Introduzione alla geometria

1. Geometria intuitiva e razionale

La parola *geometria* viene dal greco e significa "misura della Terra".
Alla scuola media hai affrontato lo studio della *geometria intuitiva*, ovvero la ricerca delle proprietà delle figure mediante *osservazioni sperimentali* (pratiche), ripetute più volte attraverso l'uso di strumenti di misura, su oggetti o disegni o modelli aventi la forma delle diverse figure geometriche.
Le proprietà scoperte osservando particolari modelli concreti vengono poi *generalizzate*, cioè considerate valide per ogni altra figura analoga al modello reale studiato praticamente.
Si tratta quindi di un metodo *induttivo*, ovvero che va *da casi particolari a regole generali*, dove le proprietà scoperte sono, soprattutto, frutto dell'*intuizione*.

Quella che affronteremo insieme in questi anni, invece, è detta *geometria razionale* e si riferisce a *figure ideali* che, pur avendo origine da un modello fisico, hanno subito un processo di *astrazione* da tutte le caratteristiche degli oggetti concreti.
Anche se spesso le proprietà delle figure ti sono già note attraverso i metodi sperimentali della geometria intuitiva, non puoi semplicemente considerarle valide anche nell'ambito della geometria razionale. Ciò avverrà soltanto se, attraverso una successione di *ragionamenti logici*, giungerai a dimostrare rigorosamente la loro validità generale. In geometria razionale, quindi, la validità universale di una certa proprietà viene stabilita mediante il puro ragionamento, sviluppato su di una figura geometrica astratta. Questa proprietà sarà poi valida per ogni altra figura particolare che sia un modello fisico di quella astratta.
Questo procedimento di indagine è chiamato *metodo deduttivo*: al contrario di quello induttivo, esso muove *dal generale verso il particolare* e sfrutta la *deduzione* logica.

Iniziando un nuovo argomento, dovremo introdurre i concetti su cui operare fornendone le definizioni. Una **definizione** è una *frase nella quale si spiega cos'è un certo oggetto o un certo concetto, in termini di concetti più semplici*, assegnandogli anche un opportuno nome che lo identifica.
Ad esempio la proposizione: "il peso di un corpo è la forza con cui esso è attratto dalla Terra" è la definizione di "peso". Essa, però, potrà essere compresa soltanto se chi la legge conosce il significato degli altri vocaboli presenti nell'enunciato della definizione stessa. Per esempio, capiremo cos'è il peso di un corpo solo se conosciamo il significato del termine "forza".
Questa serie di definizioni non può andare avanti all'infinito, né può dar luogo ad un circolo vizioso.

E' necessario, pertanto, che vi siano dei termini che rimangono non definiti.

Questi *oggetti che non possono essere definiti in termini di concetti più semplici* vengono detti **enti primitivi**. I primi concetti che tratteremo come enti primitivi sono quelli di *punto*, *retta*, *piano*. Di essi, quindi, non diamo nessuna definizione esplicita, nessuna spiegazione diretta su che cosa essi siano, supponendo che, almeno a livello intuitivo, tutti sappiamo riconoscerli.

Le *proprietà di questi enti saranno però definite implicitamente* (cioè indirettamente) attraverso certe proposizioni che vengono dette **postulati** o **assiomi**.

Un esempio di postulato è la frase "per due punti distinti passa una ed una sola retta". Stabiliti alcuni postulati, da essi dobbiamo dedurre le diverse proprietà delle figure geometriche, non attraverso osservazioni, disegni e misure concrete, ma attraverso ragionamenti.

Nei secoli passati (fino al tardo Ottocento) i postulati della geometria venivano considerati come *verità assolute ed evidenti*. La concezione attuale, invece, è quella di vedere i postulati come il risultato di un tacito accordo linguistico tra gli esseri umani per descrivere le proprie esperienze spaziali. In altre parole, i postulati possono essere visti come le regole prestabilite di un gioco: ogni giocatore le accetta e si impegna a rispettarle, senza per questo considerarle "vere".

Riprendiamo, per esempio, l'assioma "per due punti passa una ed una sola retta". Secondo la concezione tradizionale della geometria, si riteneva che i punti e le rette fossero dei ben precisi oggetti ideali e che tale assioma esprimesse una proprietà necessaria di tali oggetti, e quindi assolutamente vera. La concezione odierna, invece, ritiene che i punti e le rette siano degli schemi mentali che traducono in qualche modo le nostre esperienze visive e tattili. Ammettiamo allora l'enunciato dell'assioma, lasciando perdere le discussioni su cosa siano veramente i punti e le rette e deduciamo tutte le conseguenze logiche del nostro postulato.

In tal modo il nostro assioma è "vero" solo nel senso che esprime correttamente le nostre esperienze spaziali; le conseguenze logiche che ne possiamo dedurre sono anch'esse conformi all'esperienza sensibile e, spesso, ci portano a prevedere il risultato di una nostra esperienza sensibile prima ancora di eseguirla.

I nostri postulati devono godere di alcune proprietà:

- *non devono portare a contraddizioni*: non deve essere possibile ricavare da essi che una certa proprietà è vera e, con un altro ragionamento, che la stessa proprietà è falsa;
- le diverse regole devono essere *indipendenti* tra loro, ossia un postulato non deve essere conseguenza logica degli altri
- l'insieme di queste regole deve essere *completo*, cioè esse ci devono sempre permettere di decidere se le proprietà che stiamo studiando sono vere o false.

Il primo ad esporre la geometria in modo razionale e a scegliere un opportuno sistema di postulati fu

il matematico greco Euclide (vissuto intorno al 300 a. C. ad Alessandria d'Egitto); per tale motivo, la geometria che studiamo viene spesso chiamata *geometria euclidea*.
E' naturalmente possibile sostituire o modificare i postulati scelti da Euclide e dai suoi successori, ma in tal caso dobbiamo essere consapevoli del fatto che il "gioco" non è più lo stesso di prima: è una nuova geometria, che non potrà più chiamarsi "euclidea".

Il nostro obiettivo nel "gioco" della geometria è quello di dimostrare dei **teoremi**.
Possiamo dire che un teorema è una *proposizione nella quale si afferma che certe premesse (ipotesi) implicano determinate conclusioni (tesi), la cui verità, non essendo ovvia, si deve dimostrare mediante un ragionamento logico*.
Un esempio (forse il più famoso) è costituito dal Teorema di Pitagora: "Se un triangolo è rettangolo, allora il quadrato costruito sull'ipotenusa è equivalente alla somma dei quadrati costruiti sui cateti". Tale proposizione è molto più complessa di un postulato e la sua validità generale (riferita cioè ad un qualunque triangolo rettangolo) non può essere accettata per fede, né fondarsi solo su osservazioni sperimentali svolte su modelli fisici particolari. Occorre quindi giungere ad affermare la validità del teorema attraverso una dimostrazione in cui, a partire dalle premesse, mediante una catena di deduzioni logiche, si arriva a stabilire che la conclusione è vera.

2. Enti primitivi, segmenti e semirette

Riassumiamo alcuni concetti espressi nel paragrafo precedente, che vorrei ti fossero ben chiari prima di iniziare il lavoro più "ripetitivo" di studio e dimostrazione.
La *geometria intuitiva* è lo studio delle proprietà delle figure, condotto sulla base delle esperienze che ci danno i nostri sensi. La *geometria razionale*, invece, è lo studio basato sul ragionamento ed avente per oggetto le proprietà delle "figure ideali".
La geometria razionale è un primo esempio di *sistema ipotetico-deduttivo*. Questo significa che, fissate alcune ipotesi (i postulati), da queste si deducono tutte le loro possibili conseguenze logiche.
Per costruire la geometria razionale, dobbiamo introdurre alcuni *concetti* o *enti primitivi* e stabilire alcuni "accordi preliminari" o *postulati*.
Sono primitivi quegli enti che non definiamo esplicitamente; chiamiamo postulati quelle proprietà che supponiamo essere vere e che pertanto non dimostriamo. I postulati caratterizzano gli enti primitivi, dandone così una definizione implicita.
Gli assiomi possono essere scelti con una certa libertà; infatti esistono diverse geometrie, che corrispondono alla diversità degli assiomi scelti come "regole del gioco". Quella di cui ci occupiamo è la *geometria euclidea*.

Gli enti che assumiamo come primitivi, e mediante i quali definiremo gli altri oggetti geometrici sono i *punti*, le *rette* e i *piani*. Si usa indicare i punti con lettere maiuscole: A, B, C, ... ; le rette con lettere minuscole: *a*, *b*, *c*, ... ; i piani con lettere minuscole greche: α, β, γ, ...

Riferendoci alla fig.1, supporremo noto il significato delle seguenti espressioni:

- il punto A appartiene alla retta *r*;
- la retta *r* passa per il punto A;
- i punti A e B appartengono al piano α;
- la retta *r* giace sul piano α;
- le rette *s* e *t* si intersecano nel punto C.

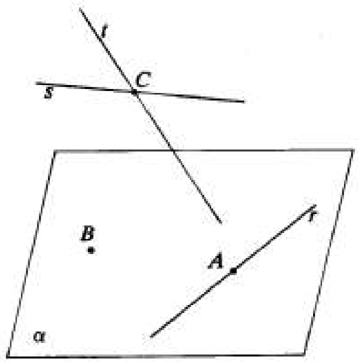


Fig. 1

Nel seguito ci occuperemo di *geometria piana*, per cui supporremo che tutti gli oggetti geometrici che consideriamo appartengano ad un unico piano.

Utilizzando gli enti primitivi, definiamo i principali concetti geometrici:

Data una retta *r*, fissiamo su di essa due punti A e B. Si chiama **segmento** AB il sottoinsieme della retta *r* costituito da tutti i *punti P compresi fra A e B* (fig. 2). I punti A e B si chiamano *estremi* del segmento AB.

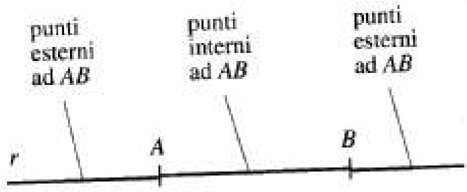


Fig. 2 - Il segmento AB, di estremi A e B

Si dice che due segmenti AB e BC sono *consecutivi* se hanno in comune soltanto un estremo, che, nel nostro caso, è B (fig. 3).

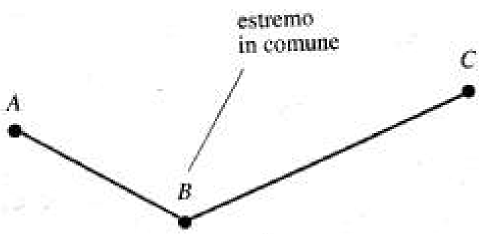


Fig. 3 - Segmenti consecutivi

Si dice che due segmenti LM e MN sono *adiacenti* se sono consecutivi e appartengono alla stessa retta (fig.4).

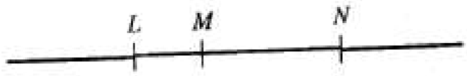


Fig. 4 - Segmenti adiacenti

Diciamo **semiretta** ciascuna delle due parti in cui una retta è divisa da un suo punto, a sua volta detto *origine* delle due semirette. Nella fig. 5, il punto O divide la retta *r* nelle due semirette OA e OB. Le due semirette si dicono *opposte* tra loro, oppure si dice che l'una è il *prolungamento* dell'altra.

Fig. 5 - Semirette opposte di origine O

Il segmento AB può essere anche definito come l'*insieme dei punti comuni alle semirette AB e BA*.

Diciamo che una figura geometrica è **convessa** se tutti i segmenti che congiungono due suoi punti sono interamente contenuti nella figura stessa.

Diciamo invece che una figura è **concava** se esiste almeno un segmento che congiunge due punti appartenenti alla figura che non è interamente contenuto nella figura stessa.

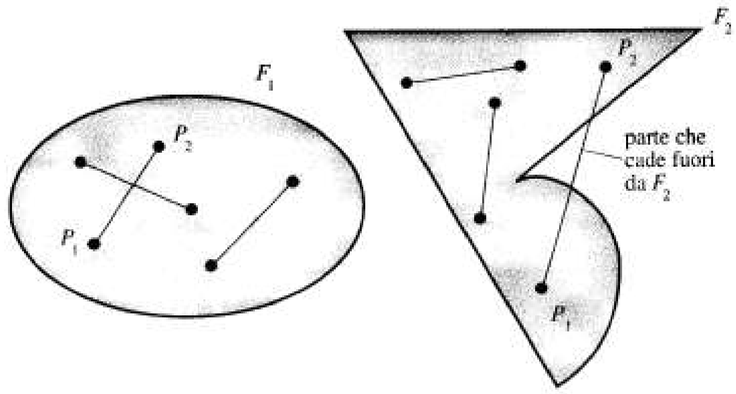


Fig. 6 - F_1 è una figura convessa; F_2 è una figura concava

In termini intuitivi, una figura concava ha almeno una "rientranza" o "insenatura", mentre una figura convessa non ne ha.

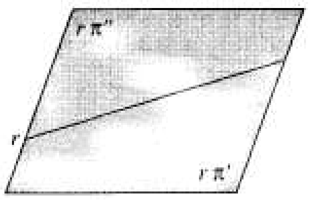


Fig. 7 - Semipiani di origine r

Diciamo **semipiano** ciascuna delle due parti in cui un piano risulta diviso da una retta che giace sul piano stesso. La retta è detta *origine* dei due semipiani.

3. Angoli e nozioni relative

Consideriamo ora due semirette *Or* e *Os*, distinte ed aventi la stessa origine O. Esse dividono il piano in due parti, ciascuna delle quali è chiamata **angolo**. Se le due semirette non sono opposte, uno degli angoli che esse formano è *convesso* e l'altro è *concavo*. Il punto O è detto *vertice* dell'angolo e le semirette *Or* e *Os* sono i *lati* dell'angolo.

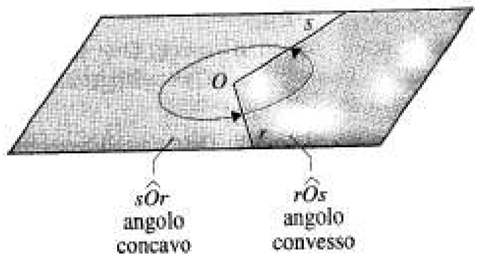


Fig. 8 - Angoli formati dalle semirette Or e Os

Se i lati *Or* e *Os* sono due semirette opposte, il piano viene diviso in due semipiani, ciascuno dei quali si chiama **angolo piatto** (fig. 9). L'angolo piatto è l'elemento separatore tra gli insiemi degli angoli convessi e concavi.

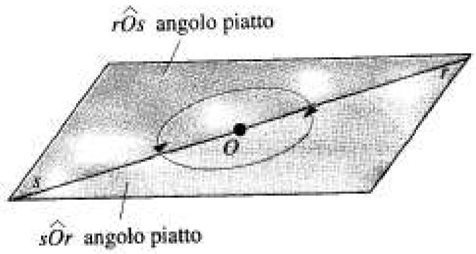


Fig. 9 - Due angoli piatti

Se i lati *Or* e *Os* sono due semirette coincidenti, uno degli angoli che formano coincide con l'intero piano e viene detto **angolo giro**, mentre l'altro è detto *angolo nullo* (fig. 10).

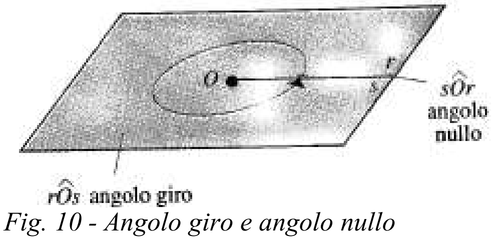


Fig. 10 - Angolo giro e angolo nullo

Un angolo può essere considerato anche come l'insieme delle semirette uscenti dal vertice e comprese tra i lati. Questo equivale a considerare l'angolo (con una immagine intuitiva) come generato dalla rotazione di una semiretta attorno alla propria origine.

Un angolo individuato da due semirette *a* e *b* di origine comune O può essere individuato in diversi modi.

L'angolo convesso di fig. 11 può essere indicato come: α (usando una lettera minuscola dell'alfabeto greco); $A\hat{O}B$ (dove A è un generico punto della semiretta *a* e B è un generico punto della semiretta *b*); $\widehat{ab}$; $a\hat{O}b$; o anche semplicemente $\hat{O}$ (quando non c'è possibilità di equivoco). D'ora in poi, quando parleremo di angolo tra due semirette, intenderemo (a meno di non dire esplicitamente il contrario) l'angolo convesso da esse individuato.

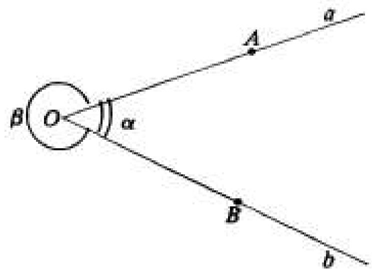


Fig. 11

Due angoli si dicono **consecutivi** se hanno in comune soltanto il vertice ed un lato.

