacente} = \frac{TA}{OA} = \frac{y_T}{r} = y_T$$

in quanto la circonferenza goniometrica ha raggio unitario.

Inoltre continua a valere la **seconda relazione fondamentale della goniometria**. Infatti, i triangoli OPH e OTA sono simili per il 1° criterio, quindi hanno i lati omologhi in proporzione:

$$\frac{TA}{OA} = \frac{PH}{OH} \quad \Rightarrow \quad \boldsymbol{tg\,\alpha = \frac{sen\,\alpha}{cos\,\alpha}}\ .$$

- **La funzioni $y = sen\,x$ e $y = cos\,x$**

Come abbiamo visto, ad ogni posizione del punto P, che si muove sulla circonferenza goniometrica, e quindi ad ogni angolo $A\hat{O}P$, corrispondono un determinato valore del seno dell'angolo, dato dall'ordinata del punto P, ed un determinato valore del coseno dell'angolo, dato dall'ascissa di P.

Di conseguenza, se indichiamo con *x* l'ampiezza dell'angolo al centro $A\hat{O}P$ e con *y* il seno dello stesso angolo, l'equazione $y=sen\,x$ definisce una funzione goniometrica, ovvero una corrispondenza che ad ogni angolo associa il seno dello stesso angolo.

In maniera analoga, indicando con x l'ampiezza dell'angolo al centro $A\hat{O}P$ e con y il coseno dello stesso angolo, l'equazione $y=cos\,x$ definisce una funzione goniometrica che ad ogni angolo associa il seno dello stesso angolo.

Nota. Le prime volte può dare fastidio il fatto di indicare con la variabile y, e quindi di rappresentare come un'ordinata, il valore del coseno, che è l'ascissa di un punto. Ricorda che, in questo contesto, la x indica l'ampiezza dell'angolo.

Ricordiamoci di avere esteso la nozione intuitiva di angolo per considerare anche angoli negativi o maggiori di un angolo giro. Di conseguenza, il *dominio* delle funzioni seno e coseno, ovvero l'insieme dei valori che possono essere attribuiti all'angolo x per ottenere un determinato valore del suo seno o del suo coseno, è ora l'insieme $\mathbb{R}$ dei numeri reali. In altre parole:

le funzioni $y=sen\,x$ e $y=cos\,x$ sono definite per ogni valore reale di x.

Osserviamo poi che il seno di un angolo, essendo definito come l'ordinata dell'estremo mobile P dell'arco AP, al variare dell'angolo x assume tutti i valori reali compresi tra -1 e 1. Pertanto il *codominio* della funzione seno, ovvero l'insieme dei valori assunti dalla variabile indipendente y, è l'intervallo $-1\leq y\leq 1$. Naturalmente, lo stesso avviene per il coseno.

Il *segno* assunto dalla funzione seno è quello dell'ordinata del punto mobile P, quindi è positivo quando P si trova sopra l'asse x e negativo quando P si trova sotto l'asse x. La funzione si annulla, ovvero assume il valore zero, quando P si trova sull'asse delle ascisse. In sintesi:

quadrante	*angolo*	*segno di* $y=sen\,x$
1°	$0°<x\leq 90°$	+
2°	$90°<x<180°$	+
3°	$180°<x\leq 270°$	-
4°	$270°<x<360°$	-

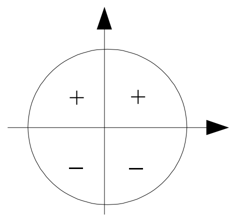


Fig. 15 Segno di y=sen x

Il *segno* assunto dalla funzione coseno è invece quello dell'ascissa del punto mobile P, quindi è positivo quando P si trova a destra dell'asse y e negativo quando P si trova a sinistra dell'asse y. La funzione si annulla, ovvero assume il valore zero, quando P si trova sull'asse delle ordinate.

quadrante	*angolo*	*segno di* $y=cos\,x$
1°	$0°<x\leq 90°$	+
2°	$90°<x<180°$	-
3°	$180°<x\leq 270°$	-
4°	$270°<x<360°$	+

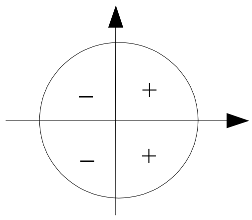


Fig. 16 Segno di y=cos x

Ora studiamo in maniera più dettagliata l'andamento delle funzioni $y=sen\,x$ e $y=cos\,x$:

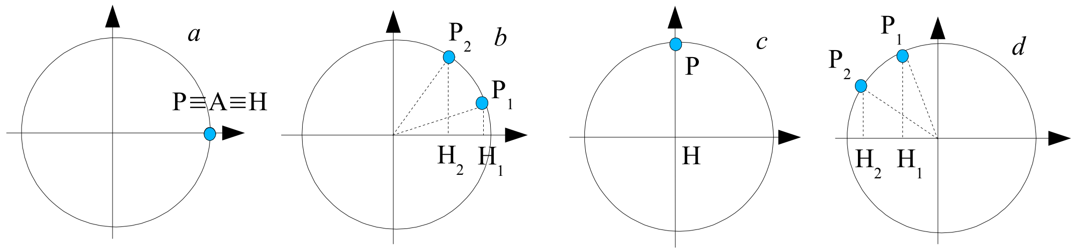


Fig. 17 Andamento delle funzioni y=sen x e y=cos x nel 1° e 2° quadrante

- $x=0°=0\,rad$ (fig.16 *a*)

Se $x=0°$, allora il punto P coincide con A; pertanto risulta $y_P=y_A=0$ e $x_P=x_A=1$.

Quindi si ha: $\boldsymbol{sen\,0°=sen\,0\,rad=0}$ e $\mathbf{cos\,0°=cos\,0\,\boldsymbol{rad}=1}$.

- $0°<x<90°$ *o* $0<x<\frac{\pi}{2}$ (fig.16 *b*)

In questo caso siamo nel 1° quadrante. Quando l'angolo *x* cresce da 0° a 90°, allora anche $sen\,x=y_P$ *cresce* assumendo tutti i valori reali positivi che vanno da 0 ad 1, mentre $\cos x=x_P$ *decresce* assumendo tutti i valori reali positivi da 1 a 0.

- $x=90°=\frac{\pi}{2}$ (fig. 16 *c*)

Se $x=90°$, allora il punto P ha ordinata $y_P=1$ e ascissa $x_P=0$.

Quindi: $\boldsymbol{sen\,90°=sen\frac{\pi}{2}=1}$ e $\mathbf{cos\,90°=cos\frac{\pi}{2}=0}$.

- $90°<x<180°$ *o* $\frac{\pi}{2}<x<\pi$ (fig.16 *d*)

In questo caso siamo nel 2° quadrante. Quando l'angolo *x* cresce da 90° a 180°, allora $sen\,x=y_P$ *decresce* assumendo tutti i valori reali positivi che vanno da 1 a 0, mentre $cos\,x=x_P$ *decresce* assumendo tutti i valori reali negativi da 0 a -1 .

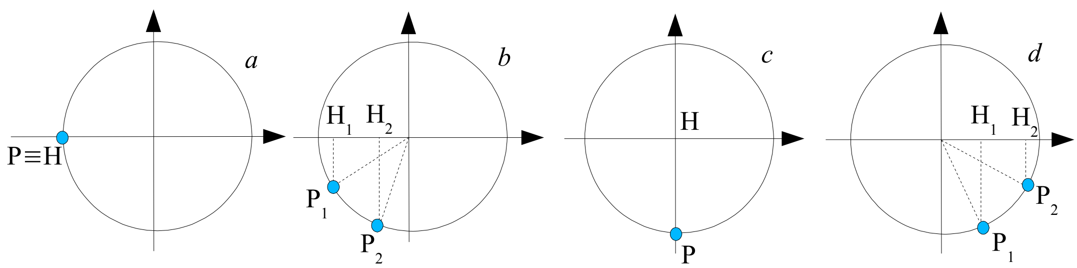


Fig. 18 Andamento delle funzioni y=sen x e y=cos x nel 3° e 4° quadrante

- $x=180°=\pi$ (fig.18 *a*)

Se $x=180°$, allora il punto P ha ordinata $y_P=0$ e ascissa $x_P=-1$.

Quindi: $\boldsymbol{sen\,180°=sen\,\pi=0}$ e $\mathbf{cos\,180°=cos\,\pi=-1}$.

- $180°<x<270°$ *o* $\pi<x<\frac{3}{2}\pi$ (fig.18 *b*)

In questo caso siamo nel 3° quadrante. Quando x cresce da 180° a 270°, allora $sen\,x = y_P$ *decresce* assumendo tutti i valori reali negativi che vanno da 0 a -1, mentre $cos\,x = x_P$ *cresce* assumendo tutti i valori reali negativi che vanno da -1 a 0.

- $x = 270° = \frac{3}{2}\pi$ (fig.18 *c*)

Se $x = 270°$, allora il punto P ha ordinata $y_P = -1$ e ascissa $x_P = 0$.

Di conseguenza, si ha: $\boldsymbol{sen\,270° = sen\frac{3}{2}\pi = -1}$ e $\mathbf{cos\,270° = cos\frac{3}{2}\pi = 0}$.

- $270° < x < 360°$ *o* $\frac{3}{2}\pi < x < 2\pi$ (fig.18 *d*)

In questo caso ci troviamo nel 4° quadrante. Quando x cresce da 270° a 360°, allora $sen\,x = y_P$ *cresce* assumendo tutti i valori reali negativi che vanno da -1 a 0, mentre $cos\,x = x_P$ cresce assumendo tutti i valori reali positivi che vanno da 0 ad 1.

- $x = 360° = 2\pi$ (fig.17 *a*)

Il punto P torna a coincidere con A, e quindi: $\boldsymbol{sen\,360° = sen\,2\pi = 0}$ e $\mathbf{cos\,360° = cos\,2\pi = 1}$.

Utilizzando le precedenti informazioni, possiamo disegnare i grafici cartesiani delle funzioni $y = sen\,x$ e $y = cos\,x$, detti rispettivamente *sinusoide* e *cosinusoide*.

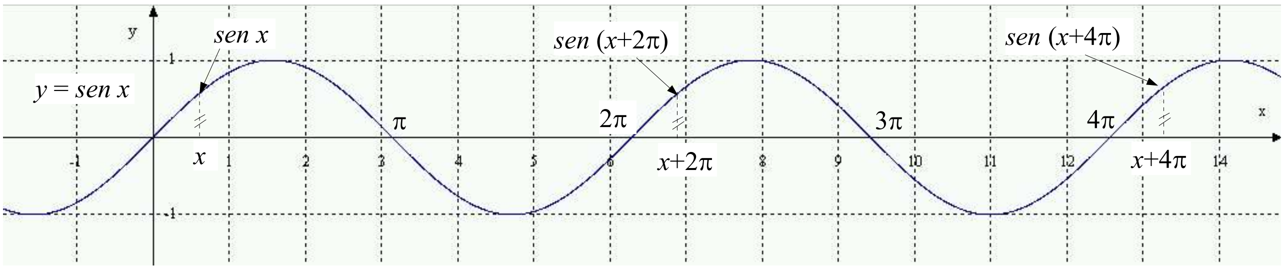


Fig. 19 Grafico della funzione y=sen x

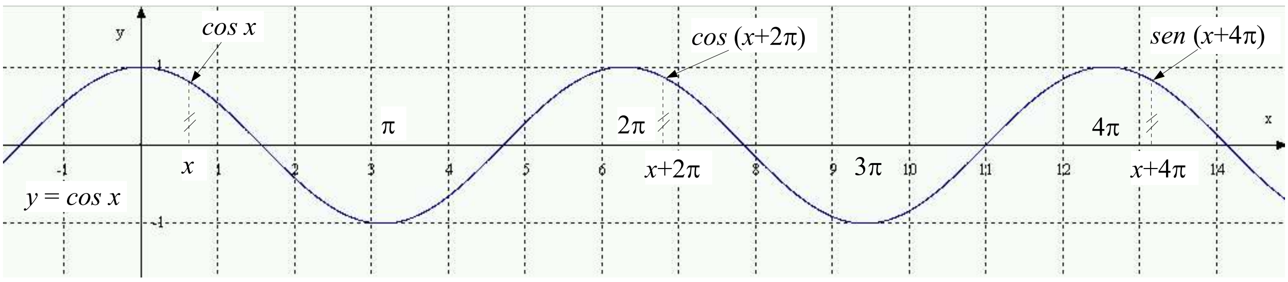


Fig. 20 Grafico della funzione y=cos x

Nota. Per tracciare dei grafici approssimati su un foglio a quadretti, possiamo porre $\pi \simeq 3{,}14 \approx 3\,unità$. In questo modo, prendendo l'unità di misura di 4 quadretti, avremo $\pi \approx 12\,quadretti$, e tutti gli archi notevoli si troveranno in corrispondenza di un numero intero di quadretti.

Osserva che le funzioni $y = sen\,x$ e $y = cos\,x$ assumono lo stesso valore in tutti gli angoli associati allo stesso punto P sulla circonferenza goniometrica, angoli che differiscono tra loro per un numero intero (positivo o negativo) di giri completi. In simboli:

- $\boldsymbol{sen\, x = sen(x+2k\pi)} \qquad \boldsymbol{k \in \mathbb{Z},\ \forall x \in \mathbb{R}}$
- $\boldsymbol{cos\, x = cos(x+2k\pi)} \qquad \boldsymbol{k \in \mathbb{Z},\ \forall x \in \mathbb{R}}$.

Diciamo quindi che le funzioni $y = sen\, x$ e $y = cos\, x$ sono *periodiche* con *periodo* 2π radianti. In altri termini, una volta tracciato il grafico della funzione nell'intervallo $0 \le x \le 2\pi$, esso si ripete inalterato in ogni successivo intervallo di ampiezza 2π .

Possiamo anche osservare (ma non dimostrare, non avendo trattato l'argomento delle trasformazioni geometriche) che *la cosinusoide può essere ottenuta dalla sinusoide applicandole una traslazione verso sinistra di lunghezza* $\pi/2$ *radianti.*

◆ La funzione $y = tg\, x$

Come abbiamo visto in precedenza, ad una certa posizione del punto P, che si muove sulla circonferenza goniometrica, e quindi ad un certo angolo $A\hat{O}P$, possiamo far corrispondere un determinato valore della tangente dell'angolo, dato dall'ordinata del punto T in cui il prolungamento del raggio OP interseca la retta di equazione $y = 1$.

Di conseguenza, se indichiamo con *x* l'ampiezza dell'angolo al centro $A\hat{O}P$ e con *y* la tangente dello stesso angolo, l'equazione $y = tg\, x$ definisce una funzione goniometrica, ovvero una corrispondenza che ad ogni angolo associa la tangente dello stesso angolo.

Osserviamo però che, a differenza del seno e del coseno, *la funzione tangente non è definita, ovvero non assume alcun valore reale, per alcuni valori del suo argomento, ed in particolare per* $x = \pi/2$.

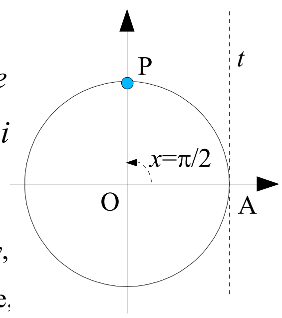


Fig. 21 La funzione y=tg x non è definita per x=π/2

Graficamente, infatti, posso osservare che per $x = 90°$ il punto P è situato sull'asse *y*, quindi la retta OP e la tangente alla circonferenza goniometrica nel punto A sono parallele, e di conseguenza non esiste il loro punto di intersezione T, la cui ordinata dovrebbe fornire il valore della tangente.

Anche analiticamente, applicando la seconda relazione fondamentale della goniometria, otterrei:

$$tg\frac{\pi}{2} = \frac{sen\frac{\pi}{2}}{\cos\frac{\pi}{2}} = \frac{1}{0}$$, ma la divisione per zero è priva di significato.

Trovando situazioni analoghe per $x = \frac{3}{2}\pi, \frac{5}{2}\pi, \ldots, -\frac{\pi}{2}, -\frac{3}{2}\pi \ldots$, possiamo concludere che il *dominio* della funzione tangente, ovvero l'insieme dei valori che possono essere attribuiti all'angolo *x* per ottenere un determinato valore della tangente, è dato dall'insieme dei numeri reali, con l'esclusione dei multipli dispari, positivi o negativi, di $\pi/2$.

In simboli, la funzione $y = tg\,x$ è definita $\forall x \in \mathbb{R}\,,\ x \neq \dfrac{\pi}{2} + k\pi \qquad k \in \mathbb{Z}$.

Abbiamo detto che la funzione tangente non è definita per $x = \pi/2$. Risulta però importante studiarne il comportamento quando si assegnano alla variabile indipendente x dei valori che via via si avvicinano a tale valore. Diremo che *x tende a* $\pi/2$ *da sinistra*, e scriveremo $x \to (\pi/2)^-$, se la variabile x si avvicina a $\pi/2$ assumendo valori minori di $\pi/2$; diremo invece che *x tende a* $\pi/2$ *da destra*, e scriveremo $x \to (\pi/2)^+$ se stiamo assegnando alla variabile x dei valori che si avvicinano a $\pi/2$ rimanendo maggiori di $\pi/2$.

