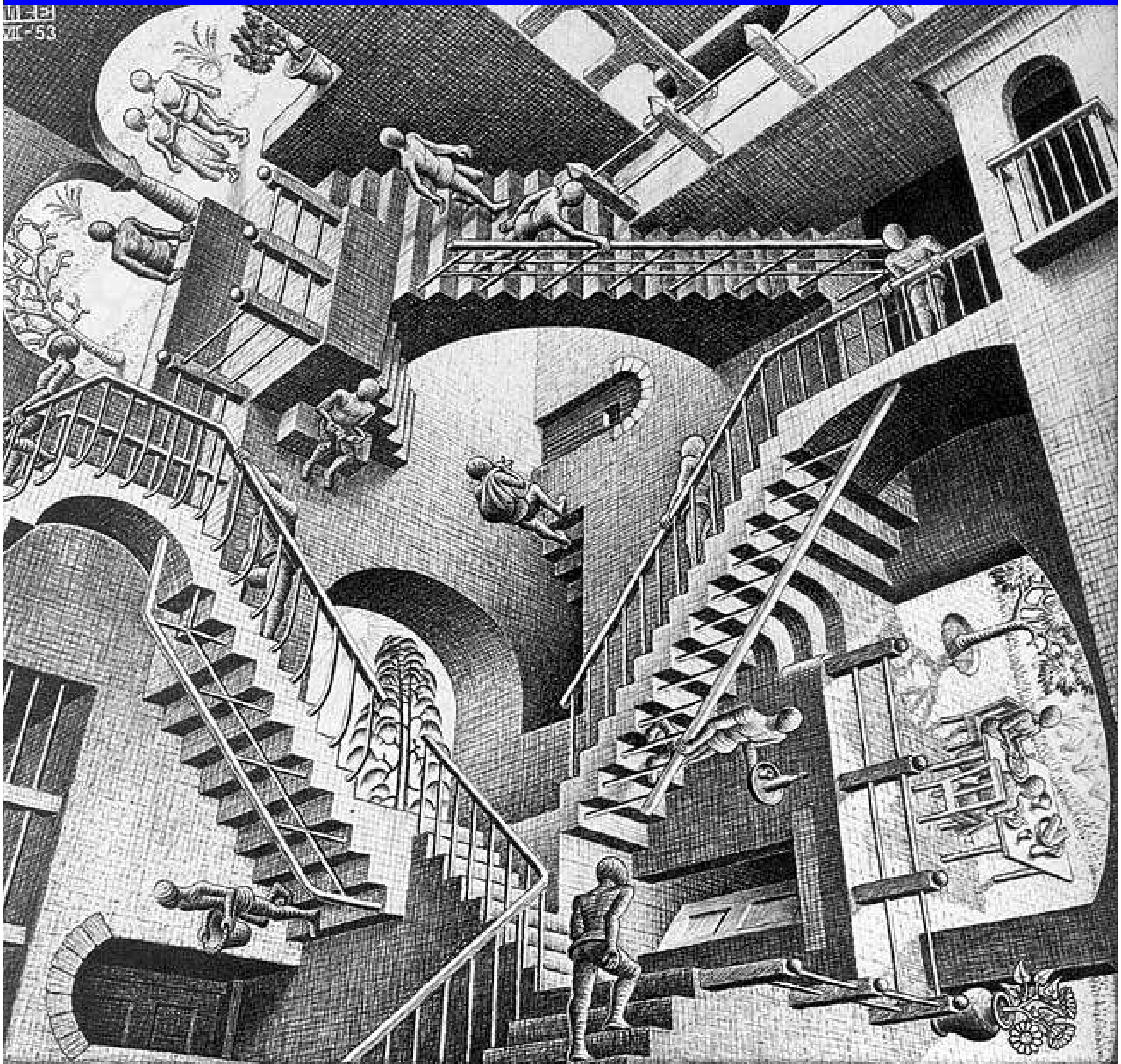
Relatività



Appunti

2020-21

Liceo Scientifico "G. Marconi"

Queste pagine contengono degli appunti sulla Teoria della Relatività da utilizzare in una classe quinta del Liceo Scientifico.
La mia intenzione originale era quella di basarmi sul ciclo di lezioni "*Insegnare relatività nel XXI secolo*", tenute dal prof. Elio Fabri (professore emerito presso l'Università di Pisa) alla Scuola Estiva A.I.F. nel 2000 e liberamente disponibili in rete, e di cercare di "tradurre" quel materiale didattico, originariamente rivolto a degli insegnanti di fisica, in una forma tale da poterlo presentare ai miei studenti.
Purtroppo, la necessità di rispettare le "*Indicazioni nazionali*" per l'insegnamento della Fisica nel Liceo Scientifico fornite dal Ministero dell'Istruzione mi ha costretto ad accettare dei forti compromessi rispetto all'idea di partenza.
Mi accorgo, quindi, di aver dovuto sacrificare buona parte delle idee più interessanti e valide del prof. Fabri, in particolare la presentazione unitaria della Relatività Speciale e di quella Generale e la scelta di un approccio fondato sulla geometria dello spazio-tempo, anziché di tipo "storico".
Di conseguenza, ho continuato, sia pure con una certa cautela, a descrivere l'esperimento di Michelson e Morley, a utilizzare le Trasformazioni di Lorentz, a parlare di "dilatazione dei tempi", "contrazione delle lunghezze", "equivalenza massa-energia" (ma, se non altro, ho praticamente eliminato il concetto di "massa relativistica").
Temo, quindi, che, se mai il prof. Fabri dovesse sfogliare queste pagine, non riconoscerebbe la propria impostazione, se non in alcuni "copia e incolla" slegati dal resto del discorso.
A scanso di equivoci, preciso comunque che questi appunti non contengono nessuna idea originale, e che mi sono limitato a riformulare e collegare concetti e ragionamenti dovuti ad altre persone.
In particolare, oltre alle lezioni citate in precedenza, sono debitore al prof. Fabri del prezioso materiale contenuto (e messo a disposizione di tutti) sul suo sito *www.sagredo.eu* (sulla didattica della fisica in generale e sull'insegnamento della fisica moderna in particolare).
Ho inoltre tratto diversi spunti da:

- gli interventi sempre chiari e precisi che l'utente "*Navigatore*" (ora purtroppo non più attivo) ha inserito sul forum di Fisica del sito *www.matematicamente.it* (in particolare la sua serie di post dal titolo "*RR for dummies*");
- le lezioni di Fisica Moderna del prof. Faetti dell'Università di Firenze;
- le "12 lezioni sulla Relatività" del prof. Magri;
- l'ipertesto "*Il treno di Einstein*" del prof. Boschetto;
- le slide su "La creazione della relatività speciale" del prof. Bettini, dell'Università di Padova;
- diversi articoli di Wikipedia;
- il blog *www.borborigmi.org*;

- numerose altre fonti, che, purtroppo, sarebbe complicato ricostruire.

Nei limiti delle mie capacità e del tempo a mia disposizione, cercherò di rivedere e completare questi appunti nei prossimi anni.

Ringrazio in anticipo chiunque vorrà segnalare errori e inesattezze, che saranno sicuramente presenti in abbondanza.

Seguendo l'esempio del prof. Fabri, per non appesantire il testo degli appunti con inutili ripetizioni, ho utilizzato in maniera abbastanza sistematica le seguenti abbreviazioni:

MM: Michelson e Morley

PAR: Principio di Azione e Reazione

PE: Principio di Equivalenza

PI: Principio di Inerzia

PR: Principio di Relatività

PRG: Principio di Relatività Galileiana

RG: Relatività Generale

RI: Riferimento Inerziale

RNI: Riferimento Non Inerziale

RR: Relatività Ristretta

RS: Relatività Speciale

TG: Trasformazioni di Galileo

TL: Trasformazioni di Lorentz

Ho inoltre usato i seguenti simboli per indicare approfondimenti o digressioni che possono essere omessi in prima lettura:

- riferimenti storici o filosofici;
- dimostrazioni matematiche;
- considerazioni didattiche;
- riferimenti ad argomenti di fisica non essenziali per seguire il discorso.

L'immagine in copertina è "*Relatività*" di Maurits Cornelis. Escher (1953).

Indice

1. Relatività galileiana

Sistemi di riferimento

Come abbiamo visto negli anni precedenti, il problema centrale della meccanica è quello di studiare il movimento dei corpi, ossia di determinare la loro posizione in funzione del tempo.

Da un punto di vista operativo, però, determinare la posizione di un corpo significa misurarne la distanza da altri corpi, oppure l'angolo compreso tra due rette incidenti. Quindi, la posizione di un oggetto può essere definita soltanto rispetto ad altri oggetti, presi come punti di riferimento, il che significa che quello di *posizione è un concetto relativo*.

Allo stesso modo, quando parliamo di movimento, quello che in realtà osserviamo è il cambiamento della posizione di un corpo relativamente ad altri corpi: non esiste un metodo di osservare direttamente il movimento. Pertanto, anche quello di *movimento è un concetto relativo*.

Di conseguenza, ogni fenomeno fisico viene studiato in un certo *sistema di riferimento* (o, brevemente, *riferimento*).

Per compiere delle misure di tempo, spostamento, velocità o per descrivere il moto di un corpo è necessario specificare il riferimento da cui lo stiamo osservando.

