Geometria analitica: la retta

◆ Il piano cartesiano

Negli anni precedenti, abbiamo incontrato in varie occasioni delle nozioni di *geometria analitica*, che potremmo definire liberamente come quella parte della matematica in cui si mettono in corrispondenza (se possibile biunivoca) degli "oggetti" geometrici con altri che invece fanno parte del dominio dell'algebra.

In questo modo si hanno due vantaggi:

- in geometria, diventa possibile eseguire dimostrazioni e costruzioni in maniera più "meccanica", cioè svolgendo dei calcoli, anziché dover inventare un nuovo procedimento ogni volta che si affronta un problema diverso;
- in algebra, possiamo "visualizzare" certi risultati che altrimenti rimarrebbero piuttosto astratti. Ad esempio, un'equazione di primo grado in due incognite può essere associata ad una retta.

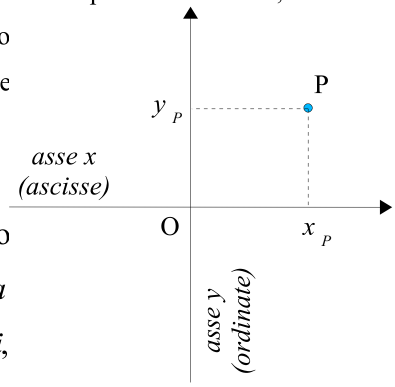

Fig. 1 Coordinate di un punto

Ricordiamo che, quando si fissa nel piano un sistema di riferimento di assi cartesiani ortogonali, si stabilisce una *corrispondenza biunivoca tra i punti del piano e le coppie ordinate di numeri reali*, ovvero:

- ad ogni punto P del piano corrisponde una coppia ordinata (x, y) di numeri reali;
- ad ogni coppia ordinata (x, y) di numeri reali corrisponde un punto *P* del piano.

I numeri x e y vengono detti *coordinate* del punto *P*, ed esattamente x è l'*ascissa* ed y l'*ordinata* di *P*, e si scrive: $P(x, y)$.

Nota: in matematica utilizzeremo quasi sempre la stessa unità di misura su entrambi gli assi cartesiani (*sistema monometrico*). Questa scelta renderà più semplici parecchie formule, ma nelle applicazioni pratiche, è spesso conveniente, o addirittura necessario, scegliere due diverse unità di misura per gli assi x e y: in tal caso, il sistema di riferimento si dice *dimetrico*. Pensa ad esempio ad un grafico spazio-tempo in fisica: l'unità sulle ascisse può rappresentare un secondo, ed è quindi diversa dall'unità sulle ordinate, che può indicare un metro.

Ricordiamo anche che gli assi coordinati dividono il piano in quattro parti chiamate *quadranti*. I punti interni a tali quadranti hanno coordinate i cui segni sono illustrati in figura 2.

Osserviamo inoltre che:

- tutti i punti appartenenti all'asse x hanno ordinata nulla;
- tutti i punti appartenenti all'asse y hanno ascissa nulla;
- l'origine *O* ha coordinate (0,0).

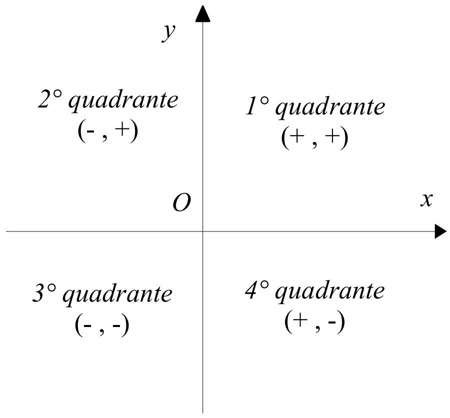

Fig. 2 Quadranti e segni delle coordinate

◆ Distanza tra due punti

Nel piano cartesiano abbiamo due punti P_1 e P_2, assegnati tramite le loro coordinate: $P_1(x_1, y_1)$ e $P_2(x_2, y_2)$. Cerchiamo di esprimere tramite tali coordinate la distanza $\overline{P_1 P_2}$ tra i due punti, ovvero la lunghezza del segmento che li congiunge.

Consideriamo prima due casi particolari, che ci aiuteranno a risolvere il problema generale.

- Se i *punti P_1 e P_2 hanno la stessa ordinata*: $y_1 = y_2$, allora il segmento P_1P_2 è parallelo all'asse delle ascisse.

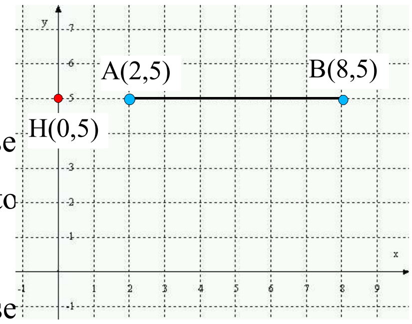

Fig. 3 Distanza tra due punti aventi la stessa ordinata.

Esempio 1. Cerchiamo la distanza tra i punti $A(2,5)$ e $B(8,5)$.
Poiché $y_A = y_B$, il segmento AB giace su una retta parallela all'asse *x*. Dalla figura 3 è evidente che il segmento AB può essere ottenuto come differenza tra i segmenti BH ed AH: $AB = BH - AH$.
D'altra parte, le lunghezze dei segmenti AH e BH sono espresse rispettivamente dalle ascisse dei punti A e B:
$AH = x_A = 2$, $BH = x_B = 8$. Quindi: $\overline{AB} = x_B - x_A = 8 - 2 = 6$, come avremmo potuto dedurre intuitivamente "contando i quadretti" che separano i punti A e B.
Generalizzando l'esempio precedente, possiamo dedurre che:

se due punti P_1 e P_2 hanno la stessa ordinata $y_1 = y_2$, allora $\boldsymbol{\overline{P_1 P_2} = x_2 - x_1}$, cioè la distanza tra i due punti è uguale alla differenza delle loro ascisse.

Nell'esempio 1 i punti tra cui dovevamo calcolare la distanza si trovavano nel primo quadrante, e quindi le loro ascisse erano positive. Potremmo chiederci se la formula che abbiamo trovato continua a valere in generale.

Esempio 2. Calcoliamo la distanza tra i punti $A(-5,2)$ e $B(3,2)$.
Abbiamo ancora $y_A = y_B$, ma in questo caso il segmento AB è la somma dei segmenti AH e BH: $AB = BH + AH$.
Poiché l'ascissa del punto A è negativa, però: $AH = -x_A$, e quindi continua ad essere valida la formula ricavata in precedenza:
$\overline{AB} = x_B - x_A = 3 - (-5) = 8$.
Verifica con un esempio che la formula resta valida anche se entrambi i punti tra cui calcoliamo la distanza hanno ascisse negative.

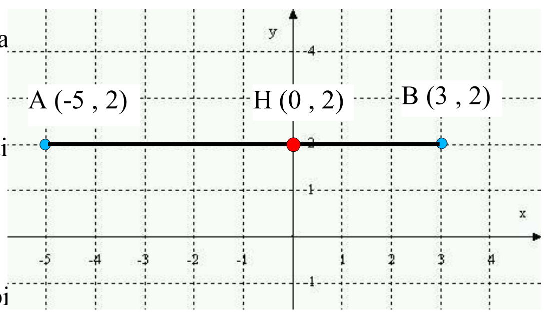

Fig. 4 Distanza tra due punti aventi la stessa ordinata.

Attenzione: poiché la distanza tra due punti deve essere un numero positivo, non possiamo scegliere arbitrariamente l'ordine dei punti stessi, ma dobbiamo sempre calcolare la differenza tra l'ascissa maggiore (quella del punto "più a destra") e quella minore. In realtà, sarebbe più corretto utilizzare il simbolo di valore assoluto per scrivere: $\overline{P_1 P_2} = |x_2 - x_1|$.

- Se i *punti P_1 e P_2 hanno la stessa ascissa*: $x_1 = x_2$, allora il segmento P_1P_2 è parallelo all'asse delle ordinate.

Ripetendo il ragionamento precedente, concludiamo facilmente che:

se due punti P_1 e P_2 hanno la stessa ascissa $x_1 = x_2$, allora $\overline{P_1P_2} = y_2 - y_1$, cioè la distanza tra i due punti è uguale alla differenza delle loro ordinate.

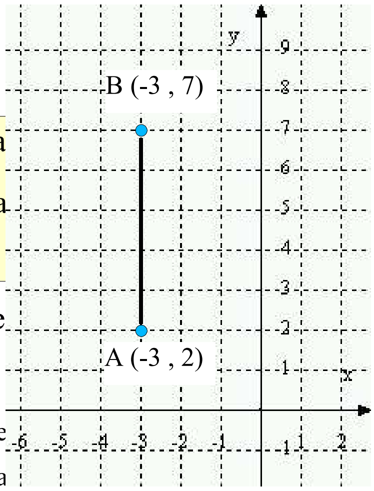

Fig. 5 Distanza tra due punti aventi la stessa ascissa

Esempio 3. La distanza tra i punti $A(-3, 2)$ e $B(-3, 7)$, che hanno la stessa ascissa, è: $\overline{AB} = y_B - y_A = 7 - 2 = 5$.

Anche in questo caso, poiché la distanza deve essere positiva, dobbiamo sempre calcolare la differenza tra l'ordinata maggiore (quella del punto "più in alto") e quella minore.

- Se i punti P_1 e P_2 hanno sia le ascisse che le ordinate diverse tra loro, allora il segmento P_1P_2 è "obliquo", ovvero non è parallelo ad uno degli assi cartesiani.

In questo caso, potremo sempre trovare un punto H tale che il triangolo P_1HP_2 sia rettangolo in H. Dai punti precedenti abbiamo imparato come esprimere le misure dei cateti:

$\overline{P_1H} = x_2 - x_1$ e $\overline{P_2H} = y_2 - y_1$.

La distanza P_1P_2 è la misura dell'ipotenusa del triangolo, che pertanto può essere ricavata tramite il teorema di Pitagora:

$$\overline{P_1P_2} = \sqrt{\overline{P_1H}^2 + \overline{HP_2}^2} \ .$$

Ricaviamo quindi la formula della distanza tra due punti generici:

$$\boldsymbol{\overline{P_1P_2} = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}} \ .$$

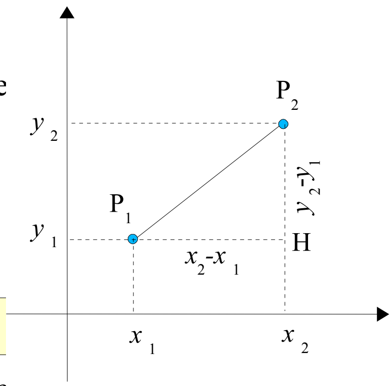

Fig. 6 Distanza tra due punti generici

Osserva che in questo caso non ha importanza l'ordine in cui vengono presi i due punti, in quanto l'elevamento al quadrato fa sparire eventuali segni negativi.

Esempio 4

Calcoliamo la distanza tra i punti $A(2, -5)$ e $B(1, 2)$.

Osserviamo che il segmento AB è obliquo; possiamo quindi applicare la formula precedente:

$$\overline{AB} = \sqrt{(x_A - x_B)^2 + (y_A - y_B)^2} = \sqrt{(2-1)^2 + (-5-2)^2} =$$

$$= \sqrt{1^2 + 7^2} = \sqrt{1 + 49} = \sqrt{50} = 5\sqrt{2} \ .$$

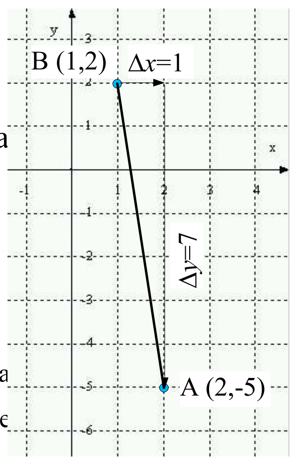

Fig. 7 Distanza tra due punti generici

Non è necessario ripetere la dimostrazione, trovando un punto H tale che il triangolo AHB sia rettangolo. Può però essere utile "leggere" le misure degli spostamenti orizzontale e verticale Δx e Δy direttamente dal grafico, come in figura 7.

- **Punto medio di un segmento**

Nel piano cartesiano conosciamo le coordinate dei punti A e B: $A(x_A, y_A)$ e $B(x_B, y_B)$. Vogliamo determinare le coordinate del punto medio M del segmento AB.

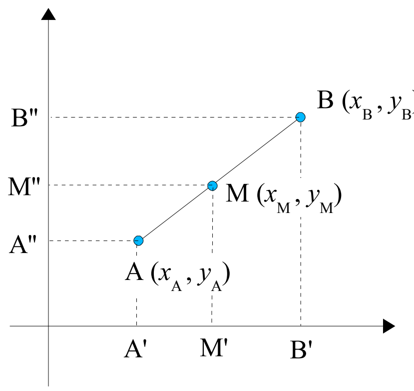

Fig. 8 Punto medio di un segmento

Dai punti A, B, M conduciamo le parallele agli assi cartesiani.

Per il teorema di Talete, se M è il punto medio di AB, anche M' sarà il punto medio di A'B', ovvero: $\overline{A'M'}=\overline{M'B'}$. Dalla formula per la distanza tra due punti aventi la stessa ordinata ricaviamo: $x_M-x_A=x_B-x_M$.

La precedente uguaglianza è un'equazione nella quale x_1 e x_2 sono termini noti ed x_M è l'incognita.

Risolvendola otteniamo: $2x_M=x_A+x_B \Rightarrow x_M=\frac{x_A+x_B}{2}$. Abbiamo quindi trovato che l'ascissa del punto medio di un segmento è uguale alla media aritmetica delle ascisse degli estremi del segmento stesso.

Svolgendo un ragionamento analogo per calcolare l'ordinata del punto medio, ricaviamo le formule che ci forniscono le *coordinate del punto medio di un segmento*:

$$\boldsymbol{x_M=\frac{x_A+x_B}{2} \quad ; \quad y_M=\frac{y_A+y_B}{2}} \quad .$$

Esempio 1

Calcoliamo le coordinate del punto medio *M* del segmento di estremi $A(1,2)$ e $B(5,8)$. Dalle formule precedenti ricaviamo:

$$\begin{cases} x_M=\frac{x_A+x_B}{2}=\frac{1+5}{2}=3 \\ y_M=\frac{y_A+y_B}{2}=\frac{2+8}{2}=5 \end{cases} .$$

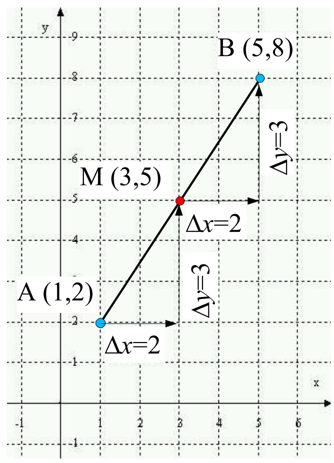

Fig. 9 Punto medio di un segmento

Dunque, il punto medio del segmento *AB* ha coordinate $M(3,5)$.

Per una parziale verifica che il risultato sia corretto, potremmo calcolare le distanze AM e BM e verificare che siano uguali: $AM=BM=\sqrt{13}$. (Se ti chiedi come mai questa verifica è solo parziale, pensa a quanti punti del piano hanno la stessa distanza da A e da B). Graficamente, poi, possiamo controllare che la differenza delle ascisse Δx e la differenza delle ordinate Δy assumano lo stesso valore sia "spostandosi" da A ad M che da M a B.

Supponiamo ora di conoscere le coordinate del punto A e quelle del punto medio M del segmento AB, e di voler determinare le coordinate del secondo estremo B. Prendiamo la formula per calcolare l'ascissa del punto medio e consideriamo x_B come incognita:

$$x_M=\frac{x_A+x_B}{2} \Rightarrow 2x_M=x_A+x_B \Rightarrow x_B=2x_M-x_A \quad .$$

Svolgendo un calcolo analogo per l'ordinata, ricaviamo le formule che ci forniscono le *coordinate* *del punto B simmetrico del punto A rispetto al punto M*, che viene detto *centro di simmetria*:

$$\boldsymbol{x_B = 2x_M - x_A \quad ; \quad y_B = 2y_M - y_A} \quad .$$

Esempio 2

Del segmento *AB* conosciamo $A(-3,5)$ e il punto medio $M(2,-1)$. Vogliamo determinare l'estremo *B*, cioè il punto simmetrico di *A* rispetto ad *M*.

Dalle formule precedenti, ricaviamo:

$$\begin{cases} x_B = 2x_M - x_A = 4+3 = 7 \\ y_B = 2y_M - y_A = -2-5 = -7 \end{cases} .$$

Quindi il punto cercato ha coordinate $B(7,-7)$.

Come in precedenza, possiamo verificare che $AM = MB = \sqrt{51}$ (ma potremmo obiettare che ci sono infiniti punti del piano che hanno tale distanza da M). Inoltre, le quantità Δx e Δy assumono lo stesso valore sia nello spostamento da A ad M che in quello da M a B.

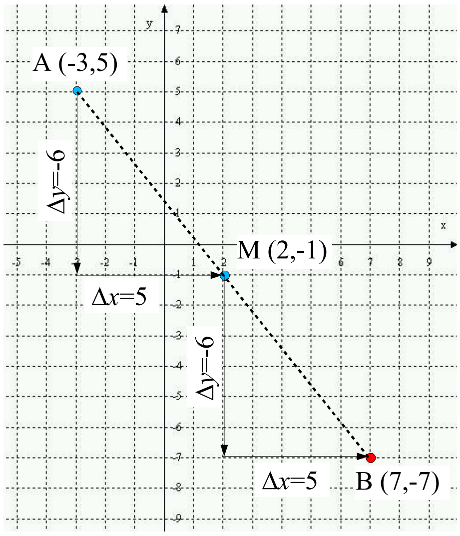

Fig. 10 Simmetria rispetto ad un punto

Esempio 3

I punti $A(6,-4)$, $B(2,8)$, $C(0,-2)$ sono i vertici di un triangolo. Vogliamo determinare la lunghezza della mediana CM relativa al lato AB.

Ricordiamo che una *mediana* di un triangolo è il *segmento che congiunge un vertice con il punto medio del lato opposto.*

Determiniamo il punto medio del lato AB:

$$\begin{cases} x_M = \dfrac{x_A + x_B}{2} = \dfrac{6+2}{2} = 4 \\ y_M = \dfrac{y_A + y_B}{2} = \dfrac{-4+8}{2} = 2 \end{cases} . \text{ Quindi: } M(4,2) \quad .$$

Calcoliamo quindi la lunghezza della mediana CM:

$$CM = \sqrt{4^2 + 4^2} = \sqrt{32} = \sqrt{2^5} = 4\sqrt{2} \quad .$$

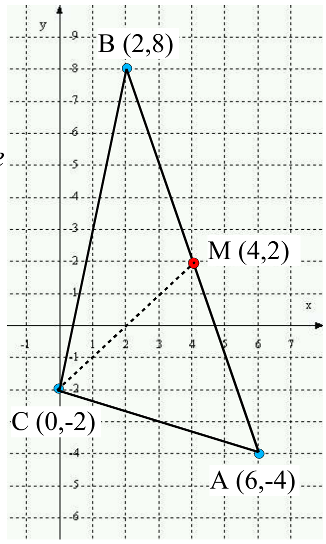

Fig. 11 Mediana di un triangolo

Esempio 4

I punti $A(3,5)$, $B(-2,-5)$, $C(8,-3)$ sono tre vertici del parallelogrammo ADBC.

Vogliamo determinare le coordinate del vertice D.

Quando un poligono viene indicato "elencando" i suoi vertici, sappiamo che, percorrendo il suo perimetro sempre nello stesso senso, orario o antiorario, troviamo tali vertici nella successione data. In questo caso, quindi, incontreremo i vertici A, D, B, C percorrendo il perimetro del parallelogrammo in senso antiorario; di conseguenza, AB e CD saranno le diagonali del parallelogrammo.

Una proprietà caratteristica del parallelogrammo è quella di avere le diagonali che si dividono scambievolmente a metà, ovvero hanno lo stesso punto medio.

Determiniamo le coordinate di M, punto medio della diagonale AB:

$$\begin{cases} x_M = \dfrac{x_A + x_B}{2} = \dfrac{3-2}{2} = \dfrac{1}{2} \\ y_M = \dfrac{y_A + y_B}{2} = \dfrac{5-5}{2} = 0 \end{cases} .$$

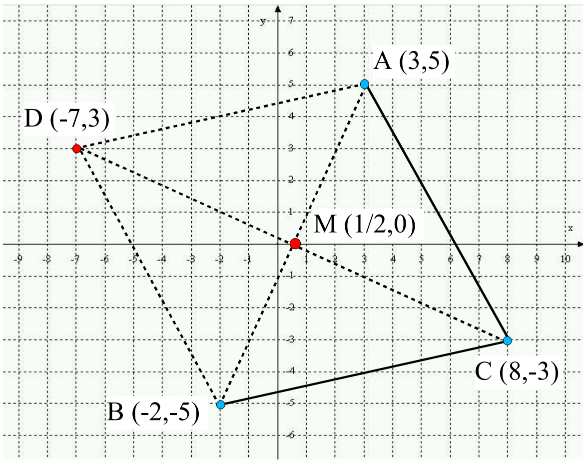

Fig. 12 Trovare il quarto vertice di un parallelogrammo

Quindi il centro di simmetria del parallelogrammo è il punto $M(\frac{1}{2}, 0)$.

Poiché M deve essere anche il punto medio della diagonale CD, il vertice D è il simmetrico di C rispetto ad M:

$$\begin{cases} x_D = 2x_M - x_C = 1 - 8 = -7 \\ y_D = 2y_M - y_C = 3 \end{cases} .$$

Quindi il vertice mancante ha coordinate $D(-7, 3)$.

◆ **Come descrivere una curva nel piano**

In questi primi paragrafi abbiamo iniziato a collegare "oggetti" geometrici con enti algebrici stabilendo una *corrispondenza biunivoca tra punti del piano cartesiano e coppie ordinate di numeri reali*, che sono le *coordinate* del punto.

Per descrivere degli enti geometrici più complessi, dobbiamo passare dal punto, che non ha dimensioni, alla "linea", retta o curva che sia, che intuitivamente ha una dimensione. Anche se l'hai utilizzata negli anni precedenti, la descrizione in linguaggio algebrico di una curva è meno semplice da spiegare, ma è probabilmente il concetto fondamentale della geometria analitica.

Descriveremo una curva tramite un'equazione in due incognite in modo che:

- *se un punto appartiene alla curva, allora le sue coordinate rendono vera l'equazione associata alla curva*;
- viceversa, *se una coppia ordinata di numeri reali è soluzione dell'equazione, allora il punto che ha quelle coordinate si trova sulla curva associata all'equazione.*

Esempio. l'equazione in due incognite $x^2 - y^2 = 5$ descrive una curva nel piano cartesiano, della quale non conosciamo l'andamento. Il punto $A(3, -2)$ appartiene a tale curva, in quanto, sostituendo le coordinate del punto nell'equazione della curva, otteniamo l'uguaglianza vera: $9 - 4 = 5$. Il punto $B(2, 1)$, invece, non appartiene alla curva, in quanto le sue coordinate non verificano l'equazione data; per sostituzione, otteniamo infatti: $4-1=5$ *falsa!*

In parole povere, l'equazione della curva esprime una specie di “ricetta”, alla quale devono obbedire le coordinate di tutti e soli i punti che appartengono alla curva stessa.

Osserviamo che, al contrario di quanto avveniva per i punti del piano e le coppie ordinate di numeri reali, *la corrispondenza tra curve del piano ed equazioni in due incognite non può essere biunivoca.*

Infatti, ad una stessa curva possiamo far corrispondere infinite equazioni equivalenti, che possono essere ottenute l'una dall'altra moltiplicando o dividendo entrambi i membri per uno stesso numero.

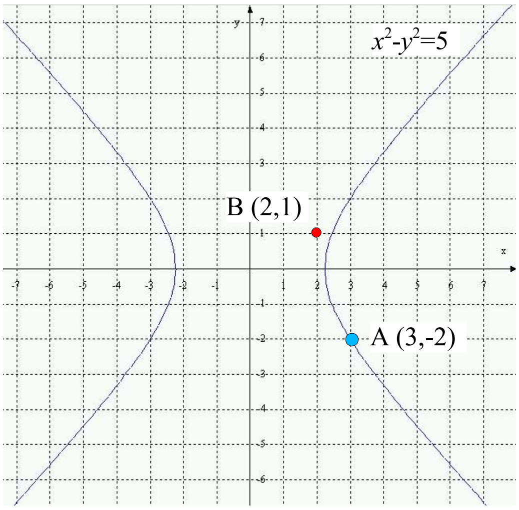

Fig. 13 Appartenenza di un punto ad una curva

Ad esempio, l'equazione $x^2-y^2=5$ ha le stesse soluzioni, e quindi descrive lo stesso insieme di punti, delle equazioni $2x^2-2y^2=10$, $3x^2-3y^2=15$, e così via.

◆ Equazione di una retta “obliqua”

Negli anni precedenti hai imparato che:

ad ogni retta del piano corrisponde un'equazione di primo grado nelle variabili x e y.

Questo significa che:

- ogni punto di una retta ha delle coordinate che sono soluzione dell'equazione di primo grado (che per questo motivo viene detta *lineare*) associata alla retta data;
- ogni coppia ordinata che risolve una equazione di primo grado (o lineare) fornisce le coordinate di un punto della retta associata a tale equazione.

Cerchiamo di giustificare queste affermazioni prendendo in considerazione per il momento rette “oblique”, ovvero che non siano parallele ad uno degli assi cartesiani e, di conseguenza, tali che due punti della retta non possano avere né la stessa ascissa né la stessa ordinata.

Per prima cosa, consideriamo una retta *r* e dimostriamo che le coordinate di tutti i suoi punti verificano una stessa equazione lineare.

Prendiamo sulla retta un punto $P_0(x_0, y_0)$ “fisso” in una posizione data, ed un punto $P(x, y)$ libero di muoversi sulla retta stessa, in modo che le condizioni che troveremo per le sue coordinate valgano per tutti i punti della retta.

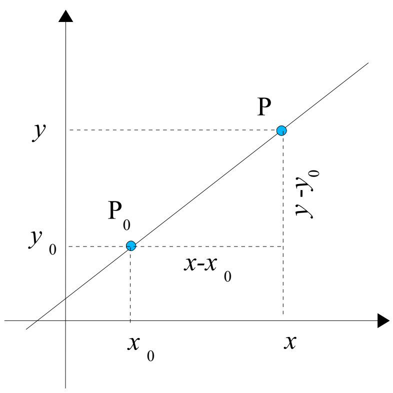

Fig. 14 Pendenza di una retta

Diciamo, in maniera intuitiva, che ciò che caratterizza la retta rispetto alle altre curve è il fatto di avere una *pendenza* costante. Per esprimere numericamente l'idea astratta di "pendenza", immaginiamo di muoverci da P_0 a P compiendo prima uno spostamento orizzontale e poi uno spostamento verticale.

Sappiamo che lo spostamento orizzontale è dato dalla differenza delle ascisse $\Delta x=x-x_0$ e lo spostamento verticale dalla differenza delle ordinate $\Delta y=y-y_0$.

Prendiamo come misura della "pendenza" della retta il rapporto $\frac{\Delta y}{\Delta x}=\frac{y-y_0}{x-x_0}$ tra spostamento verticale e spostamento orizzontale. Infatti, se la pendenza della retta è "grande", significa che ad un piccolo spostamento orizzontale corrisponde un grande spostamento verticale, e quindi un valore "grande" del rapporto $\Delta y/\Delta x$. Viceversa, se la retta ha pendenza "piccola", significa che ad un grande spostamento orizzontale corrisponde un piccolo spostamento verticale, e quindi un "piccolo" valore del rapporto $\Delta y/\Delta x$.

Poiché la retta ha pendenza costante, allora il rapporto $\Delta y/\Delta x$ avrà sempre lo stesso valore, qualunque sia la posizione assunta dal punto P nel suo movimento sulla retta. Chiamiamo *m* questo valore costante:

$$\frac{y-y_0}{x-x_0}=m \quad \Rightarrow \quad y-y_0=m(x-x_0) \quad \Rightarrow \quad y=mx+y_0-mx_0 \quad .$$

Abbiamo quindi dimostrato che le coordinate di un punto generico della retta verificano un'equazione di primo grado nelle incognite *x* ed *y*, che di solito viene scritta nella forma $y=mx+q$.

Viceversa, consideriamo un'equazione di primo grado in due incognite della forma $y=mx+q$ e dimostriamo che tutte le sue soluzioni rappresentano le coordinate dei punti di una retta "obliqua".

Supponiamo che le coppie ordinate (x_1, y_1) e (x_2, y_2) siano soluzioni dell'equazione.

Sostituiamole nell'equazione stessa: $\begin{cases} mx_1+q=y_1 \\ mx_2+q=y_2 \end{cases}$.

Sottraiamo la prima equazione dalla seconda: $mx_2-mx_1=y_2-y_1$.

Raccogliamo il fattore comune *m* e dividiamo per la differenza delle ascisse: $m=\frac{y_2-y_1}{x_2-x_1}$.

Abbiamo quindi dimostrato che, se due punti $P_1(x_1, y_1)$ e $P_2(x_2, y_2)$ hanno delle coordinate che rendono vera l'equazione di primo grado $y=mx+q$, allora il rapporto $\Delta y/\Delta x$ tra la differenza delle loro ordinate e la differenza delle loro ascisse ha un valore costante, che non dipende dalla particolare coppia di numeri scelti e, inoltre, che tale valore è uguale al coefficiente *m* dell'equazione data.

Ma, poiché abbiamo detto che tale rapporto misura la pendenza, allora tutti i punti le cui coordinate sono soluzione dell'equazione $y=mx+q$ formano una curva con pendenza costante, e quindi una retta.

Se sei riuscito a seguire i ragionamenti precedenti, avrai compreso che:

esiste una corrispondenza biunivoca tra le rette del piano cartesiano che non siano parallele ad uno degli assi cartesiani e le equazioni lineari in due incognite della forma $y=mx+q$.

Quest'ultima viene detta *forma esplicita* dell'equazione di una retta.

Il parametro *m* si chiama *coefficiente angolare* e, come abbiamo dimostrato, è uguale al rapporto tra la differenza delle ordinate e la differenza delle ascisse di due punti generici della retta:

$$\boldsymbol{m=\frac{\Delta y}{\Delta x}=\frac{y_2-y_1}{x_2-x_1}} \quad .$$

Il coefficiente angolare viene chiamato così perché il suo valore è legato all'ampiezza dell'angolo che la retta forma con l'asse delle ascisse. All'aumentare dell'angolo aumenta il valore assoluto del coefficiente angolare, ma le due grandezze non sono direttamente proporzionali.

Ad esempio, è semplice vedere che ad un coefficiente angolare $m=1$ corrisponde un angolo con l'asse delle ascisse di 45°, mentre se $m=2$ l'angolo non è di 90°, ma minore.

Più precisamente, il legame tra coefficiente angolare ed angolo tra la retta e l'asse delle ascisse è espresso da una funzione goniometrica che viene detta *tangente* dell'angolo.

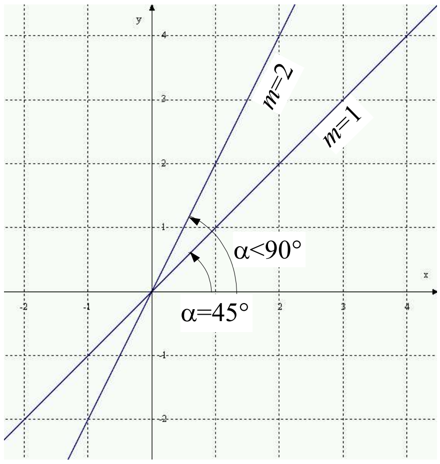

Fig. 15 Coefficiente angolare

Riguardo il segno del coefficiente angolare, sappiamo che:

- se la retta ha coefficiente angolare *m* positivo, allora essa attraversa il primo ed il terzo quadrante (è "in salita");
- se, invece, la retta ha coefficiente angolare *m* negativo, allora essa attraversa il secondo ed il quarto quadrante (è "in discesa").

Infatti, basta prendere il punto P_2 a destra di P_1, e quindi la quantità Δx positiva, perché il segno di *m* sia uguale al segno di Δy. Di conseguenza:

- se $m>0 \Rightarrow \Delta y>0 \Rightarrow y_2>y_1$, ovvero P_2 sta "sopra" P_1;
- se $m<0 \Rightarrow \Delta y<0 \Rightarrow y_2<y_1$, ovvero P_2 sta "sotto" P_1.

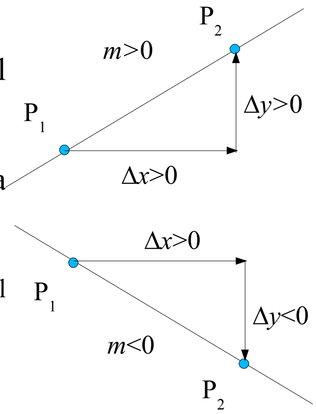

Fig. 16 Segno di m

Anche il termine noto *q* dell'equazione in forma esplicita $y=mx+q$ possiede un significato geometrico di una certa importanza.

Infatti, se nell'equazione sostituiamo il valore $x=0$, otteniamo:

$y=m\cdot 0+q=q$.

Di conseguenza, il punto di coordinate $(0,q)$, che si trova sull'asse *y*, appartiene alla retta di equazione $y=mx+q$.