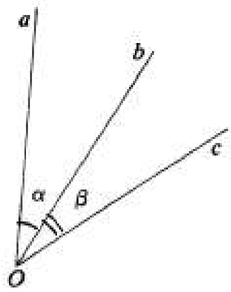


Fig. 12 - Angoli consecutivi

Due angoli si dicono **adiacenti** se sono consecutivi e se inoltre i lati non comuni sono semirette opposte.

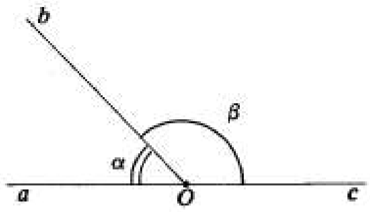


Fig. 13 - Angoli adiacenti (e quindi anche consecutivi)

Due angoli si dicono **opposti al vertice** se i loro lati sono semirette opposte, ovvero se i lati dell'uno sono i prolungamenti dei lati dell'altro.

Ad esempio, nella fig. 14, le due rette *a* e *b*, che si intersecano nel punto O, individuano quattro angoli: tra di essi, α e β sono opposti al vertice, così come lo sono γ e δ.

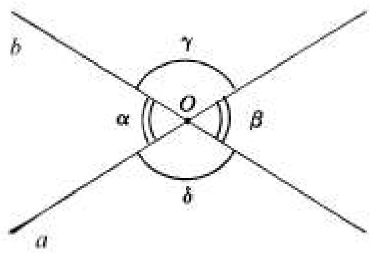


Fig. 14 - Angoli opposti al vertice

Si chiama **angolo retto** un angolo che sia la metà di un angolo piatto (o un quarto di un angolo giro). Un angolo è detto **acuto** se è minore di un angolo retto; è detto **ottuso** se è maggiore di un angolo retto.

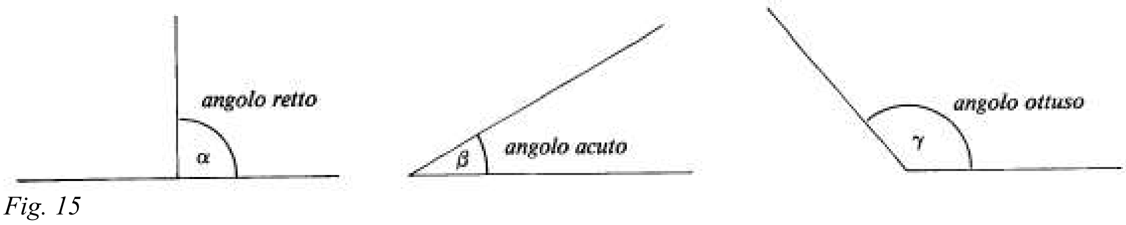


Fig. 15

Due angoli la cui somma è un angolo retto si dicono tra loro **complementari**; due angoli la cui somma è un angolo piatto si dicono tra loro **supplementari**; due angoli la cui somma è un angolo giro si dicono tra loro **esplementari**.

Si chiama **bisettrice** di un angolo quella semiretta che ha origine nel vertice dell'angolo e lo divide in due parti uguali. Nell'esempio di figura 16, la semiretta *s* è bisettrice dell'angolo $a\hat{O}b$, ovvero: $a\hat{O}s = s\hat{O}b = \frac{1}{2} a\hat{O}b$.

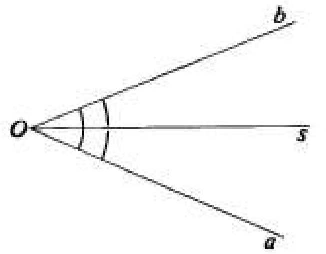


Fig. 16 - Bisettrice di un angolo

Due rette *r* ed *s* contenute nello stesso piano si dicono **parallele** se non hanno alcun punto in comune (con linguaggio insiemistico: $r \cap s = \emptyset$). Per indicare che *r* ed *s* sono parallele si scrive: $r \| s$.

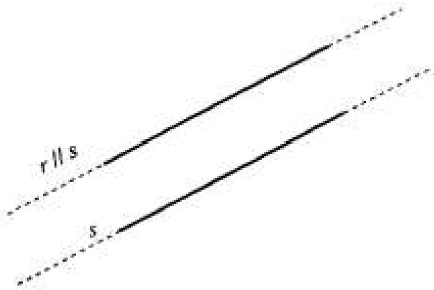


Fig. 17 - Rette parallele

Se invece le rette *r* ed *s* hanno un punto in comune, vengono dette rette **incidenti**. Il punto $I = r \cap s$ è detto *punto di intersezione* tra *r* ed *s*.

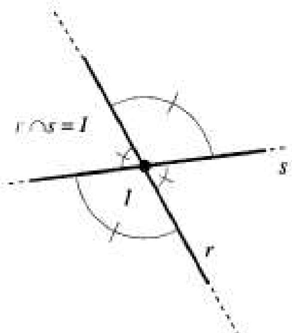


Fig. 18 - Rette incidenti

In particolare, due rette incidenti si dicono **perpendicolari** (o **ortogonali**, o **normali**) se, intersecandosi, dividono il piano in quattro angoli uguali. Osserviamo che ciascuno di tali angoli sarà ¼ dell'angolo giro, e quindi sarà un angolo retto. Di conseguenza, due rette perpendicolari formano quattro angoli retti. Per indicare che le rette *r* ed *s* sono perpendicolari, si scrive: $r \perp s$.

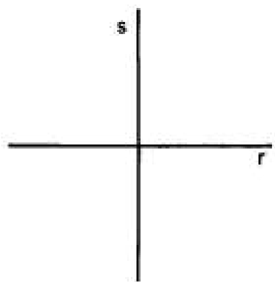


Fig. 19 - Rette perpendicolari

4. Poligoni e triangoli

Chiamiamo **poligono** una figura delimitata da una serie di segmenti consecutivi che formino una linea chiusa e non intrecciata. I segmenti si dicono *lati* e i loro estremi *vertici* del poligono. Un poligono ha tanti lati quanti vertici. La somma dei lati si dice *perimetro*.

La figura 20 rappresenta il poligono (precisamente pentagono) ABCDE; il punto P è interno al poligono; il punto Q è esterno.

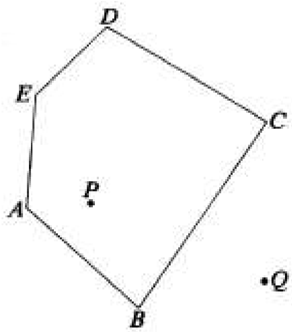


Fig. 20 - Poligono

In seguito considereremo poligoni convessi. Un angolo formato da due lati consecutivi si chiama *angolo interno* (o semplicemente angolo) del poligono. Gli angoli adiacenti agli angoli interni di un poligono si dicono *angoli esterni* del poligono (fig. 21). Ciascun angolo esterno è compreso tra un lato del poligono e il prolungamento di un lato ad esso consecutivo. Per ogni angolo interno del poligono esistono due angoli esterni che, come vedremo, sono tra loro uguali.

I lati e gli angoli interni di un poligono vengono detti complessivamente *elementi* del poligono.

Ogni segmento che ha come estremi due vertici non consecutivi di un poligono si chiama *diagonale*.

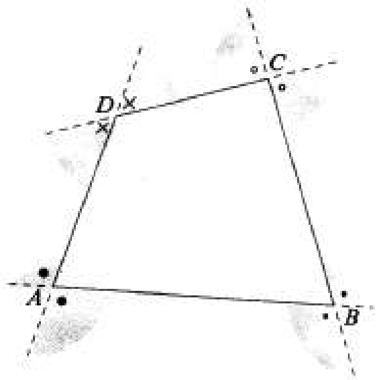


Fig. 21 - Angoli esterni del poligono

Come sai perfettamente, il poligono avente tre lati e tre angoli è detto **triangolo**. Ogni lato di un triangolo si dice *opposto* all'angolo il cui vertice non appartiene al lato e *adiacente* agli altri due angoli; analogamente per gli angoli.

Rispetto ai suoi lati un triangolo può essere:

- *scaleno* (termine poco usato) se i tre lati sono tutti diversi tra loro;
- **isoscele** se due lati sono uguali;
- **equilatero** se tutti e tre i lati sono uguali.

Rispetto ai suoi angoli un triangolo può essere:

- **acutangolo** se tutti e tre gli angoli sono acuti (minori di un angolo retto);
- **rettangolo** se un angolo è retto (e due acuti);
- **ottusangolo** se uno degli angoli è ottuso (e due acuti).

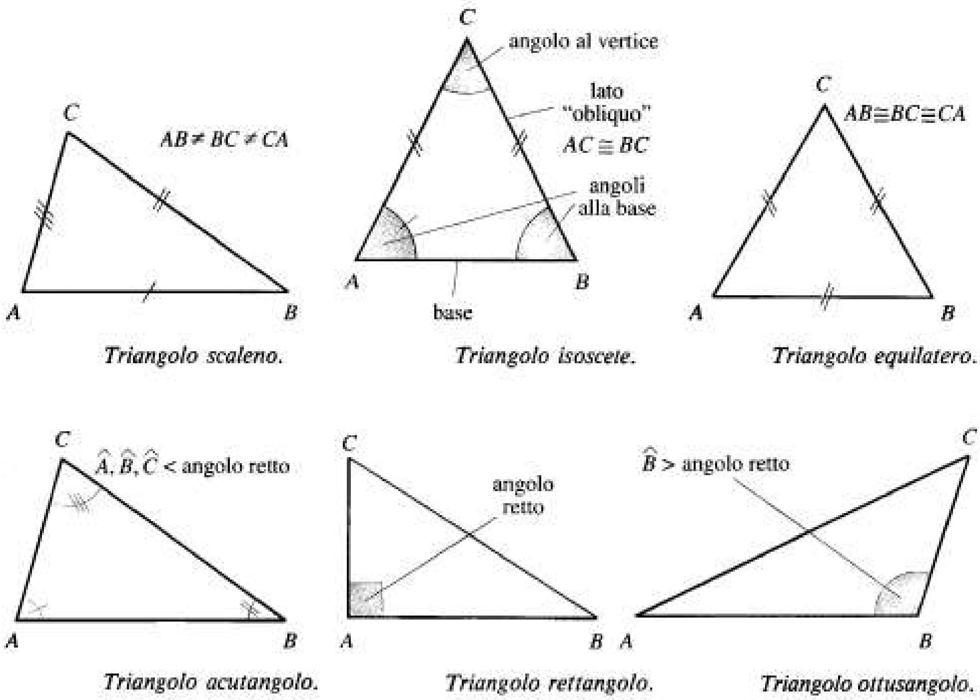


Fig. 22

Se nel triangolo ABC congiungiamo il vertice A con il punto medio M del lato opposto BC (quindi

BM=MC), otteniamo il segmento AM, chiamato mediana relativa al lato BC (fig. 23).

In generale, il segmento che congiunge un vertice con il punto medio del lato opposto si dice **mediana** relativa a quel lato.

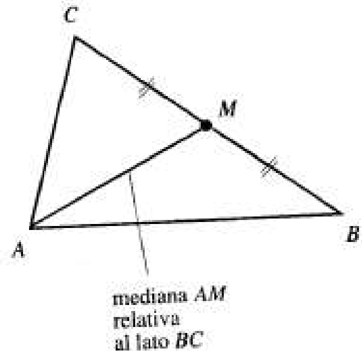


Fig. 23

Se nel triangolo ABC tracciamo la semiretta bisettrice dell'angolo interno Â e indichiamo con D il punto in cui essa interseca il lato opposto BC, otteniamo il segmento AD, chiamato anch'esso bisettrice relativa al vertice A (fig. 24).

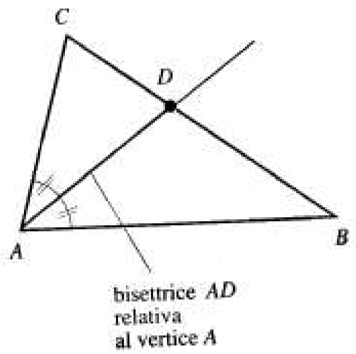


Fig. 24

In generale, il segmento che otteniamo intersecando la semiretta bisettrice di un angolo interno di un triangolo con il triangolo stesso è detto **bisettrice** relativa al vertice dell'angolo.

Dal vertice A del triangolo ABC conduciamo la retta perpendicolare alla retta che contiene il lato opposto BC; detto H il punto di intersezione tra le due rette, otteniamo il segmento AH, detto altezza relativa al lato BC.

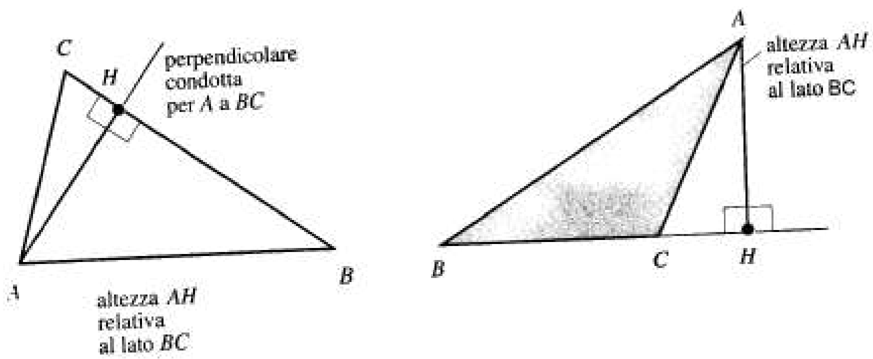


Fig. 25 - Altezza di un triangolo acutangolo e di uno ottusangolo

In generale, si definisce **altezza** di un triangolo rispetto ad uno dei suoi lati il segmento di perpendicolare condotto dal vertice opposto alla retta su cui giace il lato.

Osserva che le altezze, a differenza di mediane e bisettrici, possono essere segmenti esterni al triangolo.

5. Postulati

Come abbiamo detto, per cominciare a costruire la nostra geometria dobbiamo accettare, senza nessuna dimostrazione, alcune proposizioni, in genere semplici, dette postulati o assiomi.

Ricordiamo che i postulati non possono essere arbitrari, ma devono possedere le seguenti proprietà:

- *coerenza* (a partire dai postulati, non deve essere possibile dedurre sia una proposizione che la sua negazione);
- *completezza* (i postulati devono essere sufficienti a dimostrare tutti i teoremi che ci interessano);
- *indipendenza* (nessun postulato deve essere conseguenza logica degli altri).

In realtà, la nostra geometria non sarà rigorosamente razionale, ma conserverà molti elementi di intuizione. Di conseguenza, in genere non forniremo l'enunciato dei postulati che utilizziamo, ma spesso li daremo per scontati. Inoltre ci capiterà di accettare senza dimostrazione, e quindi di trattare come dei postulati, delle affermazioni che invece potrebbero essere dimostrate, perdendoci un bel po' di tempo e di fatica.

Diamo comunque alcuni esempi di postulati della nostra geometria:

- *Esiste una ed una sola retta passante per due punti distinti.*
- *Esistono infinite rette del piano passanti per uno stesso punto.*
- *Esistono, sul piano, almeno tre punti non allineati (cioè non appartenenti alla stessa retta).*
- *Ogni retta è illimitata in entrambi i sensi.*
- *Dati due punti distinti di una retta, ne esiste sempre un terzo compreso tra di essi.*

Come vedi, si tratta di proposizioni molto intuitive.

Un discorso particolare vale invece per il *postulato delle parallele* o *quinto postulato di Euclide*.

Esso può essere enunciato in molte forme equivalenti, una delle quali è la seguente:

- *Data una retta r, e dato un punto P non appartenente ad r, esiste una ed una sola retta s passante per P e parallela ad r.*

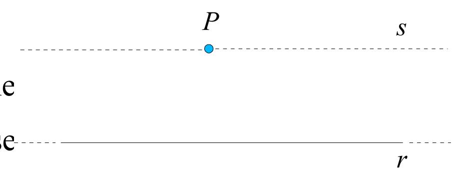


Fig. 26 Postulato delle parallele

Lo stesso Euclide, e dopo di lui altri matematici, ritennero che questo postulato fosse assai meno intuitivo degli altri, forse perché, trattando di rette parallele, ha a che fare con l'idea dell'infinito. Molti studiosi cercarono quindi di dedurre questa proprietà dagli altri postulati, e quindi di dimostrare che si trattava di un teorema, ma nessuno riuscì in questo intento. Nell'Ottocento, anzi, diversi matematici dimostrarono che il postulato delle parallele era del tutto indipendente dagli altri postulati della geometria euclidea, e quindi era impossibile dimostrarne la validità a partire da essi.

A questo punto possiamo scegliere uno dei seguenti percorsi alternativi:

1. accettare il postulato delle parallele come l'abbiamo enunciato, nel qual caso otteniamo la *geometria euclidea* a cui siamo abituati.
2. rifiutare il postulato precedente e ammettere che:
   - *Data una retta r, e dato un punto P non appartenente ad r, non esiste nessuna retta s*

passante per P e parallela ad r

nel qual caso costruiremo una *geometria non euclidea* detta di Riemann.