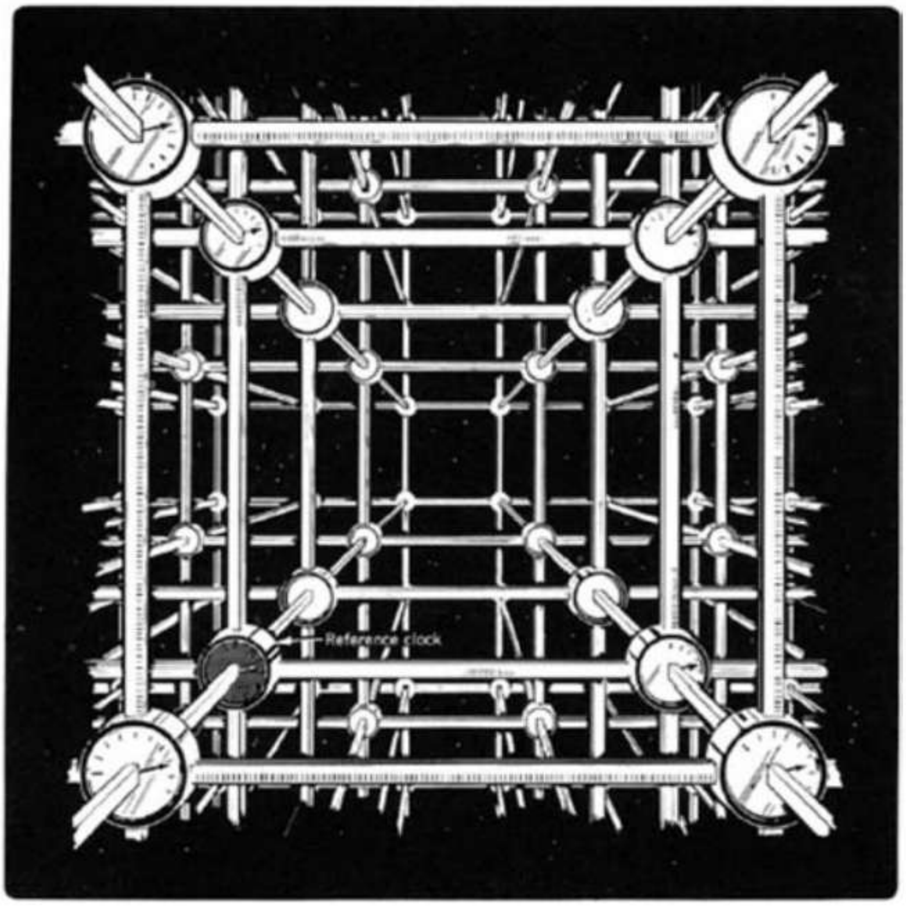
- Per essere concreti, è utile considerare un riferimento come un ambiente fisico, e non semplicemente un ente matematico. Ad esempio, possiamo associare un riferimento ad un laboratorio, o comunque ad un oggetto reale, un corpo rigido, concretamente definito e dotato di tutti gli strumenti (in particolare metri e orologi) necessari per eseguire le misure che ci interessa svolgere.
- Inoltre, non dobbiamo confondere un *sistema di riferimento* con un *sistema di coordinate* (ad esempio una terna di assi cartesiani ortogonali). Infatti, in uno stesso riferimento possiamo introdurre diversi sistemi di coordinate, traslati o ruotati l'uno rispetto all'altro, oppure scegliere coordinate polari anziché cartesiane, o ancora, utilizzando la notazione vettoriale, lavorare in modo indipendente dalle coordinate.

  Le coordinate sono quindi un utile strumento matematico per descrivere gli oggetti fisici, ma i punti dello spazio e le loro distanze sono enti più "primitivi", ovvero più legati ai dati dell'esperienza, rispetto alle coordinate.
- Parlando di riferimenti, sarebbe preferibile non utilizzare il termine "osservatore", per non introdurre un elemento di soggettività e non suggerire che ciò che si vede dipenda dal fatto che ci sia un essere umano che lo sta guardando.

  Le misure compiute in un determinato riferimento sono sempre eseguite da strumenti, e i risultati ottenuti non dipendono da chi li stia utilizzando. Ad esempio, una sonda spaziale costituisce un riferimento anche nel caso in cui sia priva di equipaggio ed il funzionamento degli strumenti di bordo sia completamente automatizzato.
- Non sono corrette affermazioni del genere "loggetto A si trova nel riferimento S", in quanto *tutti gli oggetti esistono in tutti i riferimenti.* I diversi riferimenti sono semplicemente modi differenti di assegnare delle coordinate o dei vettori ai singoli eventi. Possiamo utilizzare qualunque riferimento disponibile per descrivere una qualunque situazione, purché lo facciamo in maniera corretta. Alcuni riferimenti sono più adatti per una determinata analisi, ma questo non conferisce loro uno status particolare.
- Osserviamo infine che, in qualunque descrizione di un fenomeno, c'è sempre un riferimento, anche se non è stato definito in modo esplicito. Dato che viviamo sulla Terra, che ci appare solida e stabile, ci risulta naturale usare la

Terra come riferimento. Ad esempio, quando diciamo che un corpo è “fermo”, senza ulteriori precisazioni, intendiamo che esso si trova in quiete rispetto alla Terra.

Un sistema di riferimento può essere visualizzato come mostrato nella figura (tratta da “*Spacetime Physics*” di Taylor e Wheeler). Le aste rigide indicano l'unità di misura delle lunghezze, ed ad ogni vertice della griglia sono associate le sue coordinate spaziali ed il tempo indicato dall'orologio che si trova in quel punto. Inoltre, tutti gli orologi sono sincronizzati tra di loro (indicano la stessa ora).



Esistono infiniti riferimenti in cui è possibile osservare un determinato fenomeno fisico.

Esempi di riferimenti possono essere un'aula scolastica, un'automobile che si muove a velocità costante su una autostrada rettilinea, la stessa automobile in movimento su una strada di montagna, un ascensore (mentre accelera, si muove a velocità costante, rallenta, sale, scende...), un satellite in orbita, una stazione spaziale sulla Luna, una giostra in rotazione, e così via.

Tutti quelli elencati, e molti altri ancora, sono ambienti in cui si possono fare delle misure, e pertanto sono dei riferimenti “legittimi”.

I diversi riferimenti non sono però tutti equivalenti, e non sono tutti ugualmente semplici da utilizzare.

Per capire il senso di questa affermazione, puoi immaginare un moto piuttosto semplice (quello di un corpo che si muove in assenza di forze esterne, o di un sasso in caduta libera) e provare a descriverlo in ciascuno dei riferimenti che abbiamo elencato in precedenza.

Sembra naturale pensare che, tra tutti questi infiniti riferimenti non equivalenti, ne esista uno solo che sia “giusto” o “privilegiato”, nel quale potremmo decidere se un corpo è “veramente” in quiete o in moto.

Al contrario, uno degli obiettivi che ci poniamo è quello di mostrare che non esiste un unico riferimento “giusto” in senso assoluto.

Non si tratta però di una affermazione banale, e non potremo stabilire *a priori* se essa è vera o falsa; sarà solo l'esperienza che potrà dirci come stanno le cose.

Trasformazioni di Galileo

Chiediamoci cosa avviene quando studiamo lo stesso fenomeno o eseguiamo lo stesso esperimento in due riferimenti diversi.

Se misuriamo una certa grandezza fisica, in generale non dobbiamo aspettarci di ottenere lo stesso valore numerico in entrambi i riferimenti.
Questo potrà avvenire per certe particolari grandezze, come la massa o la carica elettrica, che chiameremo *invarianti*, ma non per altre (velocità, energia, quantità di moto...).

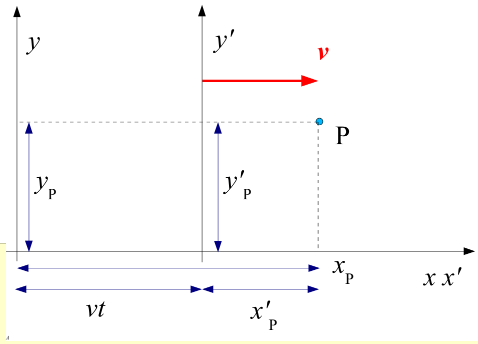
Se i valori misurati cambiano, è naturale chiedersi quale relazione esiste tra le misure compiute nei due riferimenti, e quindi cercare una *legge di trasformazione* che faccia corrispondere ai valori ottenuti in un riferimento quelli misurati nell'altro riferimento.

Chiediamoci in particolare come, nella meccanica newtoniana, cambia la descrizione del moto di un corpo compiuta in diversi riferimenti.

Ad esempio, se ci troviamo su un treno che si muove di moto rettilineo uniforme e lasciamo cadere un oggetto, lo vediamo cadere lungo la verticale. Una persona ferma sulla banchina della stazione, invece, vedrà l'oggetto descrivere una parabola. Ricordiamo quindi in che modo la traiettoria, la velocità e le altre caratteristiche del moto di un oggetto cambiano a seconda del riferimento scelto.

Per il momento ci limitiamo a considerare due riferimenti S ed S' che si muovono di *moto rettilineo uniforme* l'uno rispetto all'altro.
Supponiamo che in entrambi venga osservato uno stesso *evento* (ovvero un fenomeno che può essere localizzato in un dato punto dello spazio ed un dato istante di tempo).
In questo caso, le coordinate dell'evento misurate nei due riferimenti sono collegate tra loro dalle **Trasformazioni di Galileo** (TG).

Per esprimere le TG nella forma più semplice dal punto di vista matematico, scegliamo in ciascun riferimento un sistema di coordinate cartesiane ortogonali tali che all'istante $t=0$ le due terne di assi cartesiani coincidano e che il riferimento S' si muova con velocità costante v lungo la direzione comune degli assi x e x'.



In questo caso le TG assumono la forma:

$$\begin{cases} x'=x-vt \\ y'=y; \quad z'=z; \quad t'=t \end{cases}.$$

Commentiamo il contenuto di tali equazioni.

- Le coordinate nella direzione della velocità v (che prenderemo sempre come ascisse) differiscono di una quantità uguale allo spostamento relativo dei due riferimenti.
- Le coordinate trasversali alla direzione della velocità (y e z) assumono lo stesso valore in entrambi i riferimenti.

- Assumiamo che il tempo scorra con lo stesso "ritmo" in entrambi i riferimenti.

Precisiamo che non ci stiamo ponendo la domanda, filosoficamente molto impegnativa, di cosa sia il tempo, ma stiamo assumendo in maniera operativa che "il tempo è ciò che si misura con l'orologio".

L'orologio misura l'intervallo di tempo che intercorre tra due eventi contando il numero di volte in cui esso contiene un altro intervallo di tempo scelto come unità di misura, per esempio il periodo di oscillazione di un fenomeno ciclico, che assumiamo costante per definizione.

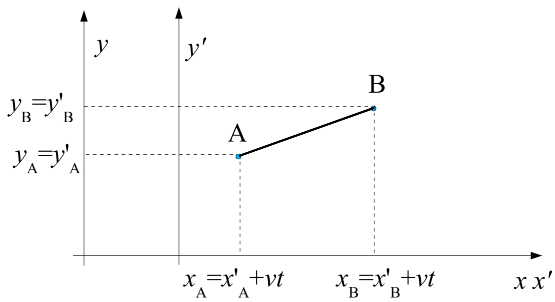
In questo senso, l'ultima proposizione appare ovvia, ed è una riformulazione nel linguaggio comune dell'idea di tempo espressa da Newton nei "*Principi matematici della filosofia naturale*" (1687): "Il **tempo assoluto**, vero, matematico, in sé e per sua natura senza relazione ad alcunché di esterno, scorre uniformemente".

Citiamo da "*12 lezioni sulla Relatività*" del prof. Magri: "L'assioma del tempo assoluto afferma il carattere invariantivo delle durate: gli intervalli temporali tra due eventi misurati da due diversi osservatori newtoniani in moto relativo coincidono sempre, indipendentemente dalla natura del moto relativo (questo vale, ad esempio, anche per moti non inerziali). In particolare, eventi simultanei in un riferimento sono simultanei in ogni altro riferimento: il concetto di simultaneità è dunque un concetto assoluto".

Vedremo, però, che i risultati sperimentali ci costringeranno ad abbandonare questa idea intuitiva.

Conseguenze delle TG

Cerchiamo di stabilire quali grandezze fisiche, in particolare nell'ambito della meccanica, sono invarianti rispetto alle TG, quali invece si trasformano, e in che modo vengono espresse tali trasformazioni.