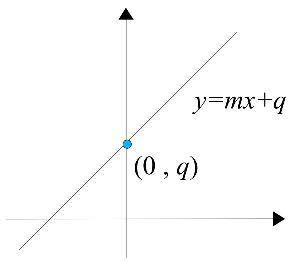

Fig. 17 Ordinata all'origine

Il parametro *q* viene chiamato *ordinata all'origine*, in quanto esso coincide con l'ordinata del punto in cui la retta interseca l'asse *y*.

Quindi possiamo osservare che:

- se $q>0$, allora la retta interseca l'asse delle *y* "sopra" l'origine;
- se $q<0$, allora la retta interseca l'asse delle *y* "sotto" l'origine;
- se $q=0$, ovvero l'equazione non contiene il termine noto, allora la retta passa per l'origine.

  Infatti, le coordinate $(0,0)$ dell'origine soddisfano l'equazione $y=mx+q$ soltanto se *q* è uguale a zero.

Tra le rette passanti per l'origine, ritroveremo negli esercizi le due bisettrici degli angoli formati dagli assi cartesiani. Osserviamo che:

- la *bisettrice del 1° e del 3° quadrante* ha equazione $y = x$.
- la *bisettrice del 2° e del 4° quadrante* ha equazione $y = -x$.

Infatti, per entrambe deve essere $q = 0$ per il passaggio per l'origine degli assi, ed $m = \pm 1$ perché gli angoli retti formati dagli assi cartesiani vengano divisi in due parti uguali.

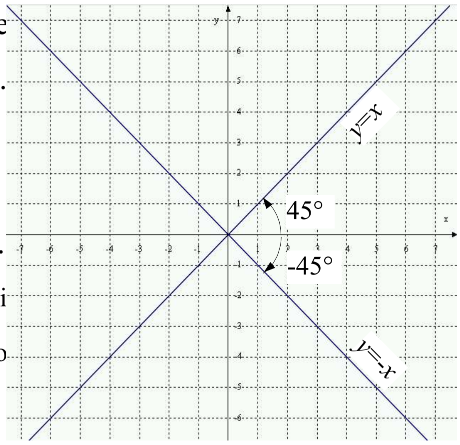

Fig. 18 Bisettrici dei quadranti

Esempio

Consideriamo l'equazione lineare $y = \frac{3}{2} x + 1$.

Per tracciarne il grafico potremmo assegnare dei valori alla variabile *x* e determinare i corrispondenti valori di *y*.

In maniera più semplice, poiché l'equazione è in forma esplicita, possiamo utilizzare il significato geometrico dei coefficienti:

- poiché $q = 1$, la retta interseca l'asse *y* nel punto di coordinate $(0, 1)$;
- poiché $m = \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{3}{2}$, possiamo trovare altri punti della retta spostandoci ripetutamente di 2 unità verso destra e di 3 unità verso l'alto (o di quantità proporzionali a tali numeri).

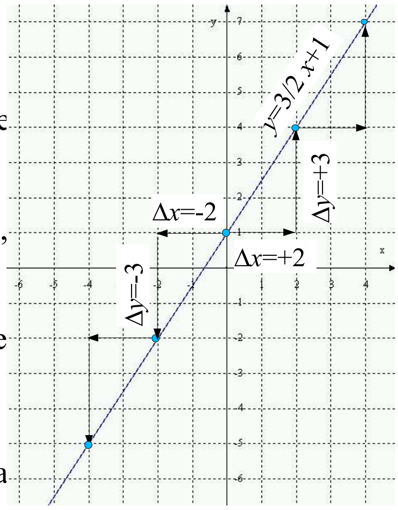

Fig. 19 Retta di eq. $y = \frac{3}{2} x + 1$

◆ Equazione generica della retta

Prendiamo intanto in considerazione i casi che abbiamo trascurato nel precedente paragrafo, ovvero quelli delle rette parallele ad uno degli assi cartesiani.

Ad ogni retta parallela all'asse *x* corrisponde un'equazione della forma $y = q$.

Infatti, se una retta è parallela all'asse delle ascisse, tutti i suoi punti hanno la stessa distanza da tale asse, e, di conseguenza, hanno tutti la stessa ordinata.

Esempio. La retta passante per i punti $A(-1, 2)$ e $B(3, 2)$ ha equazione $y = 2$, in quanto $y_A = y_B = 2$.

Osserviamo che l'equazione $y = q$ si ottiene come caso particolare dell'equazione in forma esplicita $y = mx + q$ ponendo $m = 0$.

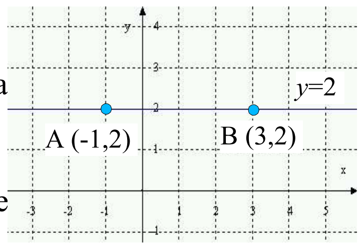

Fig. 20 Retta di equazione y=2

Quindi *una retta parallela all'asse x ha coefficiente angolare uguale a zero.*

D'altra parte, ricordando che il coefficiente angolare è uguale al rapporto tra la differenza delle ordinate e quella delle ascisse, e applicando tale regola all'esempio precedente, ricaviamo:

$$m_{AB}=\frac{\Delta y}{\Delta x}=\frac{y_B-y_A}{x_B-x_A}=\frac{2-2}{3+1}=\frac{0}{4}=0 \quad .$$

Come caso particolare, osserviamo che *l'asse delle x ha equazione* $y=0$.

Infatti, tutti i suoi punti hanno ordinata nulla.

Ad ogni retta parallela all'asse *y* corrisponde un'equazione della forma $x=k$.

Infatti, se una retta è parallela all'asse delle ordinate, tutti i suoi punti hanno la stessa distanza da tale asse, e, di conseguenza, hanno tutti la stessa ascissa.

Esempio. La retta passante per i punti $A(1,-2)$ e $B(1,3)$ ha equazione $x=1$, in quanto $x_A=x_B=1$.

Osserviamo che l'equazione $x=k$ non può essere ottenuta come caso particolare dall'equazione in forma esplicita $y=mx+q$, in quanto non contiene la variabile *y*. Pertanto, l'equazione $y=mx+q$ descrive tutte le rette del piano cartesiano, tranne quelle parallele all'asse delle ordinate.

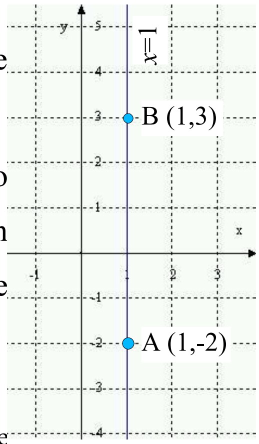

Fig. 21 Retta x=1

D'altra parte, possiamo osservare che:

- una retta parallela all'asse *y* non interseca tale asse, e quindi la sua equazione non può avere una ordinata all'origine *q*;
- se calcolassimo il coefficiente angolare della retta AB dell'esempio precedente come rapporto tra la differenza delle ordinate e la differenza delle ascisse, otterremmo:

  $$m_{AB}=\frac{\Delta y}{\Delta x}=\frac{y_B-y_A}{x_B-x_A}=\frac{3+2}{1-1}=\frac{5}{0}$$, che non ha significato.

Di conseguenza, il coefficiente angolare di una retta parallela all'asse *y* non è definito.

Talvolta viene detto che, in un certo senso, le rette verticali possiedono un coefficiente angolare infinito. Con questa affermazione impropria si intende semplicemente che, se una retta "ruota" su se stessa tendendo a diventare parallela all'asse delle *y*, allora il suo coefficiente angolare cresce indefinitamente assumendo valori via via maggiori (fig. 22).

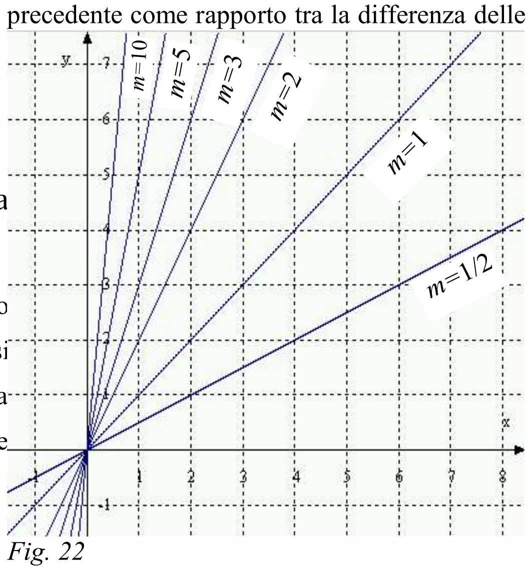

Fig. 22

Come caso particolare, osserviamo che:

l'asse delle y ha equazione $x=0$.

Infatti, tutti i suoi punti hanno ascissa nulla.

Abbiamo visto che una retta "obliqua" ha un'equazione del tipo $y=mx+q$, ed una retta parallela ad uno degli assi cartesiani ha un'equazione della forma $x=k$ oppure $y=q$.

Esiste però un modo di descrivere tutte le rette del piano cartesiano, che consiste nello scrivere l'equazione della retta in *forma implicita*: $\boldsymbol{ax+by+c=0}$.

Infatti:

- se i parametri *a*, *b*, *c* sono tutti diversi da zero, allora possiamo esplicitare la variabile *y* ed ottenere una retta "obliqua" e non passante per l'origine degli assi.

  Esempio: $3x-2y+7=0 \quad \Rightarrow \quad -2y=-3x-7 \quad \Rightarrow \quad 2y=3y+7 \quad \Rightarrow \quad y=\frac{3}{2}x+\frac{7}{2}$.

- se $c=0$, otteniamo ancora una retta "obliqua", ma passante per l'origine degli assi.

  Esempio: $x+4y=0 \quad \Rightarrow \quad 4y=-x \quad \Rightarrow \quad y=-\frac{1}{4}x$.

- se $a=0$, otteniamo una retta parallela all'asse delle *x*.

  Esempio: $3y-5=0 \quad \Rightarrow \quad 3y=5 \quad \Rightarrow \quad y=\frac{5}{3}$.

- se $b=0$, otteniamo una retta parallela all'asse delle *y*.

  Esempio: $2x+3=0 \quad \Rightarrow \quad 2x=-3 \quad \Rightarrow \quad x=-\frac{3}{2}$.

- se $a=c=0$, abbiamo l'equazione dell'asse *x*.

  Esempio: $2y=0 \quad \Rightarrow \quad y=0$.

- se $b=c=0$, abbiamo l'equazione dell'asse *y*.

  Esempio: $-\frac{1}{4}x=0 \quad \Rightarrow \quad x=0$.

Nonostante la sua generalità, non ci capiterà spesso di utilizzare l'equazione della retta in forma implicita, in quanto:

- I coefficienti *a*, *b*, *c* non hanno, se considerati da soli, un diretto significato geometrico, come quello del coefficiente angolare o dell'ordinata all'origine nell'equazione in forma esplicita. Ad esempio, la sola conoscenza del valore di *a* non ci dice assolutamente nulla su come disegnare la retta; solo i rapporti tra tali coefficienti ci danno informazioni sul grafico.
- La corrispondenza tra rette del piano ed equazioni di primo grado in forma implicita non è biunivoca. Ad esempio, le equazioni $x+y+1=0$, $2x+2y+2=0$, ed in genere tutte quelle che otteniamo moltiplicando o dividendo entrambi i membri di una data equazione per uno stesso numero, sono equivalenti, e quindi descrivono la stessa retta.
- Per indicare una precisa retta del piano, dovremo dare <u>due</u> condizioni (ad esempio, dire che passa per due punti assegnati, oppure che passa per un dato punto ed ha una certa direzione), e quindi ci risulterà più comodo utilizzare un'equazione che dipenda da due parametri, come quella in forma esplicita, e non da tre.

◆ Retta passante per due punti

Supponiamo di conoscere le coordinate di due punti del piano cartesiano. Cerchiamo l'equazione della retta che congiunge i punti assegnati.

Esempio 1

Vogliamo determinare l'equazione della retta passante per i punti $A(1,2)$ e $B(3,3)$.

Osserviamo intanto che i due punti non hanno né la stessa ascissa, né la stessa ordinata, pertanto la retta AB non è parallela a nessuno degli assi cartesiani e la sua equazione può essere scritta nella forma esplicita $y=mx+q$.

Ricordiamo che *un punto appartiene ad una retta (o ad una qualunque altra curva) se e soltanto se le sue coordinate rendono vera l'equazione della retta.*

Poiché vogliamo che la nostra retta passi per il punto A, prendiamo le coordinate di A e le sostituiamo nell'equazione generica $y=mx+q$ al posto delle incognite.

Otteniamo la condizione di passaggio per il punto A: $1\cdot m+q=2$.

Ovviamente $1\cdot m=m$! Inoltre, abbiamo scambiato tra loro il primo ed il secondo membro, per avere le incognite a sinistra e i termini noti a destra, come siamo abituati.

Ripetendo lo stesso procedimento con le coordinate di B, otteniamo la condizione di passaggio per il punto B:

$3\cdot m+q=3$.

Poiché entrambe le condizioni di passaggio devono risultare contemporaneamente vere, mettiamo a sistema le equazioni che le esprimono:

$$\begin{cases} m+q=2 \\ 3m+q=3 \end{cases} .$$

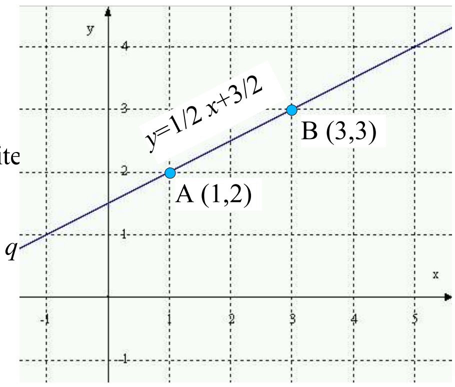

Fig. 23 Retta per due punti

Attenzione: otteniamo un sistema lineare di due equazioni in cui le incognite non sono le coordinate *x* ed *y*, ma i coefficienti *m* e *q*.

Infatti, cercare l'equazione della retta AB significa cercare i valori di *m* e di *q* che rendano vere le condizioni di passaggio.

Il sistema può essere risolto con il metodo di sostituzione:

$$\begin{cases} q=2-m \\ 3m+2-m=3 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} q=2-m \\ 2m=1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} m=1/2 \\ q=2-\dfrac{1}{2}=\dfrac{3}{2} \end{cases} .$$

Poiché l'incognita *q* compare nelle due equazioni con lo stesso coefficiente, è però preferibile sottrarre membro a membro la prima equazione dalla seconda:

$$-\begin{cases} m+q=2 \\ 3m+q=3 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 2m=1 \\ m+q=2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} m=1/2 \\ 1/2+q=2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} m=1/2 \\ q=3/2 \end{cases} .$$

Sostituendo nell'equazione generica $y=mx+q$ i valori trovati, ricaviamo l'equazione della retta passante per A e per B: $y=\frac{1}{2}x+\frac{3}{2}$.

E' fortemente consigliabile controllare sul grafico che il risultato ottenuto sia corretto, o almeno ragionevole.

Se abbiamo bisogno dell'equazione in forma implicita, eliminiamo il denominatore e trasportiamo tutti i termini a primo membro, ottenendo: $x-2y+3=0$.

Esempio 2

Cerchiamo l'equazione della retta passante per i punti $A(1,-1)$ e $B(-2,5)$.

Osserviamo ancora che la retta non è parallela ad uno degli assi cartesiani, per cui la sua equazione può essere scritta nella forma esplicita $y=mx+q$.

Anziché scrivere un sistema che ci permetta di ricavare contemporaneamente i valori delle incognite m e q, possiamo determinare separatamente tali quantità.

Infatti, il coefficiente angolare della retta è:

$$m_{AB}=\frac{y_A-y_B}{x_A-x_B}=\frac{-1-5}{1-(-2)}=\frac{-6}{3}=-2$$

quindi l'equazione della retta in forma esplicita è del tipo:

$$y=-2\cdot x+q$$.

Per determinare l'ordinata all'origine q, possiamo imporre il passaggio della retta per il punto A sostituendo le coordinate del punto nell'equazione della retta: $-2\cdot 1+q=-1 \quad \Rightarrow \quad q=2-1=1$.

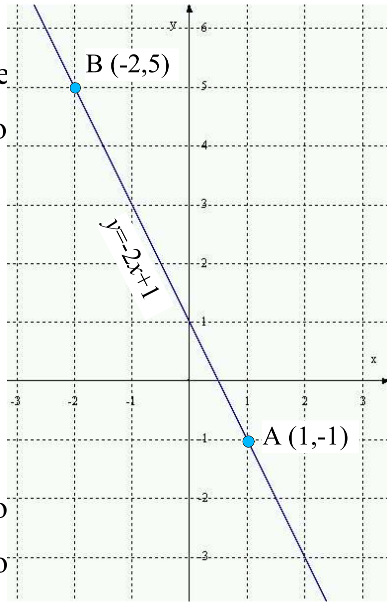

Fig. 24

In maniera analoga, avremmo potuto imporre la condizione di passaggio per il punto B:

$$-2\cdot(-2)+q=5 \quad \Rightarrow \quad 4+q=5 \quad \Rightarrow \quad q=1$$.

Quindi, l'equazione della retta *AB* risulta: $y=-2x+1$.

Come sempre, è utile verificare graficamente il risultato ottenuto.

Esempio 3

Cerchiamo l'equazione della retta passante per i punti $A(2,-3)$ e $B(2,3)$.

Imponendo le condizioni di passaggio per i punti A e B, otteniamo il sistema:

$$\begin{cases} 2\cdot m+q=-3 \\ 2\cdot m+q=3 \end{cases}$$

che, risolto con il metodo di sottrazione, fornisce l'uguaglianza:

$0=6$ *impossibile!*

Anche calcolando il coefficiente angolare, abbiamo:

$$m_{AB}=\frac{y_A-y_B}{x_A-x_B}=\frac{-3-3}{2-2}=\frac{-6}{0}$$

che è un'operazione priva di significato.

Dove abbiamo sbagliato? Naturalmente nel non esserci accorti che i due punti dati hanno la stessa ascissa, quindi la retta AB non ha un'equazione del tipo $y=mx+q$, ma semplicemente della forma $x=k$.

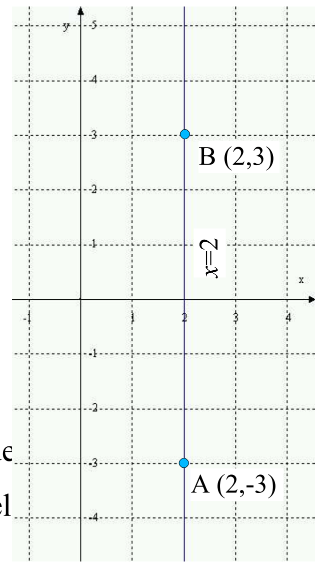

Fig. 25

Nel nostro caso, poiché $x_A = x_B = 2$, l'equazione cercata è $x = 2$.

Se, invece, i due punti dati hanno la stessa ordinata, allora sarebbe possibile applicare i metodi visti negli esempi precedenti, ma non risulta assolutamente conveniente farlo.
Ad esempio, la retta passante per i punti $A(2,-3)$ e $B(-2,-3)$ ha semplicemente equazione $y=-3$. Come sempre, il disegno nel piano cartesiano aiuta a non confondersi.

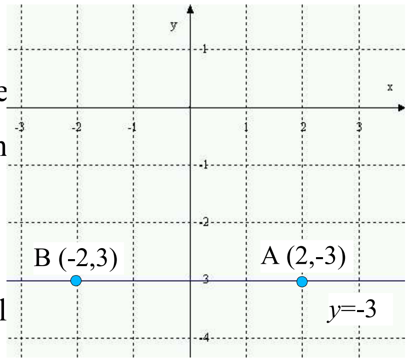

Fig. 26

Esempio 4

I punti $A(6,-4)$, $B(2,8)$, $C(0,-2)$ sono i vertici di un triangolo.
Vogliamo determinare l'equazione della mediana CM relativa al lato AB.

Attenzione: non si tratta della stessa domanda di pagina 5, anche se il triangolo è lo stesso. Nell'esercizio precedente, infatti, chiedevamo la *lunghezza* della mediana, mentre ora cerchiamo la sua *equazione*.

Ricordiamo che una *mediana* di un triangolo è il *segmento che congiunge un vertice con il punto medio del lato opposto.*
Avevamo determinato il punto medio del lato AB: $M(4,2)$.
Imponiamo il passaggio per il vertice C e per il punto medio M:

$$\begin{cases} q=-2 \\ 4m+q=2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} q=-2 \\ 4m-2=2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} q=-2 \\ 4m=4 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} m=1 \\ q=-2 \end{cases} .$$

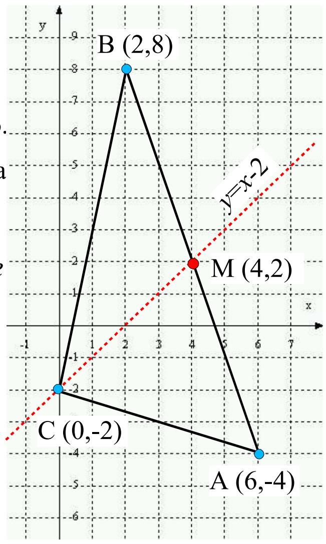

Fig. 27 Mediana di un triangolo

L'equazione della mediana CM è quindi $y=x-2$.

Per precisione dovremmo dire che quella trovata è l'equazione della *retta* a cui appartiene la mediana CM, che è semplicemente un segmento. Per ottenere la mediana, dovremmo porre la limitazione $0 \le x \le 4$. In seguito trascureremo questa distinzione.

- **Intersezione di due rette**

Supponiamo di avere due curve C_1 e C_2 che si intersecano nel punto P.
Poiché il punto P appartiene alla curva C_1, sappiamo che le coordinate di P devono essere soluzione dell'equazione di C_1. D'altra parte, poiché il punto P appartiene anche alla curva C_2 , le coordinate di P rendono vera anche l'equazione di C_2. Di conseguenza, le coordinate di P risolvono contemporaneamente entrambe le equazioni delle due curve.
Ma ricordiamo che, in algebra, per trovare le soluzioni contemporanee di due equazioni, mettevamo a sistema le equazioni stesse.

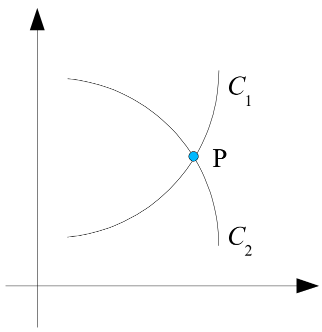

Fig. 28 Intersezione di due curve

Riassumendo, *le coordinate dei punti di intersezione di due curve sono date dalle soluzioni del sistema formato dalle equazioni delle due curve.*
In particolare, *le coordinate del punto di intersezione di due rette sono soluzione del sistema formato dalle equazioni delle due rette.*

Esempio 1

Date le rette di equazione $y=2x-4$ e $y=-3x-9$, vogliamo determinare le coordinate del loro punto di intersezione.

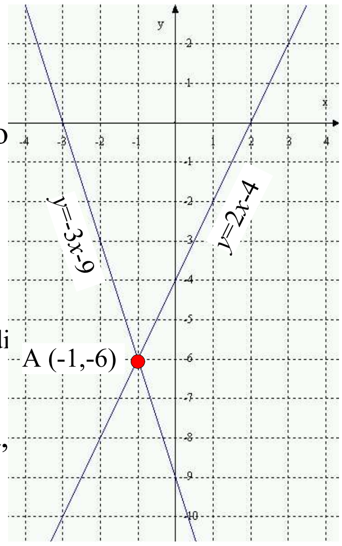

Fig. 29 Intersezione di rette

Mettiamo a sistema le equazioni delle due rette: $\begin{cases} y=2x-4 \\ y=-3x-9 \end{cases}$.

Quando le equazioni sono in forma esplicita, il metodo di sostituzione e quello di sottrazione si equivalgono.

Sostituendo nella seconda equazione il valore di y ricavato dalla prima, ricaviamo:

$$2x-4=-3x-9 \quad \Rightarrow \quad 5x=-5 \quad \Rightarrow \quad x=-1 \ .$$

Quindi, sostituendo il valore di x in una qualunque delle due equazioni, ricaviamo $y=-6$ e troviamo quindi che le due rette si intersecano nel punto $A(-1,-6)$.

Esempio 2

Cerchiamo il punto di intersezione delle rette aventi equazione:

$$3x+2y=2 \quad \text{e} \quad 3x+2y=6 \ .$$

Mettendo a sistema le due equazioni e sottraendole membro a membro, otteniamo:

$$-\begin{cases} 3x+2y=2 \\ 3x+2y=6 \end{cases} \quad \Rightarrow \quad 0=4 \quad \Rightarrow \quad \textit{impossibile!}$$

il che significa che le rette non si intersecano.

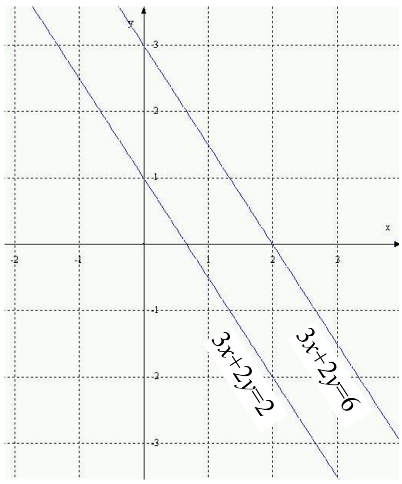

Fig. 30 Rette parallele

Infatti, scrivendo le equazioni in forma esplicita:

$y=-\frac{3}{2}x+1$ e $y=-\frac{3}{2}x+3$, osserviamo che le rette hanno lo stesso coefficiente angolare, quindi dovranno essere parallele, e pertanto non avranno un punto di intersezione.

Esempio 3

I punti $A(6,-4)$, $B(2,8)$, $C(0,-2)$ sono i vertici di un triangolo.

Cerchiamo le coordinate del *baricentro* G del triangolo ABC, ovvero del *punto di intersezione delle mediane* del triangolo.

Nel paragrafo precedente abbiamo trovato che la mediana CM ha equazione $y=x-2$.

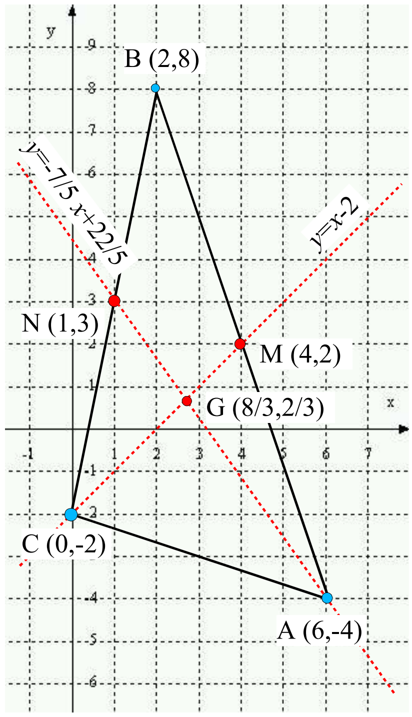

Fig. 31 Baricentro di un triangolo

Calcoliamo le coordinate del punto medio N del lato BC:

$$\begin{cases} x_N=\dfrac{x_B+x_C}{2}=\dfrac{2}{2}=1 \\ y_N=\dfrac{y_B+y_C}{2}=\dfrac{8-2}{2}=3 \end{cases}$$. Quindi: $N(1,3)$.

Calcoliamo il coefficiente angolare della mediana AN:

$$m_{AN}=\frac{y_A-y_N}{x_A-x_N}=\frac{-4-3}{6-1}=-\frac{7}{5} \quad .$$

Quindi l'equazione della mediana AN ha la forma $y=-\frac{7}{5}x+q$.

Imponiamo il passaggio per il punto medio N:

$$-\frac{7}{5}\cdot 1+q=3 \quad \Rightarrow \quad q=\frac{7}{5}+3=\frac{7+15}{5}=\frac{22}{5} \quad .$$

Pertanto la mediana AN ha equazione: $y=-\frac{7}{5}x+\frac{22}{5}$.

Per determinare il punto di intersezione G delle mediane, mettiamo a sistema le loro equazioni:

$$\begin{cases} y=x-2 \\ y=-\dfrac{7}{5}x+\dfrac{22}{5} \end{cases} \Rightarrow \; x-2=-\frac{7}{5}x+\frac{22}{5} \;\Rightarrow\; \frac{15x-30}{15}=\frac{-21x+66}{15} \;\Rightarrow\; 36x=96 \;\Rightarrow\; x_G=\frac{96}{36}=\frac{8}{3} \quad .$$

Sostituendo nell'equazione della mediana CM, ricaviamo: $y_G=\frac{8}{3}-2=\frac{8-6}{2}=\frac{2}{3}$.

Quindi il baricentro G del triangolo ABC ha coordinate: $G(\frac{8}{3},\frac{2}{3})$.

Trovando l'equazione della mediana relativa al lato AC, potremmo verificare che il baricentro appartiene anche alla terza mediana. Possiamo inoltre verificare che il risultato ottenuto sia corretto controllando che l'ascissa e l'ordinata del baricentro siano rispettivamente uguali alla somma delle ascisse e delle ordinate dei vertici del triangolo divise per 3.

In formula: $\begin{cases} x_G=\dfrac{x_A+x_B+x_C}{3}=\dfrac{6+2}{3}=\dfrac{8}{3} \\ y_G=\dfrac{y_A+y_B+y_C}{2}=\dfrac{-4+8-2}{3}=\dfrac{2}{3} \end{cases}$. Non dimostreremo questa proprietà.

- **Condizione di parallelismo**

Come abbiamo appena osservato, la direzione di una retta è individuata dal suo coefficiente angolare. Pertanto, è intuitivamente chiaro che:

due rette sono parallele se e solo se le loro equazioni hanno coefficienti angolari uguali.

In simboli: $\boldsymbol{r_1 \| r_2 \;\Leftrightarrow\; m_1=m_2}$.

Ovviamente restano escluse da questa osservazione le rette parallele all'asse *y*, la cui equazione non possiede un coefficiente angolare e che sono tutte parallele tra loro.

Proviamo a dare una spiegazione più rigorosa della proprietà che abbiamo enunciato.

Spiegazione algebrica.

Se due rette hanno lo stesso coefficiente angolare, mettendo a sistema le loro equazioni otteniamo:

$\begin{cases} y=mx+q \\ y=mx+q' \end{cases}$; risolvendo per sostituzione o per sottrazione ricaviamo: $q=q' \quad falso!$.

Quindi il sistema non ha soluzioni e le rette non hanno punti di intersezione, ovvero sono parallele.

Spiegazione geometrica.

Dimostriamo intanto la condizione necessaria:

Ipotesi: $r_1 \| r_2$

Tesi: $m_1=m_2$

Ricordiamo il teorema di geometria euclidea:

«Due rette del piano sono parallele se e solo se formano, con una data trasversale, angoli corrispondenti uguali».

Quindi, se r_1 ed r_2 sono parallele, allora esse formano con l'asse *x* (considerato come trasversale) angoli corrispondenti di uguale ampiezza: $\alpha_1=\alpha_2$.

Considera i due triangoli rettangoli evidenziati in figura 30. Essi hanno un cateto uguale per costruzione (quello di lunghezza unitaria), $\alpha_1=\alpha_2$ per il ragionamento precedente e un angolo retto.

Quindi i triangoli sono uguali per il 2° criterio di uguaglianza; in particolare hanno uguali anche gli altri cateti: $m_1=m_2$ c.v.d.

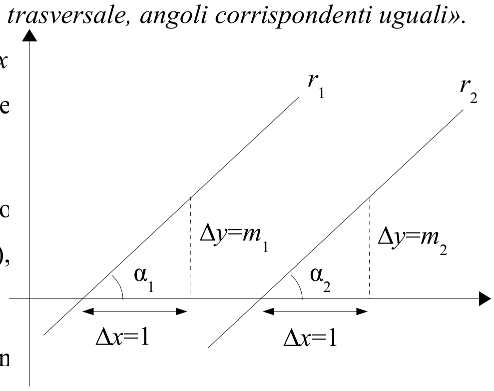

Fig. 32 Condizione di parallelismo

Dimostriamo ora la condizione sufficiente:

Ipotesi: $m_1=m_2$

Tesi: $r_1 \| r_2$

Questa volta i triangoli in figura 30 hanno: i cateti m_1 ed m_2 uguali per ipotesi; i cateti di lunghezza unitaria uguali per costruzione ed un angolo retto; sono quindi uguali per il 1° criterio di uguaglianza ed in particolare hanno $\alpha_1=\alpha_2$.

Le rette r_1 ed r_2, tagliate dall'asse *x*, formano una coppia di angoli corrispondenti uguali; pertanto sono parallele c.v.d.

Esempio 1

Conosciamo il punto $P(2,-3)$ e la retta r_1 di equazione: $5x-8y+20=0$.

Cerchiamo l'equazione della retta r_2 parallela ad r_1 e passante per P.

Scriviamo l'equazione di r_1 in forma esplicita per calcolarne il coefficiente angolare:

$-8y=-5x-20 \quad \Rightarrow \quad y=\frac{5}{8}x+\frac{5}{2}$. Quindi: $m_1=\frac{5}{8}$.

La retta r_2, essendo parallela alla r_1, dovrà avere lo stesso coefficiente angolare: $m_2=m_1=5/8$.

L'equazione di r_2 sarà quindi del tipo $y=\frac{5}{8}x+q$.

Imponiamo la condizione di passaggio per il punto P sostituendo le coordinate di P nell'equazione:

$$\frac{5}{8}\cdot 2+q=-3 \quad \Rightarrow \quad q=-3-\frac{5}{4}=-\frac{17}{4} \quad .$$

La retta r_2 ha pertanto equazione: $y=\frac{5}{8}x-\frac{17}{4}$.