3. rifiutare il postulato di Euclide e ammettere che:
   - *Data una retta r, e dato un punto P non appartenente ad r, esistono infinite rette s passanti per P e parallele ad r*

   nel qual caso costruiremo una *geometria non euclidea* detta di Lobacevskij.

Probabilmente ti starai chiedendo: "quale di queste scelte mi porta alla geometria *vera*?"

Rispondo: se per "vera" intendi "che non dia contraddizioni", lo sono tutte e tre.

Se invece vuoi dire "che dia risultati sperimentalmente corretti", siamo più nel campo della fisica che in quello della geometria. E' ovvio, comunque, che la geometria euclidea può essere utilizzata correttamente in tutte le applicazioni pratiche con cui avremo a che fare nel corso della nostra vita. I fisici che si occupano di cosmologia (cioè dello studio dell'intero universo), però, per ottenere risposte valide devono utilizzare le geometrie non euclidee.

Geometria euclidea

1. Uguaglianza dei triangoli

Quando affermiamo che due figure geometriche sono uguali, intendiamo dire che possono essere sovrapposte in modo che tutti i loro punti coincidano. Spesso al posto del termine *uguaglianza* si usa *isometria* o *congruenza*: per noi questi saranno dei sinonimi.
Il poligono più semplice e più fondamentale, nel senso che ci permette di costruire tutti gli altri, è il triangolo. Cominciamo quindi a fornire tre criteri di uguaglianza dei triangoli, cioè tre condizioni sufficienti per riconoscere che due determinati triangoli sono uguali. Per dimostrare questi criteri, dovremmo dare una serie di definizioni e di assiomi riguardanti il concetto di *movimento rigido* (quello che ci permette di spostare una figura senza deformarla). Poiché non lo faremo, in pratica tratteremo i criteri di uguaglianza dei triangoli come dei postulati.

1° criterio di uguaglianza dei triangoli.
Se due triangoli hanno rispettivamente uguali due lati e l'angolo compreso tra di essi, allora i due triangoli sono uguali.

Ipotesi: $AB=PQ\,,\hat{A}=\hat{P}\,,AC=PR$

Tesi: $ABC=PQR$

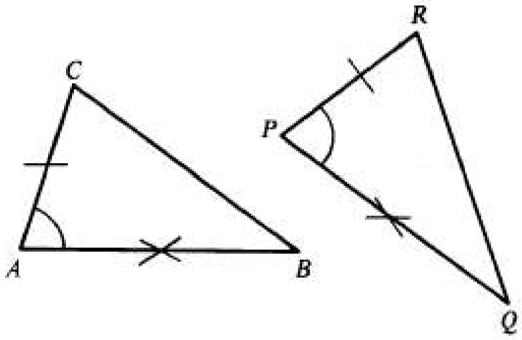


Fig. 1

2° criterio di uguaglianza dei triangoli.
Se due triangoli hanno ordinatamente uguali due angoli e un lato, allora i due triangoli sono uguali.

Ipotesi: $\hat{A}=\hat{R}\,,AB=RP\,,\hat{B}=\hat{P}$

Tesi: $ABC=PQR$

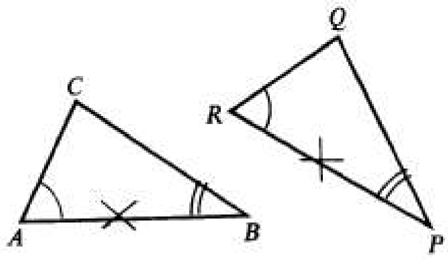


Fig. 2

3° criterio di uguaglianza dei triangoli.
Se due triangoli hanno rispettivamente uguali i tre lati, allora i due triangoli sono uguali.

Ipotesi: $AB=PQ\,,BC=QR\,,AC=PR$

Tesi: $ABC=PQR$

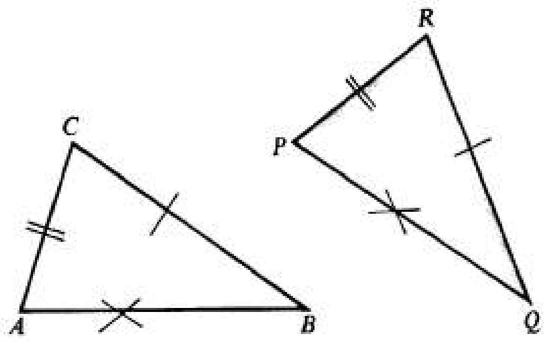


Fig. 3

Osservazione

Puoi chiederti se, nell'enunciato del 1° criterio di uguaglianza dei triangoli, sia importante precisare che l'angolo uguale sia quello compreso tra i due lati rispettivamente uguali. In altri termini, potremmo proporre un "1° criterio allargato" che affermerebbe: "se due triangoli hanno rispettivamente uguali due lati e un angolo, allora i due triangoli sono uguali".

Fai vedere con un controesempio che tale criterio non è valido.

Criterio di uguaglianza dei triangoli rettangoli

Se due triangoli rettangoli hanno rispettivamente uguali l'ipotenusa e un cateto, allora i due triangoli rettangoli sono uguali.

Questo è l'unico caso in cui può essere generalizzato il 1° criterio di uguaglianza.

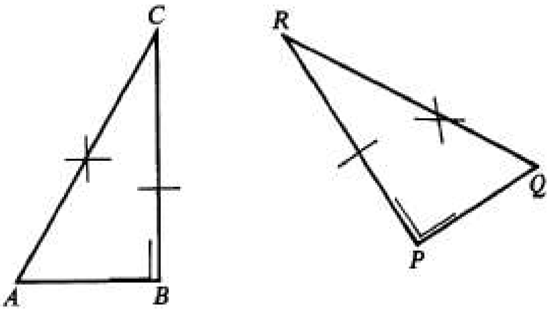


Fig. 4

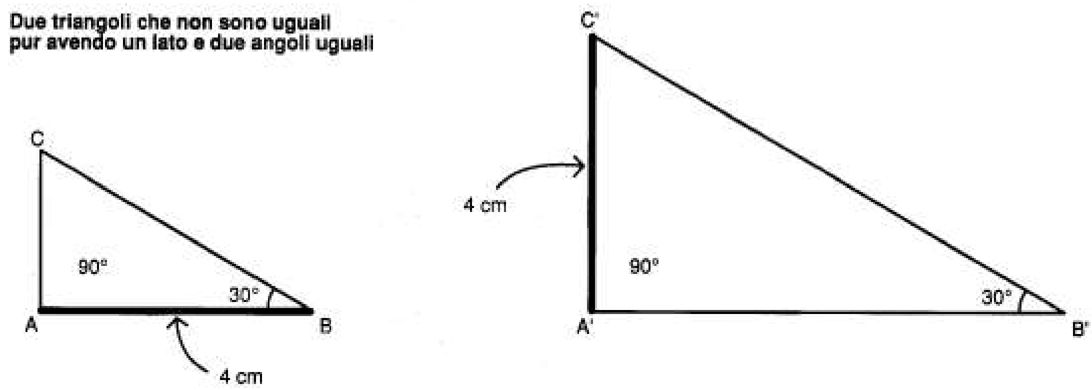


Fig. 5

Osservazione

Nel 2° criterio di uguaglianza, l'avverbio "ordinatamente" serve a ricordarci che il lato uguale deve avere la stessa posizione nei due triangoli (ad esempio, può essere adiacente ai due angoli uguali, oppure adiacente ad uno di essi ed opposto all'altro). La fig. 5 ci mostra un esempio di due triangoli che hanno un lato uguale e due angoli uguali, ma non sono triangoli uguali, in quanto il lato uguale non occupa la stessa posizione nei due triangoli (in uno è adiacente ai due angoli uguali, nell'altro è adiacente ad uno degli angoli uguali e opposto all'altro).

Osservazione

Se due triangoli hanno gli angoli rispettivamente uguali, possiamo affermare con certezza che sono uguali? No,

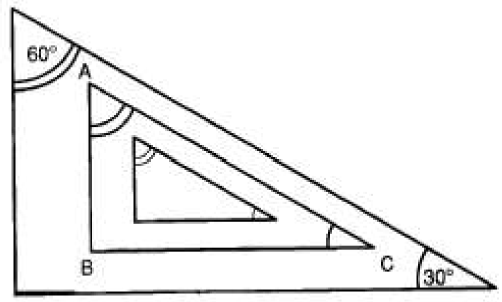


Fig. 6 Triangoli simili

sono *simili*, cioè hanno la stessa forma, ma dimensioni diverse (fig. 6).

Teorema 1.

Se un triangolo è isoscele, allora gli angoli alla base (cioè gli angoli opposti ai due lati uguali) sono uguali.

Ipotesi: $AB = AC$

Tesi: $\hat{B} = \hat{C}$

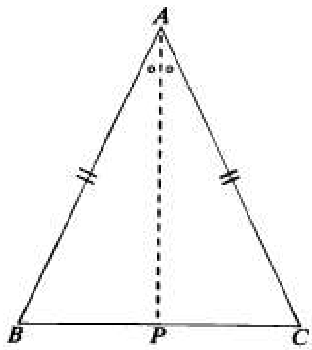


Fig. 7

Dimostrazione

Traccia la bisettrice *AP* dell'angolo al vertice $\hat{A}$.

Considera i triangoli *ABP* e *ACP*. Essi hanno:

- *AB=AC* per ipotesi
- il lato *AP* in comune
- $B\hat{A}P = C\hat{A}P$ per costruzione.

Ne segue che i triangoli *ABP* e *ACP* sono uguali per il 1° criterio di uguaglianza; di conseguenza hanno tutti gli elementi corrispondenti uguali, ed in particolare $\hat{B} = \hat{C}$ c.v.d.

Prova a ripetere la dimostrazione tracciando la mediana relativa alla base, anziché la bisettrice: questa volta userai il 3° criterio di uguaglianza dei triangoli.

Se invece consideri l'altezza relativa alla base, utilizzerai il criterio di uguaglianza dei triangoli rettangoli.

Corollario 1

In un triangolo isoscele, la bisettrice, la mediana e l'altezza uscenti dall'angolo al vertice e relative alla base risultano coincidenti.

Dimostrazione

Riprendiamo la dimostrazione del teorema 1.

Il segmento *AP* è bisettrice dell'angolo al vertice per costruzione.

Dall'uguaglianza dei triangoli *ABP* e *ACP* segue che *BP=PC*, quindi *AP* è anche mediana relativa alla base.

Sempre per l'uguaglianza dei triangoli ABP e ACP, ho $A\hat{P}B = A\hat{P}C$; di conseguenza l'angolo piatto $B\hat{P}C$ viene diviso in due angoli uguali, e quindi retti. Pertanto *AP* è anche altezza relativa alla base.

Nota. Un teorema che risulta essere una conseguenza immediata di un altro teorema o di un postulato viene detto *corollario*. Un corollario ha pertanto la stessa struttura logica di un qualunque altro teorema. Il nome particolare indica semplicemente che, in questo contesto, la sua dimostrazione viene ritenuta banale.

Corollario 2

Se un triangolo è equilatero , allora è anche equiangolo.

Infatti, basta ripetere la dimostrazione precedente per due coppie di lati uguali.

Ricordiamo che un teorema è una proposizione in cui si afferma che da una certa proprietà H, detta ipotesi, si deduce un'altra proprietà T, detta tesi. Un teorema può quindi essere scritto nella forma "se H, allora T".

Per ogni teorema, possiamo considerare il *teorema inverso*, che si ottiene scambiando tra loro la tesi e l'ipotesi, e che quindi ha la forma "se T, allora H". Abbiamo però visto in logica che, se un teorema è vero, non sempre è vero anche il suo inverso. Quindi *l'inverso di un teorema (se è valido) deve essere anch'esso dimostrato*, e non può essere ritenuto una conseguenza del teorema diretto.

Ad esempio, il teorema 1 è invertibile, ma il suo teorema inverso va dimostrato.

Teorema 2 (inverso del teorema 1)

Se un triangolo ha due angoli uguali, allora è un triangolo isoscele, e precisamente ha come lati uguali quelli opposti agli angoli uguali.

Ipotesi: $A\hat{B}C = A\hat{C}B$ (fai riferimento alla fig. 7)

Tesi: $AB = AC$

Prova a svolgere questa dimostrazione come esercizio.

Corollario 3

Se un triangolo è equiangolo , allora è anche equilatero.

E' sufficiente ripetere la dimostrazione precedente per due coppie di angoli uguali.

Osservazione

Se due angoli sono opposti al vertice, allora sono uguali.

Infatti, gli angoli opposti al vertice α e β sono entrambi adiacenti all'angolo γ, e quindi sono uguali perché la loro misura è $180° - \gamma$.

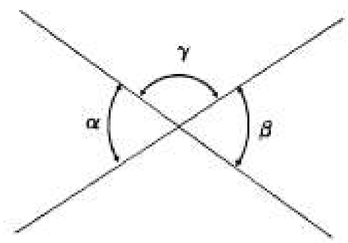


Fig. 8

2. Angoli di un poligono

Due rette *a* e *b* formano con una terza retta *t*, detta trasversale, otto angoli che vengono accoppiati nel modo seguente:

- angoli *alterni interni*: δ e β' ; γ e α'
- angoli *alterni esterni*: α e γ' ; β e δ'
- angoli *coniugati interni*: δ e α' ; γ e β'
- angoli *coniugati esterni*: α e δ' ; β e γ'
- angoli *corrispondenti*: α e α' ; β e β' ; χ e χ' ; δ e δ'

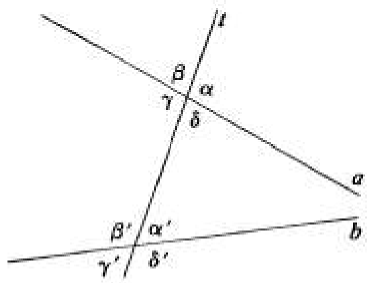


Fig. 9

In pratica, due angoli si dicono:

- *alterni* se si trovano da parti opposte rispetto alla trasversale (uno a destra e uno a sinistra)
- *coniugati* se appartengono entrambi alla zona compresa tra le due rette o entrambi alla zona esterna, e se inoltre si trovano dalla stessa parte (destra o sinistra) rispetto alla trasversale
- *corrispondenti* se appartengono uno alla zona compresa tra le due rette e l'altro alla zona esterna, e se inoltre si trovano dalla stessa parte (destra o sinistra) rispetto alla trasversale.

Teorema 3 (criterio di parallelismo tra rette)

Se due rette tagliate da una trasversale formano con essa:

- una coppia di angoli alterni uguali
- oppure una coppia di angoli corrispondenti uguali
- oppure una coppia di angoli coniugati supplementari

allora le due rette sono parallele.

Ipotesi: $\alpha = \beta$ (o un'altra tra quelle enunciate)

Tesi: $a \| b$

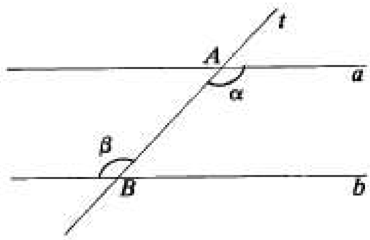


Fig. 10

Non affrontiamo la dimostrazione, in quanto si basa sul metodo indiretto o "per assurdo". Osserviamo che in realtà si tratta di un gruppo di teoremi, che abbiamo raccolto in un unico enunciato.

Teorema 4 (inverso del teorema 3)

Se due rette sono parallele, allora, tagliate da una trasversale, esse formano:

- coppie di angoli alterni (sia interni che esterni) uguali
- coppie di angoli corrispondenti uguali
- coppie di angoli coniugati (sia interni che esterni) supplementari.

Ipotesi: $a \| b$

Tesi: $\alpha=\beta$ etc.

Anche in questo caso, non riportiamo la dimostrazione per assurdo.

Teorema 5

La somma degli angoli interni di un triangolo è uguale ad un angolo piatto.

Ipotesi: *ABC* è un triangolo

Tesi: $\hat{A}+\hat{B}+\hat{C}=180°$

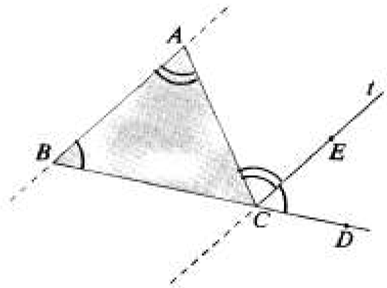


Fig. 11

Dimostrazione

Dato il triangolo *ABC*, sia *CD* il prolungamento del lato *BC* dalla parte di *C*.

Traccia la retta *t* parallela al lato *AB* e passante per il vertice *C* (tale retta esiste ed è unica per il postulato delle parallele nella forma di Euclide).

Considera le rette parallele *AB* e *CE*:

- tagliate dalla trasversale *AC*, esse formano gli angoli $\hat{A}=A\hat{C}E$ uguali perché alterni interni
- tagliate dalla trasversale *BC*, esse formano gli angoli $\hat{B}=E\hat{C}D$ uguali perché corrispondenti.

La ovvia uguaglianza: $B\hat{C}A+A\hat{C}E+E\hat{C}D=180°$

diventa per le uguaglianze precedenti: $\hat{A}+\hat{B}+\hat{C}=180°$ c.v.d.