- La *lunghezza* di un segmento, ovvero la *distanza* tra due punti presi *nello stesso istante di tempo*, è *invariante* per TG (assume lo stesso valore in entrambi i riferimenti).

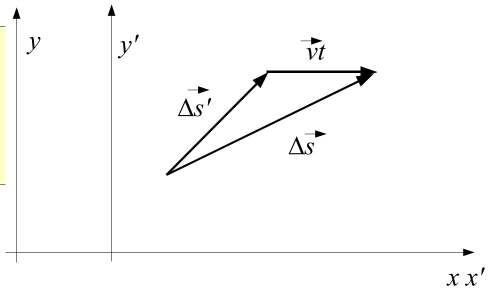
La lunghezza del segmento AB nel riferimento S è:

$$d=\sqrt{(x_B-x_A)^2+(y_B-y_A)^2} \quad .$$

La lunghezza dello stesso segmento in S' è: $d'=\sqrt{(x'_B-x'_A)^2+(y'_B-y'_A)^2} \quad .$

Ma dalle TG segue che: $\begin{cases} x'_B-x'_A=(x_B-vt)-(x_A-vt)=x_B-x_A \\ y'_B-y'_A=y_B-y_A \end{cases}$,

per cui anche $d'=d$ c.v.d.



- Lo *spostamento* di un corpo puntiforme in movimento, ovvero la *distanza* tra le posizioni occupate dal corpo *in due istanti differenti*, <u>non</u> è invariante per TG.

Infatti, per ottenere lo spostamento che il corpo compie nel riferimento S, dovremo aggiungere allo spostamento che il corpo compie in S' lo spostamento di S' rispetto ad S:

$$\boldsymbol{\Delta\vec{s}=\Delta\vec{s}'+\vec{v}\Delta t} \quad \text{, ovvero} \quad \boldsymbol{\Delta\vec{s}'=\Delta\vec{s}-\vec{v}\Delta t} \quad .$$

In termini più formali, possiamo scrivere le TG in due istanti t_1 e t_2: $\begin{cases} \vec{x}'_1=\vec{x}_1-\vec{v}t_1 \\ \vec{x}'_2=\vec{x}_2-\vec{v}t_2 \end{cases}$

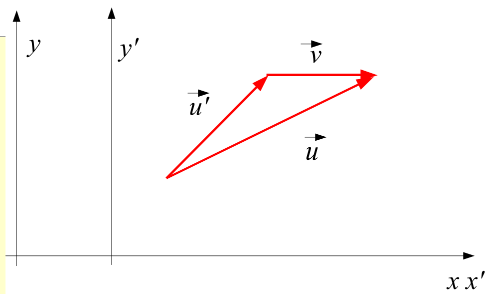
e sottrarre membro a membro le due equazioni ottenute:

$\vec{x}'_2-\vec{x}'_1=\vec{x}_2-\vec{x}_1-\vec{v}(t_2-t_1)$ c.v.d.

Molti libri di testo del secondo o del terzo anno assegnano un ruolo “privilegiato” al riferimento S, per cui enunciano nel modo seguente la trasformazione che abbiamo ricavato:

“Lo *spostamento assoluto* (quello nel riferimento S) è dato dalla somma vettoriale tra lo *spostamento relativo* (in S') e quello *di trascinamento* (di S' rispetto ad S)”, quindi: $\Delta\vec{s}_{ass}=\Delta\vec{s}_{rel}+\Delta\vec{s}_{tr}$.

Nel nostro contesto, però, è preferibile non utilizzare tali termini, in quanto non vogliamo dare l'idea che uno dei due riferimenti sia in qualche modo “migliore” dell'altro.



- La *velocità* di un corpo in movimento <u>non</u> è invariante per TG.

In particolare, la velocità $\vec{u}$ del corpo nel riferimento S si ottiene dalla velocità $\vec{u}'$ nel riferimento S' componendola (cioè eseguendo la somma vettoriale) con la velocità relativa di S' rispetto ad S: $\boldsymbol{\vec{u}=\vec{u}'+\vec{v}}$, ovvero: $\boldsymbol{\vec{u}'=\vec{u}-\vec{v}}$.

Per ricavare questa legge di composizione delle velocità, è sufficiente dividere per Δt la relazione sullo spostamento trovata in precedenza e passare al limite per $\Delta t\to 0$.

Come per lo spostamento, molti testi esprimono questa relazione affermando che:

“La velocità assoluta (ovvero quella nel riferimento S) è data dalla somma vettoriale tra la velocità relativa (in S') e quella di trascinamento (di S' rispetto ad S)”, quindi: $\vec{v}_{ass}=\vec{v}_{rel}+\vec{v}_{tr}$.

A questo punto, se volessimo trattare il caso generale di due riferimenti in moto vario l'uno rispetto all'altro, potremmo scrivere la legge di composizione delle velocità in due istanti di tempo generici:

$$\begin{cases} \vec{u}_1 = \vec{u}\,'_1 + \vec{v}_1 \\ \vec{u}_2 = \vec{u}\,'_2 + \vec{v}_2 \end{cases},$$

sottrarre membro a membro tali relazioni, dividere per Δt e passare al limite per $\Delta t \to 0$, ricavando un risultato del tipo: $\vec{a}_{ass} + \vec{a}_{rel} + \vec{a}_{tr}$ (con qualche distinguo sul significato dell'accelerazione di trascinamento).

- Noi, però, ci siamo posti in un caso particolare, ovvero quello di due *riferimenti che si muovono l'uno rispetto all'altro di moto rettilineo uniforme.*

  In questo caso, *l'accelerazione* del corpo in movimento è *invariante* rispetto alle TG: $\vec{a} = \vec{a}\,'$.

Infatti, dal momento che la velocità di S' è costante sia in modulo che in direzione, il ragionamento precedente ci porta a scrivere:

$$\begin{cases} \vec{u}_1 = \vec{u}\,'_1 + \vec{v} \\ \vec{u}_2 = \vec{u}\,'_2 + \vec{v} \end{cases}$$

dove $\vec{v}$ è la stessa nei due istanti considerati, da cui sottraendo membro a membro: $\vec{u}_2 - \vec{u}_1 = \vec{u}\,'_2 - \vec{u}\,'_1$.

Dividendo entrambi i membri per Δt e passando al limite per $\Delta t \to 0$, otteniamo il risultato precedente.

- La *massa* e la *forza* sono grandezze *invarianti* per TG.

Questa affermazione è differente da quelle che la precedono, in quanto non è una conseguenza matematica delle TG, ma un fatto sperimentale.

Stiamo affermando che, se eseguiamo delle misure di massa (ad esempio con una bilancia a due piatti) e delle misure di forza (ad esempio con un dinamometro) in due riferimenti diversi, che si muovono di moto rettilineo uniforme l'uno rispetto all'altro, i risultati ottenuti coincidono (entro la precisione dei nostri strumenti di misura).

Riferimenti Inerziali

Fino a questo punto abbiamo trattato tutti i riferimenti in maniera equivalente.

Come sai, però, esiste un criterio che abbiamo discusso begli anni precedenti e che ci permette di selezionare dei riferimenti "migliori" degli altri.

Il **Principio di Inerzia** (PI) o *primo principio della dinamica* è l'affermazione per cui "*un corpo non soggetto a forze si muove di moto rettilineo uniforme* (*o rimane in quiete, che è un caso particolare di moto rettilineo uniforme*)".

Il PI non è una legge universale, ma una affermazione la cui validità in un determinato riferimento deve essere verificata sperimentalmente.

In pratica, sappiamo che esistono dei riferimenti, come un laboratorio in quiete sulla superficie della Terra, in cui tale principio è verificato (con buona precisione) e degli altri, come un autobus che accelera, in cui esso risulta palesemente falso.

Osserviamo che, in apparenza, il primo principio sembra un caso particolare del secondo.

Infatti, applicando la legge $\vec{F}=m\vec{a}$ al caso particolare in cui in cui $\vec{F}=0$, ricaviamo che anche $\vec{a}=0$, e quindi il moto è rettilineo uniforme. In realtà, però, il secondo principio è valido solo in un riferimento in cui sia stato verificato il PI, e quindi dipende logicamente dal primo principio.

Ricordiamo poi che, nel caso di un laboratorio in quiete sulla superficie della Terra, in realtà sono presenti delle accelerazioni dovute al moto di rotazione (introno all'asse terrestre) e di rivoluzione (attorno al Sole). Nella maggior parte degli esperimenti, però, la prima e, a maggior ragione, la seconda delle due accelerazioni sono trascurabili. Nel seguito, quindi, supporremo, tranne diverso avviso, che il PI sia valido in un laboratorio come quello considerato.

Chiamiamo **Riferimento Inerziale** (RI) ogni *riferimento in cui risulta valido il principio di inerzia*, ovvero ogni riferimento in cui "*un corpo non soggetto a forze si muove di moto rettilineo uniforme o rimane in quiete*".

Diciamo invece che ci troviamo in un *Riferimento Non Inerziale* (RNI) se, dai risultati dei nostri esperimenti, risulta che in quel riferimento non sia valido il principio di inerzia.

In pratica, ci troviamo in un RNI se osserviamo dei corpi sui quali non agisce nessuna forza e che, nonostante questo fatto, subiscono delle accelerazioni (sono fermi e si mettono in movimento, oppure sono in movimento e accelerano, rallentano, cambiano la direzione del loro moto...).

A questo proposito potrebbe venirti in mente una questione molto delicata, che per il momento ci limitiamo ad accennare, ma sulla quale torneremo in seguito.

Il problema è: come si fa a sapere che su un corpo non agiscono forze? Naturalmente non possiamo rispondere: "lo vediamo dal fatto che esso rimane fermo o si muove di moto rettilineo uniforme", perché entreremmo in un circolo vizioso.

Detto in altri termini: se vediamo un corpo, sul quale apparentemente non agiscono forze, che subisce un'accelerazione, dobbiamo spiegare la nostra osservazione con il fatto che ci troviamo in un RNI, o dobbiamo supporre che su di esso agisca una forza di origine sconosciuta?

Senza pretendere di risolvere un problema così complesso, cerchiamo di indicare qualche criterio pratico.

- Le forze che conosciamo diminuiscono con la distanza, per cui il corpo che viene studiato andrebbe tenuto il più lontano possibile dagli altri corpi che possono agire su di esso.
- Nei casi in cui è possibile, potremmo "schermare" alcune forze. Ad esempio, mettendo il corpo in una gabbia di Faraday riusciremo ad eliminare le eventuali forze elettrostatiche che agiscono su di esso.
- Se abbiamo il sospetto che un corpo sia soggetto ad una forza, dovremmo anche riuscire ad identificare l'agente che l'ha prodotta, il quale, a sua volta, subirà una reazione uguale e contraria. Se, invece, non è possibile individuare la causa di una data accelerazione, è probabile che ci troviamo in un RNI.