Attenzione: i termini "destra" e "sinistra" non si riferiscono alla circonferenza goniometrica, ma al grafico cartesiano in cui riporto l'angolo x sull'asse delle ascisse e la funzione $y = tg\,x$ su quello delle ordinate.

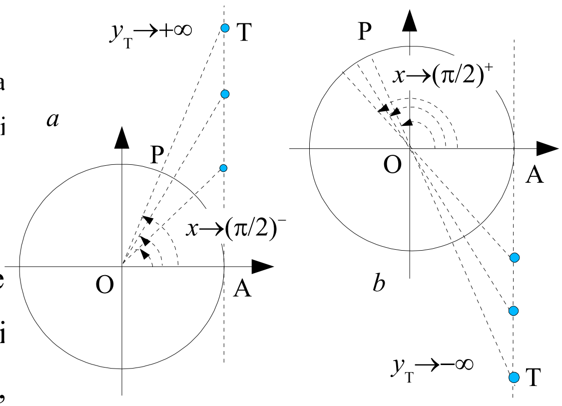


Fig. 22 L'angolo x tende a π/2 da sinistra (a) e da destra (b)

Sia geometricamente, dalle figure 22*a* e 22*b*, che algebricamente, ricavando dalla calcolatrice i valori della tangente per angoli sempre più vicini a 90°, possiamo concludere che:

- *se x tende a* $\pi/2$ *da sinistra, allora tg x tende a* $+\infty$ *;*
- *se x tende a* $\pi/2$ *da destra, allora tg x tende a* $-\infty$.

Ne segue che la *tangentoide*, cioè il grafico della funzione tangente, possiede un *asintoto verticale* di equazione $x = \pi/2$, e lo stesso avviene per ogni valore di x che non appartiene al dominio della tangente, della forma $x = \pi/2 + k\pi$. In altre parole, la curva si avvicina indefinitamente a queste rette verticali, senza però intersecarle.

Da quanto abbiamo appena detto risulta anche che, a differenza delle funzioni seno e coseno, il *codominio* della funzione tangente è illimitato, e coincide con l'insieme $\mathbb{R}$ dei numeri reali relativi. Infatti, l'ordinata del punto T, che fornisce il valore della tangente, può assumere qualunque valore reale compreso tra $-\infty$ e $+\infty$.

Inoltre è semplice verificare graficamente che gli angoli del tipo:

$x\,,\, x+\pi\,,\, x+2\pi\,,\, x+3\pi ...$, oppure:

$x\,,\, x-\pi\,,\, x-2\pi\,,\, x-3\pi ...$ hanno tutti la stessa tangente (fig. 23), in quanto ad essi corrisponde lo stesso punto T di intersezione con la retta tangente alla circonferenza goniometrica in $A(1, 0)$.

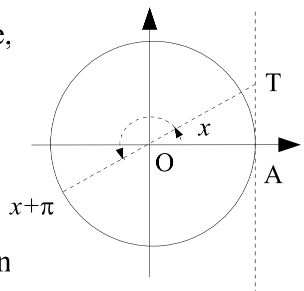


Fig. 23 tg x=tg (x+π)

Questo fatto si esprime dicendo che *la funzione* $y = tg\, x$ *è periodica con periodo* π *radianti* (la metà di quello delle funzioni seno e coseno).

In simboli: $\boldsymbol{tg\, x = tg(x + k\pi)} \quad \boldsymbol{k \in \mathbb{Z}},\ \forall\, \boldsymbol{x} \in \mathbb{R}$.

In pratica, se tracciamo il grafico della funzione in un intervallo di ampiezza π, ad esempio $-\pi/2 < x < \pi/2$, esso si ripete inalterato in ogni successivo intervallo della stessa ampiezza.

Il *segno* assunto dalla funzione tangente è quello dell'ordinata del punto T, quindi è dato dal seguente schema:

quadrante	*angolo*	*segno di* $y = tg\, x$
1°	$0° < x \leq 90°$	+
2°	$90° < x < 180°$	-
3°	$180° < x \leq 270°$	+
4°	$270° < x < 360°$	-

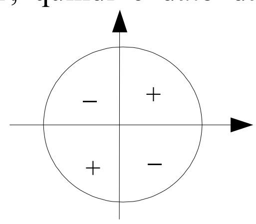


Fig. 24 Segno di y=tg x

E' immediato verificare che la funzione tangente è crescente per $-\pi/2 < x < \pi/2$, intervallo in cui assume tutti i valori reali compresi tra $-\infty$ e $+\infty$, e si annulla per $x = 0$.

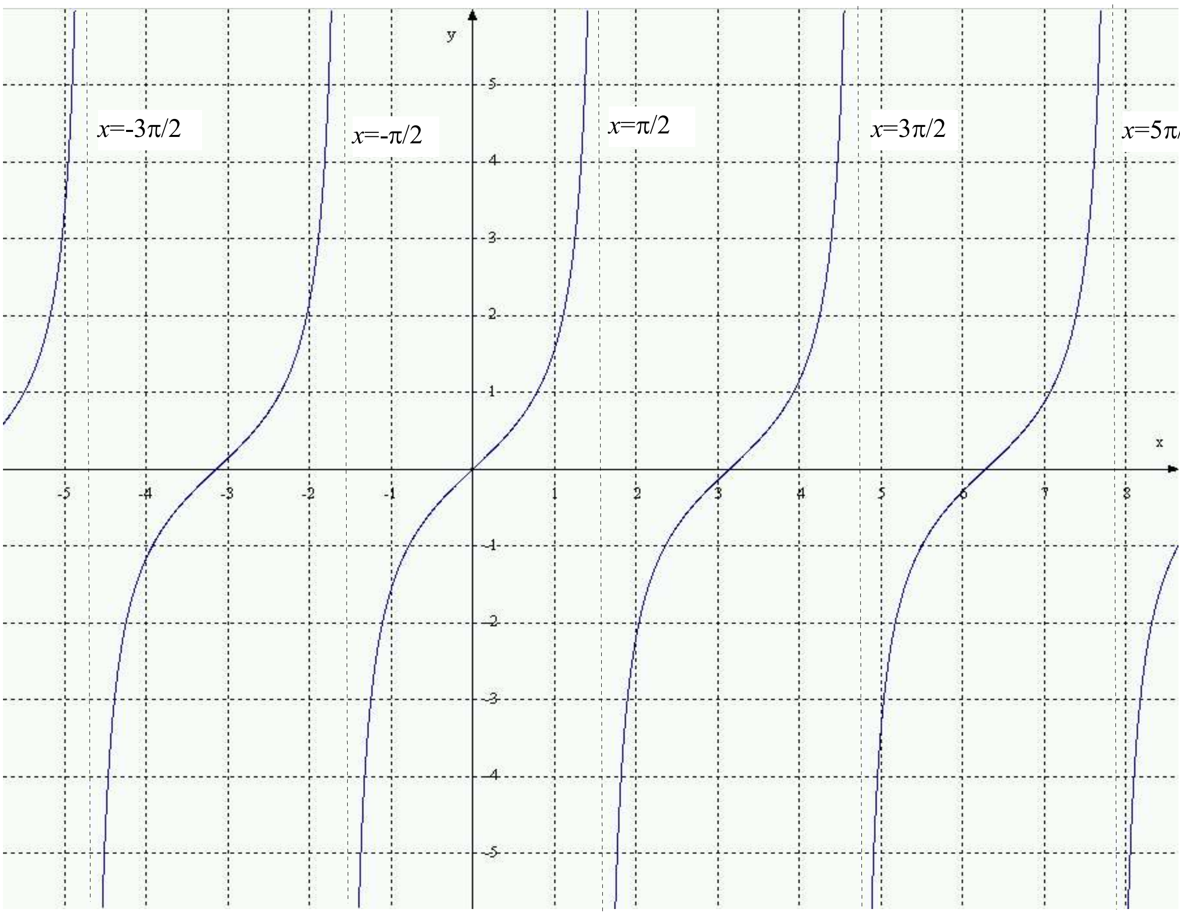


Fig. 25 Grafico della funzione y=tg x

◆ Relazioni tra le funzioni goniometriche

Ricordiamo che:

- $\boldsymbol{sen^2 x + cos^2 x = 1}$ *prima relazione fondamentale della goniometria*
- $\boldsymbol{tg\, x = \dfrac{sen\, x}{cos\, x}}$ *seconda relazione fondamentale della goniometria.*

Conoscendo il valore di una delle funzioni goniometriche fondamentali, queste relazioni ci permettono di determinare le altre due, purché sappiamo in quale quadrante si trovi il punto P associato all'angolo *x*.

Esempio 1

Sappiamo che α è un angolo acuto e che $cos\,\alpha = \dfrac{3}{5}$.

Dalla prima relazione fondamentale, ricaviamo: $sen\,\alpha = \pm\sqrt{1 - cos^2\alpha}$.

Poiché ci troviamo nel primo quadrante, il seno deve assumere valori positivi; quindi:

$sen\,\alpha = \sqrt{1 - \dfrac{9}{25}} = \dfrac{4}{5}$, e di conseguenza: $tg\,\alpha = \dfrac{sen\,\alpha}{cos\,\alpha} = \dfrac{4}{5} : \dfrac{3}{5} = \dfrac{4}{3}$.

Esempio 2

Abbiamo un angolo α tale che $sen\,\alpha = \dfrac{5}{13}$ e $\dfrac{\pi}{2} < \alpha < \pi$.

Dalla prima relazione fondamentale, otteniamo: $cos\,\alpha = \pm\sqrt{1 - sen^2\alpha}$. Poiché l'angolo è associato ad un punto del secondo quadrante, il suo coseno deve assumere valore negativo:

$cos\,\alpha = -\sqrt{1 - \dfrac{25}{169}} = -\dfrac{12}{13}$, e quindi: $tg\,\alpha = \dfrac{sen\,\alpha}{cos\,\alpha} = \dfrac{5}{13} : (-\dfrac{12}{13}) = -\dfrac{5}{12}$.

Esempio 3

Di un angolo α sappiamo che $tg\,\alpha = \dfrac{12}{5}$ e $\pi < \alpha < \dfrac{3}{2}\pi$.

Se vogliamo determinare i valori di $sen\,\alpha$ e $cos\,\alpha$, ci troviamo in difficoltà, perché non abbiamo ancora ricavato una formula che ci fornisca seno e coseno di un angolo in funzione della sola tangente. Dobbiamo quindi mettere a sistema la due relazioni fondamentali:

$$\begin{cases} sen^2 x + cos^2 x = 1 \\ tg\, x = \dfrac{sen\, x}{cos\, x} \end{cases}$$

Dalla seconda relazione ricaviamo: $sen\, x = tg\, x \cdot cos\, x$.

Sostituiamo nella prima relazione e mettiamo in evidenza $cos^2 x$:

$$tg^2 x \cdot cos^2 x + cos^2 x = 1 \quad \Rightarrow \quad cos^2 x (tg^2 x + 1) = 1 \quad \Rightarrow \quad cos^2 x = \frac{1}{tg^2 x + 1} \quad .$$

Ricaviamo quindi: $\boldsymbol{cos\, x = \pm \frac{1}{\sqrt{tg^2 x + 1}}}$ e, sostituendo: $\boldsymbol{sen\, x = \pm \frac{tg\, x}{\sqrt{tg^2 x + 1}}}$.

Le due formule in grassetto esprimono, come richiesto, seno e coseno in funzione della sola tangente. Poiché il nostro angolo è associato ad un punto del 3° quadrante, sia il seno che il coseno devono assumere valori negativi:

$$sen\, x = -\frac{\frac{12}{5}}{\sqrt{\frac{144}{25}+1}} = -\frac{12}{13} \quad ; \qquad cos\, x = -\frac{1}{\sqrt{\frac{144}{25}+1}} = -\frac{5}{13} \quad .$$

- **Archi associati e riduzione al primo quadrante**

Abbiamo già visto che è sufficiente conoscere i valori assunti dalle funzioni goniometriche in un intervallo di ampiezza uguale al loro periodo, ovvero 2π per seno e coseno e π per la tangente, per determinarne il comportamento su tutto il dominio.

In realtà, la maggior parte di queste informazioni sono superflue; è sufficiente conoscere i valori che le funzioni goniometriche assumono quando il loro argomento varia tra 0° e 45° per dedurne tutti gli altri.

Consideriamo l'angolo $A\hat{O}P = \alpha$ sulla circonferenza goniometrica. Il punto P avrà coordinate $P(cos\,\alpha, sen\,\alpha)$, che possiamo abbreviare in $P(a, b)$.

Tracciamo ora l'angolo complementare ad α:

$A\hat{O}Q = \pi/2 - \alpha$.

Osserviamo che i triangoli OPH e OQK sono uguali per il 2° criterio di isometria, in quanto entrambi hanno un angolo retto, uno di ampiezza α, e $OP = OQ = 1$ in quanto raggi della circonferenza goniometrica.

In particolare, avremo $QK = PH$ e $OK = OH$, quindi il punto Q avrà coordinate "scambiate" rispetto a quelle di P:

$Q(b, a)$.

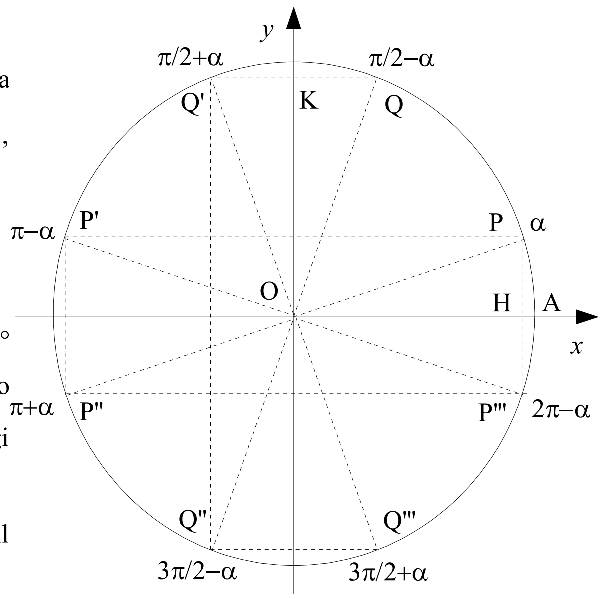


Fig. 26

Partendo da P e da Q, eseguiamo una serie di simmetrie rispetto agli assi cartesiani. L'effetto di una simmetria rispetto all'asse delle ascisse è semplicemente quello di cambiare segno all'ordinata del punto su cui si opera e, viceversa, eseguendo una simmetria rispetto all'asse delle ordinate, cambiamo segno all'ascissa del punto. Di conseguenza, tutti i punti trovati hanno coordinate che dipendono da quelle del punto P:

$P(a,b)$	$P'(-a,b)$	$P''(-a,-b)$	$P'''(a,-b)$
$Q(b,a)$	$Q'(-b,a)$	$Q''(-b,-a)$	$Q'''(b,-a)$

Ora ricordiamo che $x_P = cos\alpha$ e $y_P = sen\alpha$, mentre, ad esempio, $x_Q = cos(\pi/2-\alpha)$ e $y_Q = sen(\pi/2-\alpha)$. D'altra parte, abbiamo visto che $x_P = y_Q = a$ e $y_P = x_Q = b$. Possiamo quindi affermare che: $cos(\pi/2-\alpha) = sen\alpha$ e $sen(\pi/2-\alpha) = cos\alpha$.

Ripetendo tali osservazioni per tutti i punti ottenuti in precedenza, concludiamo che gli angoli associati a tali punti hanno delle funzioni goniometriche che si possono esprimere in termini delle funzioni goniometriche dell'angolo α. In altre parole, conoscendo le funzioni goniometriche dell'angolo α, ne possiamo quelle degli *angoli associati* ad α nel senso descritto in precedenza.

Le relazioni che otteniamo valgono per qualsiasi angolo α, ma è più semplice visualizzarle se α è un angolo "piccolo" (minore di 45°). Come abbiamo detto in precedenza, è sufficiente conoscere i valori delle funzioni goniometriche per valori dell'argomento compresi tra 0° e 45° per dedurne tutti gli altri. Parliamo di *riduzione al primo quadrante* quando, per conoscere le funzioni goniometriche di un angolo “grande”, lo associamo ad uno di ampiezza minore di 90°.