Osservazione

Poiché per dimostrare questo fondamentale teorema abbiamo fatto uso del postulato delle parallele nella forma di Euclide, puoi comprendere come il teorema 5 non sia più valido nelle geometrie non euclidee. In particolare, la somma degli angoli interni di un triangolo:

- è sempre maggiore di 180° nella geometria di Riemann (immagina un "triangolo" tracciato su una superficie sferica)
- è sempre minore di 180° nella geometria di Lobacevskij.

Dimostrazione "alternativa" del teorema 5

Immagina di percorrere il perimetro del triangolo *ABC*: in ciascuno dei tre vertici devi fare una "svolta" di ampiezza pari all'angolo esterno avente quel vertice. Poiché alla fine del percorso hai compiuto un giro completo, la somma degli angoli esterni del triangolo è uguale ad un angolo giro. D'altra parte, un angolo interno ed il relativo angolo esterno sono adiacenti, e

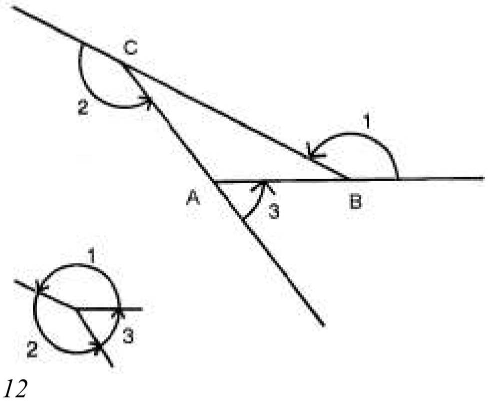


Fig. 12

quindi supplementari. Ricavo quindi:

somma degli angoli interni = somma di tutti gli angoli - somma degli angoli esterni =
= 3 angoli piatti - 1 angolo giro = 540°-360° = 180°.

Corollario 4

In un triangolo equilatero, e quindi equiangolo, ciascun angolo misura 60°.

Corollario 5

Gli angoli acuti di un triangolo rettangolo sono complementari.

Corollario 6

La somma degli angoli interni di un quadrilatero è uguale a 360°.
Infatti, un quadrilatero viene diviso da una diagonale in due triangoli, per ognuno dei quali la somma degli angoli interni è 180°.

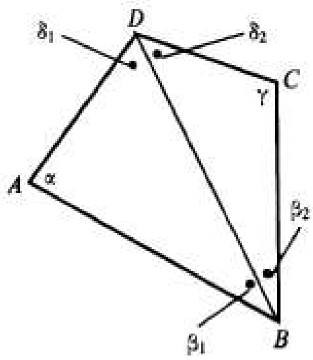


Fig. 13

Teorema 6

La somma degli angoli interni di un poligono convesso avente *N* lati è uguale a $(N-2)\cdot 180°$.
Infatti, tracciando le *N-3* diagonali uscenti da un vertice, suddivido il poligono in *N-2* triangoli, per ognuno dei quali la somma degli angoli interni è 180°.
Un'altra dimostrazione è esemplificata dalla figura 14 per il caso del pentagono. Considero un punto generico *P* interno al poligono convesso e lo congiungo con ciascun vertice. Il poligono viene così suddiviso in *N* triangoli, la cui somma degli angoli interni è $N\cdot 180°$. Da questa somma devo però sottrarre l'angolo giro formato da tutti gli angoli di vertice *P*, che non sono angoli interni del poligono.

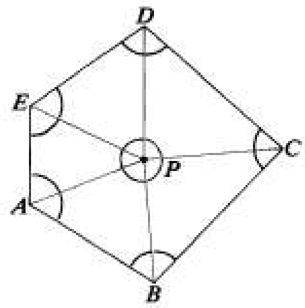


Fig. 14

La somma degli angoli interni del poligono è quindi data da:

$N\cdot 180°-360°=N\cdot 180°-2\cdot 180°=(N-2)\cdot 180°$ c.v.d.

Teorema 7

La somma degli angoli esterni di un poligono convesso è uguale a 360°.

Dimostrazione

In ogni poligono, la somma tra un angolo interno e il rispettivo angolo esterno ad esso adiacente è 180°. Se il poligono ha *N* vertici, quindi, la somma di tutti gli angoli esterni ed interni è $N\cdot 180°$. Ma, per il corollario 7, la somma degli angoli interni è $(N-2)\cdot 180°$. Quindi la somma degli angoli esterni è $N \cdot 180° - (N-2) \cdot 180° = N \cdot 180° - N \cdot 180° + 2 \cdot 180° = 360°$ c.v.d.

Dimostrazione "alternativa" del teorema 7

Come nel caso del triangolo, puoi immaginare di percorrere il perimetro di un poligono (un esagono in fig. 15) ed osservare che ad ogni vertice esegui una "svolta" di ampiezza uguale all'angolo esterno avente quel vertice. Poiché alla fine del percorso hai compiuto un giro completo, la somma degli angoli esterni di un qualunque poligono convesso è uguale ad un angolo giro.

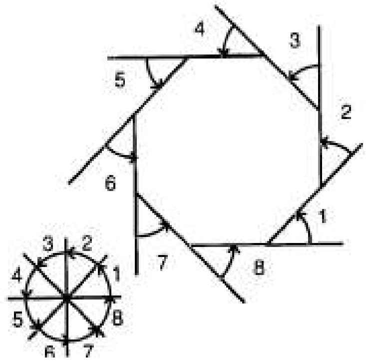


Fig. 15

Teorema 8 (disuguaglianza triangolare)

In un triangolo, ciascun lato è minore della somma degli altri due.

Se, ad esempio, ho $BC > AB > AC$, il teorema afferma che:

$BC < BA + AC$ (le altre due disuguaglianze sono ovvie).

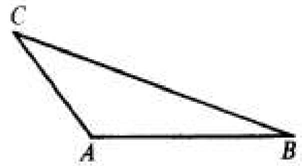


Fig. 16

Non riportiamo la dimostrazione, ma osserviamo che l'enunciato del teorema afferma in pratica che "la retta è il cammino più breve tra due punti" (il percorso diretto che collega B e C è più breve di quella che passa per A).

3. Quadrilateri

Nota: Le dimostrazioni dei teoremi di questo paragrafo sono abbastanza semplici; pertanto ti chiedo di svolgerle come esercizi precisando, dove mancano, l'ipotesi e la tesi.

Distanza tra un punto e una retta

Dati un punto P e una retta r, traccia la retta n passante per P e perpendicolare ad r.

Chiamiamo H il punto di intersezione tra le rette r ed n.

Diciamo che il segmento PH è la **distanza** tra il punto P e la retta r, mentre il punto H viene chiamato **proiezione ortogonale** (o semplicemente *proiezione*) del punto P sulla retta r.

Il segmento PH ha la proprietà di essere minore di qualunque altro segmento che congiunga il punto P con la retta r.

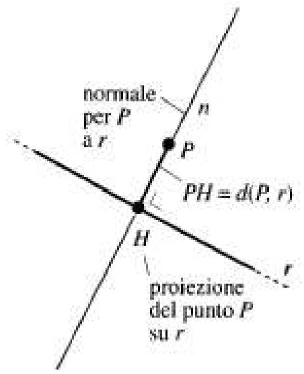


Fig. 17

Se due rette sono parallele, tutti i punti dell'una hanno la stessa distanza dall'altra; questa viene quindi detta *distanza tra le due rette parallele*.

Trapezio

Diciamo **trapezio** un quadrilatero convesso avente due lati paralleli. I lati paralleli si dicono *basi*; gli altri due lati vengono detti *lati obliqui*. La distanza tra le due rette parallele alle quali appartengono le basi si chiama *altezza* del trapezio.

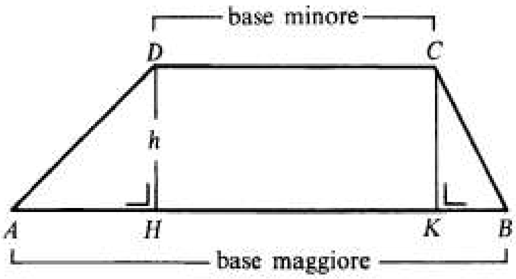


Fig. 18 Trapezio generico

Un trapezio si dice **isoscele** se i lati obliqui sono uguali; si dice **rettangolo** se un lato obliquo è perpendicolare alle basi.

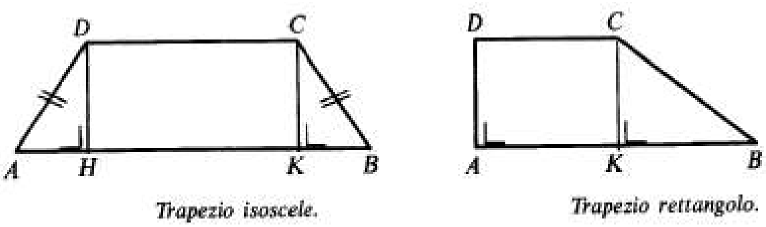


Fig. 19

Teorema 9 (proprietà del trapezio)

a) In un trapezio gli angoli adiacenti allo stesso lato sono supplementari.

Ipotesi: $AB \| CD$ (vedi fig. 18)

Tesi: $\hat{A}+\hat{D}=\hat{B}+\hat{C}=180°$

b) In un trapezio isoscele gli angoli adiacenti a ciascuna delle basi sono uguali e le diagonali sono uguali.

Ipotesi: $AB \| CD ; AD = BC$ (vedi fig. 19)

Tesi: $\hat{A} = \hat{B} ; \hat{C} = \hat{D} ; AC = BD$

Definizione

Si dice **parallelogrammo** un quadrilatero convesso avente i lati opposti paralleli.

In fig. 20, il segmento *DH* (distanza tra le rette parallele *a* e *b*) è l'altezza rispetto alle basi *AB* e *CD*, e il segmento *BK* (distanza tra le rette parallele *c* e *d*) è l'altezza rispetto alle basi *AD* e *BC*.

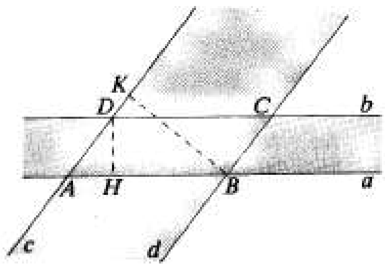


Fig. 20

Teorema 10 (proprietà del parallelogrammo)

In ogni parallelogrammo:

a) i lati opposti sono uguali
b) gli angoli opposti sono uguali
c) gli angoli adiacenti a ciascun lato sono supplementari
d) le diagonali si dividono scambievolmente a metà.

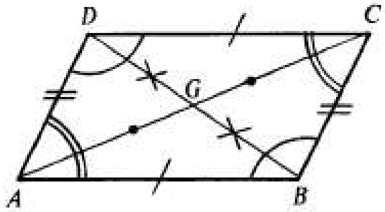


Fig. 21 Parallelogrammo

Ipotesi: $AB \| CD ; AD \| BC$ (vedi fig. 21)

Tesi: $AB = CD ; AD = BC ; \hat{A} = \hat{C} ; \hat{B} = \hat{D} ; \hat{A} + \hat{B} = 180° ; \hat{A} + \hat{D} = 180° ; AG = GC ; BG = GD$

Teorema 11 (criteri per riconoscere se un quadrilatero è un parallelogrammo)

Se un quadrilatero convesso ha:

a) i lati opposti uguali, oppure
b) gli angoli opposti uguali, oppure
c) gli angoli adiacenti a ciascun lato supplementari, oppure
d) le diagonali che si tagliano scambievolmente a metà, oppure
e) due lati paralleli e uguali

allora il quadrilatero è un parallelogrammo.

Osservazione

Si potrebbe pensare di rendere meno rigidi i punti *a*, *b*, *c* del teorema 11 riscrivendoli nel modo seguente: "Se un quadrilatero ha i lati a due a due uguali, oppure gli angoli a due a due uguali, oppure gli angoli a due a due supplementari, allora è un parallelogrammo".

Trova dei controesempi alle affermazioni precedenti.

Definizione

Chiamiamo **rettangolo** un quadrilatero avente i quattro angoli interni uguali.

Dal corollario 6 segue che il rettangolo ha quattro angoli retti.

Dal teorema 11*b* (o 11*c*) segue che il rettangolo è un parallelogrammo, e quindi anche per il rettangolo valgono le proprietà elencate nel teorema 10.

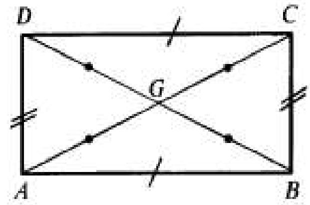


Fig. 22 Rettangolo

Teorema 12 (proprietà del rettangolo)

In ogni rettangolo le diagonali sono uguali.

Teorema 13 (criterio per riconoscere se un parallelogrammo è un rettangolo)

Se un parallelogrammo ha le diagonali uguali, allora è un rettangolo.

Osservazione

Potremmo pensare di estendere la validità del teorema 13 enunciandolo così: "Se un quadrilatero ha le diagonali uguali, allora è un rettangolo".

Trova un controesempio che ci convinca che tale affermazione è falsa.

Definizione

Chiamiamo **rombo** un quadrilatero avente i quattro lati uguali.

Dal teorema 11*a* segue che il rombo è un parallelogrammo, e quindi anche per il rombo valgono le proprietà elencate nel teorema 10.

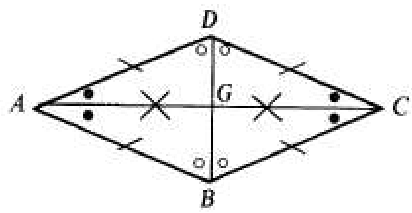


Fig. 23 Rombo

Teorema 14 (proprietà del rombo)

In ogni rombo:

a) le diagonali sono perpendicolari
b) le diagonali sono bisettrici degli angoli interni.

Teorema 15 (criteri per riconoscere se un parallelogrammo è un rombo)

Se in un parallelogrammo:

a) le diagonali sono perpendicolari, oppure
b) le diagonali sono bisettrici degli angoli interni

allora il parallelogrammo è un rombo.

Osservazione

Anche in questo caso potremmo pensare che la proprietà 15*a* sia vera per tutti i quadrilateri, ovvero: "Se un quadrilatero ha le diagonali perpendicolari, allora è un rombo".

Trova un controesempio che dimostri che tale affermazione è falsa. E' invece un po' più laborioso trovare un controesempio per la analoga generalizzazione della proprietà 15*b*.

Definizione

Chiamiamo **quadrato** un quadrilatero che abbia i quattro angoli interni uguali e i quattro lati uguali.

Ovviamente un quadrato è un parallelogrammo, è un rettangolo ed è un rombo; quindi anche per il quadrato valgono tutte le proprietà espresse nei teoremi 10, 12, 14.

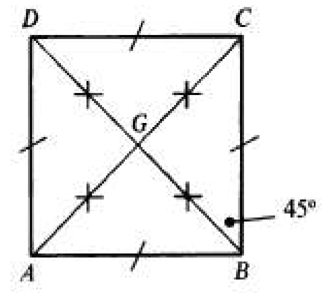


Fig. 24 Quadrato

4. Luoghi geometrici

Definizione

Un insieme di rette parallele, ovvero aventi una stessa direzione, si chiama *fascio di rette parallele* o *fascio improprio di rette*. Una retta che interseca le rette del fascio viene detta *trasversale*.

Se un fascio di rette parallele viene tagliato da due trasversali, viene definita una corrispondenza biunivoca tra i punti di intersezione e tra i segmenti situati sulle due trasversali, che viene detta *corrispondenza parallela di Talete*.

Ad esempio, riferendosi alla fig. 25, sono corrispondenti i punti A e A'; B e B' e così via; sono anche corrispondenti i segmenti AB e $A'B'$ etc.

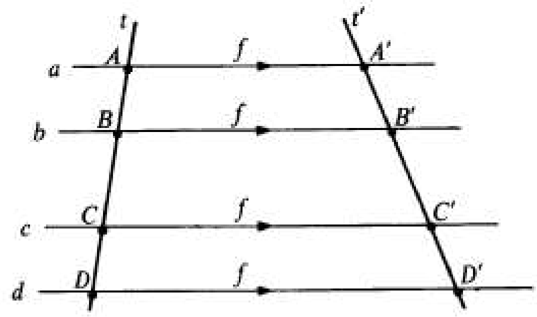


Fig. 25 Corrispondenza parallela di Talete

Teorema 16 (piccolo teorema di Talete)

Se un fascio di rette parallele è tagliato da due trasversali e se due segmenti su una trasversale sono uguali, allora anche i segmenti corrispondenti sull'altra trasversale sono uguali.

Ipotesi: $AA'\|BB'\|CC'\|DD'\,;\, AB=CD$

Tesi: $A'B'=C'D'$

Dimostrazione

Conduco le rette AP e CQ passanti rispettivamente per A e per C e parallele alla trasversale t'.