Come abbiamo visto negli anni precedenti, l'esperienza ci mostra che in un RI non è verificato solo il primo principio della dinamica, ma sono validi anche il secondo e il terzo ($\vec{F}=m\vec{a}$ e "azione e reazione”).

Invece, in un RNI, oltre al primo principio, non sono validi né il secondo (a meno di non introdurre delle “forze apparenti”, delle quali non sappiamo individuare l'origine), né il terzo (in quanto tali “forze apparenti” non hanno una “reazione” uguale e contraria).

Ciò che caratterizza i RI tra tutti i possibili riferimenti è quindi il fatto che nei RI sono valide le leggi della meccanica newtoniana, il che li rende dei riferimenti “privilegiati” per la risoluzione dei problemi di meccanica.

Principio di Relatività Galileiana

Stabilito che i RI sono in un certo senso “migliori” degli altri, possiamo chiederci se è necessario, ogni volta che consideriamo un determinato riferimento, svolgere una serie di accurati esperimenti che ci permettano di stabilire se si tratta di un RI, o se invece è possibile determinare un criterio che ci permetta di “risparmiare” sul lavoro sperimentale.

Supponiamo quindi di avere due riferimenti, uno dei quali è sicuramente un RI (in quanto abbiamo verificato sperimentalmente la validità del PI in tale riferimento), mentre l'altro si muove di moto rettilineo uniforme rispetto al primo.

In questo caso, se misuriamo una determinata grandezza fisica nei due riferimenti, i valori ottenuti sono collegati dalle TG. In particolare, la forza, la massa e l'accelerazione, essendo grandezze invarianti per TG, assumeranno lo stesso valore in entrambi i sistemi.

Di conseguenza, se un fisico che si trova nel primo riferimento descrive una determinata situazione sperimentale applicando il secondo principio della dinamica $(\vec{F}=m\vec{a})$, anche un fisico che si trova nel secondo riferimento sarà d'accordo con tale analisi.

In definitiva, i principi della dinamica, la cui validità nel primo riferimento è un fatto sperimentale, sono validi anche nel secondo riferimento a causa dell'invarianza delle leggi della meccanica newtoniana rispetto alle TG.

Possiamo sintetizzare queste osservazioni nel **Principio di Relatività Galileiana** (PRG):
“*Nessun esperimento di tipo meccanico permette di distinguere due riferimenti in moto rettilineo uniforme l'uno rispetto all'altro”*
o, in forma più astratta: *“In tutti i RI valgono le stesse leggi della meccanica*”.

- Il prof. Fabri propone di enunciare il PRG in un modo semplice e operativo, che chiama “principio del taccuino”: se due fisici A e B svolgono esperimenti di meccanica in due diversi RI, e annotano i risultati degli esperimenti sui loro quaderni, non è possibile riconoscere A da B dalla sola lettura dei loro quaderni.

Infatti, tutti gli esperimenti (e i relativi risultati) che sono possibili per A lo sono anche per B; quindi, anche se A e B si scambiassero i quaderni, leggerebbero comunque i resoconti di esperimenti possibili nel proprio riferimento.

- Il principio viene associato al nome di Galileo perché egli fu il primo a enunciarlo in maniera esplicita nel "*Dialogo sopra i due Massimi Sistemi*" del 1632.

Nel seguente brano, egli spiega come non sia possibile realizzare un esperimento che permetta di stabilire se una nave si trovi in quiete o si muova di moto rettilineo uniforme rispetto alla Terra:

"Riserratevi con qualche amico nella maggiore stanza che sia sotto coverta di alcun gran navilio, e quivi fate d'aver mosche, farfalle e simili animaletti volanti; siavi anco un gran vaso d'acqua, e dentrovi de' pescetti; sospendasi anco in alto qualche secchiello, che a goccia a goccia vadia versando dell'acqua in un altro vaso di angusta bocca, che sia posto a basso: e stando ferma la nave, osservate diligentemente come quelli animaletti volanti con pari velocità vanno verso tutte le parti della stanza; i pesci si vedranno andar notando indifferentemente per tutti i versi; le stille cadenti entreranno tutte nel vaso sottoposto; e voi, gettando all'amico alcuna cosa, non piú gagliardamente la dovrete gettare verso quella parte che verso questa, quando le lontananze sieno eguali; e saltando voi, come si dice, a piè giunti, eguali spazii passerete verso tutte le parti. Osservate che avrete diligentemente tutte queste cose, benché niun dubbio ci sia che mentre il vassello sta fermo non debbano succeder cosí, fate muover la nave con quanta si voglia velocità; ché (pur che il moto sia uniforme e non fluttuante in qua e in là) voi non riconoscerete una minima mutazione in tutti li nominati effetti, né da alcuno di quelli potrete comprender se la nave cammina o pure sta ferma: voi saltando passerete nel tavolato i medesimi spazii che prima, né, perché la nave si muova velocissimamente, farete maggior salti verso la poppa che verso la prua, benché, nel tempo che voi state in aria, il tavolato sottopostovi scorra verso la parte contraria al vostro salto; e gettando alcuna cosa al compagno, non con piú forza bisognerà tirarla, per arrivarlo, se egli sarà verso la prua e voi verso poppa, che se voi fuste situati per l'opposito; le gocciole cadranno come prima nel vaso inferiore, senza caderne pur una verso poppa, benché, mentre la gocciola è per aria, la nave scorra molti palmi; i pesci nella lor acqua non con piú fatica noteranno verso la precedente che verso la sussequente parte del vaso, ma con pari agevolezza verranno al cibo posto su qualsivoglia luogo dell'orlo del vaso; e finalmente le farfalle e le mosche continueranno i lor voli indifferentemente verso tutte le parti, né mai accaderà che si riduchino verso la parete che riguarda la poppa, quasi che fussero stracche in tener dietro al veloce corso della nave, dalla quale per lungo tempo, trattenendosi per aria, saranno state separate; e se abbruciando alcuna lagrima d'incenso si farà un poco di fumo, vedrassi ascender in alto ed a guisa di nugoletta trattenervisi, e indifferentemente muoversi non piú verso questa che quella parte".

- Ricordiamo che la questione di cui si sta discutendo nel dialogo è la possibilità di decidere se la Terra si trovi in quiete o in moto, per cui il PRG, in questo brano, svolge la funzione di difendere il sistema copernicano.

Infatti, gli oppositori di Copernico e del sistema eliocentrico dicevano che, se davvero la Terra si muovesse, l'aria verrebbe trascinata via, gli uccelli non potrebbero volare (se non con grande difficoltà), un sasso lasciato cadere da una torre resterebbe indietro in maniera consistente.

Con l'esempio della nave, che chiunque poteva sperimentare, Galileo dimostra che questo non è vero: nella nave in moto rettilineo uniforme tutti i fenomeni avvengono come se essa fosse ferma. In maniera analoga (ma non esattamente equivalente, a causa della rotazione) noi, che stiamo sulla Terra, non possiamo accorgerci del suo moto.

Naturalmente, il ragionamento di Galileo non dimostra che la Terra si trova in moto, ma soltanto che le obiezioni dei suoi oppositori non sono conclusive.

Avrai notato che, nell'enunciato del PRG, ci siamo limitati a parlare di fenomeni meccanici e di leggi della meccanica, anche se nel brano di Galileo questa limitazione non compare.
In effetti, all'epoca di Galileo non esisteva la suddivisione della fisica in "capitoli" separati, per cui egli si limita a presentare tutti gli esperimenti concretamente possibili per un fisico dei suoi tempi.
Non possiamo sapere come si sarebbe espresso riguardo a fenomeni ottici o elettromagnetici.
Anticipiamo comunque che la limitazione del principio alle leggi della meccanica non è essenziale.
Uno dei nostri obiettivi è quello di chiarire che il PR è valido per qualunque esperimento, sia esso meccanico, ottico, elettromagnetico o di altro genere.
Tra poco, potremo quindi affermare che: *"In tutti i RI valgono le stesse leggi della fisica*".

2. Il Principio di Relatività e l'elettromagnetismo

Equazioni di Maxwell e velocità della luce

Come abbiamo accennato, l'enunciato del PRG ha superato tutte le possibili verifiche sperimentali, non soltanto in ambito meccanico, ma anche ottico, elettromagnetico, e di qualunque altro genere.

Il nostro obiettivo è quindi affermare che:

"*Nessun esperimento, di qualunque genere, permette di distinguere due riferimenti in moto rettilineo uniforme l'uno rispetto all'altro*".

Ripercorriamo parte del percorso che ha condotto i fisici a questa affermazione.

Come sappiamo, l'elettromagnetismo classico è descritto dalle cosiddette *equazioni di Maxwell*, che compaiono per la prima volta in forma completa nel testo "*A Dynamical Theory of the Electromagnetic Field*" (1865), e vengono applicate da Maxwell in maniera estensiva nel "*Treatise on electricity and magnetism*" (1873).

Gran parte del contenuto di tali equazioni, come il teorema di Gauss o la legge di Faraday, era in realtà già noto dalle esperienze precedenti.

Maxwell, però, oltre a sintetizzare i risultati sperimentali dei suoi predecessori, introdusse nel teorema di Ampère un termine aggiuntivo, la cosiddetta *corrente di spostamento,* che gli consentì di affermare che un campo elettrico variabile poteva generare un campo magnetico.

Poiché era già noto dalla legge di Faraday-Neumann che anche un campo magnetico variabile generava un campo elettrico, l'insieme di queste due leggi portò Maxwell a *prevedere l'esistenza delle onde elettromagnetiche* e a calcolarne la velocità.

In particolare, la *velocità delle onde elettromagnetiche nel vuoto* (che oggi indichiamo con *c*, dal latino *celeritas*) risultava essere $c = 1/\sqrt{\epsilon_0 \mu_0} \simeq 3{,}0 \cdot 10^8 \, m/s$.

Tra il 1886 e il 1889 Hertz dimostrò sperimentalmente l'esistenza di tali onde, e nel 1895 Marconi riuscì ad utilizzarle per la trasmissione delle informazioni a distanza.

A quel punto, la previsione di Maxwell poteva considerarsi definitivamente consolidata.

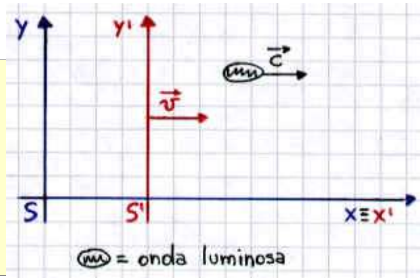
Se le equazioni di Maxwell ci permettono di calcolare la velocità delle onde elettromagnetiche nel vuoto, risulta naturale chiederci: *rispetto a quale riferimento è misurata questa velocità*?

Le risposte logicamente possibili sono due:

i. le onde elettromagnetiche si muovono con velocità diverse nei diversi riferimenti, come previsto dalle TG;

ii. la velocità delle onde elettromagnetiche nel vuoto è la stessa, ovvero *c*, in qualunque riferimento.