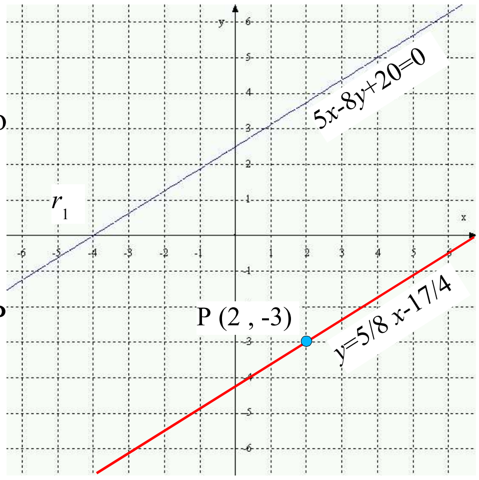

Fig. 33 Retta passante per un punto e parallela ad una retta data

Esempio 2

I punti $A(3,5)$, $B(-2,-5)$, $C(8,-3)$ sono tre vertici del parallelogrammo ADBC. Vogliamo determinare le coordinate del vertice D.

Abbiamo già risolto questo problema determinando il vertice D come simmetrico del vertice C rispetto al punto medio della diagonale AB, in base alla proprietà caratteristica del parallelogrammo per la quale le sue diagonali si dividono scambievolmente a metà.

Il parallelogrammo possiede però anche la proprietà caratteristica di avere i *lati opposti paralleli*. Calcoliamo i coefficienti angolari dei lati AC e BC:

- $m_{AC}=\frac{y_C-y_A}{x_C-x_A}=\frac{-3-5}{8-3}=-\frac{8}{5}$;
- $m_{BC}=\frac{y_C-y_B}{x_C-x_B}=\frac{-3+5}{8+2}=\frac{2}{10}=\frac{1}{5}$.

Il lato AD deve essere parallelo a BC ed il lato BD deve essere parallelo ad AC, quindi:

$$m_{AD}=m_{BC}=\frac{1}{5} \quad \text{e} \quad m_{BD}=m_{AC}=-\frac{8}{5} \quad .$$

Di conseguenza, le equazioni delle rette AD e BD saranno rispettivamente della forma:

$$y=\frac{1}{5}x+q \quad \text{e} \quad y=-\frac{8}{5}x+q \quad .$$

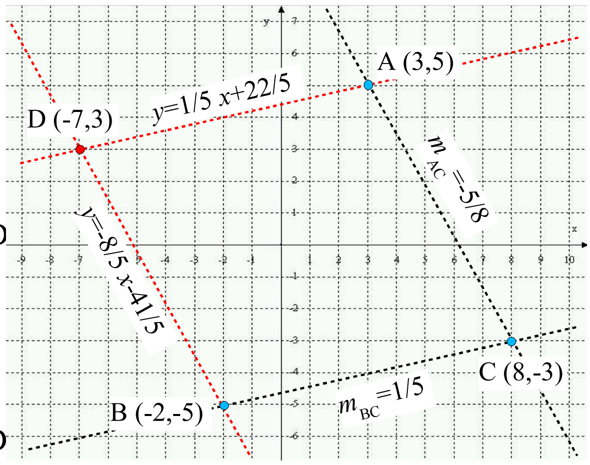

Fig. 34 Determinare il quarto vertice di un parallelogrammo

Imponiamo le condizioni di passaggio per i punti A e B rispettivamente:

- per A: $\frac{1}{5}\cdot 3+q=5 \quad \Rightarrow \quad q=5-\frac{3}{5}=\frac{22}{5}$;

- per B: $-\frac{8}{5}\cdot(-2)+q=-5 \quad \Rightarrow \quad q=-5-\frac{16}{5}=-\frac{41}{5}$.

Quindi le equazioni delle rette AD e BD sono rispettivamente $y=\frac{1}{5}x+\frac{22}{5}$ e $y=-\frac{8}{5}x-\frac{41}{5}$.

Il vertice D è il punto di intersezione delle due rette. Poniamo a sistema le loro equazioni:

$$\begin{cases} y=\frac{1}{5}x+\frac{22}{5} \\ y=-\frac{8}{5}x-\frac{41}{5} \end{cases} \quad \Rightarrow \quad \frac{1}{5}x+\frac{22}{5}=-\frac{8}{5}x-\frac{41}{5} \quad \Rightarrow \quad 9x=-63 \quad \Rightarrow \quad x_D=-7 \ .$$

Sostituendo in una delle due equazioni, ricaviamo: $y_D=-\frac{7}{5}+\frac{22}{5}=\frac{15}{5}=3$.

Quindi il vertice mancante ha coordinate $D(-7,3)$.

Il procedimento è senz'altro più laborioso di quello utilizzato in precedenza, ma ci permette di ragionare di più, e sfrutta più concetti importanti, sia algebrici che geometrici.

Esempio 3

Dato il punto $P(3,-2)$, cerchiamo le equazioni delle rette passanti per P e parallele agli assi cartesiani. In questo caso non possiamo applicare il metodo generale, ma la risposta è immediata.

- Una retta parallela all'asse *x* ha equazione del tipo $y=q$.
  Imponendo il passaggio per P, otteniamo $q=y_P=-2$, quindi la retta cercata ha equazione $y=-2$.
- Una retta parallela all'asse *y* ha equazione del tipo $x=k$.
  Imponendo il passaggio per P, otteniamo $k=x_P=3$, quindi la retta cercata ha equazione $x=3$.

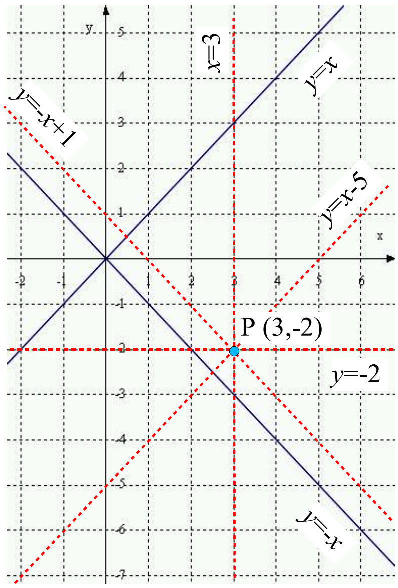

Fig. 35 Rette parallele agli assi ed alle bisettrici dei quadranti

Se, invece, cerchiamo le equazioni delle rette passanti per P e parallele alle bisettrici dei quadranti, possiamo applicare il metodo generale.

- La bisettrice del primo e del terzo quadrante ha equazione $y=x$, e quindi ha coefficiente angolare $m=1$.
  Ogni sua parallela ha un'equazione del tipo $y=x+q$.
  Imponendo il passaggio per P, otteniamo: $3+q=-2 \quad \Rightarrow \quad q=-5$.
  La retta cercata ha quindi equazione $y=x-5$.
- La bisettrice del secondo e del quarto quadrante ha equazione $y=-x$, e quindi ha coefficiente angolare $m=-1$. Ogni sua parallela ha un'equazione del tipo $y=-x+q$. Imponendo il passaggio per P, otteniamo: $-3+q=-2 \quad \Rightarrow \quad q=1$.

La retta cercata ha quindi equazione $y=x+1$.

◆ Condizione di perpendicolarità

In questo paragrafo cerchiamo di dimostrare che:

due rette sono perpendicolari se e soltanto se le loro equazioni hanno coefficienti angolari inversi (o reciproci) ed opposti.

In simboli: $\boldsymbol{r_1 \perp r_2} \quad \Leftrightarrow \quad \boldsymbol{m_1 = -\frac{1}{m_2}}$.

Per usare un linguaggio assolutamente non rigoroso, diremo che, per "costruire" una retta perpendicolare ad una retta data, dobbiamo prendere il coefficiente angolare di quest'ultima, "capovolgerlo" e cambiargli segno.
Come sempre, restano escluse da questa regola le rette parallele ad uno degli assi cartesiani.

Spiegazione

Consideriamo intanto la condizione sufficiente, limitandoci ad un esempio.

Ipotesi: $m_1 \cdot m_2 = -1$

Tesi: $r_1 \perp r_2$

Prendiamo la retta *AB* avente coefficiente angolare $m_1=5/3$ e la retta *BC* avente coefficiente angolare $m_2=-3/5$.
Poiché i loro coefficienti angolari sono opposti e inversi l'uno dell'altro, tali rette dovranno risultare perpendicolari.
Per rispettare i valori di m_1 ed m_2, prendiamo:

$\overline{AH}=3$, $\overline{BH}=5$, $\overline{AK}=5$, $\overline{KC}=3$.

I triangoli rettangoli *ABH* e *ACK* sono uguali per il 1° criterio di uguaglianza; in particolare $A\hat{B}H = K\hat{A}C$. Di conseguenza:

$B\hat{A}C = B\hat{A}H + K\hat{A}C = B\hat{A}H + A\hat{B}H = 90°$

perché gli angoli acuti di un triangolo rettangolo sono complementari.
Quindi le rette *AB* e *AC* sono perpendicolari c.v.d.
Il ragionamento può essere generalizzato per valori generici di *m*.

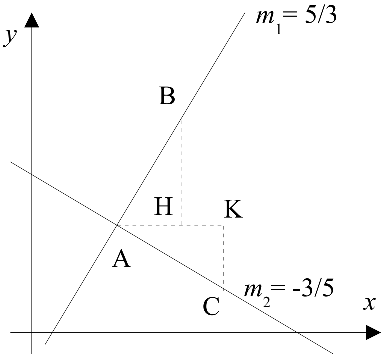

Fig. 36 Condizione di perpendicolarità

Dimostriamo poi la condizione necessaria:

Ipotesi: $r_1 \perp r_2$

Tesi: $m_1 \cdot m_2 = -1$

Consideriamo due rette perpendicolari r_1 ed r_2, che per semplicità prendiamo passanti per l'origine, di equazione rispettivamente $y=m_1 x$ ed $y=m_2 x$.
Consideriamo quindi il triangolo rettangolo di vertici:

$A(0,0)$, $B(1,m_1)$, $C(1,m_2)$ e calcoliamone le lunghezze dei lati:

$\overline{AB}=\sqrt{1+m_1^2}$; $\overline{AC}=\sqrt{1+m_2^2}$; $\overline{BC}=m_1-m_2$.

Imponiamo che per il triangolo rettangolo ABC valga il teorema di Pitagora:

$BC^2=AB^2+AC^2 \quad \Rightarrow \quad (m_1-m_2)^2=1+m_1^2+1+m_2^2 \quad \Rightarrow$

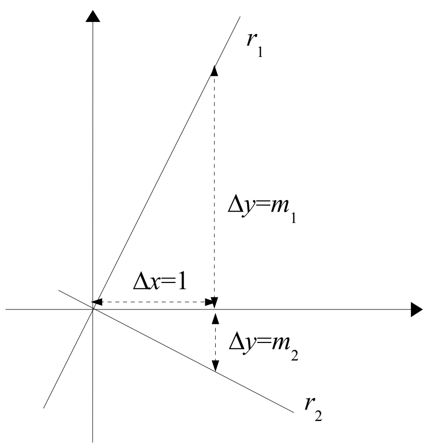

Fig. 37 Condizione di perpendicolarità

$$\Rightarrow \quad m_1^2 - 2m_1 m_2 + m_2^2 = m_1^2 + m_2^2 + 2 \quad \Rightarrow \quad -2m_1 m_2 = 2 \quad \Rightarrow \quad m_1 \cdot m_2 = -1 \quad \Rightarrow \quad m_1 = -\frac{1}{m_2} \qquad \text{c.v.d.}$$

Esempio 1

Conosciamo il punto $A(1,-3)$ e la retta r_1 di equazione: $3x+4y-2=0$.

Cerchiamo l'equazione della retta r_2 perpendicolare ad r_1 e passante per A.

Scriviamo l'equazione di r_1 in forma esplicita per calcolarne il coefficiente angolare:

$4y=-3x+2 \quad \Rightarrow \quad y=-\frac{3}{4}x+\frac{1}{2}$. Quindi: $m_1=-\frac{3}{4}$.

La retta r_2, essendo perpendicolare alla r_1, dovrà avere coefficiente angolare opposto ed inverso rispetto a quello di r_1:

$$m_2=-\frac{1}{m_1}=\frac{4}{3} \quad .$$

L'equazione di r_2 sarà quindi del tipo $y=\frac{4}{3}x+q$.

Imponiamo la condizione di passaggio per il punto A sostituendo le coordinate di A nell'equazione:

$$\frac{4}{3}\cdot 1+q=-3 \quad \Rightarrow \quad q=-3-\frac{4}{3}=-\frac{13}{3} \quad .$$

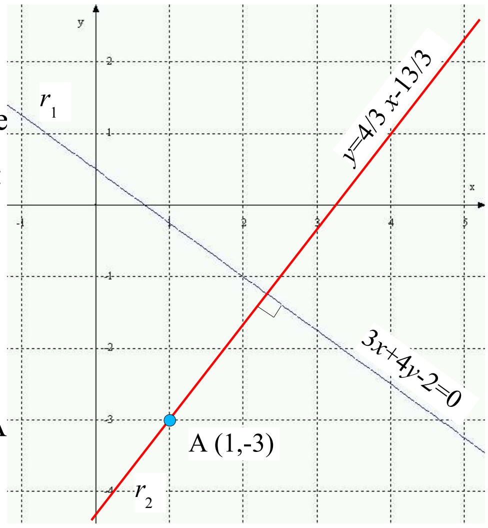

Fig. 38 Retta passante per un punto e perpendicolare ad una retta data

La retta r_2 ha pertanto equazione: $y=\frac{4}{3}x-\frac{13}{3}$.

Esempio 2

I punti $A(6,-4)$, $B(2,8)$, $C(0,-2)$ sono i vertici di un triangolo. Vogliamo determinare l'equazione dell'altezza CH relativa al lato AB.

Ricordiamo che una *altezza* di un triangolo è il *segmento condotto da un vertice perpendicolarmente alla retta del lato opposto.*

Cerchiamo il coefficiente angolare del lato AB:

$$m_{AB}=\frac{y_A-y_B}{x_A-x_B}=\frac{-4-8}{6-2}=-3 \quad .$$

Poiché l'altezza CH è perpendicolare al lato AB, avrà coefficiente angolare inverso ed opposto rispetto a quello del lato:

$$m_{CH}=-\frac{1}{m_{AB}}=\frac{1}{3} \quad .$$

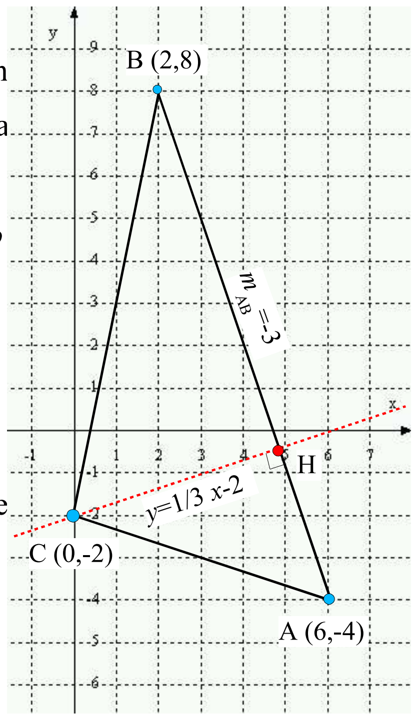

Fig. 39 Altezza di un triangolo

Pertanto, l'equazione dell'altezza è della forma $y=\frac{1}{3}x+q$.

Imponendo il passaggio per il vertice C, ricaviamo $q=-2$, in quanto il termine noto dell'equazione in forma esplicita corrisponde all'ordinata del punto di intersezione con l'asse y.

L'equazione dell'altezza CH è quindi: $y=\frac{1}{3}x-2$.

Come per la mediana, ricordiamo che l'equazione trovata descrive l'intera retta, e non soltanto il segmento CH.

Esempio 3

Cerchiamo l'area del triangolo considerato nell'esempio precedente, di vertici: $A(6,-4)$, $B(2,8)$, $C(0,-2)$.

Scegliendo come base il lato AB, la sua misura è:

$$AB=\sqrt{(6-2)^2+(8+4)^2}=\sqrt{16+144}=\sqrt{160}=4\sqrt{10}$$.

Per calcolare la lunghezza dell'altezza CH, dobbiamo determinare le coordinate del punto H, *piede* di tale altezza.

Abbiamo calcolato il coefficiente angolare del lato AB: $m_{AB}=-3$, quindi l'equazione del lato sarà della forma $y=-3x+q$.

Imponiamo, ad esempio, il passaggio per il punto B:

$$-3\cdot 2+q=8 \Rightarrow q=6+8=14$$.

Quindi, l'equazione del lato AB è $y=-3x+14$.

Mettiamo a sistema le equazioni dell'altezza CH, calcolata nell'esempio precedente, e del lato AB:

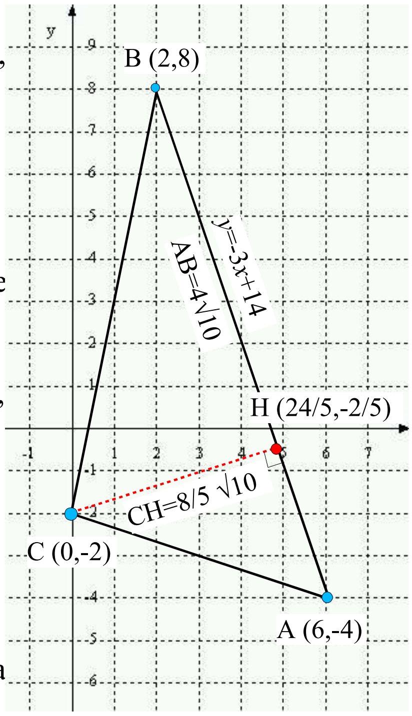

Fig. 40 Area del triangolo

$$\begin{cases} y=-3x+14 \\ y=\frac{1}{3}x-2 \end{cases} \Rightarrow -3x+14=\frac{1}{3}x-2 \Rightarrow \frac{-9x+42}{3}=\frac{x-6}{3} \Rightarrow 10x=48 \Rightarrow x_H=\frac{24}{5}$$.

Sostituendo in una delle due equazioni, ricaviamo:

$$y_H=-3\cdot\frac{24}{5}+14=\frac{-72+70}{5}=-\frac{2}{5}$$.

Quindi, il punto H, piede dell'altezza CH, ha coordinate: $H(\frac{24}{5},-\frac{2}{5})$.

Calcoliamo la misura dell'altezza:

$$CH=\sqrt{(\frac{24}{5})^2+(-\frac{2}{5}+2)^2}=\sqrt{(\frac{24}{5})^2+(\frac{8}{5})^2}=\sqrt{\frac{576}{25}+\frac{64}{25}}=\sqrt{\frac{640}{25}}=\frac{8}{5}\sqrt{10}$$.

L'area del triangolo misura: $Area_{ABC}=\frac{1}{2}\cdot AB\cdot CH=\frac{1}{2}\cdot 4\sqrt{10}\cdot\frac{8}{5}\sqrt{10}=32$.

In questi esercizi non indichiamo le unità di misura. Ricorda comunque che, se le lunghezze sono indicate in cm, le aree sono espresse in cm^2, e così via.

Esempio 4

Riprendiamo il triangolo di vertici $A(6,-4)$, $B(2,8)$, $C(0,-2)$, considerato negli esempi precedenti. Cerchiamo le coordinate dell'*ortocentro* del triangolo, ovvero del *punto di intersezione delle rette delle altezze.*

L'equazione dell'altezza CH è $y=\frac{1}{3}x-2$.

Calcoliamo il coefficiente angolare del lato BC:

$$m_{BC}=\frac{y_B-y_C}{x_B-x_C}=\frac{8+2}{2}=5 \quad .$$

Poiché l'altezza AK è perpendicolare al lato BC, avrà coefficiente angolare inverso ed opposto rispetto a quello del lato:

$$m_{AK}=-\frac{1}{m_{BC}}=-\frac{1}{5} \quad .$$

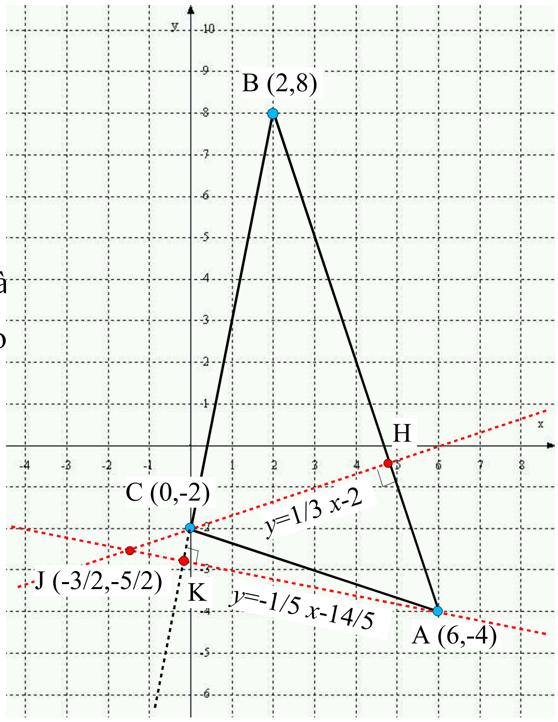

Fig. 41 Ortocentro di un triangolo

Quindi, l'equazione dell'altezza AK è della forma:

$$y=-\frac{1}{5}x+q \quad .$$

Imponiamo il passaggio per il vertice A:

$$-\frac{1}{5}\cdot 6+q=-4 \quad \Rightarrow \quad q=\frac{6}{5}-4=-\frac{14}{5} \quad .$$

L'equazione dell'altezza AK è perciò: $y=-\frac{1}{5}x-\frac{14}{5}$.

Per determinare il punto di intersezione J delle altezze, mettiamo a sistema le loro equazioni:

$$\begin{cases} y=\frac{1}{3}x-2 \\ y=-\frac{1}{5}x-\frac{14}{5} \end{cases} \Rightarrow \frac{1}{3}x-2=-\frac{1}{5}x-\frac{14}{5} \Rightarrow \frac{5x-30}{15}=\frac{-3x-42}{15} \Rightarrow 8x=-12 \Rightarrow x_J=-\frac{3}{2} \quad .$$

Sostituendo nell'equazione dell'altezza CH, ricaviamo:

$$y_J=\frac{1}{3}\cdot\left(-\frac{3}{2}\right)-2=-\frac{1}{2}-2=-\frac{5}{2} \quad .$$

Pertanto, l'ortocentro J del triangolo ABC ha coordinate: $J\left(-\frac{3}{2},-\frac{5}{2}\right)$.

Osserva che l'altezza AK, e di conseguenza anche l'ortocentro J, sono esterni al triangolo, in quanto il triangolo ABC è ottusangolo. E' per questo motivo che abbiamo specificato che l'altezza deve essere perpendicolare alla retta su cui giace il lato, e non necessariamente al lato stesso.

Trovando l'equazione dell'altezza relativa al lato AC, anch'essa esterna al triangolo, potremmo verificare che le coordinate dell'ortocentro soddisfano tale equazione, e quindi che l'ortocentro appartiene anche alla terza altezza.

◆ Luoghi geometrici

Ricordiamo che un *luogo geometrico* è l'*insieme di tutti e soli i punti che verificano una determinata proprietà*, che viene detta *proprietà caratteristica* del luogo geometrico.

Nel piano cartesiano possiamo tradurre la proprietà caratteristica in un'equazione che contenga le coordinate del generico punto appartenente al luogo geometrico.

Esempio 1

Dati i punti $A(1,3)$ e $B(5,7)$, cerchiamo l'equazione dell'asse del segmento AB.

Ricordiamo che, per definizione, *l'asse di un segmento è la retta perpendicolare al segmento stesso e passante per il suo punto medio.*

Troviamo le coordinate del punto medio M del segmento AB:

$$\begin{cases} x_M = \dfrac{1+5}{2} = 3 \\ y_M = \dfrac{3+7}{2} = 5 \end{cases} \text{. Quindi: } M(3,5) \text{ .}$$

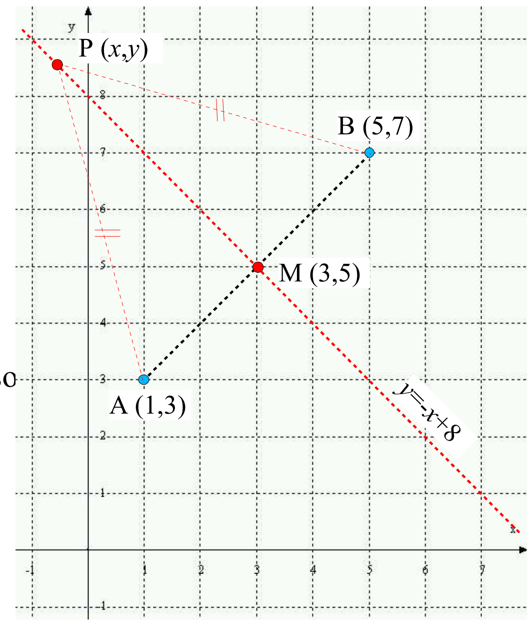

Fig. 42 Asse di un segmento

Calcoliamo il coefficiente angolare della retta AB:

$$m_{AB} = \frac{y_B - y_A}{x_B - x_A} = \frac{7-3}{5-1} = 1 \text{ .}$$

Il coefficiente angolare dell'asse sarà opposto ed inverso rispetto a quello di AB: $m_{asse} = -\dfrac{1}{m_{AB}} = -1$.

Quindi l'equazione dell'asse avrà la forma $y = -x + q$.

Imponendo il passaggio per M, otteniamo:

$$-3 + q = 5 \quad \Rightarrow \quad q = 8 \text{ .}$$

L'equazione dell'asse del segmento AB è pertanto $y = -x + 8$.

Fino a questo punto, abbiamo utilizzato semplicemente le nozioni del precedente paragrafo. In geometria euclidea, però, abbiamo dimostrato che i punti dell'asse di un segmento possiedono una proprietà caratteristica:

L'asse di un segmento è il luogo geometrico dei punti del piano che sono equidistanti dagli estremi del segmento.

In altri termini:

- se un punto P del piano appartiene all'asse del segmento AB, allora $PA = PB$;

- se un punto P del piano ha la stessa distanza dai punti A e B, allora P appartiene all'asse del segmento AB.

Determiniamo ancora l'equazione dell'asse di AB utilizzando tale proprietà caratteristica.

Prendiamo un punto generico $P(x, y)$ del piano ed "imponiamogli" di appartenere all'asse di AB. Le sue coordinate dovranno soddisfare la proprietà $\overline{PA}=\overline{PB}$, ovvero:

$$\sqrt{(x_P-x_A)^2+(y_P-y_A)^2}=\sqrt{(x_P-x_B)^2+(y_P-y_B)^2} \quad .$$

Sostituiamo le coordinate di A e B ed eleviamo al quadrato entrambi i membri:

$$(x-1)^2+(y-3)^2=(x-5)^2+(y-7)^2 \quad .$$

Svolgiamo i quadrati di binomio:

$$x^2-2x+1+y^2-6y+9=x^2-10x+25+y^2-14y+49 \quad .$$

Osserviamo che i termini di secondo grado si elidono a vicenda, in accordo con il fatto che l'asse di un segmento è una retta. Ricaviamo l'equazione dell'asse di AB:

$$8x+8y-64=0 \quad \Rightarrow \quad x+y-8=0 \quad \Rightarrow \quad y=-x+8 \quad .$$

Naturalmente, il risultato coincide con quello del procedimento precedente.

Esempio 2

I punti $A(1,3)$, $B(5,7)$, $C(7,-3)$ sono i vertici di un triangolo.

Cerchiamo le coordinate del *circocentro* K del triangolo ABC, ovvero del *punto di intersezione degli assi dei lati* del triangolo.

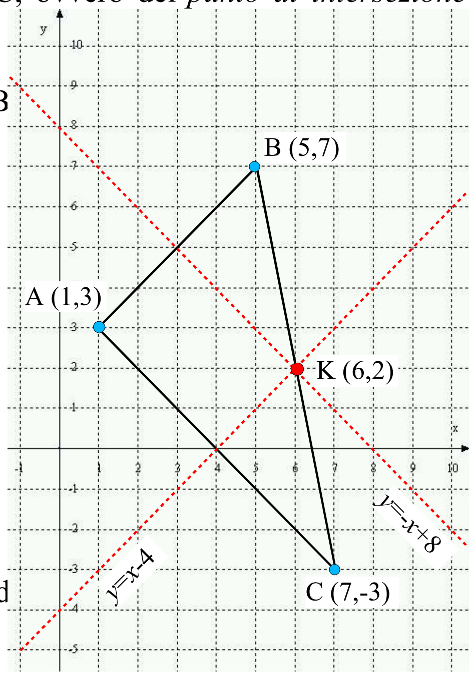

Fig. 43 Circocentro di un triangolo

Nell'esempio precedente abbiamo trovato che l'asse del lato AB ha equazione $y=-x+8$.

Determiniamo l'equazione dell'asse del lato AC.

Volendo utilizzare la definizione di asse:

- determiniamo il punto medio del lato AC: $N(4,0)$;
- calcoliamo il coefficiente angolare del lato AC:
  $$m_{AC}=\frac{\Delta y}{\Delta x}=\frac{-3-3}{7-1}=-1 \quad ;$$
- il coefficiente angolare dell'asse di AC sarà inverso ed opposto di quello del lato: $m_{asse}=-\frac{1}{m_{AC}}=+1$;

  quindi l'equazione dell'asse sarà della forma $y=x+q$;
- imponiamo il passaggio per il punto medio N del lato AC: $4+q=0 \quad \Rightarrow \quad q=-4$;
- l'equazione dell'asse del lato AC è quindi: $y=x-4$.

Se, invece, preferiamo utilizzare la proprietà caratteristica dell'asse come luogo geometrico, allora il punto generico $P(x, y)$ apparterrà all'asse del lato AC se e solo se $PA=PC$.

Sostituiamo le coordinate di A e C ed eleviamo al quadrato entrambi i membri:

$$(x-1)^2+(y-3)^2=(x-7)^2+(y+3)^2 \quad \Rightarrow$$

$$x^2-2x+1+y^2-6y+9=x^2-14x+49+y^2+6y+9 \quad \Rightarrow$$

$$12x-12y-48=0 \quad \Rightarrow \quad y=x-4 \quad .$$

Ritroviamo, quindi, che l'asse del lato AC ha equazione $y=x-4$.

Per determinare il punto di intersezione dei due assi, mettiamo a sistema le loro equazioni:

$$\begin{cases} y=-x+8 \\ y=x-4 \end{cases} \Rightarrow \quad x-4=-x+8 \quad \Rightarrow \quad 2x=12 \quad \Rightarrow \quad x_K=6 \quad \Rightarrow \quad y_K=2 \quad .$$

Di conseguenza, il circocentro K del triangolo ABC ha coordinate $K(6, 2)$.

Anche in questo caso, trovando con uno qualunque dei due metodi l'equazione dell'asse del lato BC, potremmo verificare che il circocentro K appartiene anche all'asse del terzo lato.

In alternativa, possiamo verificare che $KB=KC$ e che quindi il punto K, essendo equidistante dagli estremi del segmento BC, appartiene all'asse di tale segmento.

Ricordiamo poi che:

- in un triangolo acutangolo, il circocentro risulta interno al triangolo stesso;
- in un triangolo ottusangolo, il circocentro è esterno al triangolo;
- in un triangolo rettangolo, come quello considerato nel nostro esempio, il circocentro coincide con il punto medio dell'ipotenusa.

Esempio 3

Riprendiamo il triangolo di vertici $A(1,3)$, $B(5,7)$, $C(7,-3)$, che abbiamo studiato nell'esempio precedente. Cerchiamo l'equazione della *circonferenza che passa per i tre vertici*, detta *circonferenza circoscritta* al triangolo.

Ricordiamo che il punto di intersezione degli assi dei lati è detto *circocentro* in quanto è il *centro della circonferenza circoscritta* al triangolo, avendo la stessa distanza dai tre vertici.

Ricordiamo anche che la *circonferenza è il luogo geometrico dei punti del piano che hanno una stessa distanza, detta raggio, da un punto dato, detto centro.*

Nel nostro caso il centro è il punto $K(6, 2)$, mentre il raggio è dato da una qualunque delle distanze KA, KB, KC. Ad esempio: $r=KA=\sqrt{5^2+1^2}=\sqrt{26}$.

Prendiamo ora un punto generico $P(x, y)$ del piano ed "imponiamogli" di appartenere alla circonferenza; la distanza di P dal centro K dovrà essere uguale al raggio, e quindi: $PK=r$.

Sostituendo le coordinate di P e di K, otteniamo: $\sqrt{(x-6)^2+(y-2)^2}=\sqrt{26}$.

Innalziamo al quadrato entrambi i membri e svolgiamo i quadrati di binomio:

$$x^2-12x+36+y^2-4y+4=26 \quad .$$

Trasportiamo tutti i termini a primo membro, sommiamo i termini noti e ordiniamo l'equazione secondo le potenze decrescenti delle variabili.