Ripetendo il ragionamento precedente, dovresti arrivare alle seguenti conclusioni:

$$x_Q = y_P \quad \Rightarrow \quad \boldsymbol{cos}\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right) = \boldsymbol{sen}\,\alpha$$

$$y_Q = x_P \quad \Rightarrow \quad \boldsymbol{sen}\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right) = \boldsymbol{cos}\,\alpha$$

$$\boldsymbol{tg}\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right) = \frac{y_Q}{x_Q} = \frac{x_P}{y_P} = \frac{1}{\boldsymbol{tg}\,\alpha}$$

$$x_{Q'} = -y_P \quad \Rightarrow \quad \boldsymbol{cos}\left(\frac{\pi}{2}+\alpha\right) = -\boldsymbol{sen}\,\alpha$$

$$y_{Q'} = x_P \quad \Rightarrow \quad \boldsymbol{sen}\left(\frac{\pi}{2}+\alpha\right) = \boldsymbol{cos}\,\alpha$$

$$\boldsymbol{tg}\left(\frac{\pi}{2}+\alpha\right) = \frac{y_{Q'}}{x_{Q'}} = \frac{x_P}{-y_P} = -\frac{1}{\boldsymbol{tg}\,\alpha}$$

$$x_{P'} = -x_P \quad \Rightarrow \quad \boldsymbol{cos}(\pi-\alpha) = -\boldsymbol{cos}\,\alpha$$

$$y_{P'} = y_P \quad \Rightarrow \quad \boldsymbol{sen}(\pi-\alpha) = \boldsymbol{sen}\,\alpha$$

$$\boldsymbol{tg}(\pi-\alpha) = \frac{y_{P'}}{x_{P'}} = \frac{y_P}{-x_P} = -\boldsymbol{tg}\,\alpha$$

$$x_{P''} = -x_P \quad \Rightarrow \quad \boldsymbol{cos}(\pi+\alpha) = -\boldsymbol{cos}\,\alpha$$

$$y_{P''} = y_P \quad \Rightarrow \quad \boldsymbol{sen}(\pi+\alpha) = -\boldsymbol{sen}\,\alpha$$

$$\boldsymbol{tg}(\pi+\alpha) = \frac{y_{P''}}{x_{P''}} = \frac{-y_P}{-x_P} = \boldsymbol{tg}\,\alpha$$

$$x_{Q''} = -y_P \quad \Rightarrow \quad \boldsymbol{cos}\left(\frac{3}{2}\pi-\alpha\right) = -\boldsymbol{sen}\,\alpha$$

$$y_{Q''} = -x_P \quad \Rightarrow \quad \boldsymbol{sen}\left(\frac{3}{2}\pi-\alpha\right) = -\boldsymbol{cos}\,\alpha$$

$$\boldsymbol{tg}\left(\frac{3}{2}\pi-\alpha\right) = \frac{y_{Q''}}{x_{Q''}} = \frac{-x_P}{-y_P} = \frac{1}{\boldsymbol{tg}\,\alpha}$$

$$x_{Q'''} = y_P \quad \Rightarrow \quad \boldsymbol{cos}\left(\frac{3}{2}\pi+\alpha\right) = \boldsymbol{sen}\,\alpha$$

$$y_{Q'''} = -x_P \quad \Rightarrow \quad \boldsymbol{sen}\left(\frac{3}{2}\pi+\alpha\right) = -\boldsymbol{cos}\,\alpha$$

$$\boldsymbol{tg}\left(\frac{3}{2}\pi+\alpha\right) = \frac{y_{Q'''}}{x_{Q'''}} = \frac{-x_P}{y_P} = -\frac{1}{\boldsymbol{tg}\,\alpha}$$

$x_{P'''}=x_P \quad \Rightarrow \quad \boldsymbol{cos}(\boldsymbol{2}\pi-\alpha)=\boldsymbol{cos}(-\alpha)=\boldsymbol{cos}\,\alpha$

$y_{P'''}=-y_P \quad \Rightarrow \quad \boldsymbol{sen}(\boldsymbol{2}\pi-\alpha)=\boldsymbol{sen}(-\alpha)=-\boldsymbol{sen}\,\alpha$

$$\boldsymbol{tg}(\boldsymbol{2}\pi-\alpha)=\boldsymbol{tg}(-\alpha)=\frac{y_{P'''}}{x_{P'''}}=\frac{-y_P}{x_P}=-\boldsymbol{tg}\,\alpha$$

In quest'ultimo caso ricorda che gli angoli $2\pi-\alpha$ e $-\alpha$ sono entrambi associati al punto P'''.

Naturalmente, è importante che tu comprenda e sappia ricavare le precedenti relazioni, e non ti limiti ad impararle a mente. Se necessario, puoi comunque osservare che:

- quando nell'argomento compare π, ogni funzione viene mandata in se stessa, a parte il segno;
- quando nell'argomento compare $\pi/2$, ogni funzione viene mandata nella corrispondente cofunzione, a parte il segno (seno e coseno vengono scambiati tra loro e la tangente viene mandata in $1/tg\,\alpha$, ovvero $cotg\,\alpha$);
- i segni possono essere dedotti dal quadrante in cui si trova il punto associato all'angolo.

Ad esempio, $\cos(\frac{3}{2}\pi-\alpha)$ verrà trasformato in seno perché vi compare $\pi/2$ e assumerà segno negativo perché il punto Q'' si trova nel terzo quadrante, in cui il coseno è negativo.

Avremo quindi $\cos(\frac{3}{2}\pi-\alpha)=-sen\,\alpha$, come avevamo già mostrato.

Applichiamo le relazioni trovate al calcolo di alcune funzioni goniometriche. Per comprendere gli esempi che seguono dovresti rappresentare gli angoli nella circonferenza goniometrica.

Esempio 1

Calcoliamo $sen\frac{25}{4}\pi$.

Ricordiamo una nozione di aritmetica. Se nella divisione tra due numeri naturali *a* e *b* otteniamo un quoziente *q* ed un resto *r*, ciò significa che $a=b\cdot q+r$. Ad esempio, dividendo 31 per 6, si ricava come quoziente 5 e come resto 1, quindi: $31=6\cdot 5+1$. Spesso, però, non vogliamo scrivere l'uguaglianza precedente sotto forma di moltiplicazione, ma di divisione. Dividendo entrambi i membri per *b*, otteniamo:

$\frac{a}{b}=\frac{b\cdot q}{b}+\frac{r}{b}$ da cui, semplificando: $\boldsymbol{\frac{a}{b}=q+\frac{r}{b}}$. Nel nostro esempio: $\frac{1}{6}=5+\frac{1}{6}$.

Dividendo 25 per 4, otteniamo come quoziente 6 e come resto 1; quindi:

$$\frac{25}{4}\pi=(6+\frac{1}{4})\pi=3\cdot 2\pi+\frac{\pi}{4}$$

In altri termini, l'angolo di ampiezza $25\pi/4$ può essere ottenuto partendo da quello di ampiezza $\pi/4$ e percorrendo tre giri completi sulla circonferenza goniometrica.

Poiché i due angoli sono associati allo stesso punto P sulla circonferenza goniometrica, essi hanno gli stessi valori delle funzioni goniometriche.

Di conseguenza: $sen\frac{25}{4}\pi = sen(3\cdot 2\pi + \frac{\pi}{4}) = sen\frac{\pi}{4} = \frac{\sqrt{2}}{2}$.

Esempio 2

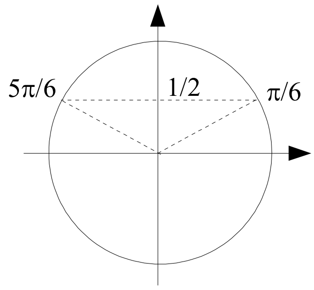


Fig. 27 sen (5π/6)=sen π/6

Calcoliamo $sen\frac{29}{6}\pi$.

Osserviamo come prima che $\frac{29}{6}\pi = 4\pi + \frac{5}{6}\pi$, quindi:

$$sen\frac{29}{6}\pi = sen(4\pi + \frac{5}{6}\pi) = sen\frac{5}{6}\pi \quad .$$

L'angolo di ampiezza $5\pi/6$ può essere associato al suo supplementare di ampiezza $\pi/6$. Poiché i due punti associati a tali angoli hanno la stessa ordinata, due angoli supplementari avranno lo stesso seno.

In formula: $sen(\pi - \alpha) = sen\,\alpha$ che, nel nostro caso, diventa: $sen\frac{5}{6}\pi = sen\frac{\pi}{6} = \frac{1}{2}$.

Esempio 3

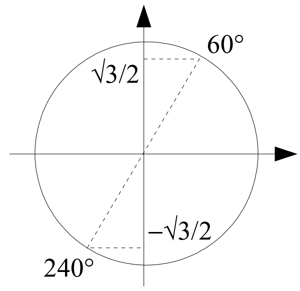


Fig. 28 sen 240°=-sen 60°

Calcoliamo $sen\,960°$.

Osserviamo che 360°, ovvero l'ampiezza di un angolo giro, è contenuto in 960° due volte con il resto di 240°. Quindi:

$$sen\,960° = sen(2\cdot 360° + 240°) = sen\,240° \quad .$$

L'angolo la cui ampiezza misura 240° può essere ottenuto dall'angolo di ampiezza 60° sommandovi un angolo piatto. Due angoli che differiscano di un angolo piatto avranno valori del seno opposti.

In formula: $sen(180° + \alpha) = -sen\,\alpha$, da cui: $sen\,240° = -sen\,60° = -\frac{\sqrt{3}}{2}$.

Esempio 4

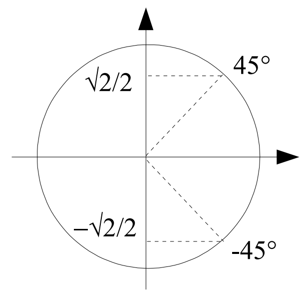


Fig. 29sen (-45°)=-sen 45°

Calcoliamo $sen\,315°$.

Osserviamo che $315° = 360° - 45°$.

Quindi: $sen\,315° = sen(360° - 45°) = sen(-45°)$.

L'angolo di ampiezza $-45°$ è l'opposto dell'angolo di ampiezza 45°, e due angoli opposti hanno valori opposti del seno.

In formula: $sen(-\alpha) = -sen\,\alpha$ o, nel nostro caso: $sen\,315° = sen(-45°) = -sen\,45° = -\frac{\sqrt{2}}{2}$.

Esempio 5

Calcoliamo $cos(\frac{5}{3}\pi)$. Osserviamo che $\frac{5}{3}\pi=2\pi-\frac{\pi}{3}$.

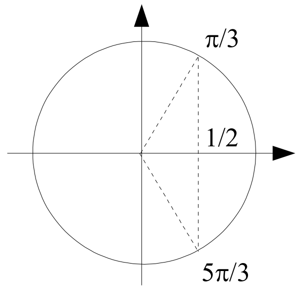


Fig. 30 cos (5π/3)=cos π/3

Quindi: $cos(\frac{5}{3}\pi)=cos(2\pi-\frac{\pi}{3})=cos(-\frac{\pi}{3})$.

Gli angoli aventi come ampiezze $\pi/3$ e $-\pi/3$ sono opposti, ma angoli opposti hanno valori del coseno uguali.

In formula: $cos(-x)=cos\,x$, e quindi: $cos(\frac{5}{3}\pi)=cos(-\frac{\pi}{3})=cos\frac{\pi}{3}=\frac{1}{2}$.

Esempio 6

Calcoliamo $cos\frac{5}{6}\pi$.

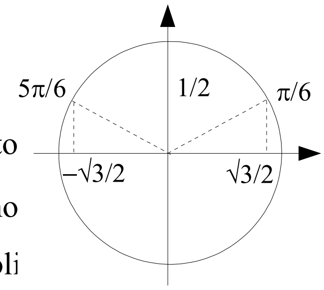


Fig. 31 cos 5π/6=-cos π/6

Abbiamo già detto che l'angolo di ampiezza $5\pi/6$ può essere associato al suo supplementare di ampiezza $\pi/6$. Questa volta, però, osserviamo che i punti associati a tali angoli hanno ascisse opposte, per cui due angoli supplementari avranno coseni opposti.

In formula: $cos(\pi-x)=-cos\,x$, che in questo caso diventa: $cos\frac{5}{6}\pi=-cos\frac{\pi}{6}=-\frac{\sqrt{3}}{2}$.

Esempio 7

Calcoliamo $cos\,1320°$.

Dividendo 1320° per 360°, ovvero l'ampiezza di un angolo giro, ottengo 3 con il resto di 240°. Vale pertanto l'uguaglianza $1320°=3\cdot 360°+240°$.

Di conseguenza: $cos\,1320°=cos(3\cdot 360°+240°)=cos\,240°$.

L'angolo la cui ampiezza misura 240° può essere ottenuto dall'angolo di ampiezza 60° sommandovi un angolo piatto. Due angoli che differiscono di un angolo piatto hanno valori del coseno opposti. In formula:

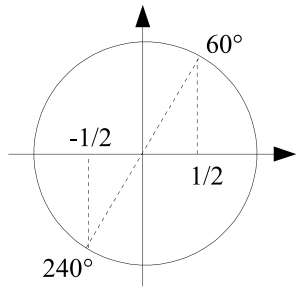


Fig. 32 cos 240°=-cos 60°

$cos(180°+x)=-cos\,x$; da cui: $cos\,240°=-cos\,60°=-\frac{1}{2}$.

Esempio 8

Calcoliamo $tg\,225°$.

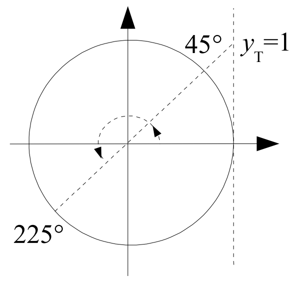


Fig. 33 tg 225°=tg 45°

L'angolo di 225° può essere associato all'angolo di 45°, da cui differisce di un angolo piatto. Poiché la funzione tangente è periodica di periodo 180°, due angoli la cui differenza è uguale ad un angolo piatto avranno la stessa tangente.

In formula: $tg(180°+x)=tg\,x$ o, nel nostro caso: $tg\,225°=tg(180°+45°)=tg\,45°=1$.

Esempio 9

Calcoliamo $tg\frac{11}{6}\pi$. Osserviamo che $\frac{11}{6}\pi=2\pi-\frac{\pi}{6}$.

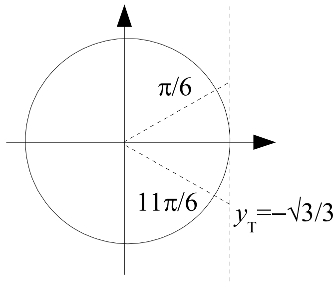


Fig. 34 tg 11π/6=-tg π/6

Abbiamo quindi: $tg\frac{11}{6}\pi=tg(2\pi-\frac{\pi}{6})=tg(-\frac{\pi}{6})$.

Gli angoli aventi ampiezze $-\pi/6$ e $\pi/6$ sono opposti, e in angoli opposti la tangente assume valori opposti.

In formula: $tg(-x)=-tg\,x$, e quindi: $tg\frac{11}{6}\pi=tg(-\frac{\pi}{6})=-tg\frac{\pi}{6}=-\frac{\sqrt{3}}{3}$.

Esempio 10

Calcoliamo $tg\,1020°$.

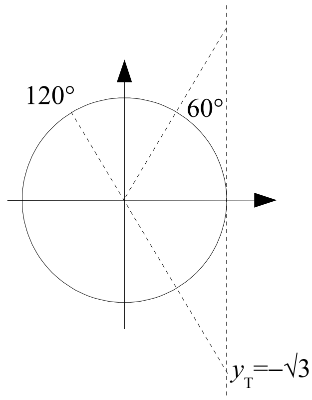


Fig. 35 tg 120°=-tg 60°

Dividendo 1020° per 180°, ovvero il periodo della funzione tangente, otteniamo 5 con il resto di 120°.

Abbiamo quindi l'uguaglianza $1020°=5\cdot180°+120°$.

Ricaviamo perciò: $tg\,1020°=tg(5\cdot180°+120°)=tg\,120°$.

L'angolo di ampiezza 120° può essere associato al suo supplementare di ampiezza 60°, osservando che due angoli supplementari hanno valori opposti della tangente.

In formula: $tg(180°-\alpha)=-tg\,\alpha$; da cui: $tg\,1020°=tg\,120°=-tg\,60°=-\sqrt{3}$.