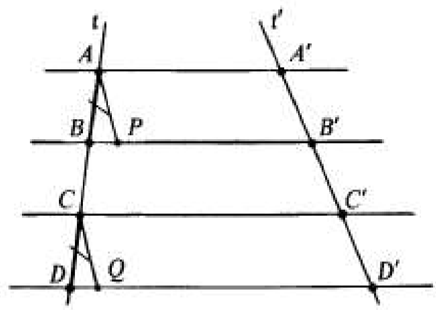


Fig. 26

I triangoli ABP e CDQ hanno:

- $AB=CD$ per ipotesi
- $A\hat{B}P=C\hat{D}Q$ perché angoli corrispondenti formati dalle rette BB' e DD' (parallele per ipotesi) con la trasversale t
- $B\hat{A}P=D\hat{C}Q$ perché angoli corrispondenti formati dalle rette AP e CQ (parallele per costruzione) con la trasversale t.

I triangoli ABP e CDQ sono quindi uguali per il secondo criterio di uguaglianza, e in particolare hanno $AP=CQ$.

Osserva che i quadrilateri $AA'B'P$ e $CC'D'Q$ sono dei parallelogrammi per definizione, in quanto hanno i lati opposti paralleli ($AA'\|PB$ per ipotesi e $AP\|A'B$ per costruzione), quindi hanno i lati opposti uguali (teorema 10a). Ne segue che: $AA'=AP=CQ=C'D'$ c.v.d.

Definizione

Si chiama **luogo geometrico** l'insieme di tutti e soli i punti che rendono vera una determinata proprietà, detta *proprietà caratteristica* del luogo geometrico.

Per essere sicuro che una certa figura sia un luogo geometrico, devo quindi dimostrare che:

- tutti i punti che appartengono alla figura possiedono la proprietà caratteristica
- tutti i punti che verificano la proprietà caratteristica appartengono alla figura.

Un semplice esempio di luogo geometrico è la *circonferenza*, che definiremo come il luogo dei punti del piano la cui distanza dal centro è uguale al raggio.

Definizione

Si chiama **asse** (o asse di simmetria) di un segmento la retta perpendicolare al segmento stesso e passante per il suo punto medio (fig. 27).

Teorema 17

L'asse di un segmento è il luogo geometrico dei punti del piano equidistanti dagli estremi del segmento.

Dimostrazione 1

Ipotesi: $PM \perp AB\,;\, AM = MB$

Tesi: $PA = PB$

Dimostrazione 2

Ipotesi: $PA = PB\,;\, AM = MB$

Tesi: $PM \perp AB$

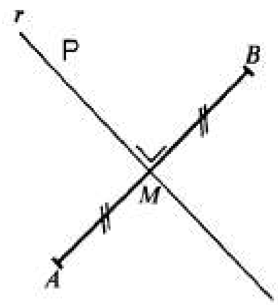


Fig. 27

Svolgi le dimostrazioni per esercizio.

Definizione

Ricordiamo che si chiama **bisettrice** di un angolo la semiretta uscente dal vertice che divide l'angolo in due parti uguali (fig. 28).

Teorema 18

La bisettrice di un angolo è il luogo geometrico dei punti del piano equidistanti dai lati dell'angolo.

Dimostrazione 1

Ipotesi: $H\hat{V}P = P\hat{V}K$

Tesi: $dist(P, a) = dist(P, b)$

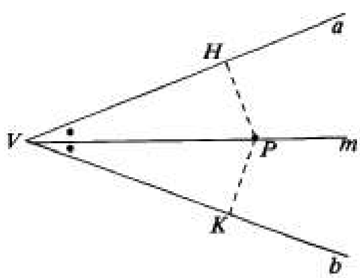


Fig. 28

Dimostrazione 2

Ipotesi: $dist(P, a) = dist(P, b)$

Tesi: $H\hat{V}P = P\hat{V}K$

Anche queste dimostrazioni possono essere svolte come esercizio.

Teorema 19

Gli *assi* dei lati di un triangolo passano per uno stesso punto, detto **circocentro**; tale punto ha la proprietà di essere equidistante dai vertici del triangolo.

Dimostrazione

Traccio la retta *h*, asse di *AB*, e la retta *k*, asse di *BC*.

Chiamo *O* il punto di intersezione delle rette *h* e *k*.

Dal teorema 17 ho:

- *OA=OB* perché *O* appartiene all'asse di *AB*
- *OB=OC* perché *O* appartiene all'asse di *BC*

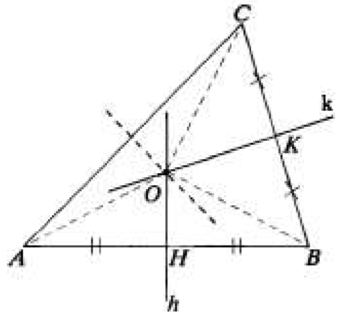


Fig. 29

quindi *OA=OC*; pertanto *O* appartiene anche all'asse di *AC* c.v.d.

Nota: per quale motivo ritieni che il punto di intersezione degli assi abbia ricevuto il nome di circocentro? (pensa alla sua proprietà caratteristica)

Teorema 20

Le *bisettrici* degli angoli interni di un triangolo passano per uno stesso punto, detto **incentro**; tale punto ha la proprietà di essere equidistante dai lati del triangolo.

Dimostrazione

Traccio le bisettrici degli angoli $\hat{A}$ e $\hat{B}$ e chiamo *Q* il loro punto di intersezione. Indico con:

- *QK* la distanza di *Q* dal lato *AB*
- *QR* la distanza di *Q* dal lato *BC*
- *QH* la distanza di *Q* dal lato *AC*.

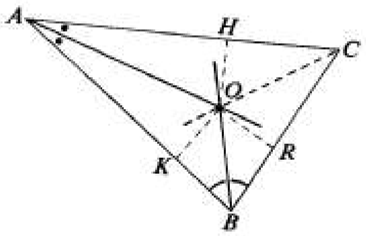


Fig. 30

Per il teorema 18 ho:

- *QH=QK* perché *Q* appartiene alla bisettrice di $\hat{A}$
- *QK=QR* perché *Q* appartiene alla bisettrice di $\hat{B}$

quindi anche *QH=QR*; pertanto *Q* appartiene anche alla bisettrice di $\hat{C}$ c.v.d.

Attenzione: le distanze del punto *Q* dai lati sono perpendicolari ai lati stessi, pertanto in generale non si trovano sulle bisettrici (i disegni possono trarre in errore).

Nota: per quale motivo ritieni che il punto di intersezione delle bisettrici abbia ricevuto il nome di incentro? (pensa alla sua proprietà caratteristica)

Teorema 21

Le rette su cui giacciono le *altezze* di un triangolo passano per uno stesso punto, detto **ortocentro**.

Teorema 22

Le *mediane* di un triangolo passano per uno stesso punto, detto **baricentro**. Esso ha la proprietà di dividere ciascuna mediana in due parti tali che quella che contiene il vertice è doppia dell'altra.

Facendo riferimento alla fig. 31, ho che le tre mediane si intersecano in *G*, e inoltre:

$PG=2GM_1$; $QG=2GM_2$; $RG=2GM_3$.

Le dimostrazioni degli ultimi due teoremi sono un po' laboriose, pertanto non le riportiamo.

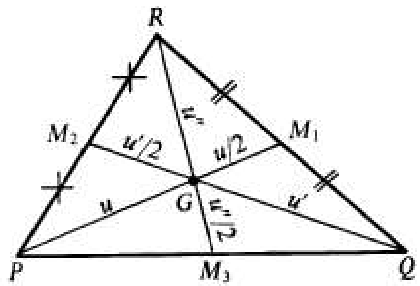


Fig. 31

Geometria euclidea

5. La circonferenza

Definizioni

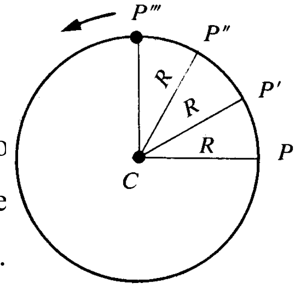


Fig. 1

Si chiama **circonferenza** il luogo geometrico dei punti del piano che sono equidistanti da un punto C, detto *centro*. La distanza R tra un qualunque punto P appartenente alla circonferenza e il suo centro C si chiama *raggio*.
Una circonferenza è completamente determinata quando si conoscono la posizione del centro e la misura del raggio. Infatti, un punto che si muove nel piano in modo da mantenere sempre la stessa distanza da un punto fisso descrive una circonferenza (fig.1): da questo deriva l'uso del compasso per disegnare la circonferenza.

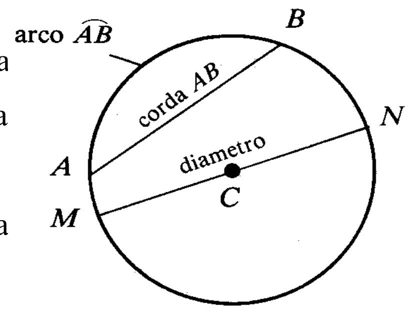


Fig. 2

La figura formata dall'insieme dei punti appartenenti alla circonferenza e di quelli ad essa interni è detta *cerchio*; la circonferenza è il contorno del cerchio.
Ogni parte di circonferenza compresa tra due punti della circonferenza stessa si chiama **arco** di circonferenza.
Osserva che due punti A e B della circonferenza definiscono due archi distinti, in quanto posso muovermi da A verso B sia in senso orario che antiorario (fig.2).
Il segmento che congiunge due punti della circonferenza si chiama **corda**. Una corda passante per il centro della circonferenza si chiama **diametro**.

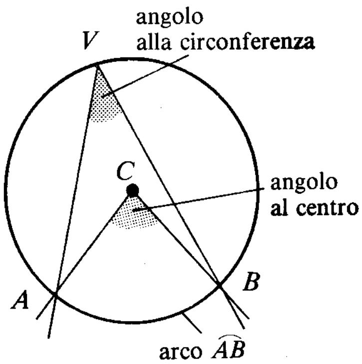


Fig. 3

Si dice che la corda AB è *sottesa* da ciascuno dei due archi AB.
Un angolo avente il vertice nel centro di una circonferenza viene detto **angolo al centro**.
Si chiama invece **angolo alla circonferenza** un angolo il cui vertice appartiene alla circonferenza e i cui lati intersecano la circonferenza.
Facendo riferimento alla fig.3, si dice che l'angolo al centro $A\hat{C}B$ e l'angolo alla circonferenza $A\hat{V}B$ *insistono* entrambi sull'arco AB e sono tra loro corrispondenti.

Teorema 23

Dati tre punti non allineati, esiste sempre una ed una sola circonferenza che passa per tali punti.
Abbiamo già dimostrato questa affermazione, in forma leggermente diversa, nel teorema 19.
Infatti, se A, B, C sono i tre punti dati, la circonferenza che passa per tali punti ha come centro il circocentro del triangolo ABC, e come raggio la distanza tra il circocentro ed uno qualunque dei tre

punti (vedi fig. 4).

- Quante sono, invece, le circonferenze che passano per due punti dati? Quali sono? Il teorema resta valido se i tre punti dati sono allineati?
- Osserva che *l'asse di qualunque corda passa per il centro*.
- Il teorema resta valido se consideriamo come nostro ambiente lo spazio anziché il piano?

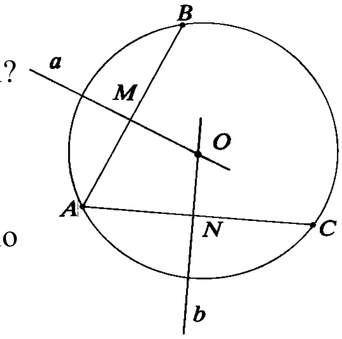


Fig. 4

Teorema 24 (proprietà delle corde)

a) In una circonferenza, qualunque corda non passante per il centro è minore del diametro.

b) Se dal centro di una circonferenza conduco la perpendicolare ad una corda, allora tale retta divide la corda in due parti uguali.

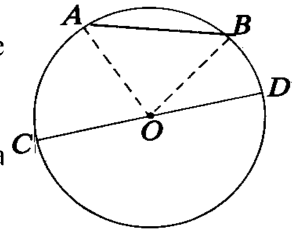


Fig. 5

Dimostrazione

a) Data la corda AB (fig. 5), congiungi A e B con il centro della circonferenza. Al triangolo AOB può essere applicato il teorema 8, per il quale un lato di un triangolo è sempre minore della somma degli altri due. Quindi:

$AB < AO + OB = 2r$ c.v.d.

b) *Ipotesi:* $AO = OB\,;\; OM \perp AB$ (vedi fig. 6)

Tesi: $AM = MB$

Svolgi la dimostrazione come esercizio.

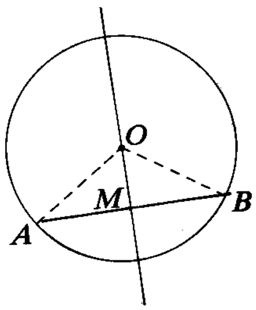


Fig. 6

Teorema 25

In una data circonferenza, o in due circonferenze uguali, ad angoli al centro uguali corrispondono archi uguali e corde uguali, e viceversa.

Facendo riferimento alla fig.7: $\alpha = \beta \Leftrightarrow \overline{AB} = \overline{CD} \Leftrightarrow arco\, AB = arco\, CD$.

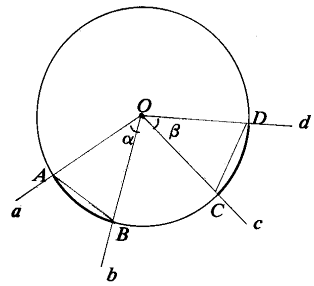


Fig. 7

Non svolgiamo la dimostrazione. Intuitivamente, osserva che un'opportuna rotazione attorno al centro O porta l'angolo α a sovrapporsi all'angolo β, e lo stesso per gli archi e le corde corrispondenti.

Posizioni reciproche di una retta e di una circonferenza

Esaminando la fig. 8, puoi renderti conto che una retta ed una circonferenza possono trovarsi in tre posizioni reciproche:

i. Se la distanza tra il centro della circonferenza e la retta è *maggiore* del raggio, la retta è **esterna** alla circonferenza; ovvero retta e circonferenza non hanno alcun punto in comune.

ii. Se la distanza CH tra il centro e la retta è *uguale* al raggio, allora la retta e la circonferenza hanno in comune il punto H.

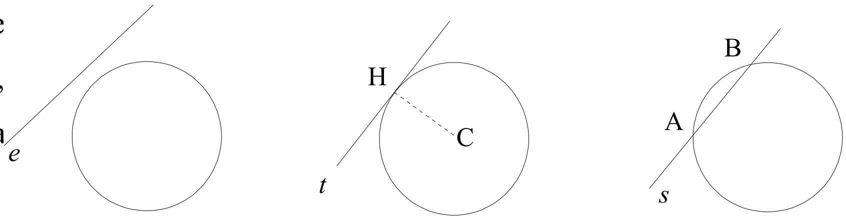


Fig. 8 Posizioni reciproche di retta e circonferenza

In questo caso si dice che la retta è **tangente** alla circonferenza e il punto di contatto H è detto **punto di tangenza**.

Osserva che *la retta tangente e il raggio passante per il punto di tangenza sono tra loro perpendicolari*, per la definizione di distanza tra un punto ed una retta.

iii. Infine, se la distanza tra il centro e la retta è *minore* del raggio, la retta interseca la circonferenza in due punti distinti. Si dice allora che la retta è **secante** (con una “c”!) rispetto alla circonferenza.

- Basandoti sulle tue reminiscenze di latino, cerca l'etimologia dei termini “tangente” e “secante”.
- Prova a classificare in maniera analoga le posizioni reciproche di due circonferenze.

Angoli al centro ed alla circonferenza

Considera la fig. 9: secondo le definizioni che abbiamo dato in precedenza, l'angolo al centro $A\hat{O}C$ e il corrispondente angolo alla circonferenza $A\hat{B}C$ insistono entrambi sull'arco AMC (usiamo tre lettere per indicare a quale dei due archi aventi come estremi A e C stiamo facendo riferimento).

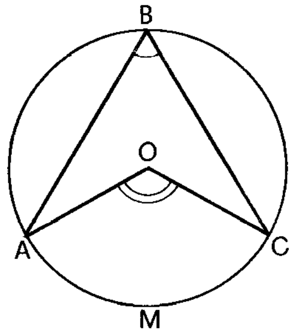


Fig. 9

Osserva che ad un angolo alla circonferenza corrisponde un unico angolo al centro, mentre ad un angolo al centro corrispondono infiniti angoli alla circonferenza che insistono sullo stesso arco: prova a tracciarne qualcuno. Quindi, la corrispondenza tra gli angoli al centro e i rispettivi angoli alla circonferenza, non è biunivoca.

Ampliamo la nostra precedente definizione e diciamo che un angolo alla circonferenza ha il vertice appartenente alla circonferenza, mentre i lati possono essere:

- entrambi secanti la circonferenza (figg. 3 e 9)
- oppure uno secante ed uno tangente la circonferenza (fig. 10).