L'equazione della circonferenza circoscritta al triangolo ABC, ovvero passante per i punti A, B, C, è quindi:

$$x^2+y^2-12x-4y+14=0 \quad .$$

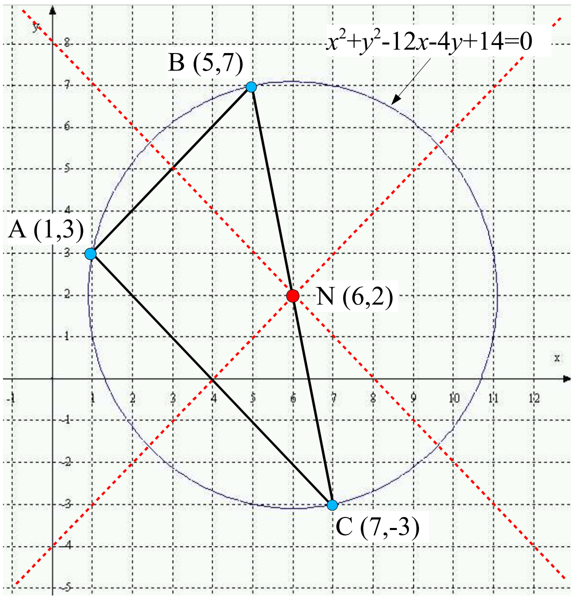

Fig. 44 Circonferenza circoscritta ad un triangolo

Possiamo assicurarci che la circonferenza passi per i vertici del triangolo verificando che le loro coordinate rendano vera l'equazione della circonferenza.

- Per A: $1+9-12-12+14=0$ *vero!*
- Per B: $25+49-60-28+14=0$ *vero!*
- Per C: $49+9-84+12+14=0$ *vero!*

Naturalmente, l'equazione ottenuta non è di primo grado, in quanto il suo grafico non è una retta.

Esercizi sulla retta

Distanza tra due punti

Calcola la distanza tra le seguenti coppie di punti:

1. $(-2,3);(-2,-5)$; $(-4,1+\sqrt{7});(2,1+\sqrt{7})$ $R:8;6$
2. $(3-\sqrt{2},-9);(8-\sqrt{2},-9)$; $(2-\pi,-4);(2-\pi,-1)$ $R:5;3$
3. $(3,-2);(2,1)$; $(-3,-6);(-2,3)$ $R:\sqrt{10};\sqrt{82}$
4. $(2\,4);(-5,7)$; $(\frac{1}{2},-2);(\frac{3}{4},1)$ $R:\sqrt{58};\frac{1}{4}\sqrt{145}$
5. $(5,-3);(-\frac{1}{4},-3)$; $(-2,7);(-2,\frac{1}{4})$ $R:\frac{21}{4};\frac{27}{4}$
6. $(0,\frac{1}{4});(\frac{3}{4},0)$; $(-\frac{3}{5},\sqrt{7});(\frac{1}{5},\sqrt{7})$ $R:\frac{\sqrt{10}}{4};\frac{4}{5}$
7. $(1+\sqrt{3},1+\sqrt{2});(\sqrt{3},1)$; $(1-2\sqrt{2},3\sqrt{5});(1+\sqrt{2},-\sqrt{5})$ $R:\sqrt{3};7\sqrt{2}$
8. Calcola le misure del perimetro e dell'area del trapezio rettangolo ABCD i cui vertici hanno le seguenti coordinate: $A(-1,-1),\ B(6,-1),\ C(4,2),\ D(-1,2)$. $R:2p=15+\sqrt{13};S=18$
9. Dati i punti $A(3,6)$, $B(13,1)$, $C(1,-5)$, verifica che il triangolo ABC è isoscele e calcolane il perimetro. $R:2p=16\sqrt{5}$
10. Considera i punti $A(2,1)$, $B(-4,\frac{7}{2})$, $C(-\frac{16}{5},-\frac{29}{10})$.

    Verifica che il triangolo ABC è isoscele e calcolane il perimetro. $R:13+\frac{4}{5}\sqrt{65}$
11. Verifica che il quadrilatero di vertici $A(-3,1)$, $B(2,-2)$, $C(5,2)$, $D(0,5)$ è un parallelogramma e calcolane il perimetro. $R:10+2\sqrt{34}$

    (*Una proprietà caratteristica del parallelogramma è quella di avere i lati opposti uguali*).
12. Verifica che il quadrilatero di vertici $A(5,-5)$, $B(13,4)$, $C(1,5)$, $D(-7,-4)$ è un rombo e calcolane il perimetro. $R:4\sqrt{145}$

    (*Una proprietà caratteristica del rombo è quella di avere tutti i lati uguali*).
13. Verifica che per il triangolo di vertici $A(6,4)$, $B(-6,-2)$, $C(10,-4)$ vale il teorema di Pitagora, e quindi è rettangolo. Calcola area e perimetro. $R:S=60;2p=10\sqrt{5}+2\sqrt{65}$

    (*Il teorema di Pitagora afferma che un triangolo è rettangolo se e soltanto se la somma dei quadrati di due dei lati è uguale al quadrato del terzo lato*).
14. Verifica che il triangolo di vertici $A(2,6)$, $B(-2,2)$, $C(-2\sqrt{3},\ 4+2\sqrt{3})$ è equilatero. Trovane l'area e il perimetro. $R:S=8\sqrt{3};2p=12\sqrt{2}$

15.Verifica che il triangolo di vertici $A(-3,-2)$, $B(-5,0)$, $C(1,4)$ è isoscele, e calcola l'area e il perimetro. $R: S=10 ; 2p=2\sqrt{2}+4\sqrt{13}$

Punto medio di un segmento

16.Dati i punti $A(\frac{1}{2},-\frac{3}{2})$, $B(-\frac{1}{2},4)$, $C(3,-2)$, calcola le coordinate dei punti medi dei segmenti AB e BC. $R:(0,\frac{5}{4});(\frac{5}{4},1)$

17.Dati i punti $A(1,2)$ e $B(\frac{15}{2},3)$, calcola la distanza del punto $P(3,5)$ dal punto medio del segmento AB. $R:\frac{5}{4}\sqrt{5}$

18.Dati i punti $P(10,2)$ ed $M(6,4)$, determina le coordinate del punto *P'*, simmetrico di *P* rispetto a *M*. $R: P'(2,6)$

19.Di un parallelogrammo *ABCD* sono note le coordinate dei vertici $A(2,5)$, $B(4,1)$ e del punto $M(7,4)$ di intersezione delle diagonali. Determina il perimetro del parallelogrammo.
(*I vertici C e D sono i simmetrici di A e B rispetto ad M*) $R: 2p=4(\sqrt{5}+\sqrt{17})$

20.E' dato il triangolo di vertici $A(2,-10)$, $B(10,-2)$, $C(-6,10)$.
Calcola la misura delle mediane. $R: \overline{AM}=14 ; \overline{BN}=2\sqrt{37} ; \overline{CL}=20$

21.Dato il triangolo di vertici $A(2,4)$, $B(8,2)$, $C(8,8)$:
a) calcolane il perimetro; $R: 2p=2(\sqrt{10}+\sqrt{13}+3)$
b) verifica che il triangolo è equivalente alla metà del quadrato di lato BC.
(*Due figure sono equivalenti se hanno la stessa area. Base ed altezza del triangolo ABC sono parallele agli assi cartesiani*).

22.Dato il triangolo di vertici $A(-2,4)$, $B(10,-2)$, $C(6,10)$, calcolane:
a) il perimetro; $R: 2p=2(5+2\sqrt{10}+3\sqrt{5})$
b) la lunghezza delle mediane. $R: \overline{AM}=10 ; \overline{BN}=\sqrt{145} ; \overline{CL}=\sqrt{85}$
c) Verifica poi che il perimetro del triangolo *LMN* è la metà del perimetro di *ABC*.

23.Dato il triangolo di vertici $A(-1,2)$, $B(3,5)$, $C(5,-1)$, calcola:
a) le lunghezze dei lati; $R: 5 ; 2\sqrt{10} ; 3\sqrt{5}$
b) le coordinate dei punti medi dei lati; $R:(1,\frac{7}{2});(4,2);(2,\frac{1}{2})$
c) le lunghezze delle mediane. $R: 5 ; \frac{1}{2}\sqrt{85} ; \frac{1}{2}\sqrt{145}$

24.Dati i punti $A(3,5)$, $B(5,7)$, $C(1,9)$, verifica che il triangolo *ABC* è isoscele e determinane perimetro ed area. $R: 2p = 2\sqrt{2} + 4\sqrt{5}; S = 6$

(*Conoscendo la base ed il lato obliquo, l'altezza di un triangolo isoscele si ottiene dal teorema di Pitagora*).

25.Dati i punti $A(5,1)$, $B(-2,3)$, $C(2,\frac{15}{4})$, verifica che il triangolo *ABC* è isoscele e determinane perimetro ed area. $R: 2p = \sqrt{53} + \frac{1}{2}\sqrt{265}; S = \frac{53}{8}$

26.Dati i punti $A(1,3)$, $B(\frac{1}{2},\frac{3}{2})$, $C(2,1)$, verifica che il triangolo *ABC* è isoscele e determinane perimetro ed area. $R: 2p = \sqrt{5} + \sqrt{10}; S = \frac{5}{4}$

Equazione della retta

27.Traccia le rette associate alle seguenti equazioni lineari, indicando anche, per ciascuna di esse, quando esistono, il coefficiente angolare e l'ordinata all'origine:

$2x+3y-6=0$; $2y-7=0$; $4x+5y=0$; $3x-y-3=0$; $x-4y=0$; $-y+2=0$

$2x+y+4=0$; $x+y=0$; $4x+2y=0$; $5x+2=0$; $-2x+5y-1=0$; $x+y-1=0$;

$x-3y+3=0$; $3x-6y+4=0$.

(*Prendi per ogni grafico l'unità di misura corrispondente ad un numero di quadretti sufficiente a disegnare la retta in maniera precisa*).

28.Scrivi le equazioni delle rette:

a) passante per $A(-2,\sqrt{2})$ e parallela all'asse *x*. $R: y = \sqrt{2}$

b) passante per $B(\frac{3}{4},-\frac{1}{2})$ e parallela all'asse *y*. $R: x = \frac{3}{4}$

29.Disegna le rette di equazione $x-1=0$, $x-5=0$, $y-2=0$, $y-4=0$ e calcola perimetro e area del rettangolo ottenuto. $R: 2p = 12; S = 8$

30.Dati i punti $A(-1,\sqrt{3})$, $B(3,\sqrt{3})$, $C(5,1)$, $D(-1,1)$:

a) verifica che il quadrilatero ABCD è un trapezio rettangolo;

b) scrivi le equazioni delle basi; $R: y = \sqrt{3}; y = 1$

c) determina l'area del trapezio. $R: 5(\sqrt{3}-1)$

31.Determina il perimetro del quadrilatero di vertici: $A(-\frac{1}{2},4)$, $B(\frac{11}{2},\frac{13}{2})$, $C(\frac{11}{2},-\frac{11}{2})$, $D(-\frac{1}{2},-3)$. Di che genere di quadrilatero si tratta? $R: 2p = 32;$ *trapezio isoscele*

Retta passante per due punti

Disegna le rette passanti per le seguenti coppie di punti e di ciascuna di esse determina la corrispondente equazione:

32. $A(-2,\frac{1}{3})$ e $B(-1,-\frac{1}{2})$; $C(5,10)$ e $D(2,\frac{14}{5})$ $R: y=-\frac{5}{6}x-\frac{4}{3}; y=\frac{12}{5}x-2$

33. $O(0,0)$ ed $E(-\frac{7}{2},\frac{21}{5})$; $F(-9,-3)$ e $G(9,-15)$ $R: y=-\frac{6}{5}x; y=-\frac{2}{3}x-9$

34. $H(\frac{3}{2},10)$ e $I(6,7)$; $L(1,-\sqrt{5})$ e $M(-3,2\sqrt{5})$ $R: y=-\frac{2}{3}x+11; y=-\frac{3\sqrt{5}}{4}x-\frac{\sqrt{5}}{4}$

35. $N(-3,0)$ e $P(1,2)$; $Q(1,-3)$ ed $R(2,5)$ $R: x-2y+3=0; y=8x-11$

36. Disegna la retta di equazione $y=2x-3$ e verifica analiticamente che essa passa per il punto $A(-3,-9)$ e non passa per il punto $B(\frac{1}{8},-\frac{5}{2})$.

37. Traccia la retta di equazione $y=\frac{1}{2}x+3$. Sulla retta determina i punti *A* e *B* tali che $x_A=-1$ e $y_B=4$. Calcola la misura del segmento *AB*. $R: \frac{3}{2}\sqrt{5}$

38. Scrivi l'equazione della retta che taglia l'asse *x* nel punto di ascissa -1 e l'asse *y* nel punto di ordinata 6. $R: 6x-y+6=0$

39. Verifica che i punti $(2,0)$; $(1,-\frac{1}{2})$; $(\frac{1}{3},-\frac{5}{6})$ sono allineati.

40. Verifica che i punti $(1,-\frac{5}{2})$; $(2,-2)$; $(-4,-5)$ sono allineati.

Intersezione di due rette

Determina, se esistono, i punti di intersezione tra le seguenti coppie di rette:

41. $3x+2y=21$; $2x-3y=1$ $R:(5,3)$
42. $2x-y=0$; $3x+2y=7$ $R:(1,2)$
43. $3x-4y=5$; $5x+y=16$ $R:(3,1)$
44. $x-\sqrt{2}y=1$; $\sqrt{2}x-2y+2=0$ $R: \emptyset$
45. $x+y=5$; $x-y=3$ $R:(4,1)$
46. Scrivi l'equazione della retta passante per l'intersezione delle rette $x+3y+1=0$ e $2x-y-5=0$ e che taglia l'asse *y* nel punto di ordinata 5. $R: 3x+y-5=0$
47. Scrivi l'equazione della retta *r* che taglia gli assi cartesiani nei punti $(3,0)$ e $(0,3)$ e della retta *s* che taglia gli assi nei punti $(-5,0)$ e $(0,-\frac{3}{2})$. Determina il punto P di intersezione

tra r ed s. $[r: x+y-3=0; s: 3x+10y+15=0; P(\frac{45}{7}; -\frac{24}{7})]$

Determina le coordinate del *baricentro* (punto di intersezione delle mediane) del triangolo avente i seguenti vertici:

48. $A(-2,1)$; $B(8,5)$; $C(2,7)$ $R: (\frac{8}{3}, \frac{13}{3})$

49. $A(1,8)$; $B(3,1)$; $C(-4,-3)$ $R: (0,2)$

50. $A(5,0)$; $B(1,2)$; $C(-3,2)$ $R: (1, \frac{4}{3})$

51. $A(0, \frac{1}{3})$; $B(1,-2)$; $C(4,-1)$ $R: (\frac{5}{3}, -\frac{8}{9})$

52. Le rette r, s, t, passanti rispettivamente per i lati AB, BC, AC di un triangolo hanno le seguenti equazioni: $r: \ y=-\frac{1}{2}x+\frac{1}{2}$, $s: \ y=-5x+14$, $t: \ y=\frac{1}{7}x+\frac{26}{7}$.

Determina le coordinate dei vertici e del baricentro G del triangolo.

$[A(-5,3); B(3,-1); C(2,4); G(0,2)]$

53. Trova i vertici del triangolo determinato dalle seguenti rette:

$x+4y=3$; $3x+2y=17$; $x-y=-1$. $R: (-\frac{1}{5}, \frac{4}{5}); (\frac{31}{5}, -\frac{4}{5}); (3,4)$

54. I lati di un triangolo giacciono sulle rette di equazione $y-3=0$, $x-2y+4=0$, $x-y-1=0$. Determina le coordinate dei vertici, il perimetro e l'area.

$R: (2,3); (4,3); (6,5); 2p=2(1+\sqrt{2}+\sqrt{5}); S=2$

55. Dato il triangolo di vertici $A(0,1)$, $B(2\sqrt{3},3)$, $C(0,5)$, determina le coordinate del baricentro G e verifica che esso è equidistante dai tre vertici.

Trova una motivazione geometrica di tale proprietà. $[G(\frac{2\sqrt{3}}{3}, 3)]$

Condizione di parallelismo

Scrivi l'equazione della retta passante per il punto dato e parallela alla retta data:

56. $A(1,-3)$; $3x+2y+5=0$ $R: y=-\frac{3}{2}x-\frac{3}{2}$

57. $O(0,0)$; $x+4y-1=0$ $R: y=-\frac{1}{4}x$

58. $A(-3,1)$; $2x-y=5$ $R: y=-\frac{3}{2}x-\frac{3}{2}$

59. $A(\frac{1}{2},2)$; $3x+2y=6$ $\qquad R: 6x+4y=11$

60. $A(\frac{1}{4},-3)$; $2x-5y=0$ $\qquad R: 4x-10y-31=0$

61. Scrivi l'equazione della retta passante per il punto di intersezione delle rette di equazione:

$x-3y+2=0$ e $5x+6y-4=0$ e parallela alla retta $4x+y+5=0$. $\qquad R: y=-4x+\frac{2}{3}$

62. Scrivi l'equazione della retta passante per il punto di intersezione delle rette di equazione:

$x-2y+5=0$ e $5x+y+3=0$ e parallela alla retta $3x+y-1=0$. $\qquad R: 3x+y+1=0$

63. Per il punto di intersezione delle rette di equazioni $2x+y-3=0$ e $x+5y-1=0$ conduci:

a) le parallele agli assi *x* e *y*; $\qquad R: y=-\frac{1}{9}; x=\frac{14}{9}$

b) la parallela alla retta $2x+3y+1=0$. $\qquad R: 18x+27y=25$

64. Determina l'equazione della retta *s* parallela alla retta $r: 2x-8y-9=0$ e passante per il punto medio del segmento di estremi $A(1,7)$ e $B(3,-3)$. $\qquad R: y=\frac{1}{4}x+\frac{3}{2}$

65. Determina l'equazione della retta passante per $A(2,-1)$ e parallela alla congiungente i punti $P(2,3)$ e $Q(3,0)$. $\qquad R: 3x+y=5$

66. Determina l'equazione della retta passante per $A(-1,0)$ e parallela alla congiungente i punti $P(3,1)$ e $Q(-2,-3)$. $\qquad R: 4x-5y+4=0$

67. Del parallelogrammo *ABCD* sono noti i tre vertici consecutivi $A(-1,3)$, $B(-2,-1)$, $C(4,-2)$. Determina le coordinate del quarto vertice. $\qquad R: D(5,2)$

68. La retta *r* di equazione $3x-2y+4=0$ interseca l'asse *y* nel punto A. Dal punto $B(4,1)$ conduci la retta *s* parallela ad *r* e chiama C il suo punto di incontro con l'asse *x*.

Determina il vertice D del parallelogrammo ABCD. $\qquad [D(-\frac{2}{3},1)]$

69. Determina le coordinate dei vertici del triangolo individuato dalle rette di equazione:

$x+y=1$, $x-2y=3$, $3x-5y-15=0$.

Trova poi le equazioni delle parallele ai lati condotte per i vertici del triangolo.

$R: (\frac{5}{3},-\frac{2}{3}); (-\frac{3}{2},\frac{5}{2}); (-\frac{39}{7},-\frac{30}{7}); 15x-9y=31; 2x-4y+13=0; 7x+7y+69=0$

70. Dato il triangolo di vertici $A(8,-2)$, $B(12,2)$, $C(8,6)$:

a) verifica che ABC è un triangolo rettangolo e isoscele;

b) determina il vertice D del parallelogrammo ABCD. $\qquad [D(4,2)]$

c) Che genere di parallelogrammo è ABCD?

71. I punti $A(-7,-1)$, $B(2,0)$, $C(0,2)$ sono tre vertici, non necessariamente consecutivi, di un parallelogrammo. Determina le coordinate del quarto vertice D nei casi seguenti:

a) sia AB una diagonale; $[D_1(-5,-3)]$

b) sia AC una diagonale; $[D_2(-9,1)]$

c) sia BC una diagonale. $[D_3(9,3)]$

72. Dati i punti $A(1,1)$, $B(5,-2)$, $C(3,4)$, determina le coordinate di ciascuno degli altri tre punti D, E, F, che, considerati uno per volta, costituiscono, assieme ad A, B, C, i vertici di un parallelogrammo. Verifica, poi, che il triangolo DEF è simile al triangolo ABC.
(*Condizione necessaria e sufficiente perché due triangoli siano simili è che i lati corrispondenti siano in proporzione*) $[D(-1,7), E(3,-5), F(7,1)]$

73. Dato il quadrilatero di vertici $A(-8,-6)$, $B(7,3)$, $C(1,7)$, $D(-4,4)$:

a) verifica che esso ha due lati opposti paralleli; $[m_{AB}=m_{CD}=\frac{3}{5}]$

b) calcola il coefficiente angolare dei lati obliqui; $[m_{AD}=\frac{5}{2},\ m_{BC}=-\frac{2}{3}]$

c) verifica che il segmento congiungente i punti medi M ed N dei lati AD e BC è uguale alla semisomma degli altri due lati; $[MN=2\sqrt{34}]$

d) determina il punto E di intersezione delle rette AD e BC; $[E(-2,9)]$

e) verifica, infine, che i punti D ed M suddividono il segmento AE in tre parti uguali, ed anche i punti C ed N suddividono in tre parti uguali il segmento BE.

Condizione di perpendicolarità

74. Verifica che la retta passante per i punti $A(2,-3)$ e $B(-4,1)$ è perpendicolare alla retta di equazione $3x-2y+8=0$.

75. Verifica che il quadrilatero di vertici $A(-6,10)$, $B(0,0)$, $C(5,3)$, $D(-1,13)$ è un rettangolo e determina l'area del cerchio ad esso circoscritto. $R: S=\frac{85}{2}\pi$
(*Una circonferenza è circoscritta ad un poligono quando passa per tutti i suoi vertici*).

Scrivi l'equazione della retta passante per il punto dato e perpendicolare alla retta data:

76. $A(1,2)$; $3x+5y-20=0$ $R: 5x-3y+1=0$

77. $P(-1,1)$; $2x+5y-3=0$ $R: y=\frac{5}{2}x+\frac{7}{2}$

78. $A(-3,2)$; $y=5x+3$ $R: x+5y=7$

79. $O(0,0)$; $2x-3y+\sqrt{11}=0$ $R: 3x+2y=0$

80. $A(2,-\frac{1}{3})$; $3x-2y=7$ $R: 2x+3y=3$

81. Dati i vertici $A(4,2)$, $B(8,4)$, $C(6,8)$ del parallelogrammo ABCD, determina le coordinate del quarto vertice D. Verifica che ABCD è un quadrato e determinane l'area e il perimetro. $R: D(2,6); S=20; 2p=8\sqrt{5}$

82. Scrivi l'equazione della retta *r* passante per il punto $A=s\cap t$ e perpendicolare alla retta *u*, con: $s:\ 2x-3y=1$; $t:\ x-2y-2=0$; $u:\ x-6y=0$. $R: y=-6x-27$

83. Le rette di equazione $x-y-1=0$, $y=-x+11$, $y=6+x$, $x+y+5=0$ individuano un quadrilatero. Verifica che si tratta di un rettangolo e determinane i vertici.
Verifica poi che le diagonali del rettangolo sono uguali e che si dividono scambievolmente a metà (cioè che hanno lo stesso punto medio M).

$[vertici: (6,5); (\frac{5}{2},\frac{17}{2}); (-\frac{11}{2},\frac{1}{2}); (-2,-3); M(\frac{1}{4},\frac{11}{4})]$

84. Scrivi l'equazione della retta passante per il punto di intersezione delle rette di equazione $3x-y+1=0$ e $x+2y-8=0$ e perpendicolare alla retta di equazione $2x+y-10=0$.
$R: 7x-14y+44=0$

85. Verifica che, congiungendo i punti medi del quadrilatero di vertici $A(-4,8)$, $B(-4,2)$, $C(8,2)$, $D(4,18)$, si ottiene un rettangolo. Calcola, inoltre, la misura del perimetro del rettangolo e quella della sua diagonale. $R: 2p=14\sqrt{5}; d=5\sqrt{5}$

86. Determina l'equazione della retta *r*, condotta perpendicolarmente al segmento AB nel suo punto medio M, sapendo che: $A(2,3)$ e $B(1,2)$. $R: y=-x+4$

87. Conduci la perpendicolare alla retta di equazione $2x+y=5$ passante per il punto $P(-5,3)$ e trova le coordinate del piede della perpendicolare. $R: x-2y+11=0; (-\frac{1}{5},\frac{27}{5})$

88. Trova la proiezione ortogonale H del punto $P(-3,4)$ sulla retta *r* di equazione $2x-3y=8$.
(*Conduci la retta passante per P e perpendicolare ad r e trova il punto di intersezione tra la retta trovata ed r*). $R: H(1,-2)$

89. Considera il triangolo di vertici $A(4,4)$, $B(-2,2)$, $C(2,-4)$. Determina:
a) le equazioni dei lati; $[AB:\ x-3y+8=0;\ BC:\ 3x+2y+2=0;\ AC:\ 4x-y-12=0]$
b) le equazioni delle altezze. $[AH: 2x-3y+4=0;\ BK: x+4y-6=0;\ CJ: 3x+y-2=0]$
c) Verifica che le altezze si incontrano in uno stesso punto Q (*ortocentro*). $[Q(\frac{2}{11,}\frac{16}{11})]$

Determina l'ortocentro dei triangoli aventi i seguenti vertici:

90. $A(-3,1)$; $B(0,3)$; $C(1,-2)$ $R: (-\frac{21}{17},\frac{23}{17})$

91. $A(-7,7)$; $B(-1,-1)$; $C(5,11)$ $R:(-3,5)$

92. $A(-4,3)$; $B(1,8)$; $C(1,2)$ $R:(0,3)$

93. Verifica che il triangolo avente vertici $A(-2,3)$, $B(-6,-3)$, $C(4,-1)$ è rettangolo, e che il punto medio M dell'ipotenusa è equidistante dai tre vertici. $R: \overline{AM}=\overline{BM}=\overline{CM}=\sqrt{26}$

94. Dati i punti $A(6,-2)$, $B(-11,-3)$, $C(4,3)$:

a) verifica che il triangolo ABC è rettangolo;

b) determinane perimetro e area; $[2p=\sqrt{29}(\sqrt{10}+4)]; S=\frac{87}{2}$

c) calcola l'area del cerchio circoscritto al triangolo. $S=\frac{145}{2}\pi$

95. Dati i punti $A(0,-1)$, $B(5,1)$, $C(7,6)$, $D(2,4)$:

a) verifica che il quadrilatero ABCD è un rombo;

b) calcolane l'area e il perimetro; $[S=21; 2p=4\sqrt{29}]$

c) verifica che le sue diagonali hanno lo stesso punto medio M. $[M(\frac{7}{2},\frac{5}{2})]$

96. E' dato il quadrilatero di vertici: $A(-3,0)$, $B(8,-1)$, $C(5,8)$, $D(0,7)$.

a) Verifica che i punti medi M, N, P, Q dei lati del quadrilatero sono vertici di un quadrato. Determina poi:

b) le equazioni delle diagonali PM e QN del quadrato; $[MP: x=\frac{5}{2},\ NQ: y=\frac{7}{2}]$

c) la misura del perimetro di MNPQ. $[2p=16\sqrt{2}]$

97. La retta $2y-x+4=0$ interseca gli assi y e x nei punti A e B rispettivamente. Determina il punto C sull'asse y in modo che il triangolo ABC sia rettangolo in B. Calcola perimetro e area del triangolo e verifica che la mediana BM è metà dell'ipotenusa. $[C(0,8); 10+6\sqrt{5}; 20]$

98. I punti $A(4,-1)$ e $B(8,1)$ sono gli estremi della base di un triangolo isoscele. Determina:

a) il vertice C del triangolo, che appartiene alla retta di equazione $3x-y+2=0$; $[C(2,8)]$

b) l'area e il perimetro del triangolo. $[2p=2(\sqrt{5}+\sqrt{85});\ S=20]$

99. I punti $A(2,6)$, $B(0,0)$, $C(6,4)$ sono tre vertici consecutivi di un parallelogrammo ABCD. Determina:

a) le coordinate del quarto vertice D; $[D(8,10)]$

b) le coordinate del punto S, centro di simmetria del parallelogrammo; $[S(4,5)]$

c) le equazioni delle rette *r* e *t*, parallele rispettivamente agli assi *x* e *y*, e passanti per S;

d) l'area e il perimetro del quadrilatero EFGH, i cui vertici sono i punti di intersezione delle rette *r* e *t* con i lati dei parallelogrammo ABCD. $[S=\frac{98}{9},\ 2p=\frac{28\sqrt{2}}{3}]$

e) Verifica, infine, che EFGH è un quadrato.

100.Dato il triangolo di vertici $A(0,-1)$, $B(4,0)$, $C(3,4)$:

a) verifica che tale triangolo è rettangolo e isoscele, e calcola la lunghezza della circonferenza circoscritta ad ABC; $[\overline{AB}=\overline{BC}=\sqrt{17},\ l=\sqrt{34}\pi]$

b) calcola le coordinate del punto *D* tale che ABCD sia un quadrato. Il punto *D* appartiene alla circonferenza circoscritta ad *ABC*? $[D(-1,3)]$

c) determina le equazioni delle rette *r* ed *s*, parallele ad AC e passanti, rispettivamente, per B e per D, e delle rette *t* ed *u*, parallele a BD e passanti per A e per C;

$$[r: y=\frac{5}{3}x-\frac{20}{3},\ \ s: y=\frac{5}{3}x+\frac{14}{3},\ \ t: y=-\frac{3}{5}x-1,\ \ u: y=-\frac{3}{5}x+\frac{29}{5}]$$

d) calcola il perimetro del quadrato individuato dalle rette *r*, *s*, *t*, *u*. $[2p=4\sqrt{34}]$

101.Data la retta *r* di equazione $2x+y-4=0$, determina:

a) l'equazione della retta *s*, passante per $P(-2,2)$ e perpendicolare alla *r*; $[s: x-2y+6=0]$

b) le coordinate del punto Q di intersezione delle rette *r* ed *s*; $[Q(\frac{2}{5},\frac{16}{5})]$

c) il perimetro e l'area del trapezio rettangolo PQKH, ottenuto proiettando i punti P e Q sull'asse *x*, rispettivamente in H e K. $[2p=\frac{2}{5}(19+3\sqrt{5}); S=\frac{156}{25}]$

102.Di un triangolo rettangolo ABC è noto il vertice $A(5,3)$ dell'angolo retto. Si sa, inoltre, che la retta *r*, di equazione $3x+4y-12=0$, passa per i vertici C e B e che quest'ultimo punto appartiene anche alla retta *s* di equazione $x+y-8=0$.

Determina perimetro e area del triangolo ABC. $[2p=\frac{30}{7}(5+4\sqrt{2}); S=\frac{225}{7}]$

103.Del trapezio rettangolo ABCD sono noti gli estremi $D(2,4)$ e $C(6,6)$ della base minore e l'estremo $A(0,-2)$ della base maggiore. Determina:

a) le coordinate del vertice B; $[B(8,2)]$

b) le equazioni delle rette passanti per le basi; $[AB: x-2y-4=0; DC: x-2y+6=0]$

c) il perimetro e l'area del trapezio; $[2p=2\sqrt{5}(\sqrt{2}+4),\ \ area=30]$

d) le coordinate del punto E di intersezione fra le rette AD e BC; $[E(4,10)]$

e) il rapporto di similitudine fra i triangoli ABE e DCE. $[k=2]$

(*Il rapporto di similitudine di due poligoni simili è il rapporto tra una qualunque coppia di lati corrispondenti*).

104.I punti $A(-6,-6)$ e $B(4,-4)$ sono due vertici consecutivi di un quadrato ABCD. Sapendo che il centro di simmetria del quadrato è $E(-2,0)$, determina:

a) le coordinate degli altri due vertici C e D del quadrato; $[C(2,6),\ D(-8,4)]$

b) la lunghezza della circonferenza e l'area del cerchio circoscritto al quadrato.

$[l=4\sqrt{13}\pi\,;S=52\pi]$

105.Calcola la distanza del punto $P(2,3)$ dalla retta $r:\ 3x+2y+6=0$ $R:\dfrac{18}{\sqrt{13}}$

(*Conduci la perpendicolare ad r passante per P, trova il piede H di tale perpendicolare e calcola la distanza PH*).

106.Trova la distanza dall'origine della retta passante per i punti $(-1,3)$ e $(5,1)$. $R:\dfrac{8}{\sqrt{10}}$

107.Calcola la distanza dall'origine della retta passante per $P(2,3)$ e perpendicolare alla retta di equazione $x-y+1=0$. $R:\dfrac{5}{\sqrt{2}}$

108.Calcola la distanza del punto $(-1,-\frac{1}{2})$ dalla retta $3x-4y-12=0$. $R:\dfrac{13}{5}$

109.Calcola la distanza del punto $(3,4)$ dalla retta $2x-y+6=0$ $R:\dfrac{8}{\sqrt{5}}$

Calcola l'area del triangolo avente i seguenti vertici:

110. $A(1,1)$; $B(7,2)$; $C(2,6)$ $R:\dfrac{29}{2}$

111. $A(3,2)$; $B(10,3)$; $C(6,7)$ $R:16$

112. $A(-3,4)$; $B(3,1)$; $C(2,8)$ $R:\dfrac{39}{2}$

113. $A(-4,-2)$; $B(-3,-1)$; $C(-1,3)$ $R:1$

114.Calcola la distanza del punto $A(2,-3)$ dalla retta *r*: $y=\frac{5}{4}x+6$. Determina poi l'area del triangolo *ABC*, sapendo che *B* e *C* appartengono alla retta *r* e che $x_B=4$ e $y_C=1$.