Esercizi sulle funzioni goniometriche

Trasforma in radianti:

1. 12°; 135°; 52°; 420°; 10°30'; 82°30'; 53°18'45"; 80°12'30"

$$R: \frac{\pi}{15}; \frac{3}{4}\pi; \frac{13}{45}\pi; \frac{7}{3}\pi; \frac{7}{120}\pi; \frac{11}{24}\pi; \frac{853}{2880}\pi; \frac{385}{864}\pi$$

2. 15° ; 56° ; 144° ; 258° ; 42°15' ; 193°30' ; 212°24' ; 329°15' ; 37°26'24" ; 196°52'30"

$$R: \frac{\pi}{12}; \frac{14}{45}\pi; \frac{4}{5}\pi; \frac{43}{30}\pi; \frac{169}{720}\pi; \frac{43}{40}\pi; \frac{59}{50}\pi; \frac{439}{240}\pi; \frac{26}{125}\pi; \frac{35}{32}\pi$$

Esprimi in gradi, primi e secondi:

3. $\frac{\pi}{10}$; $\frac{7}{12}\pi$; $\frac{11}{12}\pi$; $\frac{7}{6}\pi$; $\frac{17}{72}\pi$; $\frac{2}{11}\pi$; $\frac{18}{25}\pi$; $\frac{6}{7}\pi$

$$R: 18°; 105°; 165°; 210°; 42°30'; 32°43'38''; 129°36'; 154°17'9''$$

4. $\frac{7}{36}\pi; \frac{5}{6}\pi; \frac{13}{12}\pi; \frac{55}{36}\pi; \frac{17}{72}\pi; \frac{18}{25}\pi; \frac{101}{75}\pi; \frac{509}{225}\pi; \frac{53}{64}\pi$

$$R: 35°; 150°; 195°; 275°; 42°30'; 129°36'; 242°24'; 407°12'; 149°3'45''$$

5. Determina la misura in radianti di ciascuno degli angoli interni di un pentagono regolare e di un poligono regolare di *n* lati. $R: \frac{3}{5}\pi; \frac{n-2}{n}\pi$

6. Un punto P descrive una circonferenza di centro O e raggio OA=10 cm. Calcola la lunghezza dell'arco AP, sapendo che l'angolo al centro $A\hat{O}P = \frac{5}{3}\pi$ radianti. $R: \simeq 52{,}36\,cm$

7. In una circonferenza di raggio $OA = 6\,cm$ è dato un arco AB di lunghezza 5,652 cm. Determina, utilizzando la calcolatrice, l'ampiezza in gradi dell'angolo al centro $A\hat{O}B$ che sottende l'arco considerato. $R: 53°58'21''$

Calcola il valore delle seguenti espressioni:

8. $3\,sen\,\pi + sen\frac{\pi}{2} - \frac{1}{2}sen\,0 - 3\,sen\frac{3}{2}\pi$ $R: 4$

9. $3\,sen\frac{3}{2}\pi - 4\,sen\frac{\pi}{2} + \frac{3}{2}sen\,0 - \frac{1}{4}sen\,0$ $R: -7$

10. $\dfrac{sen\dfrac{\pi}{6}+sen\dfrac{\pi}{4}-sen\dfrac{\pi}{3}}{\sqrt{2}\,sen\,\pi}$ $\quad R: impossibile$

11. $\dfrac{\sqrt{2}\,sen\dfrac{\pi}{4}-\sqrt{3}\,sen\dfrac{\pi}{3}}{\dfrac{1}{2}sen\dfrac{3}{2}\pi}$ $\quad R:1$

12. $\dfrac{3\,sen\dfrac{\pi}{3}}{sen\dfrac{\pi}{3}+2\,sen\dfrac{\pi}{6}+\sqrt{3}\,sen\dfrac{\pi}{2}-\sqrt{2}\,sen\dfrac{\pi}{4}}$ $\quad R:1$

13. $\dfrac{5}{2}\cos 0-\dfrac{1}{2}sen\,\pi+2\cos\dfrac{\pi}{2}-3\,sen\dfrac{\pi}{6}$ $\quad R:1$

14. $4\cos\dfrac{3}{2}\pi+3\,sen\dfrac{\pi}{2}+\cos\pi-\dfrac{4}{5}sen\,2\pi$ $\quad R:2$

15. $3\cos\dfrac{\pi}{2}+\sqrt{2}\cos\dfrac{\pi}{4}-\cos\pi+4\cos\dfrac{\pi}{3}$ $\quad R:4$

16. $\dfrac{sen^2\dfrac{\pi}{5}+\cos^2\dfrac{\pi}{5}}{sen^2\dfrac{\pi}{9}+\cos^2\dfrac{\pi}{9}}-\dfrac{\cos 2\pi}{2\,sen\dfrac{\pi}{6}}$ $\quad R:0$

17. $\dfrac{\sqrt{2}\,sen\dfrac{\pi}{4}-\sqrt{2}\cos\dfrac{\pi}{4}+4\cos\dfrac{\pi}{6}+8\,sen\,\pi}{2\sqrt{3}\,sen\dfrac{\pi}{6}}$ $\quad R:2$

18. $\dfrac{sen\dfrac{\pi}{6}+sen\dfrac{\pi}{4}+sen\dfrac{\pi}{3}}{\cos\dfrac{\pi}{3}+\cos\dfrac{\pi}{4}+\cos\dfrac{\pi}{6}}$ $\quad R:1$

19. $\dfrac{tg^2\dfrac{\pi}{4}-sen^2\dfrac{\pi}{4}-tg^2\dfrac{\pi}{4}\,sen^2\dfrac{\pi}{4}+\dfrac{1}{2}sen\dfrac{\pi}{3}}{\dfrac{1}{2}\cos\dfrac{\pi}{6}}$ $\quad R:1$

20. $\dfrac{tg\dfrac{\pi}{3}-tg\dfrac{\pi}{6}}{tg\dfrac{\pi}{3}+tg\dfrac{\pi}{6}}-2\,sen^2\dfrac{\pi}{6}+3\,sen^2\dfrac{\pi}{2}$ $\quad R:3$

21. $1+tg^2\dfrac{\pi}{3}-\dfrac{1}{1-\cos^2\dfrac{\pi}{6}}$ $\quad R:0$

22. $\dfrac{tg\dfrac{\pi}{4}-\cos\dfrac{\pi}{3}+\dfrac{\sqrt{3}}{2}sen\dfrac{\pi}{3}}{2\,sen\dfrac{\pi}{2}-\dfrac{1}{2}\cos\dfrac{\pi}{3}-sen\dfrac{\pi}{6}}$ $\qquad R:1$

23. $\dfrac{1}{1-tg^2\dfrac{\pi}{3}}-\dfrac{1}{1-tg^2\dfrac{\pi}{6}}-\dfrac{1}{\cos^2\dfrac{\pi}{3}-sen^2\dfrac{\pi}{3}}$ $\qquad R:0$

24. $\dfrac{a^2\cos 2\pi+5a\cos\pi+6\cos 0}{a^2 sen\dfrac{\pi}{2}+4\,sen\dfrac{3}{2}\pi}$ $\qquad R:\dfrac{a-3}{a+2}$

25. $(a\cos 0+b\cos 2\pi)^2-(a\,sen\dfrac{\pi}{2}+b\,sen\dfrac{3}{2}\pi)^2$ $\qquad R:4ab$

26. $(a-bcos\pi)^3+3ab(a\,sen\dfrac{\pi}{2}-b\,sen\dfrac{3}{2}\pi)\cos\pi$ $\qquad R:a^3+b^3$

Calcola utilizzando gli angoli associati:

27. $\sqrt{2}\,sen\,45°-\sqrt{3}\cos 150°+tg\,120°-tg(-60°)$ $\qquad R:\dfrac{5}{2}$

28. $\sqrt{2}\cos(-45°)+2\sqrt{3}\,sen\,120°-\sqrt{3}\,tg\,60°-3\,tg\,210°$ $\qquad R:1-\sqrt{3}$

29. $2\,sen\dfrac{\pi}{6}+3\cos\dfrac{\pi}{3}+tg\dfrac{4}{3}\pi+3\,tg\dfrac{2}{3}\pi$ $\qquad R:\dfrac{5}{2}-2\sqrt{3}$

30. $\sqrt{\dfrac{1-sen\,120°}{1-sen\,300°}}+\sqrt{\dfrac{1+\cos(-60°)}{1+\cos 120°}}$ $\qquad R:2$

31. $\left(\sqrt{\dfrac{1-\cos 300°}{1-\cos 240°}}-\sqrt{\dfrac{1+sen\,150°}{2}}\right)^2$ $\qquad R:\dfrac{1}{12}$

32. $sen(-\dfrac{25}{3}\pi)+\sqrt{3}\cos\dfrac{25}{3}\pi-tg\dfrac{25}{3}\pi+tg\dfrac{13}{3}\pi$ $\qquad R:0$

33. $sen\dfrac{\pi}{4}+sen\dfrac{5}{4}\pi+sen\dfrac{\pi}{3}+sen\dfrac{4}{3}\pi$ $\qquad R:0$

34. $\dfrac{a(a\,sen\dfrac{\pi}{2}+sen\,5\pi)+2ab\cos 4\pi+b^2\cos 6\pi}{a\cos 0-b\cos 3\pi}$ $\qquad R:a+b$

35. $\dfrac{a(a\,sen\dfrac{5}{2}\pi+b\cos\dfrac{5}{2}\pi)-b(a\cos\dfrac{5}{2}\pi+b\,sen\dfrac{5}{2}\pi)}{a(sen\,2\pi+\cos 2\pi)+b(sen\,3\pi+\cos 3\pi)}$ $\qquad R:a+b$

36. $\dfrac{2\cos\pi-\dfrac{\sqrt{3}}{2}sen\dfrac{\pi}{3}}{2\,sen\dfrac{7}{2}\pi-\dfrac{3}{2}sen\dfrac{5}{6}\pi}-\dfrac{2\cos\dfrac{\pi}{3}-2\,sen(-\dfrac{\pi}{6})}{sen\dfrac{7}{6}\pi+sen(-\dfrac{\pi}{6})}$ $R:3$

37. $2a\sqrt{3}\,sen\dfrac{2}{3}\pi+4b\,sen\dfrac{\pi}{6}+\dfrac{b}{\cos\dfrac{2}{3}\pi}$ $R:3a$

38. $4a\,sen\dfrac{5}{2}\pi(a\,sen\dfrac{5}{6}\pi-b)+(a-\dfrac{b}{\cos\dfrac{4}{3}\pi})$ $R:3a^2+4b^2$

39. $\dfrac{b\cos 0-4a\sqrt{3}\,sen(-\dfrac{\pi}{3})}{b\cos 6\pi}-\cos 4\pi$ $R:6\dfrac{a}{b}$

40. $\dfrac{(2a\,sen\dfrac{\pi}{6})^3+(2b\,sen\dfrac{7}{6}\pi)^3}{a\cos\dfrac{\pi}{3}+b\cos\dfrac{2}{3}\pi}-\dfrac{(2a\cos\dfrac{\pi}{3})^3+(2b\cos\dfrac{5}{3}\pi)^3}{a\,sen\dfrac{\pi}{6}-b\,sen\dfrac{7}{6}\pi}$ $R:4ab$

Semplifica le seguenti espressioni:

41. $3\,sen(\pi+\alpha)\cdot\cos(5\pi+\alpha)+3\,sen(-\alpha)\cdot\cos(-\alpha)$ $R:0$

42. $sen(\dfrac{\pi}{2}-\alpha)+sen(\pi+\alpha)-\cos(\dfrac{\pi}{2}-\alpha)+2\,sen(\pi-\alpha)$ $R:\cos\alpha$

43. $\dfrac{\cos(\pi-\alpha)}{1-sen(\pi+\alpha)}+\dfrac{\cos(\pi-\alpha)}{sen(\pi-\alpha)-1}$ $R:2\,tg\,\alpha$

44. $\dfrac{1+sen(\pi+\alpha)}{1-sen(\pi-\alpha)}-\dfrac{1-2\,sen^2(\pi+\alpha)}{\cos^2(\pi-\alpha)}$ $R:tg^2\alpha$

45. $\dfrac{tg(\pi+\alpha)}{tg(-\alpha)}+\dfrac{2\,tg(2\pi-\alpha)}{tg(\pi-\alpha)}$ $R:1$

46. $\dfrac{(a-b)^2}{\cos(-\alpha)}-\dfrac{4ab}{sen(\dfrac{3}{2}\pi-\alpha)}-\dfrac{(a+b)^2}{sen(\dfrac{\pi}{2}+\alpha)}+sen\,\dfrac{5}{2}\pi$ $R:1$

47. $\dfrac{sen(-\alpha)}{1+\cos(2\pi+\alpha)}-\dfrac{1-\cos(2\pi-\alpha)}{sen(2\pi-\alpha)}$ $R:0$

48. $\dfrac{\cos(\dfrac{\pi}{2}-\alpha)\cos\alpha+sen^2(\dfrac{\pi}{2}-\alpha)-sen\,\alpha\,sen(\dfrac{\pi}{2}-\alpha)}{\cos\alpha}$ $R:\cos\alpha$

49. $\dfrac{1}{sen(\frac{\pi}{2}+\alpha)\,tg(\frac{\pi}{2}+\alpha)(1+tg^2\alpha)}$ $\qquad R: -sen\,\alpha$

50. $sen^2(\pi-\alpha)-1+\cos(\pi-\alpha)+\cos^2\alpha$ $\qquad R: -\cos\alpha$

51. $\cos\alpha-\dfrac{\cos^2(\pi-\alpha)-sen^2(\pi-\alpha)}{sen(\pi-\alpha)-\cos(\pi-\alpha)}$ $\qquad R: sen\,\alpha$

52. $\dfrac{1+\cos(\pi+\alpha)}{1-\cos(\pi+\alpha)}-\dfrac{1+2\cos(\pi+\alpha)}{sen^2(\pi+\alpha)}$ $\qquad \dfrac{1}{tg^2\alpha}$

53. $\dfrac{\cos(-\alpha)}{1+sen(2\pi-\alpha)}-\dfrac{1-sen(-\alpha)}{\cos(2\pi-\alpha)}$ $\qquad R: 0$

54. $[sen(\pi+\alpha)+sen(\frac{3}{2}\pi-\alpha)]^2+2\,sen(\pi-\alpha)\,sen(\frac{3}{2}\pi+\alpha)$ $\qquad R: 1$

55. $[sen(\pi-\alpha)-\cos(\pi+\alpha)]^2-2\,sen(2\pi-\alpha)\cos(\pi+\alpha)$ $\qquad R: 1$

56. $\dfrac{1-sen(\frac{\pi}{2}+\alpha)}{tg(\pi+\alpha)}+tg\,\alpha+\dfrac{1+\cos(\pi+\alpha)}{sen(-\alpha)\cos(-\alpha)}$ $\qquad R: sen\,\alpha$

57. $\dfrac{1-\cos(4\pi+\alpha)}{tg(5\pi+\alpha)}+tg\,\alpha+\dfrac{1-\cos(10\pi+\alpha)}{sen(6\pi+\alpha)\cos(8\pi+\alpha)}$ $\qquad R: sen\,\alpha$

58. $\dfrac{tg(\pi+\alpha)}{1-tg^2(\pi-\alpha)}\cdot\dfrac{tg^2(\frac{\pi}{2}+\alpha)-1}{tg(\frac{3}{2}\pi-\alpha)}$ $\qquad R: 1$

Utilizzando le relazioni fondamentali della goniometria, verifica che le seguenti uguaglianze sono delle identità:

59. $sen\,x\cos x-sen^3x\cos x=sen\,x\cos^3x$; $\qquad \dfrac{sen\,x\cos x-\cos x}{sen\,x}=\cos x-\dfrac{1}{tg\,x}$

60. $sen^2x+\cos^2x=sen^4x+2\,sen^2x\cos^2x+\cos^4x$; $\qquad \dfrac{tg\,x+sen\,x}{\frac{1}{tg\,x}+\frac{1}{sen\,x}}=sen\,x\,tg\,x$

61. $\dfrac{\cos^4x-sen^4x}{\cos^2x-sen^2x}=[sen^2x+\cos^2x]^3$; $\qquad sen\,x\cos x=\dfrac{tg\,x}{1+tg^2x}$

62. $\dfrac{1-sen\,x}{\cos x}+\dfrac{1}{sen\,x\cos x}=\dfrac{sen\,x+\cos x}{sen\,x\cos x}-\dfrac{1-\cos x}{sen\,x}$; $\qquad \dfrac{tg^2x}{1-\cos^2x}=1+tg^2x$

63. $\dfrac{1}{sen\,x}+\dfrac{1}{sen^2x}-sen\,x-1=\dfrac{1}{tg^2x}+\dfrac{\cos^2x}{sen\,x}$; $\qquad \dfrac{1-2\,sen\,x\cos x}{1+2\,sen\,x\cos x}=[\dfrac{sen\,x-\cos x}{sen\,x+\cos x}]^2$

64. $\dfrac{1-2\,sen\,x\cos x}{sen^2 x}=\dfrac{(1-tg\,x)^2}{tg^2 x}$; $\dfrac{1+sen\,x-sen^2 x}{\cos x}=\cos x+tg\,x$

65. $\dfrac{sen\,x+tg\,x}{2\,tg\,x}=\dfrac{1+\cos x}{2}$; $\dfrac{1}{\cos^2 x}+\dfrac{1}{sen^2 x}=(tg\,x+\dfrac{1}{tg\,x})^2$

66. $\dfrac{sen\,x\cos^2 x-sen\,x}{\cos x\,sen^2 x-\cos x}=tg^3 x$; $\dfrac{sen\,x+tg\,x}{1+\cos x}=tg\,x$

67. $1-\cos^4 x=\cos^2 x(sen^2 x+tg^2 x)$; $\dfrac{1+tg\,x}{1-tg\,x}=\dfrac{(sen\,x+\cos x)^2}{\cos^2 x-sen^2 x}$