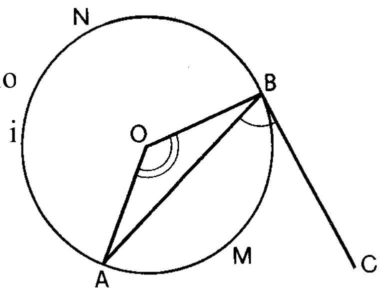


Fig. 10

In altre parole, stiamo dicendo che la fig. 10 rappresenta un angolo al centro $A\hat{O}B$ ed il corrispondente angolo alla circonferenza $A\hat{B}C$, che insistono entrambi sull'arco AMB.

Intuitivamente, tale ampliamento è giustificato dal fatto che una retta tangente rispetto alla circonferenza può essere considerata come il caso limite di una retta secante, quando i due punti di intersezione con la circonferenza si avvicinano indefinitamente.

Per esempio, la fig. 11 rappresenta gli angoli alla circonferenza $A\hat{V}_1B$, $A\hat{V}_2B$, $A\hat{V}_3B$, $A\hat{B}T$, $B\hat{A}T'$ che insistono tutti sull'arco AB. L'angolo $A\hat{B}T$ può essere visto come la posizione limite assunta da un angolo $A\hat{V}B$ quando il vertice V si muove verso B lungo la circonferenza. Un discorso analogo vale per $B\hat{A}T'$.

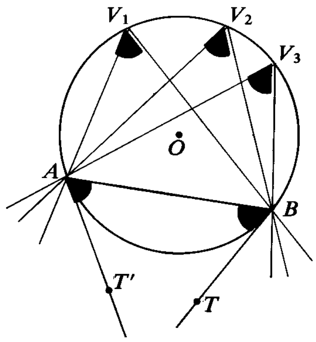


Fig. 11

Teorema 26

Ogni angolo alla circonferenza è uguale alla metà del corrispondente angolo al centro (che insiste sullo stesso arco).

Per dimostrare il teorema conviene distinguere vari casi.

Caso i). I lati dell'angolo alla circonferenza sono entrambi secanti la circonferenza stessa e un lato passa per il centro (fig. 12).

Dimostrazione i)

All'angolo alla circonferenza $A\hat{B}C$ corrisponde l' angolo al centro $A\hat{O}C$.

Indico con $A\hat{B}C=\alpha$ l'ampiezza dell'angolo alla circonferenza.

Poiché $OA=OB=r$ in quanto raggi della stessa circonferenza, il triangolo OAB è isoscele. Quindi $O\hat{A}B=O\hat{B}A=\alpha$ per il teorema 1.

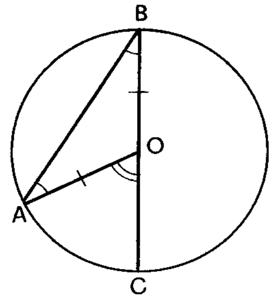


Fig. 12

Per il teorema 5: $A\hat{O}B=180°-O\hat{A}B-O\hat{B}A=180°-2\alpha$.

Infine, poiché $A\hat{O}C$ è adiacente (e quindi supplementare) ad $A\hat{O}B$:

$A\hat{O}C=180°-A\hat{O}B=180°-(180°-2\alpha)=2\alpha$ c.v.d.

Caso ii). I lati dell'angolo alla circonferenza sono entrambi secanti e il centro è interno all'angolo alla circonferenza. (fig. 13).

Dimostrazione ii)

L'angolo alla circonferenza è $A\hat{V}B$ ed il corrispondente angolo al centro è $A\hat{O}B$. Traccio il diametro VC.

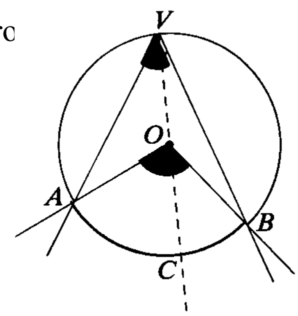
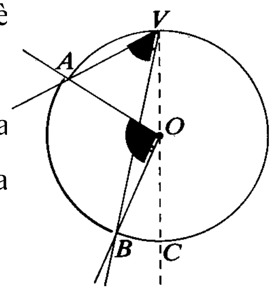


Fig. 13

Se chiamo $A\hat{V}C=\alpha$ e $B\hat{V}C=\beta$, ho $A\hat{V}B=\alpha+\beta$.

Per la dimostrazione del caso i), ho: $A\hat{O}C=2\alpha$, $B\hat{O}C=2\beta$; quindi: $A\hat{O}B=2\alpha+2\beta=2(\alpha+\beta)$ c.v.d.

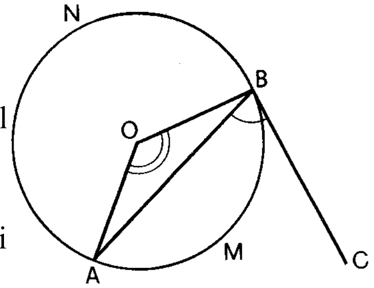


Caso iii). I lati dell'angolo alla circonferenza sono entrambi secanti e il centro è esterno all'angolo alla circonferenza. (fig. 14).

La dimostrazione è analoga a quella del caso ii), con la differenza che ora consideriamo la differenza di due angoli, anziché la loro somma. Prova a svolgerla come esercizio.

Fig. 14

Caso iv). L'angolo alla circonferenza ha un lato secante ed uno tangente rispetto alla circonferenza stessa (fig. 15).



Dimostrazione iv)

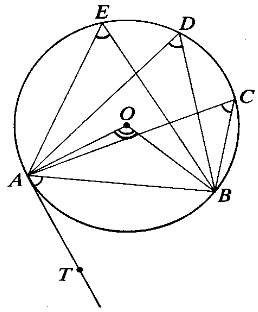
L'angolo alla circonferenza è $A\hat{B}C$ ed il corrispondente angolo al centro è $A\hat{O}B$. Chiamo $A\hat{B}C=\alpha$.

Poiché la tangente è perpendicolare al raggio passante per il punto di tangenza, ho $O\hat{B}A=90°-\alpha$.

Fig. 15

Poiché $OA=OB=r$, il triangolo AOB è isoscele, quindi $O\hat{A}B=O\hat{B}A=90°-\alpha$.

Per il teorema 5: $A\hat{O}B=180°-O\hat{A}B-O\hat{B}A=180°-(90°-\alpha)-(90°-\alpha)=2\alpha$ c.v.d.



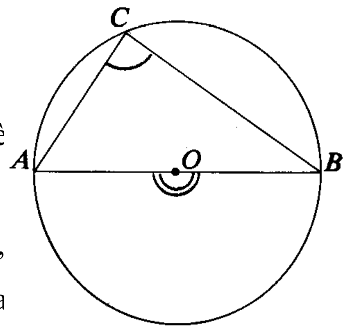
Corollario 7

In una circonferenza, tutti gli angoli alla circonferenza che insistono su uno stesso arco (o su archi uguali) sono uguali tra loro.

Infatti, sono tutti uguali alla metà dello stesso angolo al centro (o di angoli al centro uguali).

Fig. 16

Ad esempio, nella fig. 16 ho: $A\hat{C}B=A\hat{D}B=A\hat{E}B=B\hat{A}T=\frac{1}{2}A\hat{O}B$.



Corollario 8

Ogni angolo che insiste su una semicirconferenza è retto.

Infatti, esso è uguale alla metà del corrispondente angolo al centro, che è un angolo piatto (fig. 17).

Vale anche il teorema inverso: “Se il triangolo ABC è rettangolo in C, allora il vertice C appartiene alla circonferenza di diametro AB”. La dimostrazione si svolge per assurdo, e non la riportiamo.

Fig. 17

Tangenti ad una circonferenza passanti per un punto

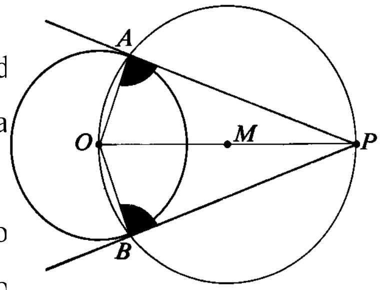


Fig. 18

Data una circonferenza (quella di centro O in fig. 18) e un punto P ad essa esterno, vogliamo tracciare le rette passanti per P e tangenti alla circonferenza.

Uniamo P con il centro O e disegniamo la circonferenza di diametro OP (ha come centro il punto medio M del segmento OP e come raggio OM=MP).

La circonferenza di centro M interseca quella data in due punti A e B: le rette PA e PB sono le tangenti che cercavamo. Infatti, gli angoli $O\hat{A}P$ e $O\hat{B}P$, insistendo su una semicirconferenza, sono retti per il corollario 8, e quindi le rette PA e PB, essendo rispettivamente perpendicolari ai raggi OA e OB, risultano tangenti alla circonferenza data.

Teorema 27

Dalla costruzione precedente segue che:

a) i segmenti di tangente condotti da un punto esterno ad una circonferenza (compresi tra tale punto e i punti di contatto) sono uguali;
b) la semiretta che congiunge il punto da cui escono le tangenti con il centro della circonferenza è bisettrice sia dell'angolo formato dalle tangenti che dell'angolo formato dai raggi che passano per i punti di contatto;
c) tale semiretta è anche asse del segmento che unisce i punti di contatto.

Ipotesi: *PA e PB tangenti alla circonferenza* (fig. 18)

Tesi: $PA=PB\,;\ \ A\hat{P}O=B\hat{P}O\,;\ \ A\hat{O}P=B\hat{O}P\,;\ \ AB\ asse\ di\ OP$

Svolgi la dimostrazione per esercizio; devi far vedere che i triangoli APO e BPO sono uguali.

6. Poligoni inscritti e circoscritti ad una circonferenza

Definizioni

Un poligono si dice **inscritto** *in* una circonferenza se tutti i suoi vertici appartengono alla circonferenza (fig. 19); in questo caso la circonferenza si dice inscritta al poligono.

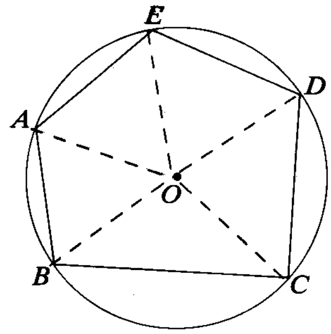


Fig. 19 Poligono inscritto in una circonferenza.

Un poligono si dice **circoscritto** *ad* una circonferenza se tutti i suoi lati sono tangenti la circonferenza (fig. 20); la circonferenza viene detta inscritta al poligono.

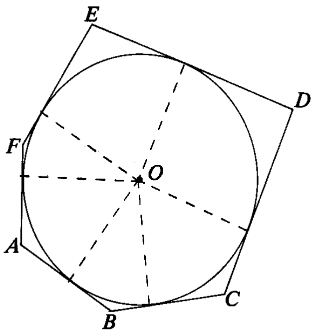


Fig. 20 Poligono circoscritto ad una circonferenza.

In pratica è inscritta la figura che "sta dentro"; è circoscritta la figura che "sta fuori". (Ovviamente, è proibito ripetere in classe una simile oscenità).

Ci chiediamo: per quali poligoni esistono una circonferenza nella quale essi siano inscritti ed una circonferenza alla quale essi siano circoscritti; ovvero, quali poligoni sono inscrivibili e quali sono circoscrivibili ad una circonferenza? In generale possiamo dire che:

- Un poligono è inscrivibile in una circonferenza se e soltanto se esiste un punto equidistante da tutti i suoi vertici, e quindi se tutti gli assi dei suoi lati si incontrano in uno stesso punto che, se esiste, sarà il centro della circonferenza circoscritta al poligono.
- Un poligono è circoscrivibile ad una circonferenza se e soltanto se esiste un punto equidistante da tutti i suoi lati, e quindi se tutte le bisettrici dei suoi angoli si incontrano in uno stesso punto, che, se esiste, sarà il centro della circonferenza inscritta al poligono.

Teorema 28

Ogni triangolo è sempre inscrivibile in una circonferenza, il cui centro è il circocentro del triangolo (punto di intersezione degli assi).

Ogni triangolo è sempre circoscrivibile ad una circonferenza, il cui centro è l'incentro del triangolo (punto di intersezione delle bisettrici).

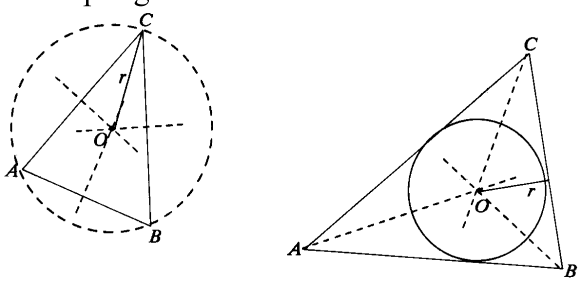


Fig. 21 Circonferenza circoscritta e inscritta ad un triangolo.

Abbiamo già dimostrato queste affermazioni, secondo un punto di vista lievemente diverso, con i teoremi 19 (ripreso dal teorema 23) e 20 .

Teorema 29

Un quadrilatero è inscrivibile in una circonferenza se e soltanto se i suoi angoli opposti sono supplementari.

Dimostriamo soltanto che, se un quadrilatero è inscritto in una circonferenza, allora i suoi angoli opposti sono supplementari; la dimostrazione del teorema inverso si svolge per assurdo.

Ipotesi: $A, B, C, D \in circonferenza$

Tesi: $\hat{A}+\hat{C}=\hat{B}+\hat{D}=180°$

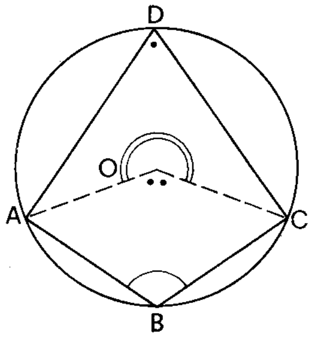


Fig. 22

Dimostrazione

Indichiamo $\hat{B}=\beta$, $\hat{D}=\delta$.

Per il teorema 26 i corrispondenti angoli al centro misureranno:

$A\hat{O}C(convesso)=2\delta$; $A\hat{O}C(concavo)=2\beta$.

D'altra parte, tali angoli formano un angolo giro: $2\beta+2\delta=360°$.

Dividendo per 2 l'uguaglianza precedente ho: $\beta+\delta=180°$ c.v.d.

Per dimostrare che anche $\hat{A}+\hat{C}=180°$, posso ripetere il ragionamento precedente, o semplicemente osservare che $\hat{A}+\hat{C}=360°-(\hat{B}+\hat{D})=180°$ per il corollario 6 sulla somma degli angoli interni di un quadrilatero.

Teorema 30

Un quadrilatero è circoscrivibile ad una circonferenza se e soltanto se la somma di due lati opposti è uguale alla somma degli altri due.

Dimostriamo soltanto che se un quadrilatero è circoscritto ad una circonferenza, allora la somma di due lati opposti è uguale alla somma degli altri due; la dimostrazione del teorema inverso si svolge per assurdo.

Ipotesi: $ABCD$ *circoscritto a circonferenza*

Tesi: $AB+CD=BC+AD$

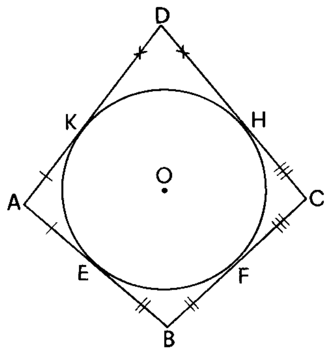


Fig. 23

Dimostrazione

Indico con E, F, H, K i punti di tangenza dei lati.

Per il teorema 27a) so che:

$AE=AK=x$, $BE=BF=y$, $CF=CH=z$, $DH=DK=t$.

Sommando i diversi "pezzetti", ottengo:

$AD+BC=AB+CD=x+y+z+t$ c.v.d.

Una curiosità: puoi vedere e ascoltare un'esposizione di questa dimostrazione (bella per la sua assoluta semplicità) nel film "Arrivederci ragazzi" del regista francese Louis Malle. Non ti preoccupare: il tema del film non è la matematica, ma l'adolescenza e la necessità di maturare anche attraverso delle esperienze dolorose (molto più delle interrogazioni di geometria).

- Tra i quadrilateri che abbiamo studiato, quali sono inscrivibili in una circonferenza? Quali sono circoscrivibili ad una circonferenza?

Poligoni regolari

Un poligono viene detto **regolare** quando ha tutti i lati uguali e tutti gli angoli uguali, cioè quando è sia equilatero che equiangolo.

Osserva che, mentre per i triangoli le proprietà di avere i lati uguali e gli angoli uguali sono equivalenti, già per i quadrilateri questo non è più vero: il rombo è equilatero, ma non è equiangolo; il rettangolo è equiangolo, ma non equilatero. Quindi, un quadrilatero regolare è necessariamente un quadrato.

Teorema 31

a) Se una circonferenza è suddivisa in *n* archi uguali, il poligono che si ottiene congiungendo successivamente i punti di divisione è regolare. Inoltre, anche il poligono i cui lati sono tangenti alla circonferenza nei punti di divisione è regolare (fig. 24).