Entrambe le risposte, però, pongono dei gravi problemi.



i. Nel primo caso, dovrà esistere un riferimento privilegiato nel quale le onde elettromagnetiche viaggiano con la velocità c prevista dalle equazioni di Maxwell, mentre in tutti gli altri riferimenti la loro velocità risulterà diversa.

Infatti, se la velocità delle onde elettromagnetiche è c in un certo riferimento, per le TG ci aspettiamo che la loro velocità in un riferimento che si muove rispetto al primo con velocità v (che, per semplicità, prendiamo nella stessa direzione di quella in cui si propaga la luce) sia $c+v$ o $c-v$.

Se è così, però, i fenomeni elettromagnetici, a differenza di quelli meccanici, non rispettano il PR, per cui le leggi della fisica dipendono dal riferimento in cui ci troviamo, almeno per quanto riguarda l'elettromagnetismo.

Infatti, un fisico potrebbe misurare la velocità delle onde elettromagnetiche nel proprio riferimento e, dal risultato ottenuto, capire se si trova nel riferimento privilegiato (l'unico in cui sono rigorosamente valide le equazioni di Maxwell) o meno.

ii. Nel secondo caso, la velocità delle onde elettromagnetiche è sempre la stessa e il PR è verificato, in quanto la misura di tale velocità non ci permette di distinguere un riferimento dall'altro.

In questo caso, però, non sarebbe più valida l'applicazione delle TG citata in precedenza, secondo la quale la velocità delle onde elettromagnetiche si dovrebbe comporre con quella del riferimento, risultando $c+v$ o $c-v$.

Dovremmo quindi affermare che per l'elettromagnetismo non sono più valide le TG, e ci troveremmo nella strana situazione per cui in un ramo della fisica (la meccanica) sono valide certe leggi di trasformazione (le TG), mentre in un altro ramo (l'elettromagnetismo) sono valide delle trasformazioni diverse, che devono ancora essere ricavate.

- Un ragionamento analogo può essere svolto, in maniera lievemente più elaborata, per la forza di Lorentz $\vec{F}_L = q\vec{v}\times\vec{B}$ che agisce su una carica in movimento in un campo magnetico, e che, dipendendo dalla velocità, varia con il RI scelto.

Siamo quindi di fronte ad un bivio: o per l'elettromagnetismo non vale il PR, oppure non vale la legge galileiana di composizione delle velocità.

La scelta fra queste due alternative non può essere compiuta a priori, per motivi puramente logici, ma deve fondarsi sui dati empirici.

La maggior parte dei fisici dell'epoca scelse la prima alternativa e cercò di verificarla sperimentalmente (il che non è per niente semplice, come potrebbe apparire a prima vista).

Einstein, invece, scelse la seconda opzione e ne accettò fino in fondo le conseguenze apparentemente paradossali.

Etere

Cerchiamo di capire perché la comunità scientifica di fine '800 era propensa a sacrificare il PR nell'ambito dell'elettromagnetismo.

Verso il 1678 Huygens aveva proposto una *teoria ondulatoria della luce* (pubblicata nel 1690 nel "*Traité de la lumière*"), secondo la quale la luce era considerata una oscillazione delle particelle di un ipotetico mezzo chiamato *etere*, che avrebbe dovuto pervadere tutto l'universo.

In realtà, quello di etere è un concetto molto più antico.

Nella filosofia greca, Aristotele fu il primo a postulare, nel "*De Caelo*", l'esistenza di un quinto elemento, o quintessenza (l'etere), che compone la materia siderale, in aggiunta ai quattro elementi introdotti da Empedocle (terra, acqua, aria, fuoco). Secondo Aristotele, l'etere sarebbe ingenerato, incorruttibile, non soggetto ad accrescimento e ad alterazione, né ad altre affezioni che implichino mutamenti; quindi anche i cieli sarebbero incorruttibili, in quanto costituiti di etere.

All'inizio del diciassettesimo secolo, Cartesio affermava l'impossibilità di una azione a distanza tra i sistemi fisici, e sosteneva che ogni azione di un corpo su un altro dovesse avvenire per contatto. Di conseguenza, lo spazio per Cartesio era pervaso di una "materia sottile" (ancora l'etere), il cui movimento rotatorio intorno al Sole sarebbe stata la causa dei moti dei pianeti ("teoria dei vortici").

Anche Newton, sebbene avesse enunciato la sua legge di gravitazione universale sotto forma di "azione a distanza", sosteneva che "è inconcepibile che l'inanimata, bruta materia, senza la mediazione di qualcos'altro che non sia materiale, operi ed influisca su un'altra materia senza reciproco contatto", per cui è probabile che fosse propenso, pur non esprimendolo esplicitamente, ad accettare l'ipotesi di un etere conduttore e mediatore delle interazioni gravitazionali.

La teoria ondulatoria di Huygens sulla natura della luce, messa in ombra per lungo tempo da quella corpuscolare di Newton, cominciò ad essere accettata a partire dai primi anni dell'Ottocento, soprattutto grazie ai lavori di Young e di Fresnel sui fenomeni di *interferenza e diffrazione della luce*, che venivano spiegati in maniera più semplice e naturale da un modello ondulatorio che da uno corpuscolare.

Si era quindi portati a concludere, con Fresnel: "Se la luce è onda, deve pur esserci qualcosa che oscilla e quindi negli spazi interstellari c'è l'etere".

Sempre nel corso dell'Ottocento, anche grazie al lavoro di Faraday (esposto in particolare nel suo articolo "*A speculation touching Electric Conduction and the Nature of Matter*" del 1844), venne gradualmente superato il modello meccanicista, nel quale le forze erano dovute ad una *azione a distanza* che agiva tra due corpi in maniera istantanea, e si cominciò ad introdurre il concetto di

campo, per il quale, quando due corpi interagiscono, lo spazio è modificato dalla presenza di un corpo, ed è questo suo "cambiamento" che agisce sull'altro corpo sotto forma di forza.
Proseguendo l'opera di Faraday, anche Maxwell utilizzò il concetto di campo, e sostenne che l'etere fosse il mezzo nel quale si propagavano i campi elettromagnetici.

A proposito delle precedenti ipotesi sull'etere, Maxwell scriveva:
"Gli eteri furono inventati per far sì che i pianeti potessero nuotarci dentro, per costituire atmosfere elettriche ed effluvi magnetici, per convogliare le sensazioni da una parte all'altra del nostro corpo e così via, finché tutto lo spazio era stato riempito tre o quattro volte di eteri vari. (...) L'unico vero etere sopravvissuto è quello ideato da Huygens per rendere conto della propagazione della luce. (...) Le proprietà di questo mezzo sono precisamente quelle richieste dalla spiegazione dei fenomeni elettromagnetici".
E nel 1878: "Non vi può essere alcun dubbio che gli spazi interplanetari e interstellari non siano vuoti, ma occupati da una sostanza o corpo materiale che è certamente il più vasto e probabilmente il più uniforme di cui abbiamo una qualche conoscenza".
In particolare, per Maxwell la caratteristica principale dell'etere (di cui aveva in precedenza cercato di elaborare dei modelli meccanici) era quella di essere sede di un'energia. A questo proposito, Maxwell scriveva: "Nelle antiche teorie l'energia risiede nei corpi elettrificati, nei circuiti conduttori e nelle calamite sotto la forma di una qualità sconosciuta o potere di produrre effetti a distanza. Nella nostra teoria, l'energia risiede nel campo elettromagnetico, nello spazio circondante i corpi elettrici e magnetici, e egualmente in questi corpi stessi. (…) Ogni volta che dell'energia è trasmessa da un corpo all'altro nel corso del tempo, deve esserci un mezzo o una sostanza in cui l'energia esiste dopo aver lasciato il primo corpo e prima di aver raggiunto il secondo".
Ancora nel 1904, l'inventore della tavola periodica, Mendeleev, pubblicò un libretto dal titolo "*Una concezione chimica dell'etere*", in cui immaginava che all'etere dovesse essere assegnato nella tavola periodica un posto precedente a quello dell'idrogeno.

Da questo punto di vista, risultava naturale accettare l'idea che esistesse un *riferimento privilegiato*, ovvero quello che si trova in *quiete rispetto all'etere*, e quindi rinunciare al PR nell'ambito dei fenomeni elettromagnetici.

Infatti, in questa concezione i RI non sono più tutti equivalenti tra loro, ma solo quelli che si trovano in quiete rispetto all'etere verificano la proprietà per cui la luce si propaga nel vuoto con velocità c, e quindi solo in essi sono valide le equazioni di Maxwell.

Osserviamo, però, che, per spiegare le evidenze sperimentali relative alla propagazione della luce, l'etere doveva essere dotato di proprietà che apparivano contraddittorie.

- Il fatto che le *onde luminose* fossero *onde trasversali* richiedeva che l'etere fosse solido, dal momento che nei liquidi e nei gas si propagano solo onde longitudinali.
- L'etere doveva però essere capace di compenetrare tutti i corpi e di riempire tutto lo spazio,

indipendentemente dalla presenza in esso di materia ordinaria, e quindi avere una *densità estremamente bassa*, dato che non ci accorgiamo della sua esistenza (in particolare, i pianeti e gli altri corpi celesti non appaiono "frenati" dalla presunta presenza dell'etere).

- D'altra parte, la velocità di propagazione delle onde aumenta con la rigidità del mezzo nel quale esse si propagano. Di conseguenza, per permettere alla luce di propagarsi a velocità estremamente elevata, esso doveva essere dotato di *elevatissima rigidità*.

- Una questione molto più delicata era se l'etere venisse "trascinato" o meno dai corpi di grande massa che si muovevano attraverso di esso. Anche a questo proposito non si avevano indicazioni sperimentali chiare.

La scoperta dell'*aberrazione stellare* dovuta a Bradley nel 1728 (ovvero il fatto che, a causa del moto di rivoluzione della Terra intorno al Sole, tutte le stelle in un anno sembrano descrivere un'ellisse il cui semiasse maggiore ha la stessa ampiezza angolare di circa 20''), sembrava escludere che l'etere fosse trascinato dalla Terra.

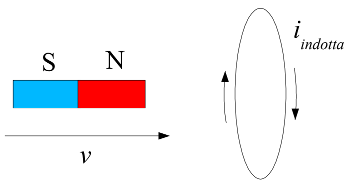
Viceversa, l'esperimento di Fizeau (1859), che misurava la velocità della luce in un mezzo (acqua) in moto rispetto al laboratorio, faceva pensare che l'acqua trascinasse parzialmente l'etere.

La scelta di Einstein

Vediamo perché, invece, Einstein scelse di assumere la validità del PR anche per i fenomeni elettromagnetici e di sacrificare l'idea di un riferimento privilegiato.

Egli non fu condotto a questa decisione da prevalenti motivi sperimentali, ma dalle sue riflessioni sulle equazioni di Maxwell. Infatti, l'articolo del 1905 in cui espose la teoria della Relatività Speciale è intitolato "*Sull'elettrodinamica dei corpi in movimento*".