$R:d=\dfrac{46\sqrt{41}}{41};S=46$

115.Assegnate le rette: $r_1:\ y=-4x$, $r_2:\ y=-x+4$, $r_3:\ y=x-4$, calcola l'area del triangolo *ABC*, i cui vertici sono i punti di intersezione delle rette date. $R:\dfrac{256}{15}$

116.Di un quadrilatero sono dati i vertici $A(-4,-1)$, $B(4,-3)$, $C(8,3)$, $D(-8,3)$:

a) verifica che, congiungendo i punti medi dei suoi lati, si ottiene un parallelogrammo;

b) determina perimetro e area del parallelogrammo. $[2p=2\sqrt{5}(3+2\sqrt{2});S=30]$

117.Dato il triangolo di vertici $A(1,0)$, $B(2,5)$, $C(-2,1)$, determina:

a) il perimetro del triangolo; $[2p=\sqrt{2}(4+\sqrt{5}+\sqrt{13})]$

b) le equazioni dei lati; $[AB:5x-y-5=0,BC:x-y+3=0,AC:x+3y-1=0]$

c) le equazioni delle altezze; $[AH: x+y-1=0, BK: 3x-y-1=0, CN: x+5y-3=0]$

d) le coordinate dell'ortocentro D; $[D(\frac{1}{2},\frac{1}{2})]$

e) l'area del triangolo. $[S=8]$

118.E' dato il triangolo di vertici $A(8,12)$, $B(-1,3)$, $C(2,-6)$.

Traccia per i vertici le rette *r*,*s*,*t*, rispettivamente parallele ai lati opposti. Determina:

a) le equazioni di tali rette; $[r: x-y-8=0; s: 3x+y-36=0; t: 3x-y+6=0]$

b) i vertici del triangolo A'BC' individuato da tali parallele;

$[A'(-7,-15); B'(11,3); C'(5,21)]$

c) l'area del triangolo A'B'C', verificando che essa è quattro volte l'area di ABC. Trova una spiegazione geometrica di questo fatto. $[S=216]$

119.Dati i punti $O(0,0)$, $A(3,3)$ e $B(5,1)$, determina:

a) il perimetro del triangolo OAB $[5\sqrt{2}+\sqrt{26}]$

b) le equazioni dei lati del triangolo $[y=x; x-5y=0; x+y=6]$

c) il vertice C del parallelogrammo OACB $[(8,4)]$

d) le coordinate del punto E di intersezione delle diagonali del parallelogrammo, verificando che E è punto medio di entrambe le diagonali $[E(4,2)]$

e) l'area del parallelogrammo. $[12]$

120.I punti $A(1,1)$, $B(6,2)$, $C(5,5)$ sono vertici consecutivi del trapezio ABCD. Sapendo che AB è la base maggiore, e che il lato AD appartiene alla retta $3x-y-2=0$, determina:

a) le coordinate del punto D; $[D(\frac{15}{7},\frac{31}{7})]$

b) le equazioni delle diagonali AC e BD;

$[AC: y=x; BD: 17x+27y-156=0]$

c) l'equazione della retta passante per i punti medi M ed N dei lati AD e BC;

d) l'area del trapezio; $[MN: x-5y+12=0; S=\frac{88}{7}]$

e) l'area del triangolo ABP, dove il vertice P è il punto di intersezione dei lati non paralleli del trapezio; $[S=\frac{56}{3}]$

121.il rapporto di similitudine fra i triangoli ABP e CDP. $[k=\frac{7}{4}]$

122.Calcola la distanza tra le due rette parallele: r_1: $x-2y-4=0$ ed r_2: $y=\frac{1}{2}x+\frac{2}{3}$. (*Prendi un* *punto A a piacere su r_1 e calcola la distanza tra A e la retta r_2)* $R: \frac{16\sqrt{5}}{15}$

Calcola la distanza tra le seguenti rette parallele:

123. $x-y-1=0$; $x-y+2=0$ $R: \frac{3}{2}\sqrt{2}$

124. $3x+4y+2=0$; $3x+4y-6=0$ $R: \frac{18}{5}$

125. $3x-y+1=0$; $6x-2y+3=0$ $R: \frac{\sqrt{10}}{20}$

126. $y=\frac{1}{2}x-2$; $y=\frac{1}{2}x+1$ $R: \frac{6\sqrt{5}}{5}$

127. Dal punto $(2,-3)$ conduci la parallela alla retta di equazione $4x-y=7$ e calcola la distanza tra le due rette. $R: 4x-y=11 ; \frac{4}{17}\sqrt{17}$

Luoghi geometrici

128. Dati i punti $P(-6,5)$ e $Q(2,-3)$, determina:

a) l'equazione dell'asse del segmento PQ; $R: y=x+3$

b) le coordinate dei punti R ed S in cui l'asse di PQ interseca gli assi *x* ed *y*;

c) l'area e il perimetro del quadrilatero PRQS. $[S=24 ; 2p=2(2\sqrt{10}+\sqrt{34})]$

Scrivi l'equazione dell'asse del segmento avente i seguenti estremi:

129. $A(-2,1)$; $B(3,-1)$ $R: 10x-4y-5=0$

130. $C(\frac{1}{2},-1)$; $D(1,2)$ $R: 4x+16y-3=0$

131. $E(-2,1)$; $F(-2,5)$ $R: y=3$

132. $G(3,1)$; $H(7,1)$ $R: x=5$

133. $A(-1,-1)$; $B(1,1)$ $R: x+y=0$

134. $O(0,0)$; $A(2,-1)$ $R: 4x-2y-5=0$

135. $A(-1,5)$; $B(2,3)$ $R: y=\frac{3}{2}x+\frac{13}{4}$

136. La retta $r: x-2y+3=0$ incontra gli assi coordinati in due punti A e B: scrivi l'equazione dell'asse del segmento AB. $R: y=-2x-\frac{9}{4}$

137. Dato il triangolo di vertici $P(-2,0)$, $Q(8,-2)$, $R(4,2)$, determina:

a) le coordinate del *circocentro* (punto di intersezione degli assi dei lati); $R: (\frac{5}{2},-\frac{7}{2})$

b) l'equazione della circonferenza circoscritta al triangolo. $[x^2+y^2-5x+7y-14=0]$

Trova le coordinate del circocentro e l'equazione della circonferenza circoscritta ai triangoli aventi i seguenti vertici:

138. $A(2,-1)$; $B(4,1)$; $C(0,3)$ $\qquad R:(\frac{5}{3},\frac{4}{3});x^2+y^2-\frac{10}{3}x-\frac{8}{3}y-1=0$

139. $A(6,4)$; $B(5,1)$; $C(2,2)$ $\qquad R:(4,3);x^2+y^2-8x-6y+20=0$

140. $A(2,0)$; $B(0,4)$; $C(-2,2)$ $\qquad R:(\frac{1}{3},\frac{5}{3});x^2+y^2-\frac{2}{3}x-\frac{10}{3}y-\frac{14}{9}=0$

141. $A(0,1)$; $B(1,0)$; $C(3,3)$ $\qquad R:(\frac{17}{10},\frac{17}{10});x^2+y^2-\frac{17}{5}x-\frac{17}{5}y+\frac{12}{5}$

142.Dati i punti $A(-4,-2)$, $B(-\frac{15}{16},2)$, $C(4,3)$, verifica che il triangolo ABC è isoscele, scrivi l'equazione dell'asse della base e controlla che tale asse passi per il vertice del triangolo.

$[eq.\,asse:\ \ y=-\frac{8}{5}x+\frac{1}{2}]$

143.Determina le coordinate del punto P appartenente alla retta *r* ed equidistante dai punti A e B.

I dati sono: $r:\ 4x-3y-8=0$, $A(-2,4)$, $B(2,-4)$. $\qquad R:(\frac{16}{5},\frac{8}{5})$

144.Date le equazioni delle rette dei lati di un triangolo: $AB:\ 3x+2y+5=0$; $BC:\ 5x-2y-13=0$; $CA:\ x-2y+7=0$, determina le coordinate dei vertici, del baricentro G, dell'ortocentro D e del circocentro E del triangolo.

$[A(-3,2),B(1,-4),C(5,6),G(1,\frac{4}{3}),D(-\frac{7}{4},\frac{3}{2}),E(\frac{19}{8},\frac{5}{4})]$

145.I punti $A(-6,0)$, $B(-7,3)$, $C(2,6)$ sono vertici di un triangolo. Determina:

a) le coordinate del punto *P* equidistante da essi; $\qquad [P(-2,3)]$

b) la lunghezza dei lati del triangolo ABC; $\qquad [\overline{AB}=\sqrt{10},\overline{BC}=3\sqrt{10},\overline{CA}=10]$

c) le equazioni dei lati. $\qquad [AB:3x+y+18=0,\quad BC:x-3y+16=0,\quad AC:3x-4y+18=0]$

146.Del triangolo ABC sai che i vertici A e B hanno, rispettivamente, ascissa $x_A=-6$ e ordinata $y_B=-4$, e che entrambi i punti appartengono alla retta $r:\ 3x+4y+10=0$.

Determina le coordinate del punto C, equidistante da A e B e appartenente alla retta $s:\ x-2y+5=0$. $\qquad [C(1,3)]$

147.Dati i punti $A(1,2)$, $B(-1,-3)$, $C(2,3)$, determina:

a) l'area del triangolo ABC $\qquad [S=\frac{3}{2}]$

b) le coordinate del baricentro G $\qquad [G(\frac{2}{3},\frac{2}{3})]$

c) le coordinate dell'ortocentro H $\qquad [H(-13,9)]$

d) le coordinate del circocentro K $[K(\frac{15}{2},-\frac{7}{2})]$

e) l'equazione della circonferenza circoscritta. $x^2+y^2-15x+7y-4=0$

148.Dato il triangolo di vertici $A(6,-3)$, $B(-2,1)$, $C(4,7)$, determina:

a) le coordinate del baricentro G, dell'ortocentro D e del circocentro E;

b) l'area del triangolo; $[G(\frac{8}{3},\frac{5}{3}),\ D(\frac{4}{3},\frac{5}{3}),\ E(\frac{10}{3},\frac{5}{3});\ \ S=36]$

c) l'equazione della circonferenza circoscritta ad ABC. $[x^2+y^2-\frac{20}{3}x-\frac{10}{3}y-15=0]$

d) Verifica, infine, che i punti G, D, E appartengono a una stessa retta *r*. $[r: y=\frac{5}{3}]$

149.I punti $A(2,2)$, $B(5,6)$, $C(9,9)$, $D(6,.5)$ sono vertici di un quadrilatero. Verifica che si tratta di un rombo e determina la sua area. $[S=7]$

Parabola

◆ Coniche

Abbiamo visto che ogni equazione di primo grado in due incognite ha come grafico cartesiano una retta. Potremmo dimostrare che:

*le equazioni di secondo grado in due incognite, che possono contenere termini in x^2 , $x \cdot y$ o y^2 , rappresentano in generale delle curve dette **coniche**.*

Le coniche hanno questo nome perché si possono ottenere sezionando, mediante un piano, una superficie conica indefinita a due falde. Cerchiamo di spiegare tale definizione.
Abbiamo due rette *a* e *g* nello spazio, che si intersecano in un punto V, detto vertice, formando un angolo α (fig. 1). Facciamo ruotare la retta *g* di un giro completo attorno ad *a*, mantenendo costante l'angolo α, in modo da ottenere così una superficie conica indefinita a due falde. L'angolo α è chiamato semiapertura, mentre le rette *a* e *g* sono dette, rispettivamente, *asse* e *generatrice* della superficie conica.

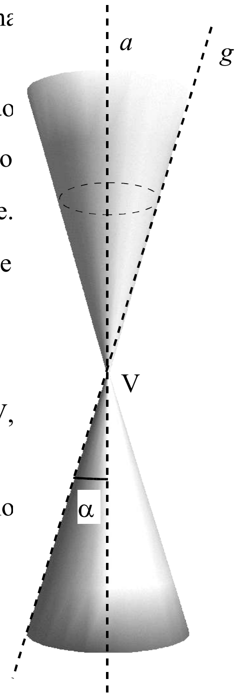

Fig. 1 Superficie conica

Se ora intersechiamo la superficie conica con dei piani che non passino per il vertice V, otteniamo delle curve dette *coniche*.
Al variare dell'ampiezza dell'angolo β, formato dall'asse del cono con il piano secante, si possono verificare quattro casi (fig. 2):

- se $\beta = 90°$, la sezione è una **circonferenza**;
- se $\alpha < \beta < 90°$, la sezione è una **ellisse**;
- se $\beta = \alpha$, la sezione è una **parabola**;
- se $\beta < \alpha$,la sezione è una **iperbole**.

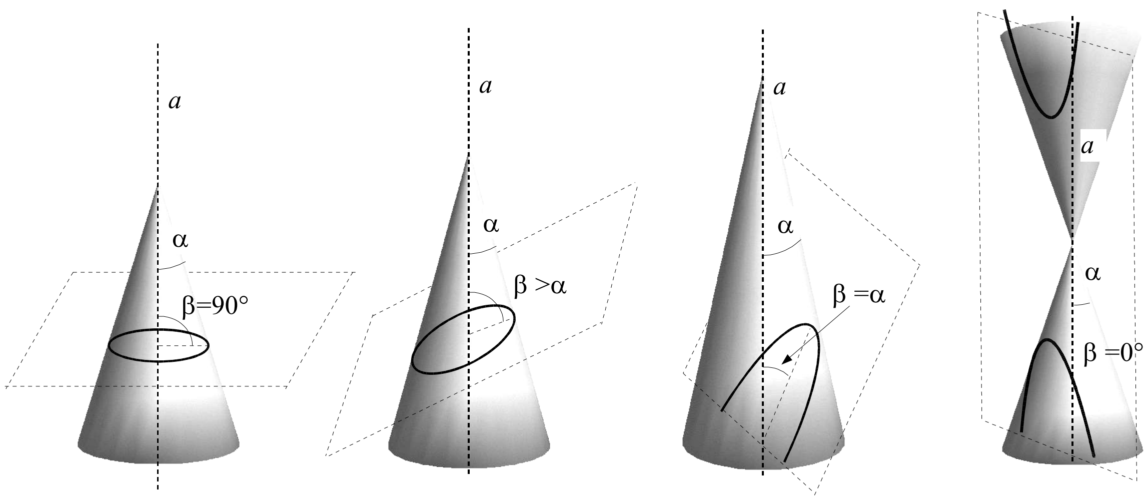

Fig. 2 Circonferenza, ellisse, parabola, iperbole.

◆ La parabola come luogo geometrico

Come abbiamo detto, le coniche sono quelle curve che si ottengono intersecando un cono con un piano.
Se ci basassimo su tale definizione, però, sarebbe complicato ricavare le equazioni cartesiane delle varie curve. Seguiremo quindi un altro metodo, definendo ciascuna conica come luogo geometrico dei punti del piano che godono di una certa proprietà caratteristica. Per essere rigorosi, dovremmo poi dimostrare che le due diverse definizioni sono equivalenti, ovvero che conducono alle stesse curve.

Chiamiamo **parabola** il luogo geometrico dei punti del piano che sono equidistanti da un punto fisso F, detto **fuoco**, e da una retta fissa *d*, chiamata **direttrice**. Quindi, un punto P appartiene alla parabola di fuoco F e direttrice *d* se e soltanto se: $\overline{PF}=\overline{Pd}$.

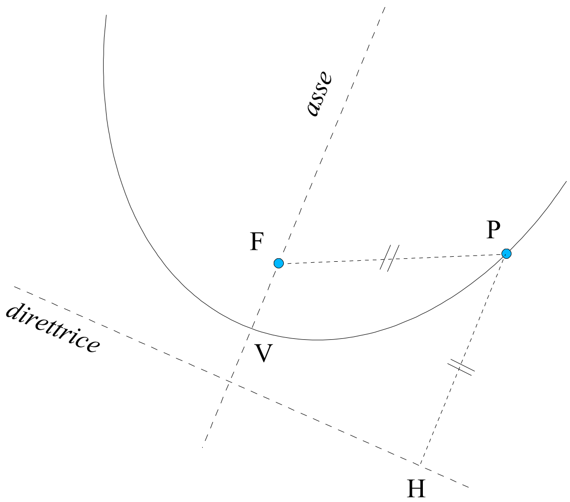

Fig. 3 La parabola come luogo geometrico.

Costruendo la parabola per punti risulta evidente che essa possiede un **asse di simmetria**, che è la retta passante per il fuoco e perpendicolare alla direttrice.

La parabola interseca il proprio asse di simmetria in un punto V, chiamato **vertice**, equidistante dal fuoco e dalla direttrice.

La definizione precedente è ancora troppo generale per i nostri scopi, e ci condurrebbe a delle equazioni piuttosto complesse. Stabiliamo pertanto che, nel resto del capitolo:

prenderemo in considerazione solo delle parabole in cui la direttrice è parallela all'asse delle ascisse, e quindi l'*asse di simmetria parallelo all'asse delle ordinate.*

Esempio 1

Vogliamo determinare l'equazione della parabola avente fuoco $F(5,7)$ e direttrice $d:\ y=3$.

Osserviamo che, essendo la direttrice *d* parallela all'asse *x*, l'asse della parabola (passante per F e perpendicolare a *d*) è una retta parallela all'asse delle ordinate.

Per ricavare l'equazione cartesiana di tale parabola, prendiamo un generico punto $P(x,y)$ del piano cartesiano e imponiamo alle sue coordinate di soddisfare la proprietà caratteristica della conica: $\overline{PF}=\overline{Pd}$.

Ricaviamo:

- $\overline{PF}=\sqrt{(x_P-x_F)^2+(y_P-y_F)^2}=\sqrt{(x-5)^2+(y-7)^2}$;

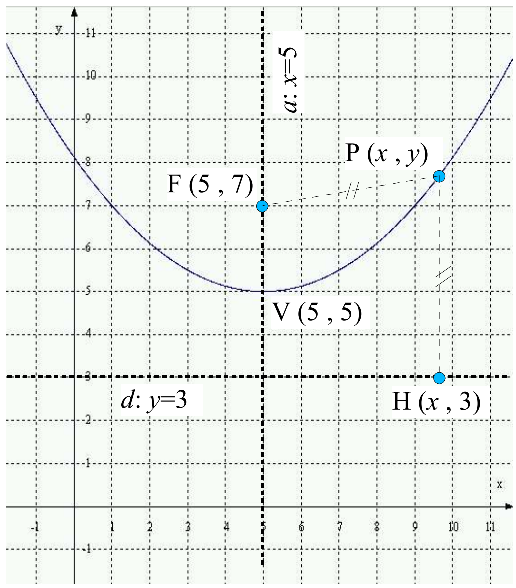

Fig. 4 Parabola con asse di simmetria parallelo all'asse delle ordinate e concavità rivolta verso l'alto

- $\overline{Pd}=\overline{PH}=y_P-y_H=y-3$;

da cui otteniamo l' equazione: $\sqrt{(x-5)^2+(y-7)^2}=y-3$.

Eleviamo al quadrato entrambi i membri: $(x-5)^2+(y-7)^2=(y-3)^2$.

Svolgiamo i quadrati di binomio: $x^2-10x+25+y^2-14y+49=y^2-6y+9$.

Osserviamo che i termini di secondo grado nella variabile *y* si elidono.

Ricaviamo la variabile *y* in funzione di *x*: $8y=x^2-10x+65$.

La parabola ha quindi equazione: $y=\frac{1}{8}x^2-\frac{5}{4}x+\frac{65}{8}$.

Osserviamo che il coefficiente del termine in x^2 è positivo. L'asse di simmetria della parabola è una retta parallela all'asse *y* e passante per il fuoco, e quindi avente equazione $x=5$, mentre il vertice V della parabola, punto medio del segmento condotto dal fuoco perpendicolarmente alla direttrice, ha coordinate $V(5,5)$.

Esempio 2

Determiniamo l'equazione della parabola avente fuoco $F(2,-1)$ e direttrice $d:\ y=2$.

Anche in questo caso la direttrice *d* è parallela all'asse *x*, per cui l'asse della parabola (passante per F e perpendicolare a *d*) è una retta parallela all'asse delle ordinate. In questo caso, però, la direttrice si trova "al di sopra" del fuoco.

Un punto generico $P(x,y)$ della parabola avrà delle coordinate che verificano la proprietà caratteristica della conica: $\overline{PF}=\overline{Pd}$.

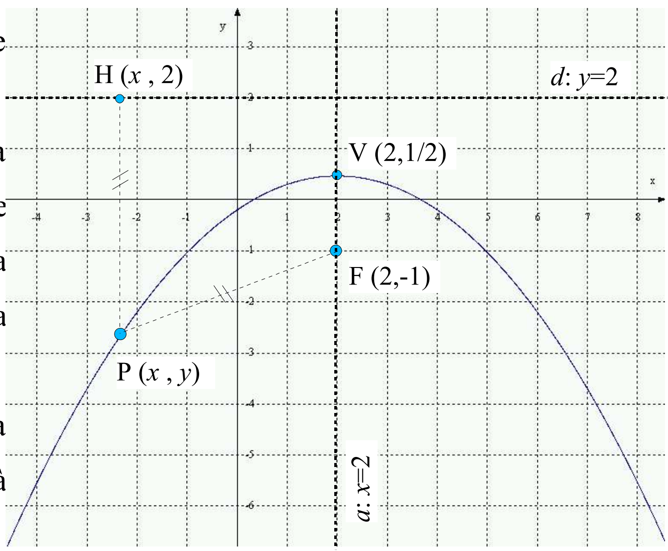

Fig. 5 Parabola con asse di simmetria parallelo all'asse delle ordinate e concavità rivolta verso il basso

Ricaviamo:

- $\overline{PF}=\sqrt{(x_P-x_F)^2+(y_P-y_F)^2}=\sqrt{(x-2)^2+(y+1)^2}$;
- $\overline{Pd}=\overline{PH}=y_H-y_P=2-y$.

Nel calcolare PH abbiamo tenuto conto del fatto che H si trova al di sopra di P. Se anche ce ne fossimo dimenticati, comunque, il successivo elevamento al quadrato ci avrebbe riportati al risultato corretto.

Imponendo $PF=Pd$ ed elevando al quadrato, ricaviamo: $(x-2)^2+(y+1)^2=(2-y)^2$.

Svolgiamo i quadrati di binomio: $x^2-4x+4+y^2+2y+1=4-4y+y^2$.

I termini di secondo grado nella variabile *y* si elidono ancora.

Ricaviamo la variabile *y* in funzione di *x*: $6y=-x^2+4x-1$.

La parabola ha quindi equazione: $y=-\frac{1}{6}x^2+\frac{2}{3}x-\frac{1}{6}$.

Osserviamo che in questo caso il coefficiente del termine in x^2 è negativo. L'asse di simmetria della parabola è una retta parallela all'asse y e passante per il fuoco, e quindi avente equazione $x=2$, mentre il vertice V della parabola, punto medio del segmento condotto dal fuoco perpendicolarmente alla direttrice, ha coordinate $V(2,1/2)$.

Ripetendo in forma generale il procedimento precedente, utilizzando al posto dei dati numerici dei parametri letterali, possiamo dimostrare che:

ad ogni parabola con asse di simmetria parallelo all'asse delle ordinate, corrisponde un'equazione cartesiana del tipo $\boldsymbol{y=ax^2+bx+c}$.

Dimostrazione. Infatti, se il fuoco ha coordinate $F(x_F, y_F)$ e la direttrice ha equazione $d:\ y=y_d$, imponendo $PF=Pd$ ed elevando al quadrato, ricaviamo: $(x-x_F)^2+(y-y_F)^2=(y-y_d)^2 \Rightarrow$

$$x^2-2xx_F+x_F^2+y^2-2yy_F+y_F^2=y^2-2yy_d+y_d^2 \Rightarrow$$

$$2(y_F-y_d)y=x^2-2xx_F+x_F^2+y_F^2-y_d^2 \Rightarrow$$

$$y=\frac{1}{2(y_F-y_d)}x^2-\frac{x_F}{y_F-y_d}x+\frac{x_F^2+y_F^2-y_d^2}{2(y_F-y_d)} .$$

Quindi, l'equazione ottenuta è del tipo $y=ax^2+bx+c$, avendo posto:

$$a=\frac{1}{2(y_F-y_d)} \quad , \quad b=-\frac{x_F}{y_F-y_d} \quad , \quad c=\frac{x_F^2+y_F^2-y_d^2}{2(y_F-y_d)} .$$

- **Dall'equazione della parabola al suo grafico**

Nel paragrafo precedente abbiamo visto che, partendo dalle coordinate del fuoco e dall'equazione della direttrice, parallela all'asse delle ascisse, possiamo ricavare l'equazione della parabola della forma $y=ax^2+bx+c$.

Ora ci poniamo il problema inverso, supponendo di conoscere l'equazione della parabola e volendo ricavarne le principali caratteristiche.

Intanto, possiamo affermare che:

- se *il coefficiente a è positivo*, allora la parabola è situata al di sopra della direttrice, ovvero volge la *concavità verso l'alto*;
- se *il coefficiente a è negativo*, allora la parabola è situata al di sotto della direttrice, ovvero volge la *concavità verso il basso*.

Infatti, abbiamo ottenuto che $a=\frac{1}{2(y_F-y_d)}$, per cui il segno del coefficiente a:

- è positivo se $y_F>y_d$, ovvero se il fuoco "sta sopra" la direttrice;
- è negativo se $y_F<y_d$, ovvero se il fuoco "sta sotto" la direttrice.

Se poi osserviamo che il fuoco, il vertice e tutti i punti dell'asse di simmetria hanno la stessa ascissa, possiamo ricavarne il valore dai calcoli precedenti: $\boldsymbol{x_F = x_V = x_{asse} = -\frac{b}{2a}}$.

Infatti: $-\frac{b}{2a}=\frac{x_F}{y_F-y_d}:\frac{1}{y_F-y_d}=\frac{x_F}{y_F-y_d}\cdot(y_F-y_d)=x_F$.

Poiché il vertice appartiene alla parabola, la sua ordinata può essere calcolata semplicemente sostituendo nell'equazione della parabola il valore dell'ascissa calcolato con la formula precedente: $\boldsymbol{y_V = f(x_V)}$.

Per ricavare le ordinate del fuoco e dei punti della direttrice, il procedimento è un po' più laborioso.

Poniamo $k=y_F-y_V$. Quindi, se il fuoco si trova sopra il vertice, la quantità k è uguale alla distanza tra fuoco e vertice (fig. 6), altrimenti è uguale a tale distanza presa con il segno negativo. Poiché il vertice è equidistante dal fuoco e dalla direttrice, avremo anche $k=y_V-y_d$, e quindi: $y_F-y_d=2k$.

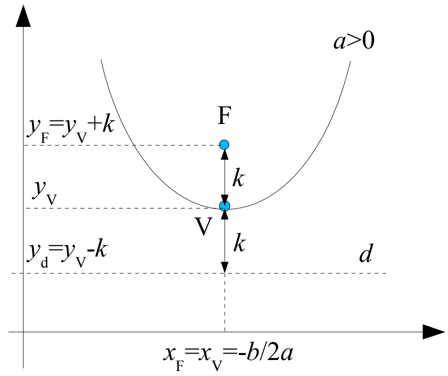

Fig. 6

Riprendendo la formula ricavata per il coefficiente *a*, otteniamo: $a=\frac{1}{2(y_F-y_d)}=\frac{1}{4k}$.

Ricavando la formula inversa, troviamo: $k=\frac{1}{4a}$.

Dalla definizione di *k*, ricaviamo infine: $\boldsymbol{y_F=y_V+k=y_V+\frac{1}{4a}}$ e $\boldsymbol{y_d=y_V-k=y_V-\frac{1}{4a}}$.

In altre parole, per trovare fuoco e direttrice dobbiamo partire dalla posizione del vertice e spostarci verso l'alto o verso il basso di una quantità $k=\frac{1}{4a}$. Per essere precisi:

- se $a>0$, spostandoci verso l'alto otterremo il fuoco e verso il basso la direttrice;
- se $a<0$, troveremo il fuoco con uno spostamento verso il basso e la direttrice con uno verso l'alto.

Le coordinate dei punti in cui la parabola interseca gli assi cartesiani sono, come sempre, le soluzioni dei sistemi formati dall'equazione della parabola e da quella di uno degli assi stessi:

- $\begin{cases} y=ax^2+bx+c \\ y=0 \end{cases}$ per l'intersezione con l'asse delle ascisse;
- $\begin{cases} y=ax^2+bx+c \\ x=0 \end{cases}$ per l'intersezione con l'asse delle ordinate.

Esempio 1

Consideriamo l'equazione $y=x^2+4x-5$.

Essendo della forma $y=ax^2+bx+c$, essa rappresenta una parabola con l'asse di simmetria parallelo all'asse delle ordinate.

Inoltre, poiché $a>0$, la parabola ha la concavità rivolta verso l'alto.

L'equazione dell'asse di simmetria è $x=-\frac{b}{2a}=-\frac{4}{2}=-2$, quindi anche il vertice ed il fuoco hanno la stessa ascissa: $x_V=x_F=-2$.

L'ordinata del vertice si ottiene sostituendo la sua ascissa nell'equazione della funzione:

$y_v=f(-2)=(-2)^2+4\cdot(-2)-5=-9$.

Il vertice della parabola ha pertanto coordinate: $V(-2,-9)$.

L'ordinata del fuoco è $y_F=y_V+\frac{1}{4a}=-9+\frac{1}{4}=-\frac{35}{4}$.

Le coordinate del fuoco sono quindi: $F(-2,-\frac{35}{4})$.

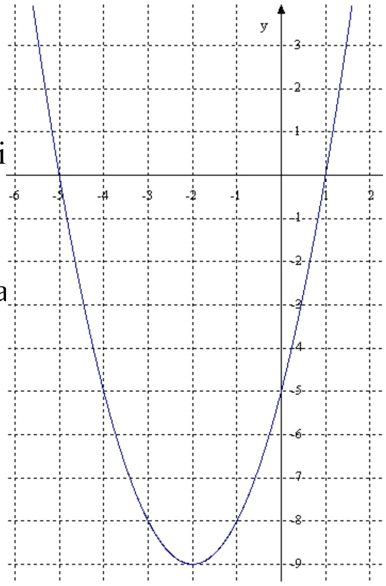

Fig. 7 $y=x^2+4x-5$

L'equazione della direttrice è $y_d=y_V-\frac{1}{4a}=-9-\frac{1}{4}=-\frac{37}{4}$.

Il punto di intersezione con l'asse *y* si ottiene risolvendo il sistema $\begin{cases} y=x^2+4x-5 \\ x=0 \end{cases}$.

In pratica, sostituiamo $x=0$ nell'equazione della parabola.

Esso ha quindi coordinate $(0,-5)$.

Gli eventuali punti di intersezione con l'asse *x* si ottengono risolvendo il sistema $\begin{cases} y=x^2+4x-5 \\ y=0 \end{cases}$.

Ricaviamo: $x^2+4x-5=0 \quad \Rightarrow \quad x=\frac{-4\pm\sqrt{16+20}}{2}=\frac{-4\pm 6}{2} \quad \Rightarrow \quad x_1=-5; \quad x_2=1$.

Tali punti hanno quindi coordinate $(-5,0)$ e $(1,0)$.

Per tracciare il grafico con maggiore precisione, possiamo trovare altri punti della parabola. A questo scopo, è preferibile attribuire alla *x* dei valori vicini all'ascissa del vertice (in questo caso $x=-2$) e tenere conto del fatto che la curva possiede un asse di simmetria: ad esempio, se abbiamo trovato che $x=-1 \rightarrow y=-8$, dovrà essere anche: $x=-3 \rightarrow y=-8$.

Esempio 2

Consideriamo l'equazione $y=-\frac{1}{4}x^2+\frac{3}{2}x+\frac{7}{4}$.

Essendo della forma $y=ax^2+bx+c$, essa rappresenta una parabola con l'asse di simmetria parallelo all'asse delle ordinate; inoltre, poiché $a<0$, la parabola ha la concavità rivolta verso il basso.

L'equazione dell'asse di simmetria è: $x=-\dfrac{b}{2a}=\dfrac{-3/2}{2\cdot(-1/4)}=3$.

Anche il vertice ed il fuoco hanno la stessa ascissa: $x_V=x_F=3$.

L'ordinata del vertice si ottiene sostituendo la sua ascissa nell'equazione della funzione:

$$y_V=f(3)=-\frac{1}{4}(3)^2+\frac{3}{2}(3)+\frac{7}{4}=-\frac{9}{4}+\frac{9}{2}+\frac{7}{4}=\frac{-9+18+7}{4}=4 \; .$$

Il vertice ha quindi coordinate $V(3,4)$.

L'ordinata del fuoco è $y_F=y_V+\dfrac{1}{4a}=4-1=3$.

Le coordinate del fuoco sono: $F(3,3)$.

L'equazione della direttrice è $y_d=y_V-\dfrac{1}{4a}=4+1=5$.

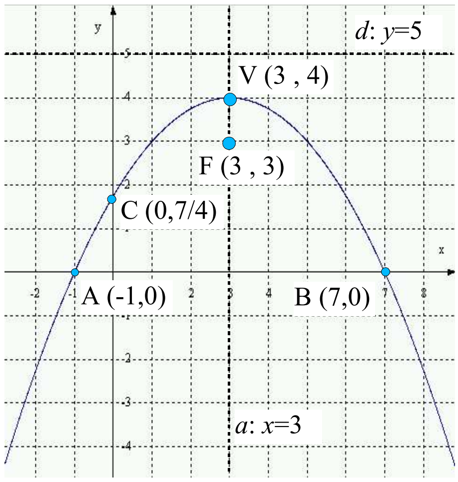

Fig. 8 $y=-\frac{1}{4}x^2+\frac{3}{2}x+\frac{7}{4}$

Ricaviamo i punti A e B di intersezione con l'asse *x*:

$$\begin{cases} y=-\frac{1}{4}x^2+\frac{3}{2}x+\frac{7}{4} \\ y=0 \end{cases} \Rightarrow \quad -\frac{1}{4}x^2+\frac{3}{2}x+\frac{7}{4}=0 \quad \Rightarrow$$

$$\frac{-x^2+6x+7}{4}=0 \quad \Rightarrow \quad x^2-6x-7=0 \quad \Rightarrow$$

$$x=\frac{6\pm\sqrt{36+28}}{2}=\frac{6\pm 8}{2} \quad \Rightarrow \quad x_1=-1; \quad x_2=7$$. Quindi: $A(-1,0);\ B(7,0)$.