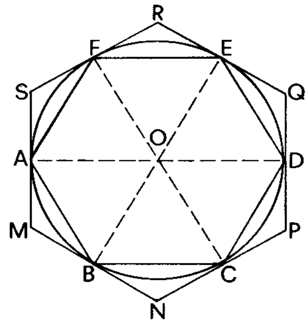


Fig. 24

b) Viceversa, se un poligono è regolare, allora esso è sia circoscrivibile che inscrivibile ad una circonferenza. Le due circonferenze hanno lo stesso centro, che viene chiamato centro del poligono; il raggio della circonferenza inscritta si dice **apotema** e quello della circonferenza circoscritta si dice *raggio* del poligono.

Prova a svolgere le dimostrazioni come esercizio.

Corollario 9

Il lato dell'esagono regolare inscritto in una circonferenza è uguale al raggio della circonferenza.

7. Similitudine

Finora hai visto come si affronta in maniera abbastanza rigorosa lo studio dell'uguaglianza (più correttamente detta *isometria* o *congruenza*) tra figure geometriche nel piano.
Ora consideriamo figure che, in senso intuitivo, "hanno la stessa forma", pur potendo avere dimensioni diverse. Chiameremo **simili** due figure che "hanno la stessa forma" e **similitudine** la relazione che intercorre tra di esse.
Cerchiamo adesso di rendere un po' più precisa l'idea enunciata.

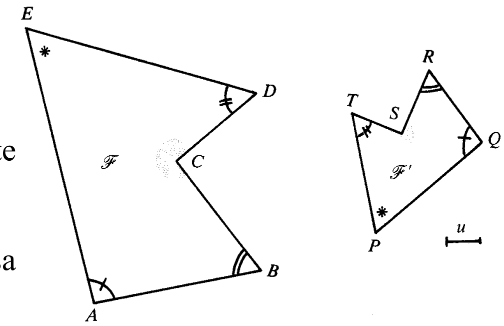


Fig. 25 Poligoni simili

Definizione
Due poligoni F ed F' si dicono **simili** se tra i loro punti esiste una corrispondenza biunivoca tale che:

i) *gli angoli corrispondenti sono uguali* (hanno la stessa ampiezza);

ii) il rapporto tra due lati corrispondenti è costante (cioè è lo stesso per tutte le coppie di lati corrispondenti):

$$\frac{A'B'}{AB}=\frac{B'C'}{BC}=\frac{C'D'}{CD}=...=k \quad \text{, ovvero} \quad \frac{AB}{A'B'}=\frac{BC}{B'C'}=\frac{CD}{C'D'}=...=\frac{1}{k} \quad .$$

Tale rapporto costante si chiama anche **rapporto di similitudine** tra i due poligoni, e questa relazione si può esprimere dicendo che *due poligoni simili hanno i lati in proporzione.*

In realtà, almeno per i triangoli, queste due condizioni (quella sui lati e quella sugli angoli) sono sovrabbondanti, nel senso che una delle due implica l'altra. Cerchiamo di dirlo decentemente.

Teorema 32 (Primo criterio di similitudine dei triangoli).
Se due triangoli hanno gli angoli rispettivamente uguali, allora hanno anche i lati corrispondenti in proporzione, e quindi sono simili (fig. 26).

Ipotesi: $\hat{A}=\hat{P}\,,\hat{B}=\hat{Q}\quad (e\,quindi\,\hat{C}=\hat{R})$

Tesi: $\dfrac{AB}{PQ}=\dfrac{BC}{QR}=\dfrac{CA}{RP}\quad (e\,quindi\,ABC\sim PQR)$

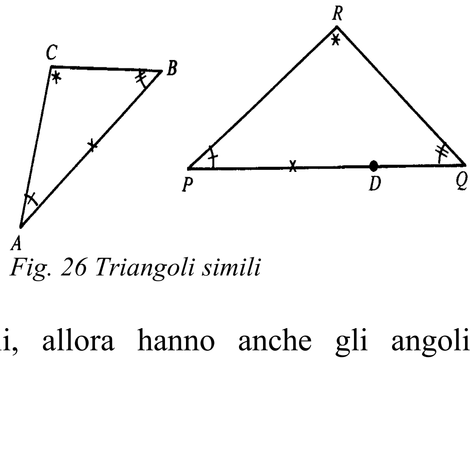


Fig. 26 Triangoli simili

Teorema 33 (Terzo criterio di similitudine dei triangoli).
Se due triangoli hanno i lati ordinatamente proporzionali, allora hanno anche gli angoli corrispondenti uguali, e quindi sono simili.

Ipotesi: $\frac{AB}{PQ}=\frac{BC}{QR}=\frac{CA}{RP}$

Tesi: $\hat{A}=\hat{P}\,,\hat{B}=\hat{Q}\,,\hat{C}=\hat{R}\quad(e\,quindi\;ABC\sim PQR)$

Osservazioni

- Per avere il diritto di chiamare teoremi queste proposizioni, dovremmo dimostrarne la validità in generale, cosa che per noi è un po' laboriosa. Allora, considerandoli come veri senza dimostrarli, in pratica li stiamo trattando come se fossero degli *assiomi* o *postulati*.
- Forse ti starai chiedendo se non manca qualche riga delle fotocopie. Rispondo: sì, esiste anche un secondo criterio di similitudine dei triangoli, che "mescola" le informazioni sui lati e quelle sugli angoli, ma si usa piuttosto raramente; se ne avrai mai bisogno, lo potrai trovare su qualunque testo di geometria del biennio.
- Un'altra domanda che a questo punto dovresti farti è la seguente: per vedere se due poligoni sono simili è proprio necessario controllare che abbiano sia gli angoli uguali che i lati in proporzione? Abbiamo appena detto che per i triangoli basta verificare una sola delle due condizioni; cosa succede per poligoni con un numero di lati maggiore? Prova a rispondere tu.
  (Suggerimento: pensa se due rombi o due rettangoli sono necessariamente simili).
- Sapresti invece trovare delle "categorie" di poligoni che siano tutti simili tra loro?
- Se due poligoni sono simili, i lati dell'uno si ottengono da quelli dell'altro moltiplicando o dividendo le loro misure per il rapporto di similitudine; succederà la stessa cosa anche per le diagonali, le altezze, le mediane, le bisettrici, i perimetri ed in genere per ogni coppia di segmenti corrispondenti? La risposta è affermativa, e, nel caso dei triangoli, ne daremo un paio di semplici dimostrazioni subito dopo.
- Succederà lo stesso anche per le aree dei poligoni? Neanche per sogno! *Il rapporto delle aree è il quadrato del rapporto di similitudine*. Pensaci: se raddoppi i lati di un quadrato, la sua area raddoppia? (Attento a non dire scemenze).

Corollario 10

Una retta parallela ad un lato di un triangolo individua con gli altri due lati o con i loro prolungamenti un nuovo triangolo, simile a quello dato.

Ipotesi: $DE \| BC$ (fig. 27)

Tesi: $ADE \sim ABC$

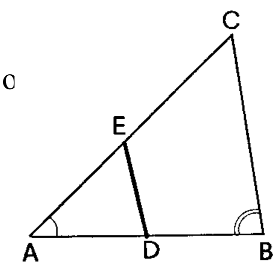


Fig. 27

Prova a svolgere la dimostrazione per esercizio.

Teorema 34 (proprietà dei triangoli simili)

Se due triangoli sono simili, allora:

a) il rapporto tra le altezze corrispondenti è uguale al rapporto di similitudine;

b) il rapporto tra i perimetri è uguale al rapporto di similitudine;

c) il rapporto tra le aree è uguale al quadrato del rapporto di similitudine.

Ipotesi: $ABC \sim A'B'C'$; $\dfrac{A'B'}{AB}=k$

Tesi: $\dfrac{C'H'}{CH}=k$; $\dfrac{2p'}{2p}=k$; $\dfrac{S'}{S}=k^2$

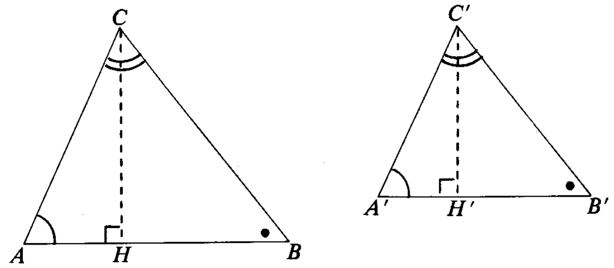


Fig. 28

Dimostrazione

a) Per ipotesi: $\dfrac{A'C'}{AC}=k$ (fig. 28).

Tracciando le altezze CH e C'H', ottengo che i triangoli ACH e A'C'H' sono simili per il 1° criterio di similitudine, in quanto hanno $\hat{A}=\hat{A}'$ per ipotesi e $\hat{H}=\hat{H}'=90°$ per costruzione.

Ne deduco che $\dfrac{C'H'}{CH}=\dfrac{A'C'}{AC}=k$ c.v.d.

b) Per ipotesi: $\dfrac{A'B'}{AB}=\dfrac{B'C'}{BC}=\dfrac{C'A'}{CA}=k$.

Ne deriva che: $A'B'=k\,AB$; $B'C'=k\,BC$; $C'A'=k\,CA$. Quindi:

$2p'=A'B'+B'C'+C'A'=k\,AB+k\,BC+k\,CA=k(AB+BC+CA)=k\,2p$ c.v.d.

c) $S'=\frac{1}{2}\cdot A'B'\cdot C'H'=\frac{1}{2}\cdot k\,AB\cdot k\,CH=k^2(\frac{1}{2}\cdot AB\cdot CH)=k^2 S$ c.v.d.

Teorema 35 (di Talete)

Un fascio di rette parallele determina su due trasversali due insiemi di segmenti direttamente proporzionali.

Ipotesi: $AA' \| BB' \| CC' \| DD'$

Tesi: $\dfrac{AB}{CD}=\dfrac{A'B'}{C'D'}$ ovvero $\dfrac{A'B'}{AB}=\dfrac{C'D'}{CD}=...=k$.

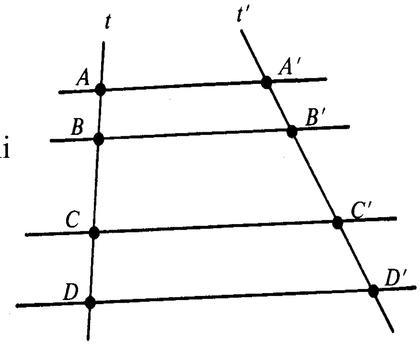


Fig. 29 Teorema di Talete

E' una generalizzazione del teorema 16, che si applicava solo al caso in cui AB=CD.

Non diamo una vera dimostrazione, ma ci limitiamo ad un caso particolare in cui i segmenti sulla prima trasversale sono *commensurabili*, cioè hanno un sottomultiplo comune *u*, che può essere considerato un'unità di misura.

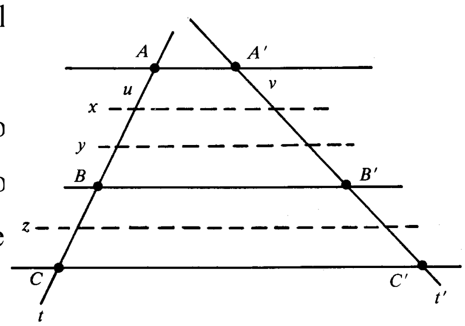


Fig. 30

Se, ad esempio, $AB=3u$, $BC=2u$ (fig. 30), possiamo condurre le rette x, y, z del fascio di parallele che dividono AB e BC in cinque segmenti di lunghezza u. Per il teorema 16, anche i cinque segmenti corrispondenti sulla seconda trasversale avranno la stessa lunghezza, che indichiamo con v: $A'B'=3v$, $B'C'=2v$.

Quindi: $\frac{AB}{BC}=\frac{3u}{2u}=\frac{3}{2}$; $\frac{A'B'}{B'C'}=\frac{3v}{2v}=\frac{3}{2}$ c.v.d.

oppure: $\frac{A'B'}{AB}=\frac{3v}{3u}=\frac{v}{u}$; $\frac{B'C'}{BC}=\frac{2v}{2u}=\frac{v}{u}$ c.v.d.

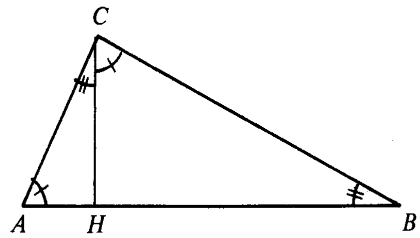


Fig. 31 Teoremi di Euclide

Teorema 36 (Primo teorema di Euclide)

In un triangolo rettangolo, il quadrato di un cateto è uguale al prodotto tra l'ipotenusa e la proiezione dello stesso cateto sull'ipotenusa.

Ipotesi: $A\hat{C}B=90°$ (fig. 31)

Tesi: $AC^2=AB\cdot AH$; $BC^2=AB\cdot BH$

Dimostrazione

Conducendo l'altezza relativa all'ipotenusa CH, puoi osservare che i triangoli ABC, ACH e BCH sono simili per il primo criterio di similitudine dei triangoli.

Se considero i lati corrispondenti dei triangoli ABC e ACH, posso scrivere la proporzione:

$\frac{AB}{AC}=\frac{AC}{AH}$; da cui, eliminando i denominatori: $AC^2=AB\cdot AH$ c.v.d.

Prendendo in considerazione i triangoli ABC e BCH, ho la seconda parte della tesi.

Teorema 37 (Secondo teorema di Euclide)

In un triangolo rettangolo, il quadrato dell'altezza relativa all'ipotenusa è uguale al prodotto tra le proiezioni dei cateti sull'ipotenusa.

Ipotesi: $A\hat{C}B=90°$ (fig. 31)

Tesi: $CH^2=AH\cdot BH$

Dimostrazione

Considero i triangoli ACH e BCH, simili per il primo criterio di similitudine.

Prendendo i lati corrispondenti, ho la proporzione: $\frac{AH}{CH}=\frac{CH}{BH}$.

Eliminando i denominatori, ricavo: $CH^2=AH\cdot BH$ c.v.d.

Teorema 38 (Teorema di Pitagora)

In un triangolo rettangolo, il quadrato dell'ipotenusa è uguale alla somma dei quadrati dei cateti.

Ipotesi: $A\hat{C}B=90°$ (fig. 31)

Tesi: $AB^2=AC^2+BC^2$

Dimostrazione

Dal primo teorema di Euclide ottengo: $AC^2=AB\cdot AH$; $BC^2=AB\cdot BH$.

Quindi: $AC^2+BC^2=AB\cdot AH+AB\cdot BH=AB\cdot(AH+BH)=AB\cdot AB=AB^2$ c.v.d.

Osserviamo che in realtà su tutti i testi di geometria si trova un'altra dimostrazione del teorema di Pitagora, molto più "geometrica" (si costruiscono dei poligoni aventi la stessa area), ma anche molto più complessa di quella che abbiamo riportato.

Osservazione

Sia i teoremi di Euclide che quello di Pitagora sono invertibili. Ad esempio, se vale la relazione $AB^2=AC^2+BC^2$ tra i lati di un triangolo, allora il triangolo ABC è rettangolo.