Einstein riprende l'esperimento di Faraday in cui si osserva una corrente indotta sia quando un magnete si muove rispetto ad un solenoide che quando viene messo in moto il solenoide.



i. Quando si muove il magnete, la variazione del campo magnetico genera un campo elettrico indotto, che a sua volta produce la corrente elettrica.

ii. Quando si muove il solenoide, però, non c'è alcuna variazione del campo magnetico, e per spiegare la corrente che si produce nella bobina dobbiamo ricorrere alla forza di Lorentz che agisce sugli elettroni.

In entrambi i casi, però, abbiamo una variazione del flusso concatenato con il solenoide, e tale variazione dipende soltanto dal moto <u>relativo</u> dei due corpi, il che non sembra essere in accordo con l'esistenza di un riferimento privilegiato.

- Riportiamo la prima parte dell'articolo di Einstein.

"E' noto che l'elettrodinamica di Maxwell - come la si interpreta attualmente - nella sua applicazione ai corpi in movimento porta a delle asimmetrie, che non paiono essere inerenti ai fenomeni.

Si pensi per esempio all'interazione elettromagnetica tra un magnete e un conduttore. I fenomeni osservabili in questo

caso dipendono soltanto dal moto relativo del conduttore e del magnete, mentre secondo l'interpretazione consueta i due casi, a seconda che l'uno o l'altro di questi corpi sia quello in moto, vanno tenuti rigorosamente distinti.
Se infatti il magnete è in moto e il conduttore è a riposo, nei dintorni del magnete esiste un campo elettrico con un certo valore dell'energia, che genera una corrente nei posti dove si trovano parti del conduttore. Ma se il magnete è in quiete e si muove il conduttore, nei dintorni del magnete non esiste alcun campo elettrico, e si ha invece nel conduttore una forza elettromotrice, alla quale non corrisponde nessuna energia, ma che - a parità di moto relativo nei due casi considerati - dà luogo a correnti elettriche della stessa intensità e dello stesso andamento di quelle alle quali dà luogo nel primo caso la forza elettrica.
Esempi di tipo analogo, come pure i tentativi andati a vuoto di constatare un moto della Terra relativamente al "mezzo luminoso", portano alla supposizione che il concetto di quiete assoluta non solo in meccanica, ma anche in elettrodinamica non corrisponda ad alcuna proprietà dell'esperienza, e che inoltre per tutti i sistemi di coordinate per i quali valgono le equazioni meccaniche debbano valere anche le stesse leggi elettrodinamiche e ottiche.
Assumeremo questa congettura (il contenuto della quale nel seguito sarà chiamato "principio di relatività") come postulato. (...)
L'introduzione di un "etere luminoso" si dimostra fin qui come superflua, in quanto secondo l'interpretazione sviluppata non si introduce uno "spazio assoluto in quiete" dotato di proprietà speciali, né si associa un vettore velocità ad un punto dello spazio vuoto nel quale abbiano luogo processi elettromagnetici".
Riportiamo anche il commento del fisico austriaco Hermann Bondi, nella sua opera "*La relatività e il senso comune*".
"L'etere serviva a uno scopo, e a uno solo: rendere conto della propagazione della luce, essere per la luce ciò che l'aria è per il suono. Ma l'aria può venir pesata, può venir messa in moto, può venir pompata fuori di un recipiente o può venir messa sotto pressione in esso; nulla di tutto ciò può essere fatto con questo ipotetico etere. [...]
Quindi l'etere non ha che una proprietà: ci aiuta a costruire una analogia tra propagazione della luce e propagazione del suono; ma, considerando la dinamica newtoniana, è immediato vedere che si tratta di una falsa analogia".

- Segnaliamo per completezza che Einstein, in seguito, tornò parzialmente sui propri passi e riconobbe di avere con la sua teoria sostituito l'antico concetto di etere con una nuova concezione dello spazio, pur sempre dotato di sue specifiche proprietà fisiche.

In una lettera a Lorentz del 1919, egli afferma: "Sarebbe stato più corretto se nelle mie prime pubblicazioni mi fossi limitato a sottolineare l'impossibilità di misurare la velocità dell'etere, invece di sostenere soprattutto la sua non esistenza. Ora comprendo che con la parola etere non si intende nient'altro che la necessità di rappresentare lo spazio come portatore di proprietà fisiche".
E in un articolo sulla relatività, sostiene che negare l'etere condurrebbe a "supporre che lo spazio vuoto non possieda alcuna proprietà fisica, il che è in disaccordo con le esperienze fondamentali della meccanica. [...] Anche se nel 1905 pensavo che in fisica non si potesse assolutamente parlare di etere, questo giudizio era troppo radicale, come possiamo vedere con le prossime considerazioni della relatività generale. È quindi permesso assumere un mezzo colmante nello spazio se ci si riferisce al campo elettromagnetico e quindi anche alla materia. Non è permesso tuttavia attribuire a questo mezzo uno stato di movimento in ogni punto in analogia con la materia ponderabile. Questo etere non può essere concepito come consistente di particelle".

E' evidente che l'argomento di Einstein è più di carattere estetico che logico in senso stretto, per cui, fino a questo punto, non è risolutivo.

Di conseguenza, per risolvere l'alternativa tra l'esistenza di un riferimento privilegiato e l'estensione del PR all'elettromagnetismo, non sono sufficienti delle argomentazioni logiche, ma sono necessarie delle verifiche sperimentali.

3. L'esperimento di Michelson e Morley

In genere, i libri di testo identificano la verifica sperimentale da noi cercata con l'esperimento di Michelson e Morley (MM), eseguito nel 1881 e poi nel 1887, che avrebbe svolto il ruolo di *esperimento cruciale* riguardo l'esistenza di un riferimento privilegiato, ed al quale si sarebbe riferito Einstein nel brano citato in precedenza parlando dei "tentativi andati a vuoto di constatare un moto della terra relativamente al mezzo luminoso".

Lo stesso esito ebbe anche l'esperimento di Trouton e Noble (1901-03), che però risulta ancora più complesso da analizzare e interpretare rispetto a quello di MM.

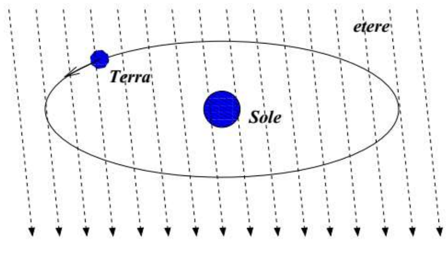
- Pur condividendo tutte le perplessità del prof. Fabri a questo proposito, non mi sento di escludere completamente questo argomento dall'esposizione didattica, e ne propongo una versione molto semplificata.

In sintesi, le obiezioni del prof. Fabri sono le seguenti.

- E' preferibile esporre un argomento nella maniera didatticamente più efficace, anziché cercare di ricostruirne il percorso storico, per di più spesso inesatto.
- In particolare, l'esperimento di MM richiede di conoscere molte parti della fisica (interferenza delle onde, ipotesi sulla natura della luce...) non necessarie per comprenderne il significato.
- Si tratta di un esperimento molto delicato, sia nella realizzazione pratica che nell'interpretazione teorica, che non può essere realmente compreso tramite una lezione frontale, senza una seria pratica sperimentale.
- Nell'articolo di Einstein del 1905, l'esperimento di MM non viene citato esplicitamente. Anche in seguito, Einstein ha affermato che a quel tempo non lo conosceva, o comunque non l'aveva considerato decisivo.

L'idea di fondo che spinse MM a realizzare il loro esperimento era che esistesse un etere che riempie di sé tutto lo spazio e nel quale si propagano i campi elettromagnetici, costituendo così un riferimento privilegiato.

In questo caso, è molto improbabile che la Terra si trovi, per una curiosa combinazione, in quiete rispetto a tale riferimento e, comunque, il moto di rivoluzione della Terra attorno al Sole farebbe in modo che questa quiete fosse solo momentanea.



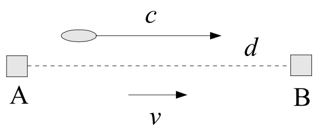
Risulta quindi interessante misurare la velocità della Terra rispetto all'etere, che secondo tale concezione verrebbe ad essere una velocità "assoluta".

In realtà, i fisici del tempo si ponevano la stessa domanda in forma diversa, ponendosi in un riferimento solidale con la Terra e chiedendosi quale sarebbe stata la velocità del "*vento d'etere*" che la Terra avrebbe incontrato nel suo moto rispetto all'etere stesso.

Esempio semplificato

Per comprendere l'idea di fondo dell'esperimento, riprendiamo un problema del terzo anno.

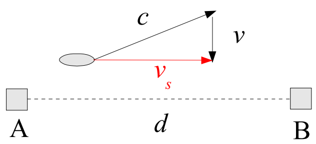
Un aereo si muove con velocità c (rispetto all'aria) lungo un percorso di andata e ritorno tra due località A e B poste ad una distanza d.



- Calcoliamo il tempo t_1 impiegato dall'aereo nel caso in cui sia presente un vento che soffia a velocità v da A verso B.

  Per le TG, la velocità dell'aereo rispetto al suolo è $c+v$ all'andata e $c-v$ al ritorno; quindi:

  $$t_1=\frac{d}{c+v}+\frac{d}{c-v}=\frac{2dc}{c^2-v^2}=\frac{2d}{c}\frac{1}{1-v^2/c^2} \quad .$$



- Calcoliamo ora il tempo t_2 impiegato dall'aereo nel caso in cui il vento abbia direzione perpendicolare alla retta AB.

  Per il teorema di Pitagora, la velocità dell'aereo rispetto al suolo v_s sarà $\sqrt{c^2-v^2}$ sia all'andata che al ritorno, quindi:

  $$t_2=\frac{2d}{\sqrt{c^2-v^2}}=\frac{2d}{c}\frac{1}{\sqrt{1-v^2/c^2}} \quad .$$

Vediamo che i tempi t_1 e t_2 impiegati dall'aereo a compiere il percorso nei due casi sono differenti; di conseguenza, se gli aerei sono partiti nello stesso istante e se siamo in grado di misurare la differenza tra i loro tempi di arrivo, possiamo calcolare la velocità v del vento.

■ Per ottenere una formula più semplice per la velocità v del vento rispetto al suolo, supponiamo che essa sia molto minore della velocità dell'aereo rispetto all'aria: $v \ll c$, per cui la presenza del vento, qualunque sia la sua direzione, porta solo una "piccola" correzione al tempo di percorrenza.

In questo caso, possiamo considerare le quantità t_1 e t_2 come delle funzioni della variabile $\beta=v/c$ che, avendo posto $v \ll c$, risulta $\beta \ll 1$.

Utilizziamo l'approssimazione $(1+x)^\alpha \simeq 1+\alpha x$ per $x \ll 1$ (di cui puoi verificare la validità con una calcolatrice).