Ricaviamo le coordinate del punto C di intersezione della parabola con l'asse *y*:

$$\begin{cases} x=0 \\ y=-\frac{1}{4}x^2+\frac{3}{2}x+\frac{7}{4} \end{cases} \Rightarrow \quad C\left(0,\frac{7}{4}\right) \; .$$

Possiamo determinare le coordinate di qualche altro punto della parabola nelle vicinanze del vertice:

x	-2	-1	0	1	2	3
y	-9/4	0	7/4	3	15/4	4

Osserviamo che, se uno dei coefficienti *b* e *c* dell'equazione $y=ax^2+bx+c$ è uguale a zero, si ottengono delle parabole situate in posizioni particolari.

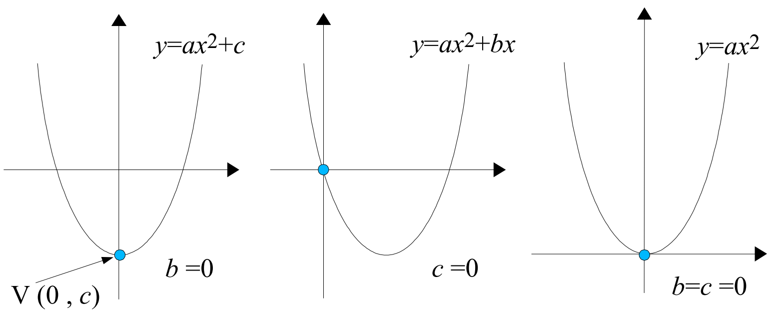

Fig. 9 Casi particolari b=0, c=0, b=c=0

- Se $b=0$, ovvero nell'equazione manca il termine di primo grado in *x*, allora *la parabola ha l'asse di simmetria coincidente con l'asse delle ordinate.*

Infatti, l'equazione dell'asse di simmetria diventa $x=-\dfrac{b}{2a}=0$, che è l'equazione dell'asse *y*.

- Se $c=0$, ovvero nell'equazione manca il termine noto, allora *la parabola passa per l'origine degli assi*.

Infatti, l'equazione $y=ax^2+bx$ è verificata dalle coordinate dell'origine: $(0,0)$.

- Se, infine, $b=c=0$, ovvero l'equazione è del tipo $y=ax^2$, allora *la parabola* ha l'asse di simmetria coincidente con l'asse delle ordinate e il vertice nell'origine, e quindi *è tangente all'asse delle ascisse nell'origine*.

La figura 9 mostra degli esempi di queste situazioni particolari, nel caso in cui la concavità sia rivolta verso l'alto. Il caso in cui $a<0$ è del tutto analogo.

Per determinare i punti di intersezione tra la parabola e l'asse delle ascisse, risolviamo il sistema:

$$\begin{cases} y=ax^2+bx+c \\ y=0 \end{cases}$$

e quindi l'equazione risultante:

$$ax^2+bx+c=0 \quad .$$

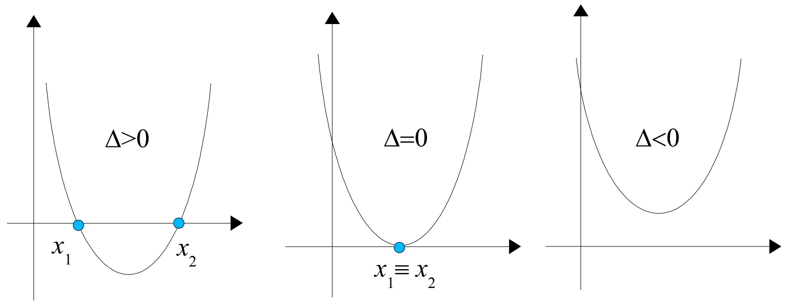

Fig. 10 Parabola secante, tangente ed esterna rispetto all'asse x

Il segno del discriminante $\Delta=b^2-4ac$ di tale equazione ci permette di stabilire la posizione relativa della parabola rispetto all'asse x. Infatti:

- Se $\Delta>0$, allora l'equazione ha due soluzioni reali e distinte, e quindi *la parabola è secante rispetto all'asse x*, ovvero lo taglia in due punti distinti.
- Se $\Delta=0$, allora l'equazione ha due soluzioni reali e coincidenti, e quindi *la parabola è tangente rispetto all'asse x*, ovvero lo tocca in un solo punto (o, come preferiscono dire i matematici, in due punti coincidenti); il punto di contatto è il vertice della parabola.
- Se $\Delta<0$, allora l'equazione non ha soluzioni reali, e quindi *la parabola è esterna rispetto all'asse x*, ovvero non lo interseca.

Anche in questo caso non è rilevante il fatto che la figura 10 si riferisca a parabole con concavità rivolta verso l'alto.

◆ Parabola per tre punti

Come sappiamo, per determinare l'equazione di una retta dobbiamo imporle il passaggio per *due* punti di coordinate date. Possiamo spiegare questo fatto sia ricorrendo alla geometria, in quanto uno dei nostri postulati afferma che "per due punti del piano passa sempre una ed una sola retta", sia tramite considerazioni algebriche. Infatti, l'equazione di una generica retta "obliqua" è della forma $y=mx+q$, e quindi contiene *due* parametri, il coefficiente angolare m e l'ordinata all'origine q, il cui valore andrà determinato imponendo altrettante condizioni di passaggio della retta per un dato punto.

Poiché non conosciamo la geometria della parabola, dobbiamo affidarci all'algebra per svolgere un ragionamento analogo. Una parabola con asse di simmetria parallelo all'asse y ha un'equazione della forma $y=ax^2+bx+c$, in cui compaiono i *tre* coefficienti incogniti a, b, c. Ci aspettiamo quindi di dovere assegnare le coordinate di *tre* punti della parabola per poterne determinare l'equazione.

Esempio 1

Cerchiamo l'equazione della parabola avente asse di simmetria parallelo all'asse y e passante per i punti $A(-2,1)$, $B(1,2)$, $C(-1,3)$.

Ricordiamo che *un punto appartiene ad una curva se e soltanto se le sue coordinate rendono vera l'equazione della curva*. Sostituiamo quindi nell'equazione generica della parabola $y=ax^2+bx+c$ le coordinate dei punti dati:

$$\begin{cases} 4a-2b+c=1 & (condizione\ di\ passaggio\ per\ A) \\ a+b+c=2 & (condizione\ di\ passaggio\ per\ B) \\ a-b+c=3 & (condizione\ di\ passaggio\ per\ C) \end{cases}$$

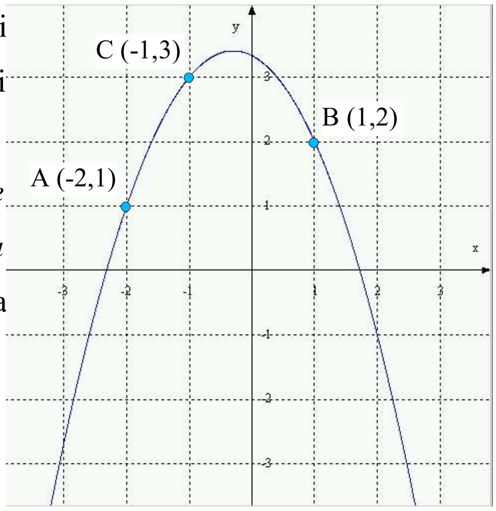

Fig. 11 Parabola passante per tre punti

Come sempre, abbiamo "invertito" il primo ed il secondo membro di ogni equazione, in modo che le incognite a, b, c si trovino sulla sinistra, come siamo abituati.

Abbiamo ottenuto un sistema di primo grado di tre equazioni in tre incognite, che risolviamo con il metodo di sostituzione, anche se potrebbe essere utile combinarlo con il metodo di somma o di sottrazione. Ricaviamo il valore di c, ad esempio dalla terza equazione: $c=3-a+b$.

Sostituiamo tale valore nelle prime due equazioni:

$$\begin{cases} 4a-2b+3-a+b=1 \\ a+b+3-a+b=2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 3a-b=-2 \\ 2b=-1 \end{cases} .$$

In questo caso siamo fortunati, perché nella terza equazione i termini nell'incognita a si elidono, e quindi otteniamo subito il valore $b=-1/2$.

Sostituiamo il valore ottenuto nella prima equazione:

$$3a+\frac{1}{2}=-2 \Rightarrow \frac{6a+1}{2}=\frac{-4}{2} \Rightarrow 6a=-5 \Rightarrow a=-\frac{5}{6} .$$

Infine sostituiamo nella terza equazione i valori numerici di a e di b:

$$c=3+\frac{5}{6}-\frac{1}{2}=\frac{18+5-3}{6}=\frac{20}{6}=\frac{10}{3} .$$

La soluzione del sistema è la terna ordinata: $a=-\frac{5}{6},\ b=-\frac{1}{2},\ c=\frac{10}{3}$.

La parabola cercata ha quindi equazione: $y=-\frac{5}{6}x^2-\frac{1}{2}x+\frac{10}{3}$.

Esempio 2

Cerchiamo l'equazione della parabola avente asse di simmetria parallelo all'asse y e passante per i punti $A(-1,-5)$, $B(2,4)$, $C(3,3)$.

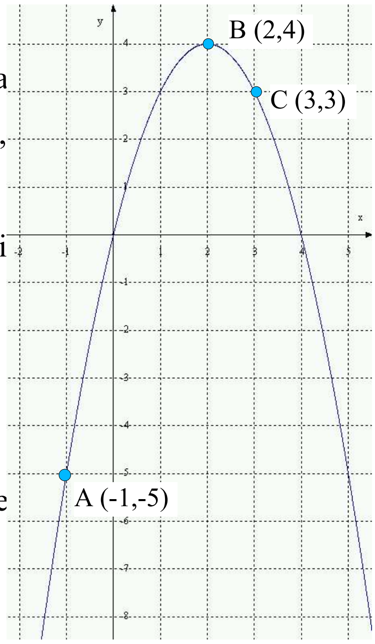

Fig. 12 Parabola passante per tre punti

Sostituiamo nell'equazione generica $y=ax^2+bx+c$ le coordinate dei punti dati:

$$\begin{cases} a-b+c=-5 \\ 4a+2b+c=4 \\ 9a+3b+c=-5 \end{cases} .$$

Ricaviamo il valore di c dalla prima equazione e lo sostituiamo nelle altre due:

$$\begin{cases} c=-5-a+b \\ 4a+2b-5-a+b=4 \\ 9a+3b-5-a+b=-5 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} c=-5-a+b \\ 3a+3b=9 \\ 8a+4b=8 \end{cases} .$$

Dividiamo entrambi i membri della seconda equazione per 3 e della terza per 4: $\begin{cases} c=-5-a+b \\ a+b=3 \\ 2a+b=2 \end{cases}$.

Ora la seconda e la terza equazione, considerate da sole, formano un sistema di primo grado di due equazioni nelle due incognite a e b, che può essere risolto per sostituzione o per sottrazione. Ad esempio, ricavando b dalla seconda equazione e sostituendone il valore nella terza, otteniamo:

$$\begin{cases} b=3-a \\ 2a+3-a=2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a=-1 \\ b=3+1=4 \end{cases} .$$

Ricorda che, se possibile, è sempre conveniente ricavare l'incognita che ha come coefficiente +1 o, al massimo, -1.

Sostituiamo nella prima equazione entrambi i valori ricavati: $c=-5+1+4=0$.

La soluzione del sistema è quindi la terna ordinata: $a=-1$, $b=4$, $c=0$.

L'equazione richiesta è pertanto: $y=-x^2+4x$.

Esempio 3

Cerchiamo l'equazione della parabola con asse di simmetria parallelo all'asse y, passante per il punto $A(5,3)$ e avente vertice $V(3,-1)$.

In questo caso conosciamo solo *due* punti della parabola, ma le informazioni fornite sono sufficienti a ricavarne l'equazione, in quanto sappiamo che uno di essi è il vertice.

Infatti, possiamo scrivere le solite condizioni di passaggio per i punti A e V sostituendo le loro coordinate nell'equazione generica $y=ax^2+bx+c$:

- condizione di passaggio per A: $25a+5b+c=3$;

- condizione di passaggio per V: $9a+3b+c=-1$.

Inoltre, possiamo ricavare una terza condizione sui coefficienti in quanto conosciamo il valore numerico dell'ascissa del vertice: $x_V=3$:

- $x_V=-\frac{b}{2a} \Rightarrow -\frac{b}{2a}=3 \Rightarrow b=-6a$.

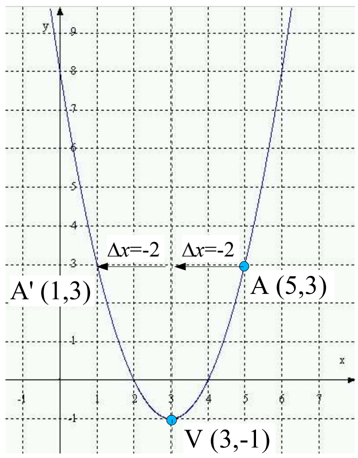

Fig. 13 Parabola passante per un punto e di vertice dato

Nell'ultimo passaggio abbiamo moltiplicato entrambi i membri dell'equazione per 2*a* e li abbiamo cambiati di segno; oppure, avremmo potuto riportare entrambi i membri allo stesso denominatore e quindi "eliminarlo".

Un diverso metodo per ottenere una terza condizione sui coefficienti della parabola è quello di trovare il punto $A'(1,3)$, simmetrico di A rispetto all'asse della parabola, e quindi di imporre la condizione di passaggio della parabola per A':

- $a+b+c=3$.

Mettiamo a sistema le equazioni ottenute e sostituiamo nelle prime due il valore di *b* ricavato dalla terza:

$$\begin{cases} 25a+5b+c=3 \\ 9a+3b+c=-1 \\ b=-6a \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 25a-30a+c=3 \\ 9a-18a+c=-1 \\ b=-6a \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} -5a+c=3 \\ -9a+c=-1 \\ b=-6a \end{cases} .$$

Le prime due equazioni formano un sistema di primo grado nelle due incognite *a* e *c*, che può essere risolto per sostituzione o per sottrazione. Se ricaviamo *c* dalla prima equazione e ne sostituiamo il valore nella seconda, otteniamo:

$$\begin{cases} c=5a+3 \\ -9a+5a+3=-1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} c=5a+3 \\ -4a=-4 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a=1 \\ c=5+3=8 \end{cases} .$$

Sostituiamo infine nella terza equazione il valor numerico ottenuto per *a*: $b=-6\cdot 1=-6$.

La soluzione del sistema è la terna ordinata: $a=1,\ b=-6,\ c=8$.

L'equazione della parabola è quindi: $y=x^2-6x+8$.

Forse potresti obiettare che anche nell'esempio 2 uno dei punti dati era il vertice della parabola, quindi la conoscenza del terzo punto era superflua. Questo, però, non è corretto, in quanto noi non sapevamo che il punto B era il vertice, ma l'abbiamo scoperto solo dopo avere risolto l'esercizio.

◆ Retta e parabola

Ricordiamo che *le coordinate dei punti di intersezione di due curve sono date dalle soluzioni del sistema formato dalle loro equazioni.*

In particolare, gli eventuali *punti di intersezione tra una retta ed una parabola hanno come coordinate le soluzioni del sistema formato dalle equazioni della retta e della parabola.*

Infatti, se la retta *r* e la parabola *P* si intersecano nel punto A, le coordinate di A devono verificare sia l'equazione di *r* che quella di *P*, e, quindi, sono soluzione del sistema formato dalle loro equazioni.

Poiché la retta è descritta da un'equazione di primo grado e la parabola da una di secondo grado, il sistema risultante è di secondo grado di due equazioni in due incognite, e quindi può avere al massimo due soluzioni reali.

Ricordiamo infatti che il grado di un sistema di equazioni è dato dal prodotto dei gradi delle singole equazioni, e che esso fornisce il massimo numero di soluzioni reali del sistema.

Esempio 1

Cerchiamo i punti di intersezione tra la retta di equazione $y=3x-1$ e la parabola di equazione $y=-x^2+x+2$.

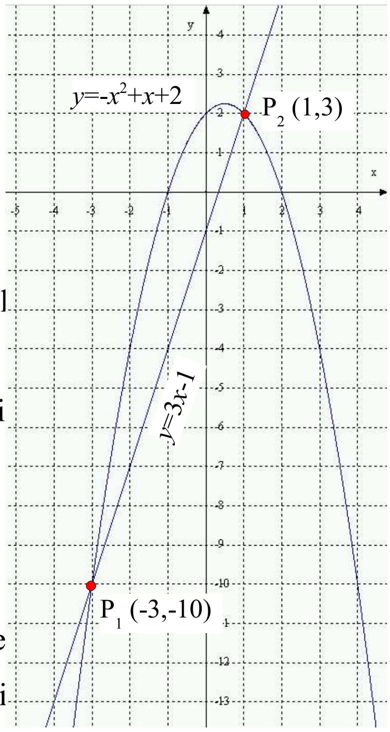

Fig. 14 Retta e parabola secanti

Risolviamo il sistema formato dalle equazioni delle due curve:

$$\begin{cases} y=3x-1 \\ y=-x^2+x+2 \end{cases} \Rightarrow 3x-1=-x^2+x+2 \Rightarrow$$

$$x^2+2x-3=0 \Rightarrow (x+3)(x-1)=0 \Rightarrow x_1=-3; \quad x_2=1 .$$

Abbiamo ottenuto due soluzioni reali e distinte in quanto il discriminante dell'equazione risolvente è positivo.

Sostituiamo i valori ricavati per x in una delle due equazioni (preferibilmente quella di primo grado):

- $x_1=-3 \Rightarrow y_1=3\cdot(-3)-1=-10$;
- $x_2=1 \Rightarrow y_2=3\cdot 1-1=2$.

Le soluzioni del sistema sono le coppie ordinate $(-3,-10)$ e $(1,2)$, che quindi rappresentano le coordinate dei punti di intersezione tra la retta e la parabola.

Quando retta e parabola si intersecano in due punti distinti, vengono dette *secanti*.

Esempio 2

Cerchiamo i punti di intersezione tra la retta di equazione $y=-3x+2$ e la parabola di equazione $y=-x^2-x+1$.

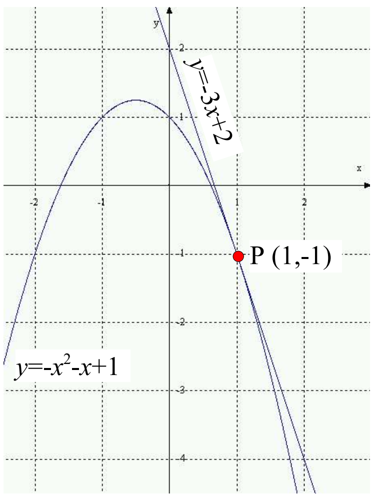

Fig. 15 Retta e parabola tangenti

Risolviamo il sistema formato dalle equazioni delle due curve:

$$\begin{cases} y=-3x+2 \\ y=-x^2-x+1 \end{cases} \Rightarrow -3x+2=-x^2-x+1 \Rightarrow$$

$$x^2-2x+1=0 \Rightarrow (x-1)^2=0 \Rightarrow x_1=x_2=1 .$$

Abbiamo ottenuto una sola soluzione (o, come dicono i matematici, due soluzioni reali e coincidenti) in quanto il discriminante dell'equazione risolvente è uguale a zero. Sostituiamo il valore ricavato per x in una delle due equazioni (preferibilmente quella di primo grado):

$$x=1 \quad \Rightarrow \quad y=-3\cdot 1+2=-1 \quad .$$

La soluzione del sistema è la coppia ordinata $(1,-1)$, che quindi fornisce le coordinate del punto di contatto tra la retta e la parabola. Quando retta e parabola si intersecano in un solo punto, ovvero in due punti coincidenti, vengono dette *tangenti*.

Esempio 3

Cerchiamo i punti di intersezione tra la retta di equazione $y=\frac{3}{4}x+\frac{5}{2}$ e la parabola di equazione $y=-\frac{1}{2}x^2+4x-4$.

Risolviamo il sistema formato dalle equazioni delle due curve:

$$\begin{cases} y=\frac{3}{4}x+\frac{5}{2} \\ y=-\frac{1}{2}x^2+4x-4 \end{cases} \quad \Rightarrow \quad \frac{3}{4}x+\frac{5}{2}=-\frac{1}{2}x^2+4x-4 \quad \Rightarrow$$

$$\frac{3x+10}{4}=\frac{-2x^2+16x-16}{4} \quad \Rightarrow \quad 2x^2-13x+26=0 \quad .$$

Risolvendo l'equazione, otteniamo: $\Delta=-39<0$.

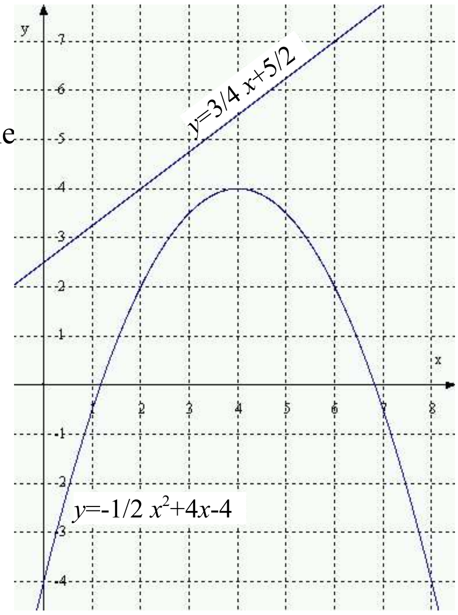

Fig. 16 Retta e parabola esterne

Poiché l'equazione risultante ha discriminante negativo, il sistema non ammette soluzioni reali, quindi la retta e la parabola non hanno alcun punto in comune, e vengono dette *esterne*.

Riassumendo i risultati degli esempi precedenti, possiamo affermare che una retta ed una parabola possono trovarsi in tre diverse posizioni reciproche:

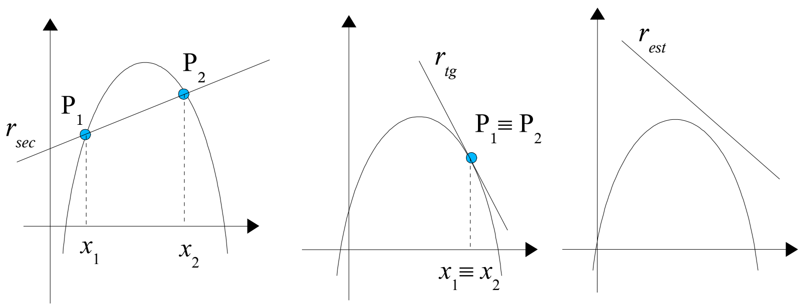

Fig. 17 Retta secante, tangente ed esterna rispetto ad una parabola

- retta e parabola sono *secanti*, ovvero si intersecano in due punti distinti, quando l'equazione risolvente del sistema formato dalle loro equazioni ha discriminante positivo;
- retta e parabola sono *tangenti*, ovvero si toccano in un punto (o due punti coincidenti), quando l'equazione risolvente del sistema formato dalle loro equazioni ha discriminante uguale a zero;
- retta e parabola sono *esterne*, ovvero non hanno punti in comune, quando l'equazione risolvente del sistema formato dalle loro equazioni ha discriminante negativo.

Esercizi

Negli esercizi seguenti supporremo sempre che le parabole considerate abbiano l'asse di simmetria parallelo all'asse y.

La parabola come luogo geometrico

Scrivi l'equazione del luogo dei punti equidistanti dal punto F e dalla retta d:

1. $F(0,\frac{1}{8})$; $d:\ y=-\frac{1}{8}$ $[y=2x^2]$

2. $F(0,-1)$; $d:\ y=1$ $[y=-\frac{1}{4}x^2]$

3. $F(1,4)$; $d:\ y=3$ $[y=\frac{1}{2}x^2-x+4]$

4. $F(0,0)$; $d:\ y-2=0$ $[y=-\frac{1}{4}x^2+1]$

5. $F(2,1)$; $d:\ y+3=0$ $[y=\frac{1}{8}x^2-\frac{1}{2}x-\frac{1}{2}]$

6. $F(2,5)$; $d:\ y=2$ $[y=\frac{1}{6}x^2-\frac{2}{3}x+\frac{25}{6}]$

Dall'equazione della parabola al suo grafico

7. Disegna le parabole aventi le seguenti equazioni, dopo aver determinato, per ciascuna di esse, l'asse, il vertice, il fuoco, la direttrice e i punti di intersezione con gli assi coordinati:

a) $y=-\frac{1}{6}x^2+\frac{2}{3}x-\frac{1}{6}$; *b)* $y=\frac{1}{2}x^2-x-\frac{3}{2}$; *c)* $y=-\frac{1}{2}x^2+x-5$

d) $y=x^2-4x$; *e)* $y=4x^2-9$; *f)* $y=-\frac{1}{2}x^2$.

Risposte:

	asse	*vertice*	*fuoco*	*direttrice*	*A*	*B*	*C*
a	$x=2$	$(2,1/2)$	$(2,-1)$	$y=2$	$(2-\sqrt{3},0)$	$(2+\sqrt{3},0)$	$(0,-1/6)$
b	$x=1$	$(1,-2)$	$(1,-3/2)$	$y=-5/2$	$(-1,0)$	$(3,0)$	$(0,-3/2)$
c	$x=1$	$(1,-9/2)$	$(1,-5)$	$y=-4$	------	------	$(0,-5)$
d	$x=2$	$(2,-4)$	$(2,-15/4)$	$y=-17/4$	$(0,0)$	------	$(0,4)$
e	$x=0$	$(0,-9)$	$(0,-143/16)$	$y=-145/16$	$(-3/2,0)$	$(3/2,0)$	$(0,-9)$
f	$x=0$	$(0,0)$	$(0,-1/2)$	$y=1/2$	------	------	$(0,0)$

8. Applicando la definizione di parabola come luogo geometrico, ricava l'equazione della parabola

avente fuoco $F(3,6)$ e direttrice $d:\ y=2$. Determina poi l'equazione dell'asse di simmetria e le coordinate del vertice. $[y=\frac{1}{8}x^2-x+6;\ x=4;\ V(4,4)]$

9. Ricava l'equazione della parabola avente fuoco $F(3,4)$ e direttrice $d:\ y=6$, trovandone anche i punti di intersezione con gli assi cartesiani.

$[y=-\frac{1}{4}x^2+\frac{3}{2}x+\frac{11}{4};\ x=3;\ A(3-2\sqrt{5},0);\ B(3+2\sqrt{5},0);\ C(0,\frac{11}{4})]$

Parabola per tre punti

Scrivi l'equazione delle parabole passanti per i seguenti punti:

10. $A(1,0)$, $B(6,0)$, $C(0,-6)$ $[y=-x^2+7x-6]$
11. $A(2,2)$, $B(3,4)$, $C(6,2)$ $[y=-\frac{2}{3}x^2+\frac{16}{3}x-6]$
12. $A(1,0)$, $B(3,0)$, $C(4,3)$ $[y=x^2-4x+3]$
13. $A(0,-2)$, $B(3,-2)$, $C(-1,-6)$ $[y=-x^2+3x-2]$
14. $A(0,-1)$, $B(1,2)$, $C(-2,5)$ $[y=2x^2+x-1]$
15. $A(1,0)$, $B(2,1)$, $C(0,-3)$ $[y=-x^2+4x-3]$
16. $A(-1,\frac{3}{2})$, $B(0,-1)$, $C(1,-\frac{5}{2})$ $[y=\frac{1}{2}x^2-2x-1]$

Scrivi l'equazione delle parabole di vertice V e passanti per il punto assegnato:

17. $V(2,4)$; $A(-\frac{1}{2},-\frac{9}{4})$ $[y=-x^2+4x]$
18. $V(0,0)$; $A(\frac{1}{2},4)$ $[y=16x^2]$
19. $V(\frac{3}{4},\frac{31}{8})$; $A(0,5)$ $[y=2x^2-3x+5]$
20. $V(\frac{3}{2},-\frac{49}{4})$; $A(1,-12)$ $[y=x^2-3x-10]$
21. $V(3,-2)$; $A(6,0)$ $[y=\frac{2}{9}x^2-\frac{4}{3}x]$
22. $V(2,-4)$; $O(0,0)$ $[y=x^2-4x]$
23. $V(5,-1)$; che taglia l'asse y nel punto di ordinata 3 $[y=\frac{4}{25}x^2-\frac{8}{5}x+3]$
24. $V(-1,4)$; $A(-3,3)$ $[y=-\frac{1}{4}x^2-\frac{1}{2}x+\frac{15}{4}]$
25. $V(2,4)$; $A(0,8)$ $[y=x^2-4x+8]$

Retta e parabola

Determina i punti di intersezione tra la parabola e la retta aventi le seguenti equazioni:

26. $y=\frac{1}{2}x^2$; $x+2y-6=0$ $[(2,2);(-3,\frac{9}{2})]$

27. $2y=x^2$; $x-3y-1=0$ $[\emptyset]$

28. $y=x^2$; $y=2x-1$ $[(1,1)]$

29. $y=3x^2-5x+2$; $y=x+2$ $[(0,2);(2,4)]$

30. $y=-x^2+4x-3$; $y=\frac{7}{16}$ $[(\frac{5}{4},\frac{7}{16});(\frac{11}{4},\frac{7}{16})]$

31. Determina la misura della corda staccata dalla parabola di equazione $y=-x^2+5x-6$ sulla retta $x+y+1=0$. $[4\sqrt{2}]$

Ricapitolazione

32. Una parabola ha vertice nell'origine ed ha in comune con una retta *r* il punto $A(2,5)$. La retta *r* ha coefficiente angolare $m=\frac{1}{2}$ e interseca ulteriormente la parabola nel punto B. Calcola l'area del triangolo OAB. $[B(-\frac{8}{5},\frac{16}{5});S=\frac{36}{5}]$

33. Scrivi l'equazione della parabola passante per i punti $A(1,\frac{5}{2})$, $B(2,5)$, $C(-1,\frac{1}{2})$. Determina i suoi punti di intersezione con la retta di equazione $y=x-2$. $[y=\frac{1}{2}x^2+x+1;\emptyset]$

34. Scrivi l'equazione della parabola passante per i punti $O(0,0)$, $A(1,-1)$, $B(4,20)$. Indica con E il punto della parabola di ascissa -1. Dal punto E traccia la retta *r* parallela ad AB. Determina l'ulteriore punto di intersezione tra la retta *r* e la parabola. $[y=2x^2-3x;(6,54)]$

35. Determina l'equazione della parabola passante per il punto $A(1,\frac{3}{2})$ e di vertice $V(3,\frac{7}{2})$. Calcola la lunghezza della corda intercettata dalla parabola sulla retta di equazione $y=-2$. $[y=-\frac{1}{2}x^2+3x-1;l=2\sqrt{11}]$

36. Scrivi l'equazione della parabola che taglia l'asse *y* nel punto di ordinata 2 e che passa per i punti $A(2,1)$ e $B(4,2)$. Determina la parabola passante per $C(0,2)$ e di vertice $D(2,8)$. Trova poi i punti comuni alle due parabole. $[y=\frac{1}{4}x^2-x+2;y=-\frac{3}{2}x^2+6x+2;(0,2);(4,2)]$

37. Determina l'equazione della parabola che ha fuoco $F(-4,-6)$ e direttrice di equazione

$y=-10$. Trova le sue intersezioni con la retta di equazione $y=-\frac{7}{2}$.

$$[y=\frac{1}{8}x^2+x-6;(2,-\frac{7}{2});(-10,-\frac{7}{2})]$$

38.Data la retta $d: \ y=-2$, determina:

a) l'equazione della parabola avente per fuoco l'origine e per direttrice la retta *d*;

b) l'equazione dell'asse della parabola;

c) le coordinate dei punti A e B di intersezione della parabola con l'asse *x*;

d) l'area e il perimetro del triangolo ABV, dove V è il vertice della parabola.

$$[y=\frac{1}{4}x^2-1; \quad x=0; \quad A(-2{,}0),\ B(2{,}0); \quad area=2;\ 2p=2(2+\sqrt{5})]$$

39.Data la parabola di equazione $y=x^2-4x+3$, determina:

a) le coordinate del vertice V, del fuoco F, l'equazione della direttrice *d* e dell'asse *a*;

b) le coordinate dei punti A e B di intersezione della parabola con la retta $y=x-1$;

c) il perimetro del triangolo ABC, dove C è il punto di intersezione della parabola con l'asse *y*.

$$[V(2,-1),\ F(2,-\frac{3}{4}),\ d:\ y=-\frac{5}{4},\ a:\ x=2;\ \ A(1{,}0),\ b(4{,}3);\ \ 2p=4+3\sqrt{2}+\sqrt{10}]$$

40.Data la parabola di equazione $y=x^2-6x+9$, verifica che essa è tangente all'asse *x* e che il punto T di tangenza coincide con il vertice della parabola. Determina, poi, l'area del trapezio ABDC, dove A, B e C, D sono i rispettivi punti di intersezione delle rette $y=-x+3$ e $y=-x+5$ con la parabola. $[T(3{,}0), area=4]$

41.Dati i punti $A(0,5)$, $B(1,1)$, $C(2,-11)$, determina:

a) l'equazione della parabola che passa per essi; $[y=-4x^2+5]$

b) l'area e il perimetro del rettangolo PQSR, dove P e Q sono i punti di intersezione della retta $y=1$ con la parabola, ed R, S sono le rispettive proiezioni ortogonali di P e Q sull'asse *x*.