68. $\dfrac{2}{\cos^2 x}=(tg\,x-1)^2+(tg\,x+1)^2$; $\dfrac{1-tg^2 x}{1+tg^2 x}=1-2\,sen^2 x$

69. $\dfrac{2\cos^2 x-1}{1-sen^2 x}=1-\dfrac{sen^2 x}{\cos^2 x}$; $(sen\,x+\cos x)^2+(sen\,x-\cos x)^2=2$

70. $\dfrac{1+sen\,x}{\cos x}-\dfrac{\cos x}{1-sen\,x}=\dfrac{1-\cos x}{sen\,x}-\dfrac{sen\,x}{1+\cos x}$; $sen^4 x-\cos^4 x=1-2\cos^2 x$

71. Inserisci il segno opportuno (maggiore, minore o uguale):

$\cos 179°\ldots 0$; $\cos 40°\ldots\cos 43°$; $sen\,30°\ldots sen\,30°\cdot\cos 50°$;

$sen\,10°\ldots tg\,10°$; $sen\,14°\ldots sen^2 14°$; $sen\,1\,rad\ldots\cos 1\,rad$;

$\cos 168°\ldots\cos 168°\cdot\cos 22°$; $sen\,1°\ldots\cos 1°$; $sen\,20°\ldots sen\,21°$;

$\cos 243°\ldots\cos 250°$

Equazioni e disequazioni goniometriche

◆ Restrizione di una funzione

Nel definire la funzione logaritmica come inversa di quella esponenziale, avevamo ricordato che:

- *Una funzione è invertibile se e soltanto se essa è biunivoca.*

  In altri termini, la relazione inversa di una funzione è a sua volta una funzione se e soltanto se la funzione di partenza è iniettiva e suriettiva.
- Da un punto di vista grafico, una curva sul piano cartesiano è il *grafico di una funzione* se *ogni retta parallela all'asse y incontra la curva al massimo in punto.*
- Inoltre, una curva sul piano cartesiano è il *grafico di una funzione biunivoca,* e quindi *invertibile*, se, oltre alla proprietà precedente, anche *ogni retta parallela all'asse x incontra la curva al massimo in un punto.*
- Se le due condizioni precedenti sono verificate, e se quindi abbiamo una funzione invertibile, *il grafico della sua funzione inversa si ottiene applicando alla curva la simmetria rispetto alla bisettrice del primo e del terzo quadrante.*

Anche se abbiamo una funzione non biunivoca, e quindi non invertibile, in alcuni casi può essere utile prenderne in considerazione soltanto una parte del dominio, in modo che la funzione così limitata sia biunivoca, e pertanto invertibile. Tale procedimento viene detto *restrizione*.

Esempio. Consideriamo la funzione $y=x^2$, definita per ogni valore reale della variabile *x*, il cui grafico cartesiano è la parabola di fig. 1.

Tale funzione ammette la relazione inversa $x=\pm\sqrt{y}$ che, però, non è una funzione, in quanto ad un dato valore di *y* fa corrispondere due distinti valori di *x*.

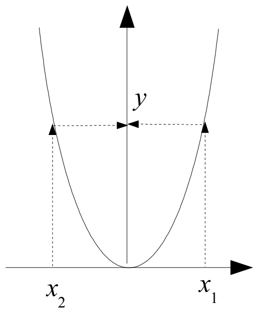


Fig. 1 Funzione $y=x^2$

Tuttavia, se considerassimo la funzione $y=x^2$ non come definita sull'intero insieme dei numeri reali, ma semplicemente sull'intervallo $x\geq 0$, allora essa sarebbe sempre crescente e quindi biunivoca. Infatti, la sua inversa $x=\sqrt{y}$ risulterebbe ancora una funzione.

Come al solito, poiché siamo abituati a considerare la *x* come variabile indipendente e la *y* come variabile indipendente, dobbiamo "scambiare di posto" le due incognite, ottenendo l'equazione $y=\sqrt{x}$ per la funzione inversa così definita.

Graficamente, lo scambio della *x* con la *y* corrisponde ad eseguire sul grafico della funzione data una simmetria rispetto alla bisettrice del primo e del terzo quadrante (fig. 2).

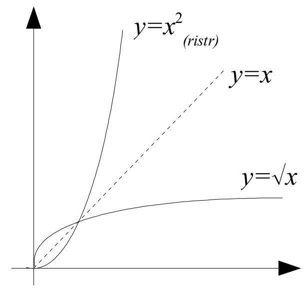


Fig. 2 Restrizione della funzione $y=x^2$ *per* $x\geq 0$ *e sua funzione inversa* $y=\sqrt{x}$

◆ L'inversa della funzione seno

E' evidente che la funzione $y = sen\, x$, definita sull'insieme dei numeri reali, non è biunivoca, e quindi la sua inversa non è una funzione, ma semplicemente una relazione.

Anche limitandoci all'angolo giro, vediamo infatti che esistono in generale due angoli distinti a cui corrisponde lo stesso seno.

Ad esempio, agli angoli $x_1 = \frac{\pi}{6}$ e $x_2 = \frac{5}{6}\pi$ corrisponde lo stesso seno $y = 1/2$ e, quindi, la relazione inversa del seno fa corrispondere ad un dato valore del seno (variabile *y*) due valori distinti dell'angolo (variabile *x*).

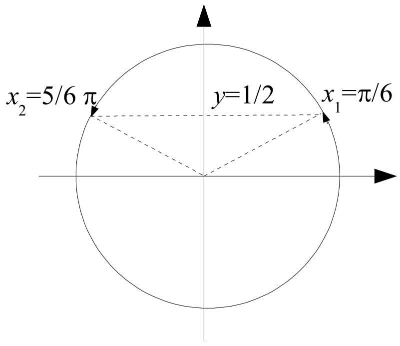


Fig. 3 La funzione y=sen x non è iniettiva.

Se poi non ci limitiamo all'angolo giro, possiamo osservare a maggior ragione che ogni retta parallela all'asse delle ascisse, di equazione $y = k$ con $-1 \le k \le 1$, interseca la sinusoide in infiniti punti, e quindi esistono infiniti valori di *x* che hanno per corrispondente lo stesso valore di *y*, ovvero infiniti angoli che hanno lo stesso seno (fig. 4).

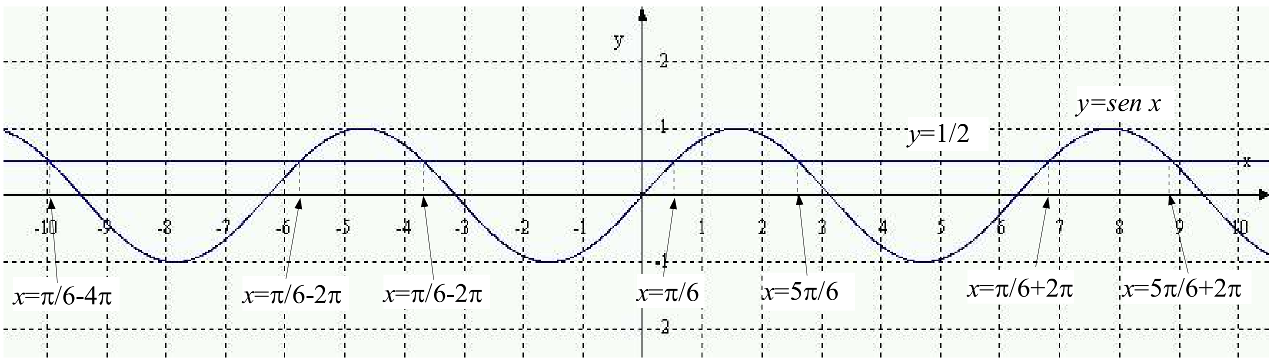


Fig. 4 Infiniti angoli hanno lo stesso seno

Da quanto abbiamo detto, è evidente che, per rendere la funzione $y = sen\, x$ invertibile, dobbiamo restringerla ad un dominio sul quale essa sia biunivoca.

Il nuovo dominio dovrà rispettare le seguenti proprietà:

- in tale intervallo, la funzione seno dovrà assumere tutti i valori compresi tra -1 ed 1,
- ma nessun valore del seno dovrà essere "ripetuto".

Potremmo raggiungere il nostro scopo prendendo come dominio uno qualunque degli intervalli in cui la funzione $y = sen\, x$ è monotòna, ovvero crescente o decrescente.

Per convenzione, prenderemo come dominio l'intervallo dei valori $-\frac{\pi}{2} \le x \le \frac{\pi}{2}$.

La funzione $y = sen\, x$ ristretta a tale intervallo è crescente, e quindi biunivoca; perciò la sua relazione inversa è ancora una funzione, come volevamo che accadesse.

L'inversa della funzione seno viene chiamata **arco seno**.

Per l'esattezza, se $y = sen\, x$, diremo che $x = arc\, sen\, y$, che poi, effettuando il solito scambio tra le variabili *x* ed *y*, diventa $y = arc\, sen\, x$, in modo da avere, come di consueto, *x* come variabile indipendente e y come variabile dipendente.

Per ottenere il grafico della funzione $y = arc\,sen\,x$ partiamo da quello della funzione $y = sen\,x$, ristretta all'intervallo $-\pi/2 \le x \le \pi/2$, ed eseguiamo la consueta simmetria rispetto alla bisettrice del primo e del terzo quadrante (fig. 5). Di conseguenza:

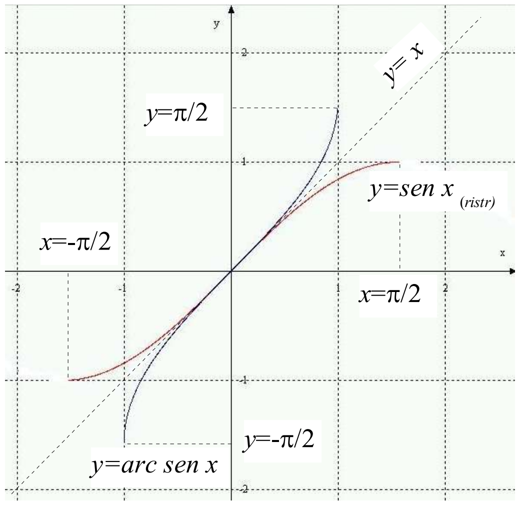


Fig. 5 Restrizione della funzione y=sen x per -π/2<x<π/2 (in rosso) e sua funzione inversa y=arc sen x (in blu)

- il dominio della funzione $y = arc\,sen\,x$ è l'intervallo $-1 \le x \le 1$, che corrisponde al codominio della funzione $y = sen\,x$;
- il codominio della funzione $y = arc\,sen\,x$ è l'intervallo $-\pi/2 \le y \le \pi/2$, che corrisponde al dominio della funzione $y = sen\,x_{(ristr)}$;
- la funzione $y = arc\,sen\,x$ è crescente, come lo era la funzione $y = sen\,x$ nell'intervallo in cui abbiamo eseguito la restrizione.

Esempi:

- $arc\,sen \frac{1}{2} = \frac{\pi}{6}$ perché $sen \frac{\pi}{6} = \frac{1}{2}$ e $-\frac{\pi}{2} \le \frac{\pi}{6} \le \frac{\pi}{2}$.

  Osserva che sarebbe un errore scrivere $arc\,sen \frac{1}{2} = \frac{5}{6}\pi$, perché $\frac{5}{6}\pi > \frac{\pi}{2}$.
- $arc\,sen \frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{\pi}{4}$; $arc\,sen(-\frac{\sqrt{3}}{2}) = -\frac{\pi}{3}$;
- $arc\,sen \frac{3}{4} \simeq 0{,}84806\,rad$; $arc\,sen \frac{2}{7} \simeq 16°36'6''$;
- $arc\,sen\,2$ non esiste, perché nessun angolo può avere un seno maggiore di 1.

◆ L'inversa della funzione coseno

Anche la funzione $y = cos\,x$, definita sull'insieme dei numeri reali, non è biunivoca, e quindi la sua inversa non è una funzione, ma semplicemente una relazione.

Ad esempio, agli angoli $x_1 = \frac{\pi}{4}$ e $x_2 = \frac{7}{4}\pi$ corrisponde lo stesso coseno $y = \frac{\sqrt{2}}{2}$, e lo stesso avviene per tutti gli angoli della forma $x = \pm\frac{\pi}{4} + 2k\pi$.

Di conseguenza, la relazione inversa del coseno fa corrispondere ad un dato valore del coseno (variabile y) infiniti valori distinti dell'angolo (variabile x).

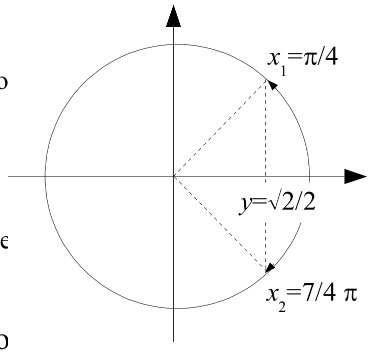


Fig. 6 La funzione y=cos x non è iniettiva

Per fare in modo che la funzione $y = cos\,x$ sia invertibile, dobbiamo restringerla ad un dominio sul quale essa sia monotòna, e quindi biunivoca.

Per convenzione, si prende come dominio l'intervallo $0 \le x \le \pi$, sul quale la funzione coseno è decrescente. La funzione inversa del coseno è detta **arco coseno**, indicata con $y = arc\,cos\,x$.

Come sappiamo, il grafico della funzione $y = arc\,cos\,x$ si ottiene da quello della funzione $y = cos\,x$, ristretta all'intervallo $0 \le x \le \pi$, sottoponendolo ad una simmetria rispetto alla bisettrice del primo e del terzo quadrante (fig. 7).

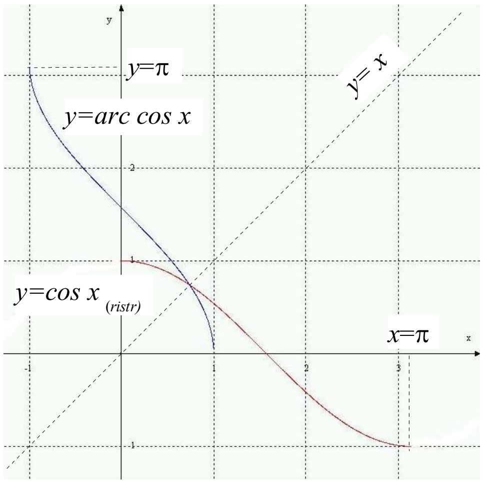


Fig. 7 Restrizione della funzione y=cos x per 0<x<π (in rosso) e sua funzione inversa y=arc cos x (in blu)

Possiamo quindi osservare che:

- il dominio della funzione $y = arc\,cos\,x$ è l'intervallo $-1 \le x \le 1$, che corrisponde al codominio della funzione $y = cos\,x$;
- il codominio della funzione $y = arc\,cos\,x$ è l'intervallo $0 \le y \le \pi$, che corrisponde al dominio della funzione $y = cos\,x_{(ristr)}$;
- la funzione $y = arc\,cos\,x$ è decrescente, come lo era la funzione $y = cos\,x$ nell'intervallo in cui abbiamo eseguito la restrizione.

Esempi:

- $arc\,cos\frac{1}{2} = \frac{\pi}{3}$ perché $cos\frac{\pi}{3} = \frac{1}{2}$ e $0 \le \frac{\pi}{3} \le \pi$.

  Osserva che sarebbe un errore scrivere $arc\,cos\frac{1}{2} = \frac{5}{3}\pi$, perché $\frac{5}{3}\pi > \pi$.

- $arc\cos(-\frac{1}{2}) = \frac{2}{3}\pi$; $arc\cos 0 = \frac{\pi}{2}$;
- $arc\cos\frac{3}{8} \simeq 67°58'32''$; $arc\cos(-0{,}9) \simeq 154°9'29''$;
- $arc\,cos(-\frac{3}{2})$ non esiste, perché il coseno non può assumere valori minori di -1 .

◆ L'inversa della funzione tangente

Anche la funzione tangente, se viene definita per ogni valore reale di x con l'esclusione degli angoli di ampiezza $x = \frac{\pi}{2} + k\pi$, non è biunivoca, e quindi la sua inversa non è una funzione.

Ad esempio, agli angoli $x_1 = \frac{\pi}{3}$ e $x_2 = \frac{4}{3}\pi$ corrisponde la stessa tangente $y = \sqrt{3}$, e lo stesso avviene per tutti gli angoli della forma $x = \frac{\pi}{3} + k\pi$.

Di conseguenza, la relazione inversa della tangente fa corrispondere ad un dato valore della tangente (variabile y) infiniti valori distinti dell'angolo (variabile x).

Per fare in modo che la funzione $y=tg\,x$ sia invertibile, dobbiamo restringerla ad un dominio sul quale essa sia monotòna, e quindi biunivoca.

Per convenzione, prendiamo come dominio l'intervallo $-\frac{\pi}{2}<x<\frac{\pi}{2}$.