Formalmente, essa viene detta sviluppo al primo ordine in serie di Taylor, e, in termini geometrici, equivale ad approssimare in un intorno di $x_0=0$ il grafico della funzione $y=(1+x)^\alpha$ con la retta tangente a tale grafico nel punto di coordinate $(0,1)$.

In particolare, nel calcolo di t_1 e t_2 la formula enunciata fornisce i risultati:

$$\frac{1}{1-v^2/c^2}=\frac{1}{1-\beta^2}=(1-\beta^2)^{-1}\simeq 1+\beta^2 \quad ; \quad \frac{1}{\sqrt{1-v^2/c^2}}=(1-\beta^2)^{-1/2}\simeq 1+\frac{1}{2}\beta^2 \quad .$$

Considerando $\beta=v/c$ e reinserendo i coefficienti, abbiamo quindi:

$$t_1=\frac{2d}{c}\frac{1}{1-v^2/c^2}=\frac{2d}{c}\left(1-\frac{v^2}{c^2}\right)^{-1}\simeq\frac{2d}{c}\left(1+\frac{v^2}{c^2}\right) \quad ;$$

$$t_2 = \frac{2d}{c}\frac{1}{\sqrt{1-v^2/c^2}} = \frac{2d}{c}\left(1-\frac{v^2}{c^2}\right)^{-1/2} \simeq \frac{2d}{c}\left(1+\frac{1}{2}\frac{v^2}{c^2}\right) \quad ;$$

da cui: $t_1 - t_2 \simeq \frac{2d}{c}\left(1+\frac{v^2}{c^2}\right) - \frac{2d}{c}\left(1+\frac{1}{2}\frac{v^2}{c^2}\right) \simeq \frac{dv^2}{c^3}$.

Per capire in quale modo il nostro esercizio sia collegato all'esperimento di MM, immagina di sostituire l'aereo con la luce e l'aria con l'etere.

Se facessimo percorrere alla luce un determinato percorso di andata e ritorno, prima nella stessa direzione in cui l'etere si muove rispetto alla Terra, e poi in direzione perpendicolare a quella del moto dell'etere, allora la misura della differenza $t_1 - t_2$ permetterebbe di determinare il valore della velocità v che la Terra possiede rispetto all'etere (o del "vento d'etere" incontrato dalla Terra nel suo moto intorno al Sole).

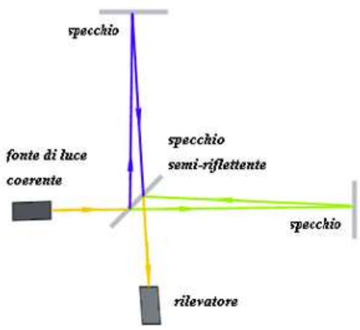
Apparato sperimentale di MM

In realtà, se l'esperimento fosse stato svolto nel modo che abbiamo descritto in precedenza, non avrebbe potuto dare risultati significativi, perché, a causa dell'elevato valore della velocità della luce, la differenza $t_1 - t_2$ sarebbe stata di gran lunga minore delle incertezze sperimentali sui valori di t_1 e di t_2.

Michelson, riprendendo un'idea di Maxwell, ebbe allora l'intuizione di sostituire alla misura diretta del tempo di volo della luce l'analisi della figura di interferenza formata da due fasci luminosi aventi origine dalla stessa sorgente.

Riprendiamo quindi da *Wikipedia* la descrizione del "vero" esperimento.

Albert Michelson utilizzò uno strumento da lui stesso ideato, a cui fu appunto dato il nome di *interferometro di Michelson*., e per il quale ricevette il Nobel nel 1907.



Esso permette di suddividere un fascio di luce in due fasci che viaggiano seguendo cammini perpendicolari e vengono poi nuovamente fatti convergere su uno schermo, formandovi una figura di interferenza.

Facendo ruotare l'interferometro intorno al proprio asse (perpendicolare alla pagina in cui si trova l'immagine), il vento d'etere avrebbe causato una diversa velocità della luce nelle varie direzioni e, di conseguenza, uno spostamento delle frange di interferenza.

Tale spostamento risultava molto più semplice da misurare rispetto alla quantità $t_1 - t_2$.

Utilizzando questo dispositivo, Michelson effettuò nel 1881 un certo numero di misure, senza osservare il previsto spostamento delle frange di interferenza. Quindi decise di effettuare esperimenti più precisi e, nel 1887, insieme a Edward Morley, utilizzò un interferometro montato su una lastra di pietra quadrata che, per eliminare le vibrazioni, veniva fatta galleggiare su mercurio liquido. Questo accorgimento permetteva di mantenere la lastra orizzontale e di farla girare attorno ad un perno centrale. Un sistema di specchi inviava il raggio di luce in un percorso di otto viaggi di andata e ritorno, ciascuno di 11 metri, allo scopo di renderne il cammino più lungo possibile. Inoltre, essi ripeterono le misurazioni più volte al giorno e più volte nel corso dell'anno, per considerare tutti i possibili effetti che il moto della Terra su se stessa e attorno al Sole avrebbe potuto avere sulla misura

L'esperimento fu poi ripetuto da Morley e Dayton Miller a distanza di tempo, fino al 1905, per accertare la possibile esistenza di un moto del sistema solare rispetto all'etere, ed è stato ripetuto numerose volte fino ai nostri giorni.

Esito dell'esperimento

Poiché la Terra si muove intorno al Sole con una velocità $v \simeq 30\, km/s$, ci si attendeva (se il Sole fosse stato in quiete rispetto al'etere) di trovare un valore del "vento d'etere" di tale ordine di grandezza.

Oggi, poi, sappiamo che la Terra e il sistema solare nel suo complesso orbitano attorno al centro della nostra galassia a una velocità di 217 *km/s*, e il nostro gruppo locale di galassie si muove con una velocità di oltre 600 *km/s* nel riferimento in cui la radiazione cosmica di fondo è isotropa, per cui potremmo attenderci un risultato sperimentale ancora più evidente.

Il risultato dell'esperimento di MM fu invece negativo (in senso tecnico), ovvero gli autori non osservarono nessuno spostamento significativo (entro i limiti sperimentali) delle frange di interferenza, e quindi nessun "vento d'etere".

Michelson concluse la sua memoria del 1881 affermando:
"L'interpretazione dei risultati ottenuti è che non esiste alcuno spostamento delle frange d'interferenza. Si mostra in tal modo che le conseguenze dell'ipotesi dell'etere stazionario risultano contraddette dai fatti, e se ne deve necessariamente concludere che l'ipotesi stessa è sbagliata. Questa conclusione contraddice direttamente la spiegazione fino ad ora generalmente accettata per il fenomeno dell'aberrazione: spiegazione che presuppone che la Terra si muova attraverso l'etere e che quest'ultimo rimanga in quiete."
Nel 1904 Kelvin scriveva: "Michelson e Morley, con il loro grande lavoro sperimentale sul moto dell'etere rispetto alla Terra, hanno sollevato l'unica obiezione seria contro le nostre spiegazioni dinamiche della luce".
Scherzosamente, ma non troppo, è stato suggerito che, se i risultati dell'esperimento di MM fossero stati disponibili mentre si svolgeva l'acceso dibattito tra modello tolemaico (geocentrico) e copernicano (eliocentrico), essi sarebbero stati interpretati come una prova del fatto che la Terra si trova in uno stato di quiete assoluta (o, almeno, relativa all'etere), e quindi avrebbero probabilmente influito in maniera decisiva in favore di Tolomeo.
Precisiamo, per completezza, che Michelson rimase sempre scettico nei confronti della teoria della relatività, che comportava la scomparsa dell'etere, ed i suoi pregiudizi verso la nuova teoria perdurarono fino alla morte. Ancora nel 1927 sosteneva: "L'esistenza di un etere appare inconsistente con lo Teoria della Relatività; ma senza un mezzo come si può spiegare la propagazione delle onde di luce? [...] Come si può spiegare la costanza della propagazione della luce se non c'è nessun mezzo?"

Tentativi di spiegazione del risultato di MM

Naturalmente, un unico risultato negativo non poteva bastare a capovolgere un "paradigma" scientifico dominante e a convincere la comunità scientifica della non esistenza dell'etere, per cui furono elaborate o riprese diverse ipotesi volte a spiegare l'esito dell'esperimento.

- *Trascinamento (totale o parziale) dell'etere.*

I corpi aventi grande massa, come la Terra, avrebbero potuto "trascinare" l'etere nel loro moto attraverso lo spazio, nella maniera in cui una palla che si muove nell'aria trascina con sé un sottile strato di aria in prossimità della sua superficie.

In questo modo, qualunque misura della velocità relativa tra la Terra e l'etere ad essa circostante avrebbe fornito necessariamente un risultato nullo. Questa ipotesi non spiegava però il fenomeno dell'*aberrazione stellare*, al quale abbiamo accennato nella precedente sezione.

- *Contrazione di Lorentz e FitzGerald*.

Essi proposero, in maniera indipendente l'uno dall'altro (FitzGerald nel 1889 e Lorentz nel 1892), che il movimento di un corpo rispetto all'etere provocasse una contrazione del corpo stesso lungo la direzione del moto di un fattore $\sqrt{1-\beta^2}$.

Infatti, se la lunghezza d del braccio dell'interferometro parallelo alla direzione del moto orbitale terrestre subisse tale contrazione, avremmo:

$$t_1=\frac{2d\sqrt{1-v^2/c^2}}{c}\frac{1}{1-v^2/c^2}=\frac{2d}{c}\frac{1}{\sqrt{1-v^2/c^2}}=t_2 \quad ,$$

e quindi $t_1-t_2=0$, spiegando così il risultato negativo di MM.

A velocità ordinarie, l'effetto sarebbe estremamente piccolo; ad esempio, la contrazione del diametro terrestre dovuta al moto di rivoluzione della Terra attorno al Sole sarebbe di circa 6 *cm* su oltre 12.700 *km*.

L'ipotesi della contrazione può sembrarci artificiosa, ma Lorentz la spiegava ipotizzando che le forze di coesione della materia fossero di natura elettrica, e che quindi il movimento attraverso l'etere potesse modificare le posizioni di equilibrio degli atomi.

Come vedremo, la contrazione, che per Lorentz era dovuta all'interazione tra l'etere e le cariche elettriche che compongono la materia, è prevista anche dalla teoria di Einstein, ma con un significato completamente diverso.

Infatti, nel 1907 Einstein criticò il carattere "ad hoc" dell'ipotesi della contrazione di Lorentz.

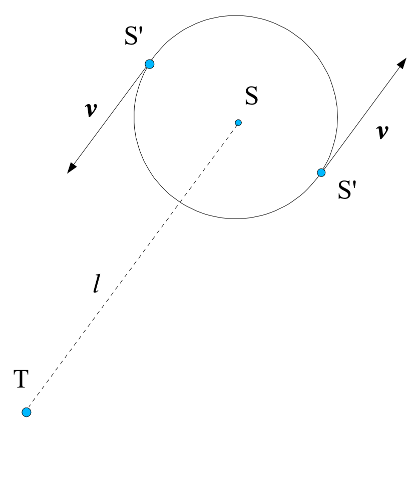
- *Teorie balistiche*.