$[area=2,2p=6]$

42.Dati i punti $A(-\frac{1}{2},0)$, $B(\frac{5}{2},0)$, $C(0,\frac{5}{4})$, determina:

a) l'equazione della parabola che passa per tali punti; $[y=-x^2+2x+\frac{5}{4}]$

b) l'area del triangolo OAB, che ha un vertice nell'origine e gli altri due vertici, A e B, nei punti della parabola aventi ordinata $\frac{11}{16}$. $[area=\frac{55}{64}]$

Circonferenza

◆ La circonferenza come luogo geometrico

Nel capitolo precedente, abbiamo definito la circonferenza come la curva che si ottiene intersecando una superficie conica con un piano perpendicolare al suo asse.

Come per la parabola, però, risulta complicato dedurre l'equazione cartesiana della circonferenza a partire dalla sua definizione come conica. Al termine del capitolo sulla retta, quindi, abbiamo dato una diversa definizione di circonferenza, della quale, se fossimo rigorosi, dovremmo dimostrare l'equivalenza con la prima, come luogo geometrico dei punti del piano che godono di una certa proprietà caratteristica.

Chiamiamo **circonferenza** il luogo geometrico dei punti del piano che sono equidistanti da un punto fisso C, detto **centro**.

La distanza costante tra il generico punto della circonferenza e il centro è chiamata **raggio**.

Quindi, un punto P appartiene alla circonferenza di centro C e raggio r se e soltanto se $\overline{PC}=r$.

Utilizzando questa definizione, possiamo ricavare l'equazione di una circonferenza di cui conosciamo le coordinate del centro e la misura del raggio.

Esempio

Determiniamo l'equazione della circonferenza avente centro $C(4,5)$ e raggio $r=3$.

Un generico punto $P(x,y)$ del piano cartesiano apparterrà alla circonferenza se e soltanto se le sue coordinate verificheranno la proprietà caratteristica $\overline{PC}=r$, da cui otteniamo:

$$\sqrt{(x_P-x_C)^2+(y_P-y_C)^2}=r \quad .$$

Sostituiamo nella formula precedente i valori numerici:

$$\sqrt{(x-4)^2+(y-5)^2}=3 \quad .$$

Eleviamo al quadrato entrambi i membri: $(x-4)^2+(y-5)^2=3^2$.

Svolgiamo i quadrati di binomio:

$$x^2-8x+16+y^2-10y+25=9 \quad .$$

Riordinando i termini secondo il loro grado in senso decrescente, ricaviamo l'equazione della circonferenza cercata:

$$x^2+y^2-8x-10y+32=0 \quad .$$

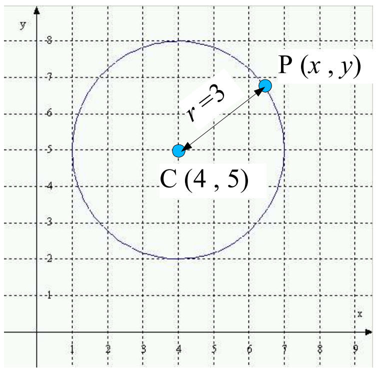

Fig. 1 La circonferenza come luogo geometrico

Osserva che l'equazione ottenuta è di secondo grado rispetto a entrambe le variabili x e y. Pertanto, a differenza di quanto facevamo con la retta e la parabola, non saremo in grado di scrivere l'equazione della circonferenza nella forma esplicita $y=f(x)$, e quindi di esprimere univocamente una delle variabili in funzione dell'altra.

Questo significa che la circonferenza <u>non</u> è il grafico di una funzione, ovvero di una corrispondenza che associa ad ogni valore della variabile indipendente x un <u>unico</u> valore della variabile dipendente y.

Generalizzando l'esempio precedente, utilizzando al posto dei dati numerici dei parametri letterali, possiamo concludere che:

ad ogni circonferenza del piano corrisponde un'equazione del tipo $\boldsymbol{x^2+y^2+ax+by+c=0}$.

Dimostrazione. Cerchiamo l'equazione della circonferenza di centro $C(x_C , y_C)$ e raggio *r*.

Un punto generico $P(x , y)$ appartiene alla circonferenza se e soltanto se $\overline{PC}=r$.

Elevando al quadrato, otteniamo:

$$\overline{PC}^2=r^2 \quad \Rightarrow \quad (x-x_C)^2+(y-y_C)^2=r^2 \quad \Rightarrow \quad x^2+y^2-2x_C x-2y_C y+x_C^2+y_C^2-r^2=0 \quad .$$

L'equazione ottenuta è dal tipo $x^2+y^2+ax+by+c=0$, avendo posto:

$$a=-2x_C \quad , \quad b=-2y_C \quad , \quad c=x_c^2+y_c^2-r^2 \quad .$$

Osserviamo che nell'equazione canonica della circonferenza:

- i coefficienti dei termini in x^2 e y^2 sono entrambi uguali ad uno;
- non è presente un termine che contenga il prodotto xy.

◆ Dall'equazione della circonferenza al suo grafico

Nel paragrafo precedente abbiamo visto che, partendo dalle coordinate del centro e dalla misura del raggio, possiamo ricavare l'equazione della circonferenza della forma $x^2+y^2+ax+by+c=0$.

Ora ci poniamo il problema inverso, supponendo di conoscere l'equazione della parabola e volendo ricavarne le principali caratteristiche.

Invertendo le relazioni ottenute in precedenza, otteniamo: $x_C=-\frac{a}{2}$; $y_C=-\frac{b}{2}$; $r=\sqrt{x_C^2+y_C^2-c}$.

Possiamo quindi affermare che:

ogni equazione del tipo $\boldsymbol{x^2+y^2+ax+by+c=0}$ *rappresenta una circonferenza avente centro* $\boldsymbol{C\equiv\left(-\frac{a}{2},-\frac{b}{2}\right)}$ *e raggio* $\boldsymbol{r=\sqrt{x_C^2+y_C^2-c}}$.

In realtà, dovremmo precisare che l'affermazione precedente è corretta se il radicando che compare nella formula del raggio è positivo: $x_C^2+y_C^2-c>0$, in modo che il raggio sia un numero reale.

Se il radicando è nullo, otterremo $r=0$, e quindi l'equazione rappresenterà una circonferenza degenere, ridotta ad un punto. Se invece il radicando è negativo, la circonferenza non avrà punti reali.

Le coordinate dei punti in cui la circonferenza interseca gli assi cartesiani sono date, come sempre, dalle soluzioni dei sistemi formati dall'equazione della circonferenza e da quella di uno degli assi stessi:

- $\begin{cases} x^2+y^2+ax+by+c=0 \\ y=0 \end{cases}$ per l'intersezione con l'asse delle ascisse;
- $\begin{cases} x^2+y^2+ax+by+c=0 \\ x=0 \end{cases}$ per l'intersezione con l'asse delle ordinate.

Esempio 1

Consideriamo l'equazione $4x^2+4y^2-8x-16y-5=0$.

Pur rappresentando una circonferenza, vediamo che tale equazione non è in forma canonica, in quanto i coefficienti dei termini di secondo grado non sono uguali ad uno. Dividiamo entrambi i membri per 4:

$x^2+y^2-2x-4y-5/4=0$.

Ora l'equazione è in forma canonica, ed i suoi coefficienti sono:

$a=-2,\ b=-4,\ c=-\frac{5}{4}$.

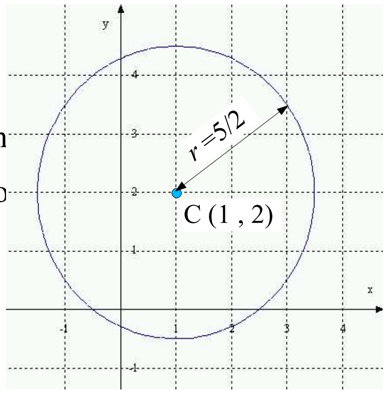

Fig. 2 Circonferenza di equazione $4x^2+4y^2-8x-16y-5=0$

Applicando le formule precedenti, ricaviamo: $x_C=1$, $y_C=2$, $r=\sqrt{\frac{25}{4}}=\frac{5}{2}$.

L'equazione data rappresenta quindi la circonferenza di centro $C(1,2)$ e raggio $r=5/2$.

Osserviamo che la circonferenza avrà sicuramente due punti di intersezione sia con l'asse x che con l'asse y, in quanto il raggio è maggiore sia dell'ordinata del centro (che rappresenta la distanza tra il centro e l'asse x), sia dell'ascissa del centro (che è la distanza del centro dall'asse y).

I punti di intersezione con l'asse x si ottengono risolvendo il sistema:

$$\begin{cases} 4x^2+4y^2-8x-16y-5=0 \\ y=0 \end{cases} \Rightarrow \quad 4x^2-8x-5=0 \quad \Rightarrow$$

$$x=\frac{8\pm\sqrt{64+80}}{8}=\frac{8\pm 12}{8} \quad \Rightarrow \quad x_1=-\frac{1}{2}; \quad x_2=\frac{5}{2} \ .$$

Essi hanno quindi coordinate $(-\frac{1}{2},0)$ e $(\frac{5}{2},0)$.

Naturalmente, in questo caso non era necessario utilizzare l'equazione della circonferenza in forma canonica.

I punti di intersezione con l'asse y si ottengono risolvendo il sistema:

$$\begin{cases} 4x^2+4y^2-8x-16y-5=0 \\ x=0 \end{cases} \Rightarrow \quad 4y^2-16y-5=0 \quad \Rightarrow$$

$$y=\frac{16\pm\sqrt{256+80}}{8}=\frac{16\pm\sqrt{336}}{8}=\frac{16\pm 4\sqrt{21}}{8}=\frac{4\pm\sqrt{21}}{2} \ .$$

Essi hanno quindi coordinate $(0,\frac{4-\sqrt{21}}{2})$ e $(0,\frac{4+\sqrt{21}}{2})$.

Esempio 2

Consideriamo l' equazione $x^2+y^2+6x-8y+25=0$.

E' l'equazione in forma canonica di una circonferenza, con coefficienti: $a=6,\ b=-8,\ c=25$.

Poiché il raggio ha misura uguale a zero: $r=\sqrt{(-3)^2+(4)^2-25}=0$, l'equazione data rappresenta una circonferenza degenere, ridotta al solo centro $C(-3,4)$.

Esempio 3

Consideriamo l' equazione $x^2+y^2-4x+10y+32=0$.

E' l'equazione in forma canonica di una circonferenza, con coefficienti: $a=-4,\ b=10,\ c=32$.

Per le coordinate del centro otterremmo: $C(2,-5)$, ma il radicando che compare nella formula del raggio risulta negativo: $x_C^2+y_c^2-c=(2)^2+(-5)^2-32=-3<0$.

Poiché $\sqrt{-3}$ non esiste nell'insieme dei numeri reali, e quindi non è possibile calcolare la misura del raggio, concludiamo che l'equazione assegnata non rappresenta una circonferenza reale.

L'equazione è priva di soluzioni reali; e non rappresenta nessun punto del piano.

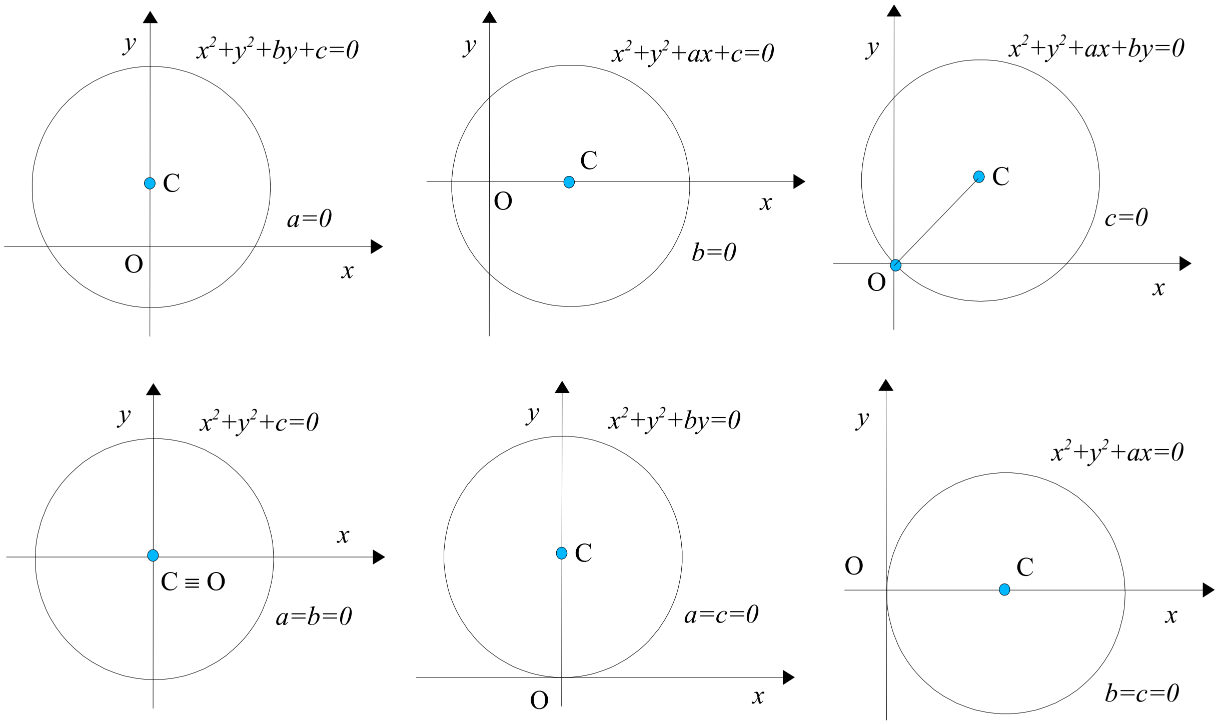

Fig. 3 Casi particolari dell'equazione della circonferenza

Osserviamo che, se uno o più dei coefficienti *a*, *b*, *c* dell'equazione $x^2+y^2+ax+by+c=0$ si annulla, cioè se l'equazione manca di qualche termine, allora si ottengono circonferenze situate in posizioni particolari rispetto agli assi cartesiani (figura 3).

- Se $a=0$, ovvero nell'equazione manca il termine di primo grado in *x*, allora *il centro della circonferenza appartiene all'asse y*.

  Infatti: $x_C=-a/2=0$.

- Se $b=0$, ovvero nell'equazione manca il termine di primo grado in *y*, allora *il centro della circonferenza appartiene all'asse x*.

  Infatti: $y_C=-b/2=0$.

- Se $c=0$, ovvero nell'equazione manca il termine noto, allora *la circonferenza passa per l'origine degli assi*.

  Infatti, l'equazione $x^2+y^2+ax+by=0$ è verificata dalle coordinate dell'origine: $(0,0)$.

- Se $a=b=0$, allora *la circonferenza ha il centro nell'origine degli assi.*

  Infatti: $x_C=-a/2=0$ e $y_C=-b/2=0$.
- Se $a=c=0$, allora la circonferenza ha il centro sull'asse *y* e passa per l'origine, e quindi è *tangente all'asse x nell'origine degli assi.*

  Infatti: $x_C=-a/2=0$, e la misura del raggio è uguale al valore assoluto dell'ordinata del centro:

  $r=\sqrt{x_C^2+y_C^2-c}=\sqrt{0+y_C^2+0}=|y_C|$.
- Se $b=c=0$, allora la circonferenza ha il centro sull'asse *x* e passa per l'origine, e quindi è *tangente all'asse y nell'origine degli assi.*

  Infatti: $y_C=-b/2=0$, e la misura del raggio è uguale al valore assoluto dell'ascissa del centro:

  $r=\sqrt{x_C^2+y_C^2-c}=\sqrt{x_C^2+0+0}=|x_C|$.

◆ Circonferenza per tre punti

La circonferenza ha un'equazione della forma $x^2+y^2+ax+by+c=0$, che, come avveniva nel caso della parabola con asse di simmetria parallelo all'asse delle ordinate, dipende da *tre* coefficienti incogniti *a*, *b*, *c*. Per determinare l'equazione della circonferenza, quindi, dovremo imporre il passaggio per *tre* punti generici e mettere a sistema le condizioni ottenute.

Esempio 1

Cerchiamo l'equazione della circonferenza passante per i punti $A(-1,-1)$, $B(2,1)$ e $C(-2,-2)$.

Poiché *un punto appartiene ad una curva se e soltanto se le sue coordinate rendono vera l'equazione della curva*, sostituiamo nell'equazione generica $x^2+y^2+ax+by+c=0$ le coordinate dei punti dati:

$$\begin{cases}1+1-a-b+c=0\\4+1+2a+b+c=0\\4+4-2a-2b+c=0\end{cases} .$$

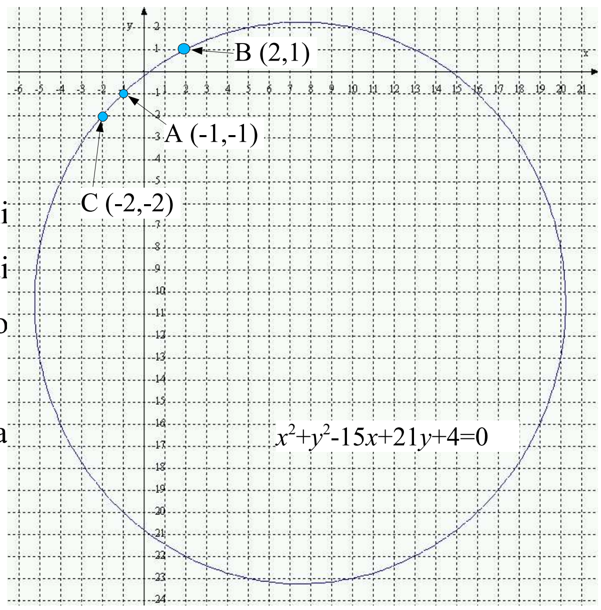

Fig. 4 Circonferenza per tre punti

Otteniamo un sistema di primo grado di tre equazioni in tre incognite, che risolviamo con il metodo di sostituzione, anche se sarebbe possibile combinarlo con quello di somma o sottrazione.

Ricaviamo, ad esempio, il valore di *c* dalla prima equazione:

$c=a+b-2$

e lo sostituiamo nelle altre due:

$$\begin{cases} 5+2a+b+a+b-2=0 \\ 8-2a-2b+a+b-2=0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 3a+2b=-3 \\ a+b=6 \end{cases} .$$

Ricaviamo poi il valore di *a* dalla terza equazione: $a=6-b$, e lo sostituiamo nella seconda:

$3(6-b)+2b=-3 \quad \Rightarrow \quad 18-3b+2b=-3 \quad \Rightarrow \quad -b=-21 \quad \Rightarrow \quad b=21$.

Procedendo a ritroso, sostituiamo il valore numerico di *b* nella terza equazione per determinare il valore numerico di *a*: $a=6-21=-15$.

Infine, sostituiamo i valori numerici di *a* e di *b* nella prima equazione per ricavare quello di *c*:

$c=-15+21-2=4$.

La soluzione del sistema è la terna ordinata: $a=-15,\ b=21,\ c=4$.

L'equazione richiesta è pertanto: $x^2+y^2-15x+21y+4=0$.

Come possibili verifiche, potremmo:

- controllare che le coordinate dei punti A, B, C soddisfino l'equazione data;
- trovare il centro della circonferenza e controllare che esso abbia la stessa distanza da A, B e C.

Per quanto il procedimento algebrico sia di solito più semplice, ricordiamo che al termine del capitolo sulla retta avevamo già imparato a scrivere l'equazione della circonferenza passante per tre punti A, B, C utilizzando le proprietà caratteristiche dell'asse di un segmento e della circonferenza come luoghi geometrici. Ricapitoliamo il procedimento seguito.

- Determiniamo l'equazione degli assi di due dei segmenti AB, BC e CA. Per fare questo possiamo utilizzare la definizione di asse come retta perpendicolare ad un segmento e passante per il suo punto medio o la proprietà dell'asse di un segmento di essere il luogo geometrico dei punti equidistanti dagli estremi del segmento stesso.
- Mettiamo a sistema le equazioni degli assi calcolate nel punto precedente. La soluzione del sistema fornisce le coordinate del circocentro K del triangolo ABC, ovvero del punto equidistante dai vertici del triangolo.
- Calcoliamo una delle distanze KA, KB, KC, che sono uguali per quanto detto nel punto precedente.
- Scriviamo l'equazione della circonferenza di centro K e raggio KA.

Esempio 2

Cerchiamo l'equazione della circonferenza passante per i punti $A(0,2)$, $B(-4,0)$, $C(0,0)$.

In questo caso molto particolare, diventa preferibile il procedimento geometrico. Infatti, dalla definizione di asse di un segmento, ricaviamo immediatamente che l'asse del segmento AC ha equazione $y=1$ e l'asse del segmento BC ha equazione $x=-2$.

Il punto di intersezione di tali assi ha pertanto coordinate $K(-2,1)$, ed è il centro della circonferenza che cerchiamo.

Il raggio è dato dalla distanza $KO=\sqrt{2^2+1^2}=\sqrt{5}$.

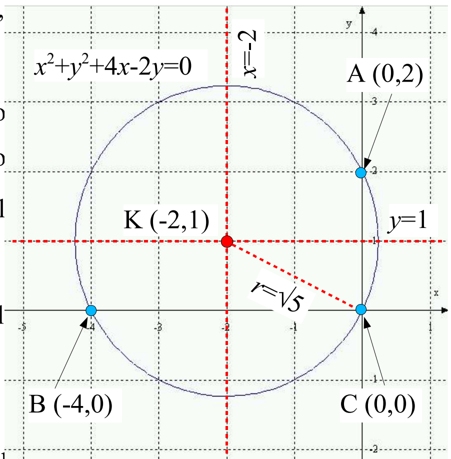

Fig. 5 Circonferenza per tre punti

Ricaviamo l'equazione della circonferenza imponendo che la distanza del punto generico $P(x,y)$ dal centro K sia uguale al raggio:

$$\sqrt{(x+2)^2+(y-1)^2}=\sqrt{5} \quad \Rightarrow \quad x^2+4x+4+y^2-2y+1=5 \quad \Rightarrow \quad x^2+y^2+4x-2y=0 \quad .$$

◆ Retta e circonferenza

Riprendendo il discorso fatto per la parabola, ricordiamo che:

le coordinate dei punti di intersezione di due curve sono date dalle soluzioni del sistema formato dalle loro equazioni.

Di conseguenza, gli eventuali *punti di intersezione tra una retta ed una circonferenza hanno come coordinate le soluzioni del sistema formato dalle equazioni della retta e della circonferenza.*

Infatti, se la retta *r* e la circonferenza *C* si intersecano nel punto A, le coordinate di A devono verificare sia l'equazione di *r* che quella di *C*, e, quindi, sono soluzione del sistema formato dalle loro equazioni.

Poiché la retta è descritta da un'equazione di primo grado e la circonferenza da una di secondo grado, il sistema risultante è di secondo grado di due equazioni in due incognite, e quindi può avere al massimo due soluzioni reali.

Ricordiamo infatti che il grado di un sistema di equazioni è dato dal prodotto dei gradi delle singole equazioni, e che esso fornisce il massimo numero di soluzioni reali del sistema.

Esempio 1

Cerchiamo gli eventuali punti di intersezione tra la retta di equazione $x-3y+13=0$ e la circonferenza di equazione $x^2+y^2-2x-6y+5=0$.

Risolviamo il sistema formato dalle loro equazioni:

$$\begin{cases} x^2+y^2-2x-6y+5=0 \\ x-3y+13=0 \end{cases} .$$

Ricaviamo $x=3y-13$ dall'equazione di primo grado e sostituiamo in quella di secondo grado:

$$(3y-13)^2+y^2-2(3y-13)-6y+5=0 \quad \Rightarrow$$

$$9y^2-78y+169+y^2-6y+26-6y+5=0 \quad \Rightarrow$$

$$10y^2-90y+200=0 \quad \Rightarrow \quad y^2-9y+20=0 \quad .$$

Abbiamo diviso entrambi i membri dell'equazione per 10.

$$(y-4)(y-5)=0 \quad \Rightarrow \quad y_1=4; \quad y_2=5 \quad .$$

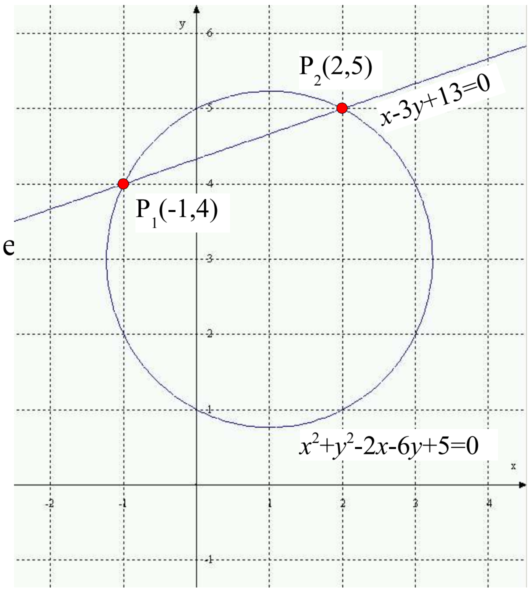

Fig. 6 Retta e circonferenza secanti

Abbiamo ottenuto due soluzioni reali e distinte in quanto il discriminante dell'equazione risolvente è positivo.

Sostituiamo i valori ricavati per *y* nell'equazione di primo grado:

- $y_1=4 \quad \Rightarrow \quad x_1=3\cdot4-13=-1$;
- $y_2=5 \quad \Rightarrow \quad x_2=3\cdot5-13=2$.

Le soluzioni del sistema sono le coppie ordinate $(-1,4)$ e $(2,5)$, che quindi rappresentano le coordinate dei punti di intersezione tra la retta e la circonferenza.

Quando retta e circonferenza si intersecano in due punti distinti, vengono dette *secanti*.

Puoi osservare che, quando retta e circonferenza sono secanti, allora la distanza tra il centro della circonferenza e la retta è *minore* del raggio.

Esempio 2

Cerchiamo gli eventuali punti di intersezione tra la retta di equazione $x+y-3=0$ e la circonferenza di equazione $x^2+y^2+2x+4y-13=0$.

Impostiamo il sistema formato dalle equazioni delle due curve:

$$\begin{cases} x^2+y^2+2x+4y-13=0 \\ x+y-3=0 \end{cases} .$$

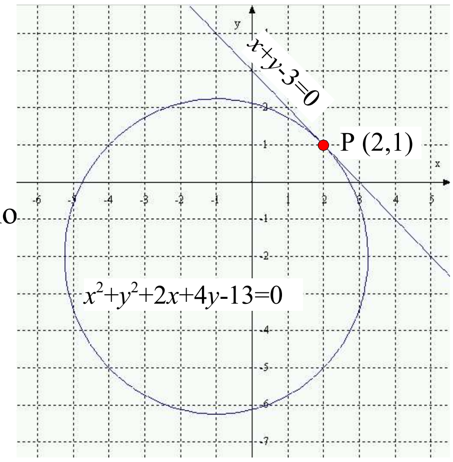

Fig. 7 Retta e circonferenza tangenti

Ricaviamo $x=3-y$ dall'equazione di primo grado e sostituiamo in quella di secondo grado:

$$(3-y)^2+y^2+2(3-y)+4y-13=0 \quad \Rightarrow$$

$$9-6y+y^2+y^2+6-2y+4y-13=0 \quad \Rightarrow$$

$$2y^2-4y+2=0 \quad \Rightarrow \quad y^2-2y+1=0 \quad .$$

Abbiamo diviso entrambi i membri dell'equazione per 2.

$$(y-1)^2=0 \quad \Rightarrow \quad y_1=y_2=1 \quad .$$

Abbiamo ottenuto una sola soluzione (o, se preferisci, due soluzioni reali e coincidenti) in quanto il discriminante dell'equazione risolvente è uguale a zero.

Sostituiamo il valore ricavato per y nell'equazione di primo grado:

$$y=1 \quad \Rightarrow \quad x=3-1=2 \quad .$$

La soluzione del sistema è la coppia ordinata $(2,1)$, che quindi fornisce le coordinate del punto di contatto tra la retta e la circonferenza. Quando retta e circonferenza si intersecano in un solo punto, ovvero in due punti coincidenti, vengono dette *tangenti*.

Puoi osservare che, quando retta e circonferenza sono tangenti, allora la distanza tra il centro della circonferenza e la retta è *uguale* al raggio.

Esempio 3

Cerchiamo gli eventuali punti di intersezione tra la retta di equazione $y=x+8$ e la circonferenza di equazione $x^2+y^2-10x-10y+25=0$ mettendo a sistema le equazioni delle due curve:

$$\begin{cases} x^2+y^2-10x-10y+25=0 \\ y=x+8 \end{cases} \quad \Rightarrow \quad x^2+(x+8)^2-10x-10(x+8)+25=0 \quad \Rightarrow$$

$$x^2+x^2+16x+64-10x-10x-80+25=0 \quad \Rightarrow$$

$$2x^2-4x+9=0 \quad \Rightarrow \quad \Delta=16-72<0 \quad .$$

Poiché il discriminante è negativo, il sistema non ammette soluzioni reali. La retta e la circonferenza non hanno punti in comune, e sono *esterne* l'una rispetto all'altra.

Puoi osservare che, quando retta e circonferenza sono esterne, allora la distanza tra il centro della circonferenza e la retta è *maggiore* del raggio.

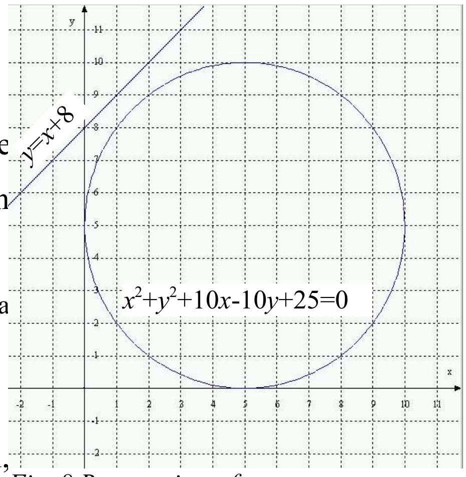

Fig. 8 Retta e circonferenza esterne

Riassumendo quanto abbiamo visto negli esempi precedenti, vediamo che una retta ed una circonferenza possono trovarsi in tre diverse posizioni reciproche:

- retta e circonferenza sono *secanti*, ovvero si intersecano in due punti distinti, quando l'equazione risolvente del sistema formato dalle loro equazioni ha discriminante positivo;
- retta e circonferenza sono *tangenti*, e si toccano in un punto (o due punti coincidenti), quando l'equazione risolvente del sistema formato dalle loro equazioni ha discriminante uguale a zero;
- retta e circonferenza sono *esterne*, ovvero non hanno punti in comune, quando l'equazione risolvente del sistema formato dalle loro equazioni ha discriminante negativo.

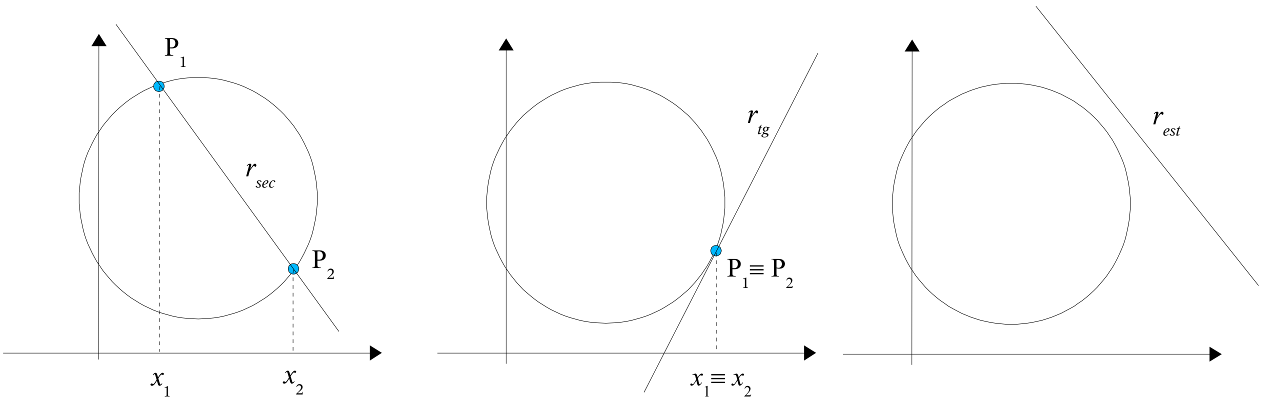

Fig. 9 Retta secante, tangente ed esterna rispetto ad una circonferenza.

Esempio 4

Data la circonferenza di equazione $x^2+y^2-4x-2y-5=0$, vogliamo determinare l'equazione della retta ad essa tangente nel suo punto di coordinate $A(-1,2)$.

Possiamo controllare che il punto A appartenga veramente alla circonferenza verificando che le coordinate del punto rendano vera l'equazione della circonferenza: $1+4+4-4-5=0$ *vera !*

Sappiamo dalla geometria euclidea che la retta tangente ad una circonferenza è perpendicolare al raggio passante per il punto di tangenza. Il problema si riconduce quindi a quello di calcolare l'equazione della retta passante per il punto A e perpendicolare al raggio CA.