La funzione inversa della tangente è detta **arco tangente**, e viene indicata $y=arc\,tg\,x$.

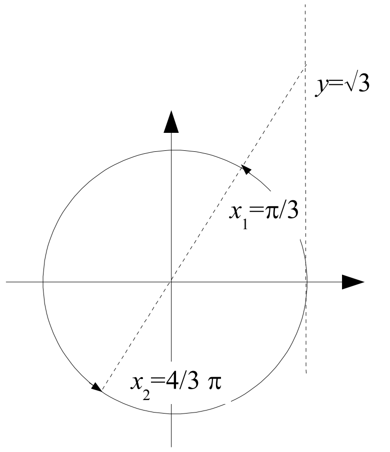


Fig. 8 La funzione y=tg x non è iniettiva

Come in precedenza, per ottenere il grafico della funzione $y=arc\,tg\,x$, partiamo da quello della funzione $y=tg\,x$, eseguiamo la restrizione all'intervallo $-\pi/2<x<\pi/2$ ed eseguiamo la simmetria rispetto alla bisettrice del primo e del terzo quadrante (fig. 9).

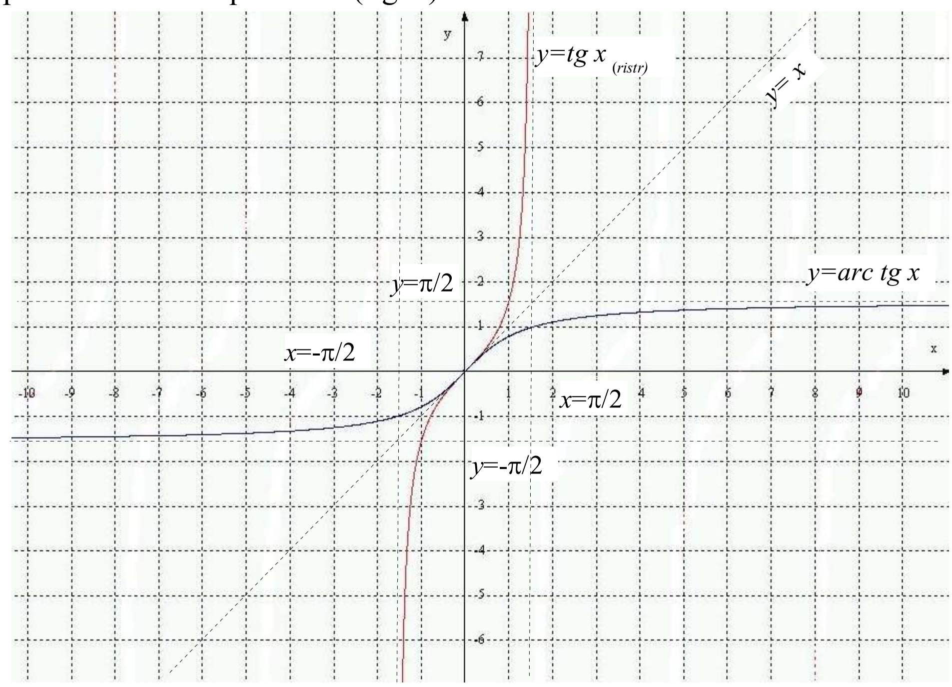


Fig. 9 Restrizione della funzione y=tg x per -π/2<x<π/2 (in rosso) e sua funzione inversa y=arc tg x (in blu)

Possiamo quindi osservare che:

- il dominio della funzione $y=arc\,tg\,x$ è l'insieme dei numeri reali, che corrisponde al codominio della funzione $y=tg\,x$;
- il codominio della funzione $y=arc\,tg\,x$ è l'intervallo $-\frac{\pi}{2}<y<\frac{\pi}{2}$, che corrisponde al dominio della funzione $y=tg\,x_{(ristr)}$;
- la funzione $y=arc\,tg\,x$ è crescente, come lo era la funzione $y=tg\,x$ nell'intervallo in cui abbiamo eseguito la restrizione.

Esempi:

- $arc\,tg\,\sqrt{3}=\frac{\pi}{3}$ perché $tg\frac{\pi}{3}=\sqrt{3}$ e $-\frac{\pi}{2}<\frac{\pi}{3}<\frac{\pi}{2}$.

  Osserva che sarebbe un errore scrivere $arc\,tg\,\sqrt{3}=\frac{4}{3}\pi$, perché $\frac{4}{3}\pi>\frac{\pi}{2}$.

- $arc\,tg\,1=\frac{\pi}{4}$; $arc\,tg\,(-\frac{\sqrt{3}}{3})=-\frac{\pi}{6}$;

- $arc\,tg\,13\simeq 85°36'5''$.

◆ Equazioni goniometriche elementari

Diciamo che un'equazione è *goniometrica* quando l'incognita compare nell'argomento di una funzione goniometrica. Se poi l'equazione goniometrica può essere scritta in una delle seguenti forme:

$sen\,x=k$, $cos\,x=k$ o $tg\,x=k$,

dove k è un numero reale, allora diciamo che essa è *elementare.*

Esempio 1

Consideriamo l'equazione goniometrica elementare $sen\,x=\frac{1}{2}$.

Ci viene chiesto quali sono gli angoli il cui seno è uguale ad 1/2. Cerchiamo prima le soluzioni che appartengono all'intervallo $0\leq x\leq 2\pi$. In termini geometrici, poiché $sen\,\alpha=y_P$, stiamo cercando i punti della circonferenza goniometrica che hanno ordinata uguale ad 1/2, ovvero i punti di intersezione tra la circonferenza goniometrica e la retta di equazione $y=1/2$.

Indicando $\alpha=arc\,sen\frac{1}{2}=\frac{\pi}{6}$, vediamo che l'equazione ammette due soluzioni, che corrispondono agli angoli supplementari:

$x_1=\alpha=\frac{\pi}{6}$ e $x_2=\pi-\alpha=\frac{5}{6}\pi$.

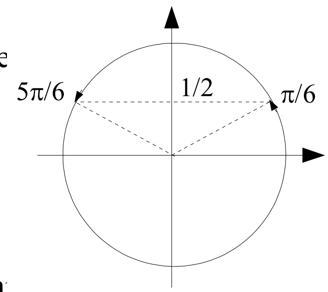


Fig. 10 sen x=1/2

Se, come faremo in generale, vogliamo risolvere l'equazione data per ogni valore reale dell'incognita *x*, allora, essendo la funzione seno periodica di periodo 2π, vediamo che le soluzioni sono infinite, e possono essere scritte nella forma:

$$x=\frac{\pi}{6}+2k\pi \quad \text{e} \quad x=\frac{5}{6}\pi+2k\pi \quad , \quad \forall k\in\mathbb{Z} \quad ,$$

nella quale k può assumere tutti i possibili valori interi positivi o negativi.

Scriviamo come esempio alcune di tali soluzioni:

- per $k=0$: $x_1=\frac{\pi}{6};\quad x_2=\frac{5}{6}\pi$;

- per $k=1$: $x_3=\frac{\pi}{6}+2\pi=\frac{13}{6}\pi$; $x_4=\frac{5}{6}\pi+2\pi=\frac{17}{6}\pi$;
- per $k=-1$: $x_5=\frac{\pi}{6}-2\pi=-\frac{11}{6}\pi$; $x_6=\frac{5}{6}\pi-2\pi=-\frac{7}{6}\pi$;
- per $k=2$: $x_7=\frac{\pi}{6}+4\pi=\frac{25}{6}\pi$; $x_8=\frac{5}{6}\pi+4\pi=\frac{29}{6}\pi$;
- per $k=-2$: $x_9=\frac{\pi}{6}-4\pi=-\frac{23}{6}\pi$; $x_{10}=\frac{5}{6}\pi-4\pi=-\frac{19}{6}\pi$;

e così via.

Per visualizzare le soluzioni dell'equazione data, anziché ricorrere alla circonferenza goniometrica, avremmo potuto utilizzare il grafico della funzione $y=sen\,x$.

Infatti, l'equazione $sen\,x=1/2$ è equivalente al sistema:

$$\begin{cases} y=sen\,x \\ y=1/2 \end{cases} .$$

Le soluzioni dell'equazione sono quindi le ascisse dei punti di intersezione tra la sinusoide e la retta parallela all'asse x di equazione $y=1/2$ (fig. 11).

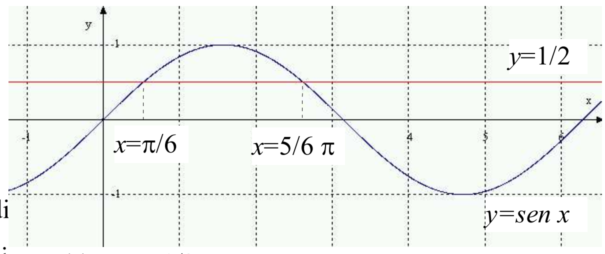


Fig. 11 sen x=1/2

Esempio 2

Consideriamo l'equazione goniometrica elementare $sen\,x=-\frac{\sqrt{2}}{2}$.

Conviene partire dall'equazione $sen\,x=+\sqrt{2}/2$, una soluzione della quale è:

$$\alpha=arc\,sen\frac{\sqrt{2}}{2}=\frac{\pi}{4} .$$

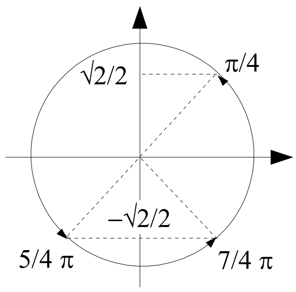


Fig. 12 $sen\,x=-\sqrt{2}/2$

Dalla circonferenza goniometrica vediamo che, nell'intervallo $0\leq x\leq 2\pi$, l'equazione data ammette due soluzioni, appartenenti rispettivamente al terzo e al quarto quadrante, e precisamente:

$$x_1=\pi+\alpha=\frac{5}{4}\pi; \quad x_2=2\pi-\alpha=\frac{7}{4}\pi .$$

Ricordando che la funzione seno è periodica con periodo 2π, possiamo scrivere tutte le soluzioni reali dell'equazione nella forma:

$$x=\frac{5}{4}\pi+2k\pi; \quad x=\frac{7}{4}\pi+2k\pi; \quad \forall k\in\mathbb{Z} .$$

Possiamo arrivare alle stesse conclusioni (forse con più difficoltà) anche utilizzando la sinusoide per risolvere il sistema: $\begin{cases} y=sen\,x \\ y=-\sqrt{2}/2 \end{cases}$ (fig. 13).

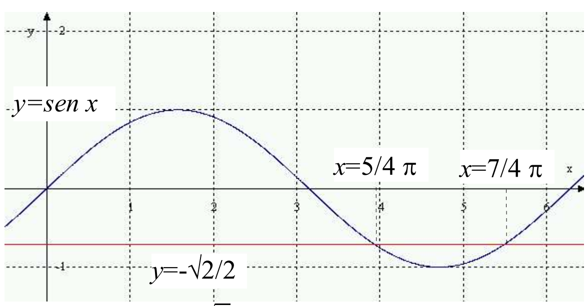
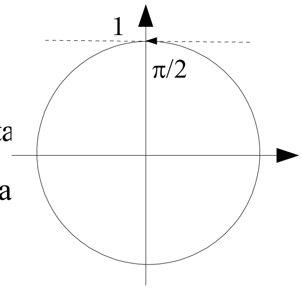


Fig. 13 $sen\,x=-\sqrt{2}/2$

Esempio 3

Risolviamo l'equazione goniometrica elementare $sen\, x=1$.



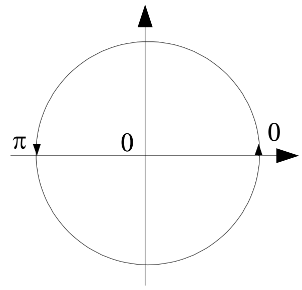
La circonferenza goniometrica ha un unico punto di intersezione con la retta di equazione $y=1$; quindi nell'intervallo $0\leq x\leq 2\pi$ l'equazione data ammette l'unica soluzione $x=\pi/2$.

Le infinite soluzioni reali dell'equazione sono: $x=\frac{\pi}{2}+2k\pi;\quad \forall k\in\mathbb{Z}$.

Fig. 14 $sen\, x=1$

Esempio 4

Risolviamo l'equazione goniometrica elementare $sen\, x=0$.



Ci viene richiesto di determinare le intersezioni della circonferenza goniometrica con l'asse delle ascisse, di equazione $y=0$.

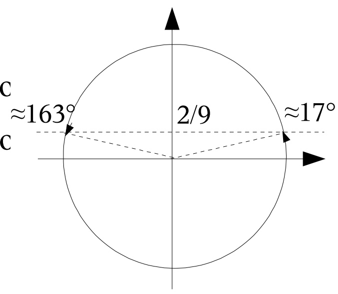
Abbiamo due punti di intersezione, corrispondenti agli angoli $x_1=0$ e $x_2=\pi$, per cui l'equazione possiede le infinite soluzioni reali: $x=0+2k\pi;\quad x=\pi+2k\pi$, che si possono scrivere nella forma più compatta: $x=k\pi;\quad \forall k\in\mathbb{Z}$.

Fig. 15 sen x=0

Osserva che nell'intervallo $0\leq x\leq 2\pi$ l'equazione data possiede *tre* soluzioni: $x_1=0$, $x_2=\pi$, $x_3=2\pi$.

Esempio 5

Risolviamo l'equazione goniometrica elementare $sen\, x=\frac{2}{7}$.



In questo caso l'angolo del primo quadrante il cui seno è 2/7 non è un angolo notevole, per cui possiamo soltanto determinarne un valore approssimato con la calcolatrice.

Le soluzioni nell'intervallo $0°\leq x\leq 360°$ possono essere scritte:

$x_1=arc\,sen\frac{2}{7}\approx 17°$; $x_2=180°-arc\,sen\frac{2}{7}\approx 163°$.

Fig. 16 sen x=2/7

Le infinite soluzioni reali sono: $x=arc\,sen\frac{2}{7}+k\,360°;\quad x=180°-arc\,sen\frac{2}{7}+k\,360°;\quad \forall k\in\mathbb{Z}$.

Esempio 6

Consideriamo l'equazione goniometrica elementare $cos\, x=\frac{\sqrt{3}}{2}$.

In questo caso, poiché $cos\,\alpha=x_P$, vogliamo determinare i punti della circonferenza goniometrica che hanno ascissa uguale a $\sqrt{3}/2$, ovvero i punti di intersezione tra la circonferenza goniometrica e la retta di equazione $x=\sqrt{3}/2$.

Vediamo che esistono due punti di intersezione, che corrispondono agli angoli opposti $x_1=\frac{\pi}{6}$ e $x_2=-\frac{\pi}{6}$.

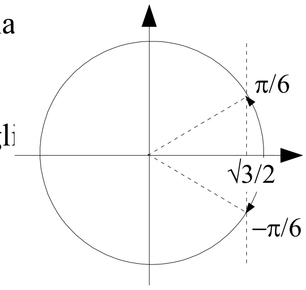


Fig. 17 $\cos x=\sqrt{3}/2$

Le infinite soluzioni reali dell'equazione possono quindi essere scritte:

$$x=\pm\frac{\pi}{6}+2k\pi;\quad \forall k\in\mathbb{Z}\ .$$

Nell'intervallo $0\le x\le 2\pi$ l'equazione possiede le soluzioni $x_1=\frac{\pi}{6}$ e $x_2=\frac{11}{6}\pi$.

Se preferiamo utilizzare il grafico della funzione $y=\cos x$, osserviamo che l'equazione data è equivalente al sistema:

$$\begin{cases} y=\cos x \\ y=\sqrt{3}/2 \end{cases} .$$

Le soluzioni dell'equazione sono quindi le ascisse dei punti di intersezione tra la cosinusoide e la retta parallela all'asse x di equazione $y=\sqrt{3}/2$ (fig. 18).

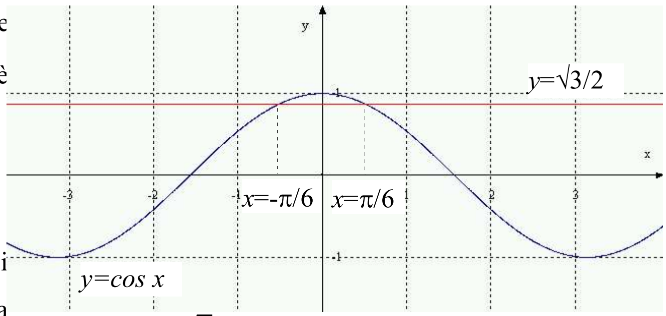


Fig. 18 $\cos x=\sqrt{3}/2$

Esempio 7

Risolviamo l'equazione goniometrica elementare $\cos x=0$.

Ci viene richiesto di determinare le intersezioni della circonferenza goniometrica con l'asse delle ordinate, di equazione $x=0$.