Corollario 11 (relazioni metriche tra gli elementi di particolari figure)

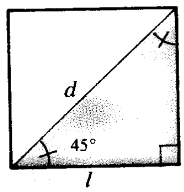


Fig. 32

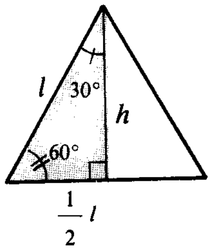


Fig. 33

a) Relazione tra lato e diagonale di quadrato (fig. 32): $d=l\sqrt{2}$

b) Relazione tra altezza e lato di un triangolo equilatero (fig. 33):

$$h=l\frac{\sqrt{3}}{2}$$

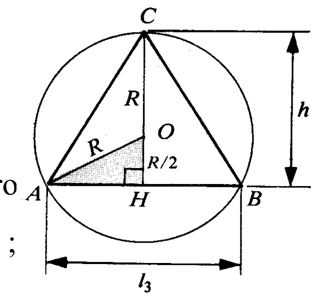


Fig. 34

c) Relazioni tra gli elementi di un triangolo equilatero inscritto in una circonferenza (fig. 34): $l=R\sqrt{3}$;

$$h=\frac{3}{2}R$$

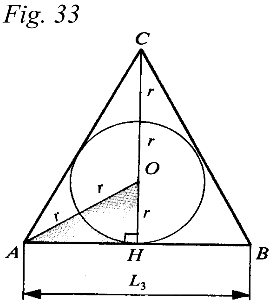


Fig. 35

d) Relazioni tra gli elementi di un triangolo equilatero circoscritto ad una circonferenza (fig. 35): $L=2r\sqrt{3}$; $H=3r$

e) Raggio del cerchio inscritto in un triangolo (in realtà in un poligono) generico (fig. 36): $r=\dfrac{Area}{p}$

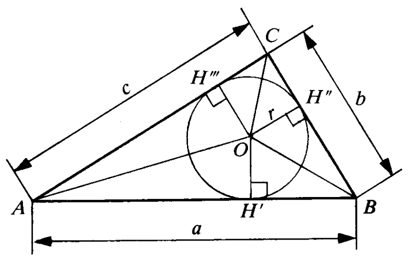


Fig. 36

Esercizi geometria euclidea

Circonferenza

1. Disegna una circonferenza di centro O e conduci la tangente in un suo punto T. Indica con B e D due punti di tale retta equidistanti dal punto di contatto. Dimostra che BC=DC.
2. Dagli estremi del diametro AB di una circonferenza conduci le corde parallele AP e BQ. Dimostra che tali corde sono uguali.
3. Traccia due circonferenze secanti nei punti A e B. Dimostra che la corda AB è perpendicolare alla retta dei centri, ed è da questa divisa in due parti uguali.
4. In una circonferenza di centro C, disegna due corde uguali AB e DE che si intersecano nel punto Q. Dimostra che la retta CQ è bisettrice di due degli angoli formati da tali corde.
5. Dati i segmenti uguali ed adiacenti OA e OB, traccia le due circonferenze di centro O e raggi OA e OB rispettivamente. Conduci per A la retta tangente alla prima circonferenza, che interseca in C e in D la seconda. Dimostra che il quadrilatero OCBD è un rombo.
6. Due circonferenze sono tangenti esternamente. Per il punto di contatto conduci una secante che incontra le circonferenze nei punti A e B. Dimostra che le rette che congiungono questi punti con i centri delle circonferenze cui appartengono sono parallele.
7. Data una circonferenza, sia AB un suo diametro e siano AC e BD due corde parallele. Dimostra che il segmento CD è un diametro.
8. Data una circonferenza, dimostra che il quadrilatero che ha come vertici gli estremi di due diametri è un rettangolo.
9. Dati due punti A, B di una circonferenza, indichiamo con M ed N i punti medi dei due archi individuati da A e B. Dimostra che il segmento MN è un diametro.
10. Su una circonferenza di centro O, considera due corde AB=AC. Dimostra che la semiretta AO è la bisettrice dell'angolo $B\hat{A}C$.
11. Da un punto P, esterno ad una circonferenza di centro O, conduci le tangenti alla circonferenza e siano A e B i punti di tangenza. Dimostra che il segmento AB è dimezzato dalla retta PO.
12. Un triangolo ABC, isoscele sulla base AB, ha tutti i vertici su una circonferenza di centro O. Dimostra che la retta CO è asse del segmento AB.
13. Su una circonferenza, traccia la corda AB e il diametro PQ ad essa perpendicolare. Dimostra che i triangoli ABP e ABQ sono isosceli.
14. Dimostra che le tangenti ad una circonferenza condotte dagli estremi di un diametro sono parallele.
15. Da un punto P, esterno ad una circonferenza di raggio O, conduci le tangenti che toccano la

circonferenza nei punti A e B. Per un punto generico del minore degli archi AB conduci una terza tangente che interseca le altre due in C e D. Dimostra che $C\hat{O}D=\frac{1}{2}A\hat{O}B$.

16. In una circonferenza di centro O, conduci le tangenti negli estremi di un diametro AB. Conduci poi una terza tangente che interseca le precedenti in C e D. Dimostra che $C\hat{O}D=90°$.
17. Dimostra che, se una circonferenza è tangente ad entrambi i lati di un angolo, il suo centro appartiene alla bisettrice dell'angolo.
18. Data una circonferenza di centro O, conduci la tangente in un suo punto T e prendi su di essa due segmenti AT=TB. Le rette AO e BO intersecano la circonferenza nei punti P e Q rispettivamente. Dimostra che le corde PT e QT sono uguali.
19. Dimostra che la tangente condotta nel punto medio di un arco di circonferenza è parallela alla corda sottesa dall'arco.
20. Prolunga il diametro AB di una circonferenza di un segmento BC uguale al raggio. Per un punto generico P della tangente in B conduci l'altra tangente PD. Dimostra che $D\hat{P}C=3\,B\hat{P}C$.
21. In una circonferenza di centro O, considera il diametro AB e la corda AC. Traccia poi le tangenti in C e in B che si intersecano in D. Dimostra che OD è parallela ad AC.
22. Date due circonferenze tangenti esternamente, di centri C e C', considera la loro tangente comune *t* nel punto di contatto. Presa una delle altre due tangenti comuni alle due circonferenze, indica con A e B i rispettivi punti di contatto. Dimostra:
    a) che il quadrilatero ACC'B è un trapezio rettangolo;
    b) che la tangente *t* divide il segmento AB in due parti uguali.
23. Date due circonferenze concentriche, dimostra che tutte le corde della maggiore tangenti alla minore sono uguali e sono dimezzate dal punto di contatto.
24. Disegna due circonferenze tangenti internamente. Per il punto di contatto P conduci una secante che incontra le circonferenze nei punti A e B rispettivamente. Dimostra che le rette che congiungono i punti A e B con i centri delle circonferenze a cui appartengono sono parallele. Dimostra poi che le tangenti alle due circonferenze nei punti A e B sono parallele.
25. Le rette a e b sono tangenti ad una circonferenza di centro O, rispettivamente nei punti A e B. La retta c è tangente alla circonferenza in un generico punto C appartenente al minore degli archi di estremi A e B. Indica con P e Q le intersezioni tra la tangente c e le tangenti a e b rispettivamente. Dimostra che gli angoli $A\hat{C}B$ e $P\hat{O}Q$ sono supplementari.
26. Su una circonferenza prendi la corda AB e traccia la tangente nell'estremo A. Su tale tangente considera un punto C tale che AC=AB. La retta BC ha un'ulteriore intersezione con la

circonferenza in P. Dimostra che PC=PA.

27. Due circonferenze sono secanti nei punti A e B. Traccia i diametri AC e AD delle due circonferenze. Dimostra che i punti C, B, D sono allineati.
28. Le corde AB e AC di una circonferenza formano, da parti opposte, angoli uguali con il diametro AD. Dimostra che BC è perpendicolare ad AD.
29. Considera due circonferenze concentriche ed una loro secante comune *r*. Dimostra che i segmenti della retta *r* compresi tra le due circonferenze sotto angoli uguali.
30. Considera due circonferenze concentriche. Dimostra che le corde della circonferenza maggiore tangenti alla minore sono uguali.
31. Disegna due circonferenze tangenti esternamente in un punto T. Conduci per T una retta che tagli le circonferenze in altri due punti B e C. Dimostra che le tangenti alle circonferenze in B e in C sono parallele.
32. Disegna una circonferenza di centro O ed una sua corda AB. Nel semipiano di origine AB contenente O, conduci la semiretta tangente alla circonferenza in A, e su di essa prendi un punto C tale che AC=AB. Traccia il segmento BC che interseca la circonferenza in P. Dimostra che il triangolo APC è isoscele.

Poligoni inscritti e circoscritti ad una circonferenza.

33. Dimostra che ogni trapezio inscritto in una circonferenza è isoscele.
34. Dimostra che, se un parallelogrammo è inscritto in una circonferenza, allora è un rettangolo.
35. Dimostra che le diagonali condotte dal vertice di un angolo di un esagono regolare dividono l'angolo in quattro parti uguali.
36. Dimostra che, se un parallelogrammo è circoscritto ad una circonferenza, allora è un rombo.
37. Dimostra che il lato del triangolo equilatero inscritto in una circonferenza è uguale alla metà del lato del triangolo equilatero circoscritto alla stessa circonferenza.
38. Un trapezio è circoscritto ad una circonferenza. Dimostra che l'angolo avente il vertice nel centro della circonferenza ed i lati passanti per gli estremi di un lato obliquo è retto.
39. Nel triangolo acutangolo ABC, traccia le altezze AH e BK che si intersecano nel punto P. Dimostra che il quadrilatero CKPH è inscrivibile in una circonferenza.
40. Da un punto P, esterno ad una circonferenza di centro O, conduci le tangenti PA e PB. Dimostra che il quadrilatero PAOB è inscrivibile.
41. In una circonferenza di centro O, traccia un diametro AB. Prendi un punto generico C sulla circonferenza e determina la sua proiezione ortogonale P sul diametro AB. Indica con D l'intersezione della bisettrice dell'angolo $P\hat{C}O$ con la circonferenza. Dimostra che DO è

perpendicolare ad AB.

42. Dimostra che in un triangolo rettangolo la mediana relativa all'ipotenusa è metà dell'ipotenusa.
43. Dimostra che la circonferenza che ha come diametro un lato di un triangolo interseca gli altri due lati nei piedi delle altezze ad essi relative.
44. Una circonferenza è tangente ad entrambi i lati di un angolo. Dimostra che tutti i triangoli formati dai lati dell'angolo e da una tangente alla circonferenza che la lasci esterna hanno lo stesso perimetro.
45. Prendi due circonferenze tangenti internamente nel punto A. Per l'estremo B del diametro AB della maggiore conduci una tangente alla minore: indica con C il punto di contatto e con D l'altra intersezione con la maggiore. Dimostra che AC è la bisettrice dell'angolo $B\hat{A}D$.
    Chiama E l'intersezione tra il segmento AD e la circonferenza maggiore ed F l'estremo del diametro AF della circonferenza minore. Dimostra che le rette EF e DB sono parallele.
46. Prolunga il raggio OA di una circonferenza di un segmento AB uguale al raggio stesso. Dal punto B conduci le tangenti BP e BQ alla circonferenza. Dimostra che il quadrilatero OPAQ è un rombo con un angolo doppio dell'altro.
47. Traccia il diametro AB di una circonferenza di centro O. Da un punto C della circonferenza conduci la tangente che interseca in P la tangente condotta da B. Dimostra che le rette OP e AC sono parallele.
48. In una circonferenza traccia i diametri AB e CD. Dall'estremo C conduci la perpendicolare al diametro AB, che interseca in E la circonferenza. Dimostra che $DE \| AB$.
49. Dimostra che ogni quadrilatero intrecciato inscritto in una circonferenza ha gli angoli a due a due uguali.
50. Dimostra che, se l'esagono ABCDEF è circoscritto ad una circonferenza, si ha:
    AB+CD+EF=BC+DE+FA.
51. Dimostra che, se si unisce il centro della circonferenza circoscritta ad un triangolo con i suoi vertici, si formano tre angoli, rispettivamente doppi degli angoli del triangolo.
52. Dimostra che, in un esagono regolare, ogni diagonale che divide l'esagono in un triangolo e un pentagono è perpendicolare a due lati dell'esagono.
53. Dimostra che due vertici di un triangolo e i piedi delle altezze condotte da essi giacciono su una stessa circonferenza.
54. Dimostra che:

    a) l'ampiezza di ciascuno degli angoli interni di un poligono regolare è $\frac{n-2}{n}180°$;

    b) i soli poligoni regolari uguali che possono essere usati per ricoprire un piano (immagina di piastrellare una stanza) sono il triangolo, il quadrato e l'esagono.

Similitudine

55. Due triangoli simili ABC e A'B'C' hanno due lati corrispondenti che misurano AB = 20 cm e A'B' = 12 cm. Sapendo che 2p(ABC) = 60 cm, calcola il perimetro di A'B'C'. [36 cm]

56. Due triangoli simili ABC e A'B'C' hanno rapporto di similitudine $k=\frac{2}{3}$; determina l'area di A'B'C' sapendo che l'area di ABC misura 180 cm^2. [80 cm^2]

57. Due triangoli simili ABC e A'B'C' hanno due lati corrispondenti che misurano AB = 5 cm e A'B' = 7 cm, mentre l'area di ABC è 30 cm^2. Determina l'area di A'B'C'. [58.8 cm^2]

58. Due triangoli simili ABC e A'B'C' hanno aree che misurano rispettivamente 28 cm^2 e 63 cm^2. Calcola il rapporto di similitudine. [$k=\frac{3}{2}$]

59. Due triangoli simili ABC e A'B'C' hanno rapporto di similitudine $k=\frac{3}{5}$. Determina il perimetro di A'B'C' sapendo che il perimetro di ABC è 54 cm. [32.4 cm]

60. Due poligoni *P* e *P*' sono simili ed hanno aree che misurano 110.08 cm^2 e 172 cm^2 rispettivamente. Sapendo che il lato AB misura 8 cm, determina A'B'. [10 cm]

61. Due triangoli simili ABC e A'B'C' hanno AB = 40 cm e A'B' = 60 cm. Sapendo che l'altezza relativa ad A'B' misura C'H' =25 cm, determina l'altezza CH relativa ad AB. [$CH=\frac{50}{3}cm$]

62. Nel triangolo ABC, una retta parallela al lato AB interseca l'altezza CH nel suo punto medio M e i lati AC e BC nei punti P e Q. Determina:
   a) il rapporto di similitudine tra i triangoli PQC e ABC; $k=\frac{1}{2}$
   b) il rapporto tra le aree di tali triangoli; $k^2=\frac{1}{4}$
   c) il rapporto tra le aree del triangolo PQC e del trapezio ABPQ; $\frac{1}{3}$
   d) il perimetro del triangolo PQC, sapendo che quello del triangolo ABC è 18 cm. $9\,cm$

63. Una retta parallela al lato AB del triangolo ABC interseca l'altezza CH nel suo punto L tale che $LH=2\,CL$ e i lati AC e BC nei punti P e Q. Determina:
   a) il rapporto di similitudine tra i triangoli PQC e ABC;
   b) l'area del triangolo PQC, sapendo che quella del triangolo ABC è $60\,cm^2$;
   c) il rapporto tra le aree del trapezio ABPQ e del triangolo PQC.

64. Il punto G è il baricentro del triangolo ABC. Per G conduci una retta parallela al lato AB che interseca i lati AC e BC nei punti P e Q. Determina:
    a) il rapporto di similitudine tra i triangoli ABC e PQC;
    b) il rapporto tra le aree di tali triangoli;
    c) il rapporto tra le aree del trapezio ABPQ e del triangolo ABC.
65. Considera l'altezza CH del triangolo ABC. Per quale punto P di CH puoi condurre una retta parallela al lato AB in modo che il triangolo sia diviso in due parti equivalenti?

    $[CP=\frac{\sqrt{2}}{2}CH]$

66. La piantina di un appartamento è disegnata in scala $\frac{1}{200}$. Se l'area dell'appartamento misurata sulla piantina risulta di $42\,cm^2$, qual è l'area reale dell'appartamento? $[168\,m^2]$
67. Dato il triangolo equilatero ABC, traccia l'altezza BD e costruisci il triangolo equilatero BDE. Dimostra che $BE\perp AB$ e $CE\|AB$. Determina il rapporto di similitudine tra i triangoli equilateri BDE e ABC e il rapporto tra le loro aree. $k=\frac{\sqrt{3}}{2}\,;k^2=\frac{3}{4}$
68. Le diagonali di un trapezio lo dividono in quattro triangoli aventi lo stesso vertice. Dimostra che due di essi sono simili, e gli altri due sono *equivalenti* (cioè hanno la stessa area).
69. Dati due triangoli simili, dimostra che il rapporto tra le mediane corrispondenti e tra le bisettrici corrispondenti è uguale al rapporto di similitudine.
70. Dimostra che un quadrilatero inscritto in una circonferenza è diviso dalle diagonali in quattro triangoli a due a due simili tra loro.
71. Dimostra che in un triangolo le altezze sono inversamente proporzionali alle basi corrispondenti.
72. Dato un triangolo ABC, costruisci un triangolo PQR i cui lati siano rispettivamente paralleli ai lati di ABC. Dimostra che i sue triangoli sono simili. Quanto vale il rapporto di similitudine?
73. Dimostra che, se in un trapezio rettangolo la diagonale minore è perpendicolare al lato obliquo, allora essa divide il trapezio in due triangoli simili.
74. Data una circonferenza di diametro AB, traccia per un suo punto T la retta *t* ad essa tangente ed indica con H la proiezione ortogonale di A sulla *t*. Dimostra che i triangoli ABT e AHT sono simili.
75. Il triangolo ABC, isoscele sulla base AB, è inscritto in una circonferenza. Il diametro CD interseca la base del triangolo nel punto E. Dimostra che i triangoli AEC, ADE, ADC sono tutti simili tra loro.
76. Dato il triangolo ABC, rettangolo in C, considera il quadrato DEFG inscritto nel triangolo ed

avente il lato DE appartenente all'ipotenusa ed i vertici F e G sui cateti BC e AC rispettivamente. Dimostra che i triangoli ABC, ADG, EBF, GFC sono tutti simili tra loro.

77. Data la semicirconferenza di diametro AB, nel semipiano di origine AB che la contiene conduci la semiretta t ad essa tangente in B. Traccia la corda AP ed indica con Q il punto in cui il suo prolungamento incontra la tangente t. Dimostra che i triangoli APB, ABQ, BHP, PHQ, BPQ sono tutti simili.

78. Un punto P è interno al triangolo equilatero ABC. Dimostra che la somma delle distanze di P dai lati del triangolo è costante (non cambia al variare di P) ed è uguale all'altezza del triangolo. (Uguaglia l'area di ABC alla somma delle aree dei triangoli PAB, PBC, PAC)

79. Nel trapezio ABCD di basi AB e CD, i prolungamenti dei lati obliqui si intersecano in P. Dimostra che le distanze del punto P dalle basi sono proporzionali alle basi stesse.