Determiniamo allora le coordinate del centro:

$x_C = -\frac{a}{2} = 2$; $y_C = -\frac{b}{2} = 1$. Quindi: $C(2,1)$.

Calcoliamo il coefficiente angolare del raggio AC:

$$m_{AC} = \frac{y_C - y_A}{x_C - x_A} = \frac{1-2}{2+1} = -\frac{1}{3} \quad .$$

Poiché la retta tangente nel punto A ed il raggio AC sono perpendicolari, i loro coefficienti angolari devono essere l'uno inverso e opposto dell'altro:

$$m_{tang} = -\frac{1}{m_{AC}} = 3 \quad .$$

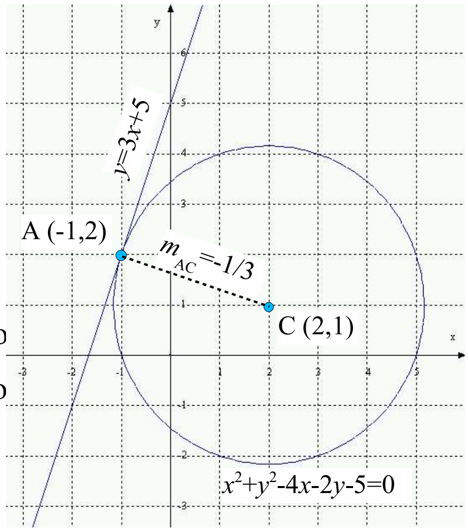

Fig. 10

L'equazione della tangente alla circonferenza in A è quindi del tipo $y = 3x + q$.

Imponendo il passaggio per A, ricaviamo: $3 \cdot (-1) + q = 2 \quad \Rightarrow \quad q = 3 + 2 = 5$.

La retta tangente in A ha quindi equazione: $y = 3x + 5$.

- **Intersezione di due circonferenze**

Come ormai abbiamo imparato, gli eventuali *punti di intersezione tra due circonferenza hanno come coordinate le soluzioni del sistema formato dalle equazioni delle due circonferenze.*

Poiché l'equazione della circonferenza è di secondo grado, il sistema formato dalle equazioni di due circonferenza è di quarto grado, in quanto il grado di un sistema di equazioni è uguale al prodotto dei gradi delle singole equazioni. Risolvere un tale sistema sarebbe quindi al di là delle nostre possibilità, se non fosse per il fatto che i termini di secondo grado dell'equazione della circonferenza possono essere sempre scritti nella forma $x^2 + y^2$, e quindi vengono "eliminati" sottraendo membro a membro le due equazioni che compongono il sistema.

Esempio 1

Vogliamo determinare gli eventuali punti di intersezione delle circonferenze di equazione:

$x^2 + y^2 + 4x - 2y - 20 = 0$ e $x^2 + y^2 - 8x + 2y - 28 = 0$.

Impostiamo il sistema e sottraiamo membro a membro la seconda equazione dalla prima:

$$\begin{cases} x^2 + y^2 + 4x - 2y - 20 = 0 \\ x^2 + y^2 - 8x + 2y - 28 = 0 \end{cases} \Rightarrow \quad 12x - 4y + 8 = 0 \quad \Rightarrow \quad y = 3x + 2 \quad .$$

Abbiamo ottenuto un'equazione di primo grado in due incognite, che quindi rappresenta una retta, che viene chiamata l'*asse radicale* delle due circonferenze. Il sistema di partenza è equivalente, ovvero ha le stesse soluzioni, del sistema formato dall'equazione dell'asse radicale e da quella di una qualunque delle circonferenze date.

Tale sistema, essendo di secondo grado, può essere risolto per sostituzione:

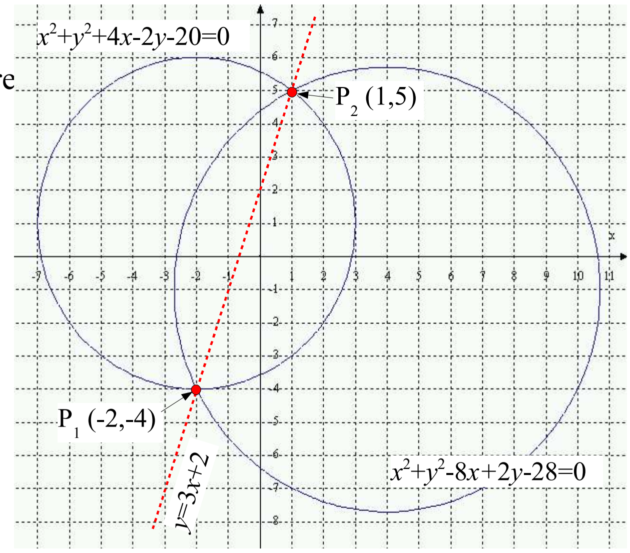

Fig. 11 Circonferenze secanti

$$\begin{cases} y=3x+2 \\ x^2+y^2+4x-2y-20=0 \end{cases} \Rightarrow$$

$$x^2+(3x+2)^2+4x-2(3x+2)-20=0 \quad \Rightarrow$$

$$x^2+9x^2+12x+4+4x-6x-4-20=0 \quad \Rightarrow$$

$$10x^2+10x-20=0 \quad .$$

Dividiamo per 10 entrambi i membri dell'equazione:

$$x^2+x-2=0 \quad \Rightarrow$$

$$x=\frac{-1\pm\sqrt{9}}{2} \quad \Rightarrow \quad x_1=-2; \quad x_2=1 \quad .$$

Sostituiamo le soluzioni trovate nell'equazione di primo grado:

- $x_1=-2 \quad \Rightarrow \quad y_1=-6+2=-4$;
- $x_2=1 \quad \Rightarrow \quad y_2=3+2=5$.

Le soluzioni del sistema sono le coppie ordinate $(-2,-4)$ e $(1,5)$, che quindi rappresentano le coordinate dei punti di intersezione delle due circonferenze.

Quando due circonferenze si intersecano in due punti distinti, vengono dette *secanti*.

Esempio 2

Determiniamo gli eventuali punti di intersezione delle circonferenze di equazione:

$$x^2+y^2-4x-6y-7=0 \quad \text{e} \quad x^2+y^2-10x+6y+29=0 \quad .$$

Sottraendo membro a membro la seconda equazione dalla prima, ricaviamo: $6x-12y-36=0 \quad \Rightarrow \quad x=2y+6$

che è l'equazione dell'asse radicale delle due circonferenze.

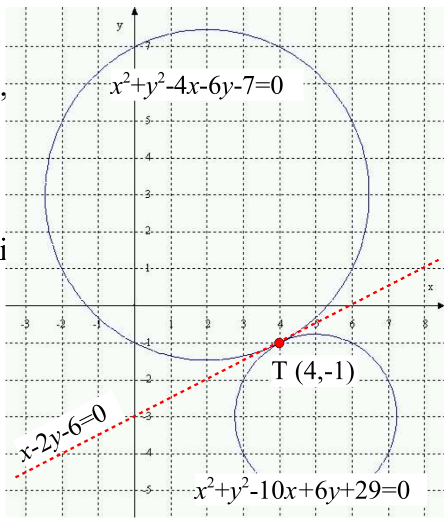

Fig. 12 Circonferenze tangenti

Mettiamo a sistema l'equazione dell'asse radicale con quella di una delle circonferenze:

$$\begin{cases} x=2y+6 \\ x^2+y^2-4x-6y-7=0 \end{cases} \Rightarrow$$

$$(2y+6)^2+y^2-4(2y+6)-6y-7=0 \quad \Rightarrow$$

$$4y^2+24y+36+y^2-8y-24-6y-7=0 \quad \Rightarrow$$

$$5y^2+10y+5=0 \quad \Rightarrow \quad y^2+2y+1=0 \quad \Rightarrow \quad (y+1)^2=0 \quad \Rightarrow \quad y_1=y_2=-1 \quad .$$

Sostituiamo la soluzione trovata nell'equazione di primo grado: $y=-1 \quad \Rightarrow \quad x=-2+6=4$.

La soluzione del sistema è la coppia ordinata $(4,-1)$, che quindi fornisce le coordinate del punto di contatto tra le due circonferenze. Quando due circonferenze si toccano in un solo punto, ovvero in due punti coincidenti, vengono dette *tangenti*.

In questo caso, come puoi vedere dalla fig.12, le circonferenze sono tangenti *esternamente*. Se, invece, si trovassero “dalla stessa parte” rispetto alla tangente comune, sarebbero tangenti *internamente*.

Esempio 3

Determiniamo gli eventuali punti di intersezione delle circonferenze di equazione:

$x^2+y^2-4x+3=0$ e $x^2+y^2-5x+2y+2=0$.

Sottraendo membro a membro la seconda equazione dalla prima, ricaviamo: $x-2y+1=0$

che è l'equazione dell'asse radicale delle due circonferenze.

Mettiamo a sistema l'equazione dell'asse radicale con quella di una delle circonferenze:

$$\begin{cases} x=2y-1 \\ x^2+y^2-4x+3=0 \end{cases} \Rightarrow$$

$$(2y-1)^2+y^2-4(2y-1)+3=0 \Rightarrow$$

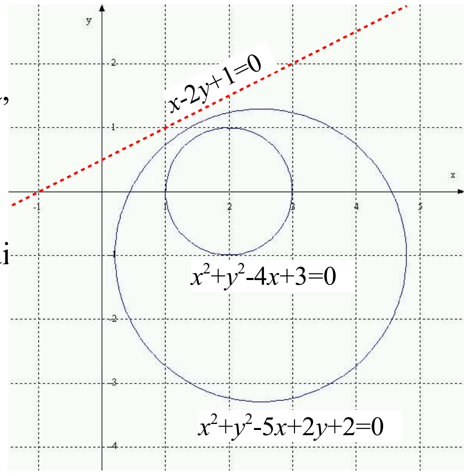

Fig. 13 Circonferenze interne

$$4y^2-4y+1+y^2-8y+4+3=0 \Rightarrow 5y^2-12y+8=0 \Rightarrow \Delta=144-160<0 .$$

Poiché il discriminante è negativo, il sistema non ammette soluzioni reali; pertanto, le circonferenze non hanno punti di intersezione.

In questo caso, come puoi vedere dalla fig.13, una delle circonferenze è *interna* all'altra. E' anche possibile che le circonferenze non abbiano punti in comune, ma siano *esterne*.

Esercizi sulla circonferenza

La circonferenza come luogo geometrico

Scrivi l'equazione della circonferenza di dato centro e raggio:

1. $C(4,2)$; $r=6$ $[x^2+y^2-8x-4y-16=0]$
2. $C(-1,3)$; $r=2$ $[x^2+y^2+2x-6y+6=0]$
3. $C(-2,5)$; $r=3$ $[x^2+y^2+4x-10y+20=0]$
4. $C(\frac{3}{2},\frac{1}{2})$; $r=\sqrt{2}$ $[2x^2+2y^2-6x-2y+1=0]$
5. $C(0,0)$; $r=5$ $[x^2+y^2=25]$
6. $C(0,0)$; $r=\frac{4}{3}$ $[9x^2+9y^2=16]$
7. $C(0,0)$; $r=\sqrt{2}$ $[x^2+y^2=2]$

Scrivi l'equazione della circonferenza di dato centro e passante per un punto dato:

(*Il raggio è dato dalla distanza tra il centro ed il punto dato*).

8. $C(2,3)$; $A(0,1)$ $[x^2+y^2-4x-6y+5=0]$
9. $C(-2,-3)$; $A(1,1)$ $[x^2+y^2+4x+6y-12=0]$
10. $C(2,3)$; $B(-1,6)$ $[x^2+y^2-4x-6y-5=0]$
11. $C(2,4)$; $O(0,0)$ $[x^2+y^2-4x-8y=0]$
12. $C(4,-6)$; $O(0,0)$ $[x^2+y^2-8x+12y=0]$
13. Scrivi l'equazione della circonferenza avente centro $C(-4,3)$ e raggio $r=\sqrt{13}$.
    Determina poi i punti di intersezione della circonferenza con gli assi cartesiani.
    $[x^2+y^2+8x-6y+12=0;\ A(-6,0),\ B(-2,0)]$

Determina l'equazione della circonferenza di cui conosci gli estremi di un diametro:

(*Il centro è il punto medio di ciascun diametro*).

14. $A(-2,1)$; $B(4,-2)$ $[x^2+y^2-2x+y-10=0]$
15. $A(-4,2)$; $B(2,-6)$ $[x^2+y^2+2x+4y-20=0]$
16. $A(-3,1)$; $B(5,-2)$ $[x^2+y^2-2x+y-17=0]$
17. Determina l'equazione della circonferenza il cui diametro ha per estremi i punti di intersezione della retta $r:\ y=-\frac{1}{2}x+2$ con gli assi cartesiani. $[x^2+y^2-4x-2y=0]$
18. Scrivi l'equazione della circonferenza il cui diametro ha per estremi i punti di intersezione della retta $3x-2y=6$ con gli assi cartesiani. $[x^2+y^2-2x+3y=0]$

19.Scrivi l'equazione della circonferenza avente raggio $r=4$ e per centro il punto di intersezione delle rette $3x+y=9$ e $x-2y+4=0$. $[x^2+y^2-4x-6y-3=0]$

20.Scrivi l'equazione della circonferenza passante per l'origine e con il centro nel punto di intersezione delle rette $x+y-7=0$ e $2x-3y+6=0$. $[x^2+y^2-6x-8y=0]$

21.Scrivi l'equazione della circonferenza passante per l'origine e con il centro nel punto di intersezione delle rette $2x-y-1=0$ e $x+y-5=0$. $[x^2+y^2-4x-6y=0]$

Dall'equazione della circonferenza al suo grafico

Determina le coordinate del centro e la misura del raggio delle seguenti circonferenze:

22. $x^2+y^2+6x-6y=0$ $[(-3,3);3\sqrt{2}]$
23. $x^2+y^2+2x-4y-4=0$ $[(-1,2);3]$
24. $x^2+y^2-6x-4\sqrt{2}y+1=0$ $[(3,2\sqrt{2});4]$
25. $x^2+y^2+4x-10y+13=0$ $[(-2,5);4]$
26. $x^2+y^2-8y=0$ $[(0,4);4]$
27. $x^2+y^2+8x+4=0$ $[(-4,0);2\sqrt{3}]$
28. $x^2+y^2-6x=0$ $[(3,0);3]$
29. $x^2+y^2+8x-2=0$ $[(-4,0);3\sqrt{2}]$
30. $x^2+y^2+6y-1=0$ $[(0,-3);\sqrt{10}]$
31. $x^2+y^2+x+y+3=0$ $[non\,esiste]$
32. $x^2+y^2-4x+5y=0$ $[(2,-\frac{5}{2});\frac{\sqrt{41}}{2}]$
33. $3x^2+3y^2-8x+6y-1=0$ $[(\frac{4}{3},-1);\frac{2}{3}\sqrt{7}]$
34. $9x^2+9y^2+6x-15y-5=0$ $[(-\frac{1}{3},\frac{5}{6});\frac{7}{6}]$
35. $x^2+y^2+4x+2y+5=0$ $[(-2,-1);0]$
36. $4x^2+4y^2-12x-24y+29=0$ $[(\frac{3}{2},3);2]$
37. $x^2+y^2-4x+6y+13=0$ $[(2,-3);0]$
38. $x^2+y^2-2x-6y+19=0$ $[non\,esiste]$

39.Verifica che i punti $P(2,0)$ e $Q(-\frac{1}{2},\frac{5}{2})$ appartengono alla circonferenza di equazione $x^2+y^2-4x-5y+4=0$, che il punto $A(2,-1)$ è esterno alla circonferenza e che il punto $B(1,1)$ è interno ad essa. (*Confronta la distanza del punto dal centro con il raggio*).

40.Data la circonferenza di equazione $x^2+y^2-5x+6y+4=0$, trovane centro, raggio e le coordinate dei punti di intersezione con gli assi cartesiani.

$$[C(\frac{5}{2},-3),\ r=\frac{3\sqrt{5}}{2},\ (1{,}0),\ (4{,}0),\ (0,-3\pm\sqrt{5})]$$

41.Tra le seguenti equazioni:

F_1: $x^2+y^2-6y-7=0$; F_2: $x^2+y^2-4x-21=0$; F_3: $x^2+y^2-49=0$

F_4: $x^2+y^2+8x-6y=0$; F_5: $x^2+y^2-2x=0$; F_6: $x^2+y^2-8y=0$

individua quelle che rappresentano circonferenze, indicando anche se si trovano in posizioni particolari rispetto agli assi cartesiani.

Risposte: F_1: $C(0,3)\in asse\ y, r=4$; F_2: $C(2,0)\in asse\ x, r=5$; F_3: $C\equiv O, r=7$;

F_4: $C(-4,3), r=5,$ *passa per* O ; F_5: $C(1,0)\in asse\ x, r=1,$ *tangente all'asse y* ;

F_6: $C(0,4)\in asse\ y, r=4,$ *tangente all'asse x*

42.Determina centro e raggio della circonferenza di equazione $15x^2+15y^2+10x+1=0$.
Trova l'equazione della circonferenza concentrica a quella data (ovvero con lo stesso centro) e il cui raggio sia $r=1$. $[(-1/3,0);\sqrt{10}/15;9x^2+9y^2+6x-8=0]$

43.Scrivi l'equazione della circonferenza di raggio $r=2\sqrt{2}$ e concentrica alla circonferenza di equazione $x^2+y^2-6x-9=0$. $[x^2+y^2-6x+1=0]$

44.Scrivi l'equazione della circonferenza passante per $P(4,-2)$ e concentrica alla circonferenza di equazione $x^2+y^2-2x-2y=0$. $[x^2+y^2-2x-2y-16=0]$

45.Verifica che il punto $A(-3,3)$ appartiene alla circonferenza di equazione $x^2+y^2+2x+2y-18=0$ e determina il punto diametralmente opposto. $[(1,-5)]$

Circonferenza per tre punti

Scrivi l'equazione della circonferenza passante per i seguenti punti:

46. $A(-3,3)$; $B(1,-1)$; $C(1,3)$ $[x^2+y^2+2x-2y-6=0]$

47. $A(-2,0)$; $B(0,1)$; $C(0,-1)$ $[2x^2+2y^2+3x-2=0]$

48. $A(0,0)$; $B(5,0)$; $C(0,-3)$ $[x^2+y^2-5x+3y=0]$

49. $A(-1,0)$; $B(0,-2)$; $C(0,1)$ $[x^2+y^2-x+y-2=0]$

50. $A(2,2)$; $B(5,1)$; $C(6,4)$ $[x^2+y^2-8x-6y+20=0]$

51.Determina l'equazione della circonferenza circoscritta al triangolo ABC, con $A(0,0)$, $B(8,0)$, $C(0,12)$. Calcola poi le coordinate del centro e la misura del raggio di tale circonferenza. $[x^2+y^2-8x-12y=0;(4,6);r=2\sqrt{13}]$

52.Determina l'equazione della circonferenza che passa per i punti $A(2,1)$, $B(4,5)$, $C(1,4)$ e verifica che AB è un diametro. $[x^2+y^2-6x-6y+13=0]$

53.Data la retta $r:\ 3x-4y+12=0$, determina:

a) le coordinate dei punti A e B di intersezione della *r* con gli assi cartesiani;

b) l'equazione della circonferenza passante per $O(0,0)$ e per i punti A e B.

c) Cos'è AB per la circonferenza? $[A(-4,0),\ B(0,3);\ x^2+y^2+4x-3y=0]$

54.Dati i punti $A(-1,-2)$, $B(9,-2)$, $C(0,1)$, determina:

a) l'equazione della circonferenza che passa per tali punti;

b) il perimetro del rettangolo inscritto nella circonferenza, avente un vertice in C e i lati paralleli agli assi cartesiani. (*Un poligono è inscritto ad una circonferenza quando tutti i suoi vertici appartengono alla circonferenza*). $[x^2+y^2-8x+4y-5=0;\ 2p=28]$

55.Le rette $y=2x+1$, $y=x+2$, $y=1/2x+1$ individuano un triangolo ABC. Determina:

a) l'equazione della circonferenza circoscritta ad ABC; $[x^2+y^2+5x-7y+6=0]$

b) centro e raggio di tale circonferenza. $[(-5/2,7/2);r=5\sqrt{2}/2]$

Retta e circonferenza

Determina i punti di intersezione tra la circonferenza e la retta date:

56. $x^2+y^2-5x+y=0$; $y=x$ $[(0,0);(2,2)]$

57. $x^2+y^2-6x+3y-4=0$; $2x+y=1$ $[(0,1);(16/5,-27/5)]$

58. $x^2+y^2-3x+2y-6=0$; $3x-y-1=0$ $[(1,2);(-7/10,-31/10)]$

59. $x^2+y^2-4x+3=0$; $x-2y+1=0$ $[\emptyset]$

60.Calcola la misura della corda intercettata dalla retta di equazione $x+y=1$ sulla circonferenza $x^2+y^2+2x-y-1=0$. (*La corda è il segmento che congiunge i punti in cui la retta interseca la circonferenza*). $[3\sqrt{2}/2]$

61.Scrivi l'equazione della circonferenza di centro $C(1,1)$ e raggio $r=\sqrt{2}$.

Verifica che la retta di equazione $y=x+2$ è tangente alla circonferenza e determina le coordinate del punto di tangenza. $[x^2+y^2-2x-2y=0;(0,2)]$

62.Scrivi l'equazione della circonferenza che passa per i punti $A(1,0)$, $B(2,1)$, $C(-2,-1)$ e trovane i punti di intersezione con la retta di equazione $y=7-x$.

$[x^2+y^2+4x-8y-5=0;(-2,9);(3,4)]$

63.Determina l'equazione della circonferenza passante per i punti $A(4,0)$, $B(0,6)$, $C(4,6)$.

Calcola le coordinate degli altri tre vertici del quadrato inscritto nella circonferenza ed avente un vertice nell'origine. $[x^2+y^2-4x-6y=0;\ D(5,1),\ E(4,6),\ F(-1,5)]$

(*Uno dei vertici è l'altro estremo del diametro passante per l'origine. Ricorda poi che le diagonali di un quadrato sono perpendicolari*).

64. Dati i punti $A(1,0)$, $B(1,6)$, $C(-2,6)$, determina:
   a) l'equazione della circonferenza che passa per tali punti; $[x^2+y^2+x-6y-2=0]$
   b) le coordinate del vertice D del rettangolo ABCD inscritto nella circonferenza. $[D(-2,0)]$
   c) Verifica, infine, che le rette AC e BD passano per il centro della circonferenza.
65. Determina l'equazione della circonferenza di centro $C(4,0)$ e raggio $r=4$. Calcola poi le coordinate dei punti D ed E di intersezione della circonferenza con la retta passante per i punti $A(1,-7)$ e $B(4,-4)$. $[x^2+y^2-8x=0;\ D(4,-4),\ E(8,0)]$
66. Data la circonferenza di equazione $x^2+y^2-2x-4y=0$, determina l'area del triangolo che ha come vertici i suoi punti di intersezione con gli assi cartesiani. $[S=4]$
67. Considera la circonferenza di centro $C(-1,-2)$ e raggio $r=5$. Determina l'area dei due triangoli isosceli inscritti nella circonferenza ed aventi per base la corda intercettata sulla circonferenza dalla retta $y=2$. $[3;27]$
   (*I vertici dei triangoli si troveranno sull'asse della base*).
68. Trova centro e raggio della circonferenza di equazione $x^2+y^2-4x+8y-12=0$. Determina l'area dei triangoli isosceli ABD e ABE inscritti nella circonferenza e aventi come base comune la corda AB intercettata dalla circonferenza stessa sull'asse *x*. $[16(\sqrt{2}\pm1)]$
69. Verifica che il punto $P(1,-2)$ appartiene alla circonferenza $x^2+y^2-2x+y-1=0$ e scrivi l'equazione della retta tangente alla circonferenza in P. $[y=-2]$
70. Scrivi l'equazione della circonferenza che taglia l'asse *y* nei punti di ordinata 4 e -2 e che passa per $A(3,5)$. Determina l'equazione della tangente alla circonferenza in A.
   $[3x^2+3y^2-16x-6y-24=0]$
71. Scrivi l'equazione della retta tangente alla circonferenza $x^2+y^2-6y-4=0$ nel suo punto di intersezione con il semiasse positivo delle *x*. $[2x-3y-4=0]$
72. Scrivi le equazioni delle tangenti alla circonferenza $x^2+y^2-7x+5y+6=0$ nei suoi punti di intersezione con gli assi cartesiani. $[y=7x-2;\ y=-7x-3;\ y=x-1;\ y=6-x]$
73. Una circonferenza ha per diametro il segmento di estremi $A(-4,-3)$ e $B(4,3)$. Determina:
   a) l'equazione della circonferenza;
   b) l'equazione della tangente alla circonferenza in B;
   c) l'area del triangolo COD, dove C e D sono le intersezioni della tangente con gli assi cartesiani.

$$\left[x^2+y^2=25;\ \ y=-\frac{4}{3}x+\frac{25}{3};\ \ area(COD)=\frac{625}{24}\right]$$

Intersezione di due circonferenze

74.Determina le intersezioni della circonferenza di centro $C_1(3,0)$ e raggio $r_1=3$ con la circonferenza di centro $C_2(0,3)$ e passante per $A(-3,3)$. $[(0,0);(3,3)]$

75.Determina i punti di intersezione tra le circonferenze di equazione $x^2+y^2-8x-6y+20=0$ e $2x^2+2y^2-11x+3y=0$. $[(2,2);(5,1)]$

76.Verifica che le circonferenze $x^2+y^2-2x-7=0$ e $x^2+y^2+2x+4y-27=0$ sono tangenti internamente.

77.Date le circonferenze $x^2+y^2-4x-4y+3=0$ e $x^2+y^2-8x+7=0$, trova l'equazione della circonferenza che passa per i loro punti di intersezione e per l'origine degli assi.

$[x^2+y^2-x-7y=0]$

78.Dati i punti $A(-6,0)$, $B(-7,7)$, $C_1(-10,3)$, $C_2(-3,4)$, determina:

a) l'equazione della circonferenza che ha centro in C_1 e che passa per A;
b) l'equazione della circonferenza passante per B e il cui centro è C_2;
c) l'equazione della retta che passa per i punti di intersezione delle due circonferenze, verificando che tali punti coincidono proprio con A e con B;
d) l'equazione della circonferenza che passa per i punti A, B, C_1, C_2.

$[x^2+y^2+20x-6y+84=0;\ x^2+y^2+6x-8y=0;\ 7x+y+42=0;\ x^2+y^2+13x-7y+42=0]$

79.Data la circonferenza $\gamma:\ 2x^2+2y^2+12x+16y+13=0$, determina:

a) l'equazione della circonferenza γ_1, concentrica alla γ e avente raggio $r=4$;
b) l'equazione della circonferenza γ_2, avente centro sull'asse y e passante per i punti $P_1(-3\sqrt{2},1)$ e $P_2(\sqrt{21},0)$; $[\gamma_1:\ x^2+y^2+6x+8y+9=0;\ \gamma_2:\ x^2+y^2+2y-21=0]$
c) l'equazione dell'asse radicale di γ_1 e γ_2 e le coordinate dei loro punti di intersezione.

$[x+y+5=0;\ (-2+\sqrt{7},-3-\sqrt{7});\ (-2-\sqrt{7},-3+\sqrt{7})]$

Ricapitolazione

80.Scrivi l'equazione della circonferenza di centro $C(-3,2)$ e tangente all'asse x. (*Il raggio è uguale alla distanza del centro dall'asse x, e quindi al valore assoluto dell'ordinata del centro*).

$[x^2+y^2+6x-4y+9=0]$

81.Scrivi l'equazione della circonferenza tangente all'asse y e di centro $C(\frac{2}{3},-1)$. (*Il raggio è uguale alla distanza del centro dall'asse y, e quindi al valore assoluto dell'ascissa del centro*).

$[3x^2+3y^2-4x+6y+3=0]$

82. Determina le equazioni delle circonferenze tangenti all'asse *x* nel punto $P(2,0)$ e di raggio $r=3$. $[x^2+y^2-4x\pm6y+4=0]$

83. Determina le equazioni delle circonferenze tangenti all'asse *y* nel punto $P(0,-3)$ e di raggio $r=4$. $[x^2+y^2\pm8x+6y+9=0]$

84. Scrivi l'equazione della circonferenza di centro $C(3,1)$ e tangente alla retta di equazione $3x+4y+7=0$. (*Il raggio è uguale alla distanza tra il centro e la retta tangente*).
$[x^2+y^2-6x-2y-6=0]$

85. Trova l'equazione della circonferenza di centro $C(-8,4)$ e tangente all'asse *y*.
$[x^2+y^2+16x-8y+16=0]$

86. Calcola la distanza del punto $C(1,2)$ dalla retta $r:\ 6x+8y+3=0$ e determina l'equazione della circonferenza di centro C e tangente alla retta *r*. $[x^2+y^2-2x-4y-5/4=0]$

87. Determina i vertici del triangolo isoscele che ha per base il segmento intercettato dalla circonferenza $7x^2+7y^2-19x+11y-6=0$ sulla retta $y=-1/2x+3/2$ ed ha il vertice sulla retta parallela alla base e passante per $P(-2,-5/3)$. $[(1,1);(3,0);(1/3,-17/6)]$

88. Dati i punti $A(1,3)$ e $B(5,1)$, determina:
   a) l'equazione della circonferenza avente come diametro il segmento AB;
   b) le coordinate dei punti C e D (con $x_C<x_D$) in cui la circonferenza interseca l'asse *x*;
   c) l'equazione della parabola passante per A, C e D;
   d) l'equazione della parabola che passa per l'origine O e per i punti A e D.

$$[x^2+y^2-6x-4y+8=0;\ C(2,0),\ D(4,0);\ y=x^2-6x+8;\ y=-x^2+4x]$$

89. Dati i punti $C_1(0,1)$ e $C_2(1,0)$, determina:
   a) le equazioni delle circonferenze γ_1 e γ_2, aventi, rispettivamente, centro in C_1 e in C_2 e stesso raggio, di misura $r=1$; $[x^2+y^2-2y=0;\ x^2+y^2-2x=0]$
   b) le equazioni delle rette tangenti a γ_1 e γ_2 nell'origine; $[y=0;\ x=0]$
   c) le coordinate dei punti di intersezione delle due circonferenze, indicando con A quello diverso dall'origine; $[O(0,0),\ A(1,1)]$
   d) l'equazione della parabola passante per O, per A e per il punto B, distinto dall'origine, in cui la γ_2 incontra l'asse *x*. $[y=-x^2+2x]$

90. Dati i punti $C_1(-2,1)$ e $C_2(1/2,1)$, determina:
   a) l'equazione della circonferenza che ha centro C_1 e passa per l'origine;
   b) l'equazione della circonferenza che ha centro C_2 e passa, anch'essa, per l'origine;
   c) l'equazione dell'asse radicale delle due circonferenze.

d) Verifica, infine, che le rette tangenti alle due circonferenze nei loro punti di intersezione sono perpendicolari. $[x^2+y^2+4x-2y=0;\ x^2+y^2-x-2y=0;\ x=0]$

91.Dati i punti $C_1(3,4)$ e $C_2(2,-3)$, determina:

a) l'equazione della circonferenza che ha centro C_1 e passa per l'origine;

b) l'equazione della circonferenza avente centro C_2 e raggio $r=5$;

c) l'equazione del loro asse radicale;

$[x^2+y^2-6x-8y=0;\ x^2+y^2-4x+6y-12=0;\ x+7y-6=0]$

d) i punti A e B di intersezione tra le due circonferenze; $[A(6,0), B(-1,1)]$

e) il perimetro e l'area del quadrato AC_1BC_2. $[2p=20, area=25]$

92.Dati i punti $C_1(-2,3)$ e $C_2(-3,-2)$:

a) determina le equazioni delle circonferenze passanti per l'origine e aventi come centri, rispettivamente, i punti C_1 e C_2.

b) Verifica che le rette tangenti nei punti di intersezione delle circonferenze sono perpendicolari.

$[x^2+y^2+4x-6y=0;\ x^2+y^2-6x+4y=0]$

93.Trova l'equazione di una parabola che passa per il punto $A(1,5)$ e per i punti comuni alla circonferenza di equazione $x^2+y^2+2x+5y-14=0$ e alla retta di equazione $y=4x+10$.

$[y=-\frac{3}{5}x^2+\frac{2}{5}x+\frac{26}{5};(\frac{1}{3},\frac{79}{15})]$

94.Date la retta di equazione $y=2x-3$ e la circonferenza $x^2+y^2-4x-2y=0$, trova:

a) i punti A e B (con $x_A<x_B$) in cui la retta interseca la circonferenza, verificando che essa passa per il centro della circonferenza $[A(1,-1); B(3,3)]$

b) l'intersezione D tra la tangente alla circonferenza in B e la retta passante per A e per l'origine degli assi $[D(-9,9)]$

c) l'intersezione E tra la tangente alla circonferenza in A e la retta passante per B e per l'origine degli assi $[E(-\frac{1}{3},-\frac{1}{3})]$

d) l'area del triangolo DAB. $[30]$

95.Dati i punti $A(0,1)$, $B(3,1)$, $C(2,-3)$, determina:

a) l'equazione della parabola passante per tali punti; $[y=2x^2-6x+1]$

b) le coordinate dei punti D, E di intersezione della parabola con la retta passante per $P(2,-2)$ e parallela alla retta $3x-y+\frac{2}{3}=0$; $[D(\frac{3}{2},-\frac{7}{2}),\ E(3,1)]$

c) l'equazione della circonferenza di diametro DE. $[2x^2+2y^2-9x+5y+2=0]$