Abbiamo due punti di intersezione, corrispondenti agli angoli opposti $x_1=\frac{\pi}{2}$ e $x_2=-\frac{\pi}{2}$, per cui l'equazione possiede le infinite soluzioni reali: $x=\pm\frac{\pi}{2}+2k\pi$, che si possono scrivere nella forma più compatta:

$$x=\frac{\pi}{2}+k\pi;\quad \forall k\in\mathbb{Z}\ .$$

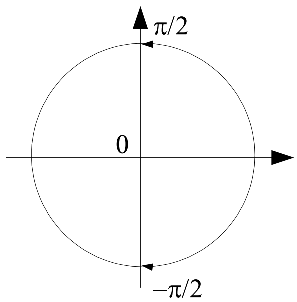


Fig. 19 cos x=0

Nell'intervallo $0\le x\le 2\pi$ l'equazione possiede le soluzioni $x_1=\frac{\pi}{2}$ e $x_2=\frac{3}{2}\pi$.

Esempio 8

Risolviamo l'equazione goniometrica elementare $\cos x=\frac{3}{8}$.

In questo caso l'angolo del primo quadrante il cui coseno è 3/8 non è un angolo notevole, per cui possiamo soltanto determinarne un valore approssimato con la calcolatrice.

Poiché $arc\cos\frac{3}{8}\approx 68°$, tutte le infinite soluzioni reali dell'equazione data possono essere espresse come: $x=\pm arc\cos\frac{3}{8}+k\,360°;\quad \forall k\in\mathbb{Z}$.

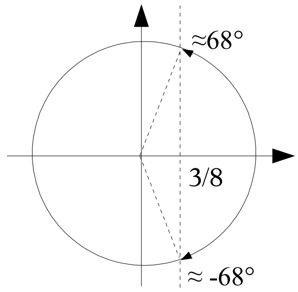


Fig. 20 cos x=3/8

Le soluzioni nell'intervallo $0°\le x\le 360°$ sono:

$x_1=arc\cos\frac{3}{8}\approx 68°$ e $x_2=360°-arc\cos\frac{3}{8}\approx 292°$.

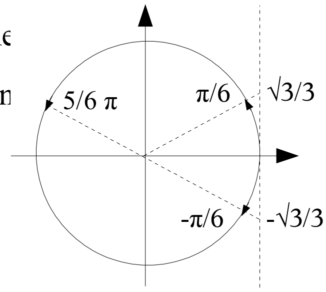
Esempio 9

Risolviamo l'equazione goniometrica elementare $tg\,x=-\frac{\sqrt{3}}{3}$.

E' conveniente considerare l'equazione $tg\,x=+\frac{\sqrt{3}}{3}$, una soluzione della quale è: $x=arc\,tg\frac{\sqrt{3}}{3}=\frac{\pi}{6}$.

Dalla circonferenza goniometrica vediamo che una soluzione dell'equazione data è $x=-\pi/6$. Ricordando che la funzione tangente è periodica con periodo π radianti, otteniamo le infinite soluzioni:

$x=-\frac{\pi}{6}+k\pi;\quad \forall k\in\mathbb{Z}$.



Nell'intervallo $0\le x\le 2\pi$ l'equazione possiede le soluzioni $x_1=\frac{5}{6}\pi$ e $x_2=\frac{11}{6}\pi$.

Fig. 21 $tg\,x=-\sqrt{3}/3$

Esempio 10

Risolviamo l'equazione goniometrica elementare $tg\,x=1{,}28$.

In questo caso l'angolo del primo quadrante la cui tangente è uguale a 1,28 non è un angolo notevole, per cui possiamo soltanto determinarne un valore approssimato con la calcolatrice.

Poiché $arc\,tg\,1{,}28\approx 52°$, tutte le infinite soluzioni reali dell'equazione data possono essere espresse come:

$x=arc\,tg\,1{,}28+k\,180°;\quad \forall k\in\mathbb{Z}$.

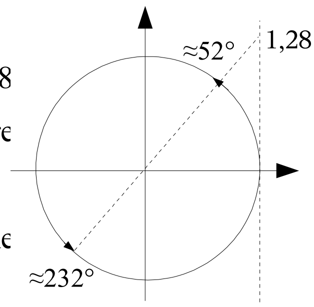


Fig. 22 tg x=1,28

Le soluzioni nell'intervallo $0°\le x\le 360°$ sono: $x_1=arc\,tg\,1{,}28\approx 52°;$ $x_2=180°+arc\,tg\,1{,}28\approx 232°$.

Esempio 11

Le equazioni $sen\,x=2$ o $\cos x=\sqrt{3}$ non ammettono soluzioni, in quanto non esistono punti della circonferenza goniometrica aventi ordinata $y_P=2$ o ascissa $x_P=\sqrt{3}$.

Infatti, la circonferenza goniometrica non ha punti di intersezione con le rette di equazione $y=2$ o $x=\sqrt{3}$.

Osserviamo quindi che:

- l'equazione elementare $tg\, x=k$ ammette soluzioni per qualunque valore reale della costante k;
- le equazioni elementari $sen\, x=k$ e $cos\, x=k$, invece, ammettono soluzioni solo se la costante k ha un valore compreso tra -1 e +1, in quanto il codominio delle funzioni seno e coseno è l'intervallo $-1\leq y\leq 1$.

◆ Equazioni riconducibili a elementari tramite una sostituzione

Esempio 1

Risolviamo l'equazione goniometrica *non* elementare $sen\left(2x+\frac{\pi}{4}\right)=\frac{\sqrt{3}}{2}$.

Indichiamo l'argomento della funzione seno con una incognita ausiliaria imponendo $2x+\frac{\pi}{4}=\alpha$.

Possiamo quindi risolvere l'equazione elementare $sen\,\alpha=\frac{\sqrt{3}}{2}$.

Procedendo come nel paragrafo precedente, ricaviamo che le soluzioni nella incognita α sono: $\alpha_1=\frac{\pi}{3}+2k\pi\,;\quad \alpha_2=\frac{2}{3}\pi+2k\pi$.

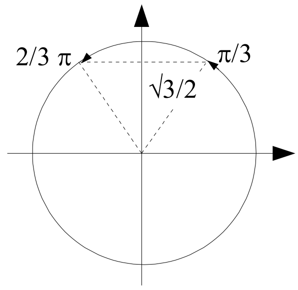


Fig. 23 $sen\,\alpha=\sqrt{3}/2$

A questo punto sostituiamo al posto di α la sua espressione $2x+\frac{\pi}{4}$ e ricaviamo l'incognita x da entrambe le uguaglianze:

- $2x+\frac{\pi}{4}=\frac{\pi}{3}+2k\pi \quad\Rightarrow\quad 2x=\frac{\pi}{12}+2k\pi \quad\Rightarrow\quad x=\frac{\pi}{24}+k\pi$;
- $2x+\frac{\pi}{4}=\frac{2}{3}\pi+2k\pi \quad\Rightarrow\quad 2x=\frac{5}{12}\pi+2k\pi \quad\Rightarrow\quad x=\frac{5}{24}\pi+k\pi$.

Le soluzioni sono quindi: $x_1=\frac{\pi}{24}+k\pi\,;\quad x_2=\frac{5}{24}\pi+k\pi \quad \forall k\in\mathbb{Z}$.

Osservazione. Il fatto che le soluzioni siano della forma $x_0+k\pi$ ci avverte che il periodo della funzione seno in questo caso non è 2π , come siamo abituati a pensare, ma semplicemente π. Questo avviene perché l'equazione data conteneva $sen(2x)$, anziché semplicemente $sen\, x$. Potremmo dimostrare in generale che:

- le funzioni $y=sen(kx)$ e $y=cos(kx)$ hanno periodo $T=\frac{2\pi}{k}$; ovvero, nell'intervallo $0\leq x\leq 2\pi$ compiono k oscillazioni complete, anziché una sola.
- la funzione $y=tg(kx)$ ha periodo $T=\frac{\pi}{k}$; ovvero, nell'intervallo $0\leq x\leq \pi$ compie k oscillazioni complete, anziché una sola.

Quindi, nell'intervallo $0\leq x\leq 2\pi$ l'equazione data ammette le quattro soluzioni:

$x_1 = \frac{\pi}{24}; \quad x_2 = \frac{5}{24}\pi; \quad x_3 = \frac{13}{24}\pi; \quad x_4 = \frac{17}{24}\pi$

che si ottengono dalla soluzione generale in corrispondenza dei valori $k=0$ e $k=1$.

Esempio 2

Risolviamo l'equazione *non* elementare $2\,sen(3x-30°)+\sqrt{3}=0$.

Sostituendo $\alpha=3x-30°$, otteniamo l'equazione elementare:

$sen\,\alpha = -\frac{\sqrt{3}}{2}$, le cui soluzioni sono:

$\alpha_1 = 240° + k\,360°; \quad \alpha_2 = 300° + k\,360°$.

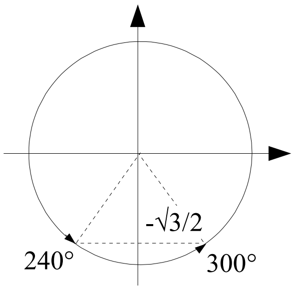


Fig. 24 $sen\,\alpha=-\sqrt{3}/2$

Sostituendo nuovamente $3x-30°$ al posto di α, ricaviamo:

- $3x-30°=240°+k\,360° \Rightarrow 3x=270°+k\,360° \Rightarrow x=90°+k\,120°$;
- $3x-30°=300°+k\,360° \Rightarrow 3x=330°+k\,360° \Rightarrow x=110°+k\,120°$.

Tutte le soluzioni reali sono quindi: $x_1=90°+k\,120°; \quad x_2=110°+k\,120° \quad \forall k \in \mathbb{Z}$.

Poiché la funzione $y=sen(3x)$ ha periodo 120°, nell'intervallo $0° \le x \le 360°$ l'equazione possiede le sei soluzioni:

$x_1=90°; \quad x_2=110°; \quad x_3=210°; \quad x_4=230°; \quad x_5=330°; \quad x_6=350°$

che si ottengono in corrispondenza dei valori $k=0,1,2$.

◆ Disequazioni goniometriche elementari

Chiamiamo *disequazioni goniometriche elementari* quelle che si presentano in una delle forme:

$sen\,x > k$, $cos\,x < k$, $tg\,x \ge k$ o analoghe, dove *k* è un qualunque numero reale.

Esempio 1

Risolviamo la disequazione $2\,sen\,x - \sqrt{3} > 0$.

Si tratta di una disequazione elementare, in quanto si può portare nella forma: $sen\,x > \frac{\sqrt{3}}{2}$.

Risolviamo prima l'equazione associata $sen\,x = \frac{\sqrt{3}}{2}$ che, nell'intervallo $0 \le x \le 2\pi$, ammette le soluzioni $x_1 = \frac{\pi}{3}$ e $x_2 = \frac{2}{3}\pi$.

Chiedere quali angoli hanno il seno maggiore di $\sqrt{3}/2$ equivale a cercare i punti della circonferenza goniometrica che hanno un'ordinata $y_P > \sqrt{3}/2$.

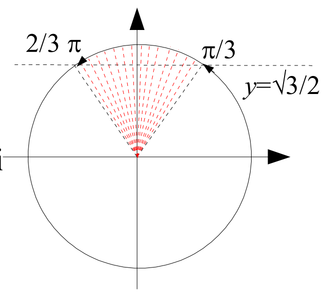


Fig. 25 $sen\,x > \sqrt{3}/2$

Dalla fig. 25 vediamo che questo avviene per: $\frac{\pi}{3} < x < \frac{2}{3}\pi$.

Tenendo conto del fatto che la funzione seno ha periodo 2π , scriviamo tutte le soluzioni reali della disequazione data nella forma:

$$\frac{\pi}{3}+2k\pi<x<\frac{2}{3}\pi+2k\pi \quad .$$

Se preferiamo utilizzare il grafico della funzione $y=sen\,x$, interpretiamo la disequazione data come la ricerca dei valori di x per i quali la sinusoide si trova "al di sopra" della retta parallela all'asse delle ascisse di equazione $y=\sqrt{3}/2$.

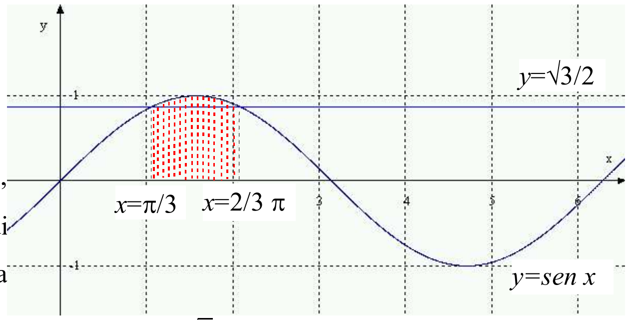


Fig. 26 $sen\,x>\sqrt{3}/2$

Il ragionamento precedente fornisce anche la soluzione della disequazione $sen\,x<\sqrt{3}/2$. In questo caso, cerchiamo i punti della circonferenza goniometrica aventi ordinata $y_P<\sqrt{3}/2$, ovvero i valori di x per i quali la sinusoide si trova "al di sotto" della retta parallela all'asse delle ascisse di equazione $y=\sqrt{3}/2$.

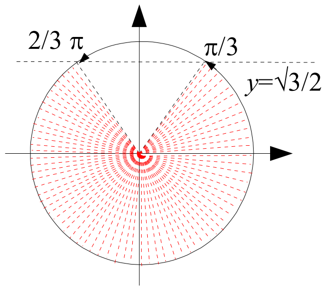


Fig. 27 $sen\,x<\sqrt{3}/2$

Osserviamo che, se vogliamo prendere, come al solito, l'intervallo dei valori $0\leq x\leq 2\pi$ come intervallo "base", dobbiamo scrivere la soluzione generale come unione di due intervalli disgiunti:

$$2k\pi\leq x<\frac{\pi}{3}+2k\pi \quad \text{oppure} \quad \frac{2}{3}\pi+2k\pi<x\leq 2\pi+2k\pi \quad .$$

Se, invece, scegliamo come intervallo "base" quello dei valori $-\frac{3}{2}\pi\leq x\leq\frac{\pi}{2}$, possiamo descrivere la soluzione sotto forma di un unico intervallo:

$$-\frac{4}{3}\pi+2k\pi<x<\frac{2}{3}\pi+2k\pi \quad .$$

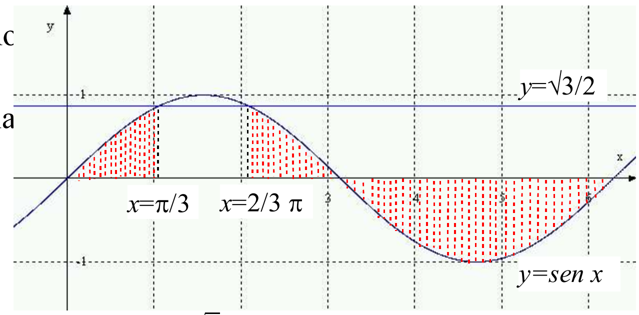


Fig. 28 $sen\,x<\sqrt{3}/2$

Infine, se nelle disequazioni è presente anche il simbolo di uguaglianza, è sufficiente unire le soluzioni dell'equazione associata agli intervalli già determinati:

- $sen\,x\geq\frac{\sqrt{3}}{2} \quad \Rightarrow \quad \frac{\pi}{3}+2k\pi\leq x\leq\frac{2}{3}\pi+2k\pi$;
- $sen\,x\leq\frac{\sqrt{3}}{2} \quad \Rightarrow \quad 2k\pi\leq x\leq\frac{\pi}{3}+2k\pi \;\; o \;\; \frac{2}{3}\pi+2k\pi\leq x\leq 2\pi+2k\pi$, oppure: $-\frac{4}{3}\pi+2k\pi\leq x\leq\frac{2}{3}\pi+2k\pi$.

Esempio 2

Risolviamo la disequazione $2\cos x+\sqrt{3}<0$.

Si tratta di una disequazione elementare, in quanto si può portare nella forma: $\cos x<-\frac{\sqrt{3}}{2}$.

Risolviamo prima l'equazione associata $\cos x = -\frac{\sqrt{3}}{2}$ che, nell'intervallo $0 \le x \le 2\pi$, ammette le soluzioni $x_1 = \frac{5}{6}\pi$ e $x_2 = \frac{7}{6}\pi$.

Chiedere quali angoli hanno il coseno minore di $-\sqrt{3}/2$ equivale a cercare i punti della circonferenza goniometrica che hanno un'ascissa $x_P < -\sqrt{3}/2$.

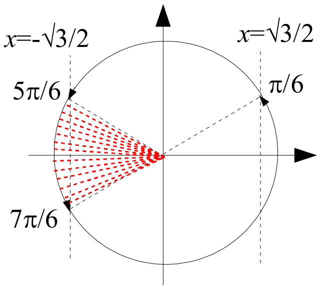


Fig. 29 $\cos x < -\sqrt{3}/2$

Dalla fig. 29 vediamo che questo avviene per: $\frac{5}{6}\pi < x < \frac{7}{6}\pi$.

Tenendo conto del fatto che la funzione coseno ha periodo 2π , scriviamo tutte le soluzioni reali della disequazione data nella forma: $\frac{5}{6}\pi + 2k\pi < x < \frac{7}{6}\pi + 2k\pi$.

Se preferiamo utilizzare il grafico della funzione $y = \cos x$, interpretiamo la disequazione data come la ricerca dei valori di *x* per i quali la cosinusoide si trova “al di sotto” della retta parallela all'asse delle ascisse di equazione $y = -\sqrt{3}/2$.

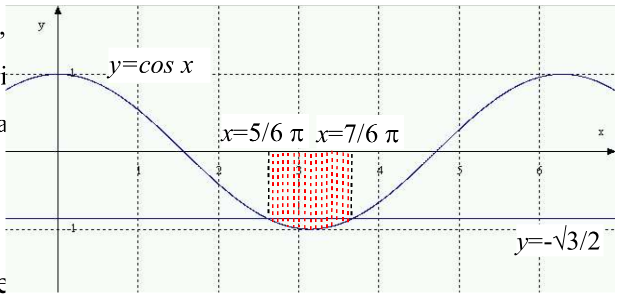


Fig. 30

Il metodo precedente fornisce anche le soluzioni delle disequazioni associate:

- $\cos x > -\frac{\sqrt{3}}{2} \quad \Rightarrow \quad 2k\pi \le x < \frac{5}{6}\pi + 2k\pi \;\; o \;\; \frac{7}{6}\pi + 2k\pi < x \le 2\pi + 2k\pi$, oppure: $-\frac{5}{6}\pi + 2k\pi < x < \frac{7}{6}\pi + 2k\pi$;
- $\cos x \le -\frac{\sqrt{3}}{2} \quad \Rightarrow \quad \frac{5}{6}\pi + 2k\pi \le x \le \frac{7}{6}\pi + 2k\pi$;
- $\cos x \ge -\frac{\sqrt{3}}{2} \quad \Rightarrow \quad 2k\pi \le x \le \frac{5}{6}\pi + 2k\pi \;\; o \;\; \frac{7}{6}\pi + 2k\pi \le x \le 2\pi + 2k\pi$, oppure: $-\frac{5}{6}\pi + 2k\pi \le x \le \frac{7}{6}\pi + 2k\pi$.

Esempio 3

Risolviamo la disequazione $tg\, x - \sqrt{3} > 0$.

Si tratta di una disequazione elementare, in quanto si può portare nella forma: $tg\, x > \sqrt{3}$.

Risolviamo prima l'equazione associata $tg\, x = \sqrt{3}$ che, nell'intervallo $0 \le x \le \pi$, ammette la soluzione $x_1 = \frac{\pi}{3}$.

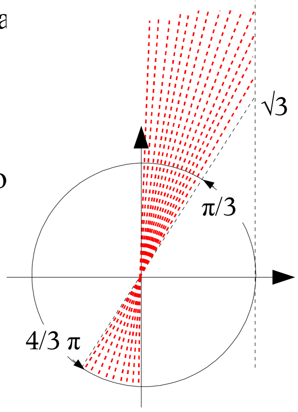


Fig. 31 $tg\,x > \sqrt{3}$

Utilizzando la circonferenza goniometrica per cercare quali angoli hanno una tangente maggiore di $\sqrt{3}$, vediamo che questo avviene per $\frac{\pi}{3} < x < \frac{\pi}{2}$.

Tenendo conto del fatto che la funzione tangente ha periodo π , scriviamo tutte le soluzioni reali della disequazione data nella forma:

$$\frac{\pi}{3} + k\pi < x < \frac{\pi}{2} + k\pi \quad .$$

Scriviamo anche le soluzioni delle disequazioni associate:

- $tg\,x < \sqrt{3} \quad \Rightarrow \quad k\pi \leq x < \frac{\pi}{3} + k\pi \quad o \quad \frac{\pi}{2} + k\pi < x \leq \pi + k\pi$, oppure:

  $-\frac{\pi}{2} + k\pi < x < \frac{\pi}{3} + k\pi$;

- $tg\,x \geq \sqrt{3} \quad \Rightarrow \quad \frac{\pi}{3} + k\pi \leq x < \frac{\pi}{2} + k\pi$;

- $tg\,x \leq \sqrt{3} \quad \Rightarrow \quad k\pi \leq x \leq \frac{\pi}{3} + k\pi \quad o \quad \frac{\pi}{2} + k\pi < x \leq \pi + k\pi$, oppure:

  $-\frac{\pi}{2} + k\pi < x \leq \frac{\pi}{3} + k\pi$.

Esercizi su equazioni e disequazioni goniometriche

Risolvi in $\mathbb{R}$ le seguenti equazioni goniometriche elementari:

1. $sen\,x=0$; $\cos x=0$ $\quad R: x=k\pi\,;\, x=\frac{\pi}{2}+k\pi$

2. $\cos x=1$; $sen\,x=1$ $\quad R: x=2k\pi\,;\, x=\frac{\pi}{2}+k\pi$

3. $sen\,x=-1$; $\cos x=-1$ $\quad R: x=\frac{3}{2}\pi+2k\pi\,;\, x=\pi+2k\pi$

4. $sen\,x=\sqrt{2}$; $\cos x=-\sqrt{3}$ $\quad R: \emptyset\,;\,\emptyset$

5. $sen\,x=\frac{1}{2}$ $\quad R: x=\frac{\pi}{6}+2k\pi\,,\, x=\frac{5}{6}\pi+2k\pi$

6. $\cos x=\frac{1}{2}$; $\cos x=-\frac{1}{2}$ $\quad R: x=\pm\frac{\pi}{3}+2k\pi\,;\, x=\pm\frac{2}{3}\pi+2k\pi$

7. $sen\,x=-\frac{1}{2}$ $\quad R: x=\frac{7}{6}\pi+2k\pi\,,\, x=-\frac{\pi}{6}+2k\pi$

8. $sen\,x=\frac{\sqrt{2}}{2}$ $\quad R: \frac{\pi}{4}+2k\pi\,;\, x=\frac{3}{4}\pi+2k\pi$

9. $sen\,x=-\frac{\sqrt{2}}{2}$ $\quad R: x=\frac{5}{4}\pi+2k\pi\,;\, x=\frac{7}{4}\pi+2k\pi$

10. $\cos x=\frac{\sqrt{3}}{2}$; $\cos x=-\frac{\sqrt{3}}{2}$ $\quad R: x=\pm\frac{\pi}{6}+2k\pi\,;\, x=\pm\frac{5}{6}\pi+2k\pi$

11. $tg\,x=\sqrt{3}$; $tg\,x=-1$ $\quad R: x=\frac{\pi}{3}+k\pi\,;\, x=-\frac{\pi}{4}+k\pi$

Risolvi nell'intervallo $[0,2\pi]$:

12. $2\,sen(x+\frac{5}{6}\pi)=-\sqrt{2}$ $\quad R: x_1=\frac{5}{12}\pi\,,\, x_2=\frac{11}{12}\pi$

13. $2\,sen\,3x=1$ $\quad R: x_1=\frac{\pi}{18}\,,\, x_2=\frac{5}{18}\pi\,,\, x_3=\frac{13}{18}\pi\,,\, x_4=\frac{17}{18}\pi\,,\, x_5=\frac{25}{18}\pi\,,\, x_6=\frac{29}{18}\pi$

14. $2\,sen\,2x+1=0$ $\quad R: x_1=\frac{7}{12}\pi\,,\, x_2=\frac{11}{12}\pi\,,\, x_3=\frac{19}{12}\pi\,,\, x_4=\frac{23}{12}\pi$

15. $sen(x+\frac{\pi}{4})=\frac{\sqrt{3}}{2}$ $\quad R: x_1=\frac{\pi}{12}\,,\, x_2=\frac{5}{12}\pi$

16. $2\,sen(\frac{6x-\pi}{3})=\sqrt{3}$ $\quad R: x_1=\frac{\pi}{3}\,,\, x_2=\frac{\pi}{2}\,,\, x_3=\frac{4}{3}\pi\,,\, x_4=\frac{3}{2}\pi$

17. $2\,sen(x+\frac{\pi}{12})-\sqrt{2}=0$ $\qquad R: x_1=\frac{\pi}{6}, x_2=\frac{2}{3}\pi$

18. $2\cos\frac{x}{2}-1=0$ $\qquad R: x=\frac{2}{3}\pi$

19. $5\cos\frac{x}{3}=0$ $\qquad R: x=\frac{3}{2}\pi$

20. $4\cos\frac{2}{3}x=2\sqrt{3}$ $\qquad R: x=\frac{\pi}{4}$

21. $10\cos(2x-\frac{\pi}{6})=5\sqrt{3}$ $\qquad R: x_1=0, x_2=\frac{\pi}{6}, x_3=\pi, x_4=\frac{7}{6}\pi, x_5=2\pi$

22. $2+\cos(\frac{\pi}{4}-\frac{3}{2}x)=2$ $\qquad R: x_1=\frac{\pi}{2}, x_2=\frac{7}{6}\pi, x_3=\frac{11}{6}\pi$

23. $tg\,\frac{5}{8}x-1=0$ $\qquad R: x_1=\frac{2}{5}\pi, x_2=2\pi$

24. $tg(x+\frac{\pi}{3})+1=0$ $\qquad R: x_1=\frac{5}{12}\pi, x_2=\frac{17}{12}\pi$

25. $\sqrt{3}\,tg\frac{x}{2}=-3$ $\qquad R: x=\frac{4}{3}\pi$

Risolvi nell'intervallo $[0°, 360°]$:

26. $2\,sen(x+150°)=-\sqrt{2}$ $\qquad R: x_1=75°, x_2=165°$

27. $sen\,2x=\frac{\sqrt{3}}{2}$ $\qquad R: x_1=30°, x_2=60°, x_3=210°, x_4=240°$

28. $\sqrt{2}\,sen(x+17°)-1=0$ $\qquad R: x_1=28°, x_2=118°$

29. $\cos 3x=\frac{1}{2}$ $\qquad R: 20°, 100°, 140°, 220°, 260°, 340°$

30. $sen(\frac{5}{3}x+4°)+\frac{\sqrt{2}}{2}=0$ $\qquad R: x_1=132°36', x_2=186°36'$

31. $sen(\frac{x}{2}+2°)=1$ $\qquad R: x=176°$

32. $tg\,4x=\sqrt{3}$ $\qquad R: 15°, 60°, 105°, 150°, 195°, 240°, 285°, 330°$

33. $8\,sen\,2x=-4$ $\qquad R: x_1=105°, x_2=165°, x_3=285°, x_4=345°$

34. $sen\frac{1}{3}x=1$ $\qquad R: 270°$

35. $\sqrt{2}\cos\frac{x}{3}=\frac{3}{\sqrt{6}}$ $\qquad R: x=90°$

36. $4\,tg(40°-x)-4\sqrt{3}=0$ $\qquad R: x_1=160°, x_2=340°$

37. $4\sqrt{3}\,tg(\frac{3}{4}x-25°)-4=0$ $\quad R: x_1=73°20', x_2=313°20'$

38. $tg\frac{1}{3}x=1$ $\quad R: 135°$

39. $\sqrt{3}\,tg(\frac{5x-60°}{6})=3$ $\quad R: x_1=84°, x_2=300°$

40. $\sqrt{2}\cos(2x-45°)+1=0$ $\quad R: 90°, 135°, 270°, 315°$

41. $tg(180°+3x)=1$ $\quad R: 15°, 75°, 135°, 195°, 255°, 315°$

42. $5+tg\frac{5}{3}x=5$ $\quad R: x_1=0°, x_2=108°, x_3=216°, x_4=324°$

43. $2\,sen(x+20°)+\sqrt{3}=0$ $\quad R: 220°, 280°$

44. $\cos(2x+15°)=\frac{1}{2}$ $\quad R: x_1=22°30', x_2=142°30'$

45. $sen\frac{1}{2}x=\frac{1}{2}$ $\quad R: x_1=60°, x_2=300°$

46. $\sqrt{3}\,tg(2x-20°)=1$ $\quad R: 25°, 115°, 205°, 295°$

Risolvi per $x\in\mathbb{R}$:

47. $sen(3x+\frac{\pi}{6})=\frac{\sqrt{2}}{2}$ $\quad R: x=\frac{\pi}{36}+\frac{2}{3}k\pi, x=\frac{7}{36}\pi+\frac{2}{3}k\pi$

48. $sen(2x+\frac{\pi}{10})=-\frac{\sqrt{3}}{2}$ $\quad R: x=\frac{37}{60}\pi+k\frac{\pi}{2}, x=\frac{47}{60}\pi+k\frac{\pi}{2}$

49. $\cos 3x-3=0$ $\quad R: \emptyset$

50. $sen(x+30°)+1=0$ $\quad R: x=240°+k\,360°$

51. $2\,sen(x-\frac{\pi}{3})-1=0$ $\quad R: x=\frac{\pi}{2}+2k\pi, x=\frac{7}{6}\pi+2k\pi$

52. $2\cos(x+\frac{\pi}{6})-1=0$ $\quad R: x=\frac{\pi}{6}+2k\pi, x=-\frac{\pi}{2}+2k\pi$

53. $sen(2x-\frac{\pi}{3})-1=0$ $\quad R: x=\frac{5}{12}\pi+k\pi$

54. $\cos(3x-\frac{\pi}{6})+1=0$ $\quad R: x=\frac{7}{18}\pi+\frac{2}{3}k\pi$

55. $tg\,4x-1=0$ $\quad R: x=135°+k\,180°$

56. $tg(2x-\frac{\pi}{2})=0$ $\quad R: x=\frac{\pi}{4}+k\frac{\pi}{2}$

57. $tg(2x-\frac{\pi}{3})=\sqrt{3}$ $\quad R: x=\frac{\pi}{3}+k\frac{\pi}{2}$

Risolvi le seguenti disequazioni goniometriche elementari:

58. $sen\,x > \frac{1}{2}$ $\qquad R: \frac{\pi}{6} + 2k\pi < x < \frac{5}{6}\pi + 2k\pi$

59. $\cos x > \frac{\sqrt{3}}{2}$ $\qquad R: -\frac{\pi}{6} + 2k\pi < x < \frac{\pi}{6} + 2k\pi$

60. $tg\,x > \sqrt{3}$ $\qquad R: \frac{\pi}{3} + k\pi < x < \frac{\pi}{2} + k\pi$

61. $sen\,x > \sqrt{2}$ $\qquad R: \emptyset$

62. $sen\,x < -\frac{\sqrt{2}}{2}$ $\qquad R: \frac{5}{4}\pi + 2k\pi < x < \frac{7}{4}\pi + 2k\pi$

63. $\cos x > -\sqrt{3}$ $\qquad R: \forall x \in \mathbb{R}$

64. $\cos x > -\frac{1}{2}$ $\qquad R: -\frac{2}{3}\pi + 2k\pi < x < \frac{2}{3}\pi + 2k\pi$

65. $\cos x \geq 1$ $\qquad R: x = 2k\pi$

66. $tg\,x > -1$ $\qquad R: -\frac{\pi}{4} + k\pi < x < \frac{\pi}{2} + k\pi$

67. $sen\,x < \frac{\sqrt{3}}{2}$ $\qquad R: -\frac{4}{3}\pi + 2k\pi < x < \frac{\pi}{3} + 2k\pi$

Risolvi nell'intervallo $[0, 2\pi]$:

68. $2\,sen\,x < 1$ $\qquad R: 0 \leq x < \frac{\pi}{6}$ *vel* $\frac{5}{6}\pi < x \leq 2\pi$

69. $\sqrt{2}\,sen\,x - 1 \geq 0$ $\qquad R: \frac{\pi}{4} \leq x \leq \frac{3}{4}\pi$

70. $2\,sen\,x + \sqrt{3} > 0$ $\qquad R: 0 \leq x < \frac{4}{3}\pi$ *vel* $\frac{5}{3}\pi < x \leq 2\pi$

71. $sen\,x - 1 < 0$ $\qquad R: \forall x \in [0, 2\pi], x \neq \frac{\pi}{2}$

72. $2\cos x - \sqrt{2} > 0$ $\qquad R: 0 \leq x < \frac{\pi}{4}$ *vel* $\frac{7}{4}\pi < x \leq 2\pi$

73. $\sqrt{2}\cos x + 1 < 0$ $\qquad R: \frac{3}{4}\pi < x < \frac{5}{4}\pi$

74. $3\,tg\,x - \sqrt{3} > 0$ $\qquad R: \frac{\pi}{6} < x < \frac{\pi}{2}$ *vel* $\frac{7}{6}\pi < x < \frac{3}{2}\pi$

75. $tg\,x > 1$ $\qquad R: 0 \leq x < \frac{\pi}{4}$ *vel* $\frac{\pi}{2} < x < \frac{5}{4}\pi$ *vel* $\frac{3}{2}\pi < x \leq 2\pi$