Nel 1908, il fisico svizzero Ritz propose che, come avviene per gli oggetti materiali, la velocità di un'onda elettromagnetica si sommasse vettorialmente con quella della sua sorgente.

Secondo Ritz, quindi, se ci trovassimo su un'astronave in moto con velocità v (rispetto all'etere) ed emettessimo un segnale luminoso nella direzione del moto, tale segnale acquisirebbe una velocità $c+v$.

Oltre ad entrare in contraddizione con le equazioni di Maxwell, per cui la velocità di un'onda elettromagnetica dipende solo dalla natura del mezzo in cui si propaga, l'ipotesi porterebbe anche delle conseguenze non confermate dall'esperimento nell'osservazione delle stelle doppie.

Infatti, considerando un sistema stellare binario; quando la stella S' si muove verso la Terra con velocità v, la luce dovrebbe impiegare un tempo $\tau=l/(c+v)$ per raggiungere la Terra, mentre quando S' si muove in direzione opposta con velocità v la luce dovrebbe impiegare un tempo $\tau'=l/(c-v)>\tau$.

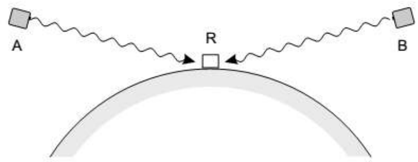


Il sistema dovrebbe quindi mostrare una rotazione apparente irregolare di S' attorno ad S, più veloce nel primo caso e più lenta nel secondo; l'astronomo De Sitter ha smentito con l'osservazione diretta questa ipotesi.

Altre verifiche sperimentali del PR

Seguendo le indicazioni del prof. Fabri, osserviamo che, per affermare la validità del PR nel campo dell'elettromagnetismo, oggi non è più necessario affidarsi ai risultati di un esperimento delicato e di difficile interpretazione come quello di MM, ma esistono delle indicazioni sperimentali più moderne e affidabili.

- *Funzionamento del GPS.*



In maniera estremamente semplificata, possiamo dire che il "*Global Positioning System*" è basato su un sistema di satelliti che trasmettono ad un ricevitore, posto sulla Terra, un segnale contenente un codice di identificazione del satellite, l'informazione sul tempo a cui il segnale è stato emesso, e i dati necessari per calcolare la posizione del satellite ad ogni istante.
Se il ricevitore R riceve il segnale del satellite A ad un certo istante, sapendo a quale istante è stato emesso e che i segnali si muovono a velocità c può ricavare la distanza AR, ed è inoltre in grado di calcolare la posizione di A nello spazio al tempo di emissione. Facendo lo stesso per un altro satellite B, può ricavare anche la distanza BR e la posizione di B. Se fossimo nel piano, dalle posizioni dei due satelliti e dalle distanze AR e BR potremmo trovare la posizione di R (in realtà, il metodo è più complesso).
Osserviamo però che la Terra ruota intorno a se stessa e intorno al Sole. Quindi, se la velocità delle onde elettromagnetiche dipendesse dal moto della Terra, allora l'onda che va da A ad R non avrebbe la stessa velocità di quella che va da B a R, e questo porterebbe ad un errore significativo nel calcolo della posizione di R.
Poiché invece il GPS funziona perfettamente, in accordo con l'ipotesi che la velocità delle onde elettromagnetiche sia sempre c, possiamo vedere questo fatto come una conferma del PR.

- *Sonde spaziali.*

Sono apparati complessi, che contengono strumenti di misura dei più diversi tipi. Li spediamo a velocità considerevoli in ogni angolo del sistema solare, e li vediamo funzionare come se si trovassero sulla Terra.
Questa è una conferma indiretta del PR, in quanto le leggi fisiche che i loro strumenti utilizzano e verificano non sono influenzate dalla loro velocità.

- *Astrofisica.*

Per descrivere l'evoluzione di stelle e galassie, utilizziamo le stesse leggi fisiche che conosciamo dagli esperimenti eseguiti sulla Terra. Ma, rispetto a noi, le stelle possono avere velocità dell'ordine di 100 *km/s*, e le galassie di diverse centinaia di *km/s*. L'astrofisica riesce a spiegare questi fenomeni con le stesse leggi che valgono nei laboratori terrestri, il che non potrebbe avvenire se non fosse valido il PR.

4. La Relatività Speciale

Postulati della Relatività

Come abbiamo detto in precedenza, Einstein espose la teoria della *Relatività Speciale* (RS) o *Ristretta* (RR) in un breve articolo pubblicato nel giugno del 1905 intitolato "*Sull'elettrodinamica dei corpi in movimento*".

Ricordiamo che in quel momento Einstein aveva solo ventisei anni, non aveva ancora incarichi accademici, e lavorava come impiegato presso l'Ufficio Brevetti di Berna, in Svizzera.

Per superare i problemi incontrati dalle teorie che ammettevano l'esistenza di un riferimento privilegiato ("etere"), egli propose i seguenti postulati:

1. "*Nessun esperimento* (*di qualunque genere*) *ci può permettere di distinguere due riferimenti in moto rettilineo uniforme l'uno rispetto all'altro*", ovvero: "*In tutti i RI valgono le stesse leggi della fisica*".
2. "*La velocità delle onde elettromagnetiche nel vuoto assume lo stesso valore c in tutti i RI*".

Il primo postulato non è altro che il "vecchio" PR enunciato da Galileo e riportato alla sua forma originaria, cancellandone la limitazione ai fenomeni meccanici che era stata arbitrariamente aggiunta nell'Ottocento.

Riportiamo ancora l'enunciato originale di Einstein.

"Nessuna caratteristica dei fatti osservati corrisponde al concetto di un etere assoluto; [...] per tutti i sistemi di coordinate per i quali valgono le equazioni della meccanica, valgono anche le equivalenti equazioni dell'elettrodinamica e dell'ottica. [...]

Esempi di tipo analogo, come pure i tentativi falliti di constatare un moto della Terra rispetto al "mezzo luminoso", portano alla supposizione che il concetto di quiete assoluta non corrisponda ad alcuna proprietà dell'esperienza, non solo in meccanica, ma anche in elettrodinamica. E che inoltre per tutti i sistemi di riferimento per i quali valgono le equazioni meccaniche debbano valere anche le stesse leggi elettrodinamiche e ottiche. [...]

Assumeremo questa congettura (che nel seguito sarà chiamata "principio di relatività") come postulato, ed inoltre introdurremo un altro postulato che solo apparentemente è inconciliabile con il precedente, il quale afferma che la luce si propaga sempre nello spazio vuoto con una velocità finita c, che è indipendente dallo stato di moto del corpo che la emette.

Questi due postulati sono sufficienti per giungere ad una teoria semplice e consistente dell'elettrodinamica dei corpi in moto basata sulla teoria di Maxwell".

Il secondo postulato serve a garantire che le equazioni di Maxwell, da cui viene ricavato il valore c per la velocità delle onde elettromagnetiche nel vuoto, siano valide in tutti i RI.

Potremmo notare che il primo postulato, ovvero il PR, enuncia già l'invarianza di tutte le leggi fisiche, e quindi in particolare delle equazioni di Maxwell, da cui seguono sia l'esistenza delle onde elettromagnetiche che il valore della

loro velocità nel vuoto. Per essere rigorosi, quindi, il secondo postulato non sarebbe necessario.
In realtà, Einstein parla di "velocità finita *c*, indipendente dallo stato di moto del corpo che la emette".
Anche la precisazione finale sembrerebbe inutile, dal momento che le equazioni di Maxwell escludevano già la possibilità che la velocità della luce dipendesse da quella della sua sorgente. Sembra, però, che per risolvere il problema posto dall'esperimento di MM anche Einstein avesse preso in considerazione, e poi scartato, delle "*teorie balistiche*", secondo cui la *velocità delle onde dipenderebbe dalla velocità delle cariche che le emettono*.
In conclusione, dato che oggi non ci sono più dubbi sulla validità delle equazioni di Maxwell, potremmo affermare che il secondo postulato di Einstein è inutile, e il primo (PR) è sufficiente da solo. Nel 1905, però, la situazione risultava meno chiara, per cui, probabilmente, Einstein non si sentiva di dare per scontato l'assenso dei fisici alla validità delle equazioni di Maxwell in tutti i riferimenti.

- Osserviamo, anche seguendo le slide su "*La creazione della relatività speciale*" del prof. Bettini, che già Henri Poincaré era pervenuto, prima di Einstein, ad enunciare sostanzialmente il PR.

In particolare, nel 1895, ne "*L'Eclairage électrique*", egli afferma: "L'esperienza ha rivelato una serie di fatti che possono riassumersi nella seguente formula: è impossibile rendere manifesto il moto assoluto della materia, o meglio il moto relativo della materia ponderabile rispetto all'etere: tutto quello che si può mettere in evidenza è il moto della materia ponderabile rispetto alla materia ponderabile".
In quel momento Poincaré non aveva ancora abbandonato il concetto ottocentesco di etere, e forse non lo fece mai del tutto, ma espresse dei dubbi sempre più profondi sulla sua utilità.
Nel 1897 scrisse: "Che l'etere esista o no importa poco, lasciamo questo ai metafisici; ciò che è essenziale per noi è che tutto avvenga come se esistesse, e che si trovi questa ipotesi adeguata alla spiegazione dei fenomeni. Dopo tutto, abbiamo qualche altra ragione per credere nell'esistenza degli oggetti materiali? Anche quella è solo un'ipotesi conveniente; solo che non smetterà mai di esserlo, mentre un giorno, senza dubbio, l'etere sarà messo da parte come inutile".
E al Congresso internazionale di Parigi del 1900: "Il nostro etere, esiste realmente? Conosciamo l'origine della nostra credenza dell'etere. Se la luce impiega parecchi anni per raggiungerci da una stella lontana, non è più sulla stella, né è sulla terra. Deve essere da qualche parte, e sostenuta, per così dire, da qualche agente materiale. [...] Io non credo che osservazioni più precise saranno mai in grado di rivelare null'altro che moti relativi".
In seguito, al Congresso di St. Louis del 1904, Poincaré aveva enunciato il PR, dandogli questo nome, senza più nominare l'etere: "Secondo il Principio di Relatività, le leggi dei fenomeni fisici devono essere le stesse sia per un osservatore fermo sia per uno in moto di traslazione uniforme: così che noi non abbiamo alcun mezzo, né ne possiamo avere, di discernere se siamo o non siamo trasportati in tale moto".
Inoltre, Poincaré esamina gli "attacchi" sperimentali e teorici fatti al Principio, concludendo:
"Sembra che questa impossibilità di dimostrare il moto assoluto della terra sia una legge generale della natura. [...]
Tutti i tentativi di misurare la velocità della Terra rispetto all'etere hanno dato risultato negativo. Questa volta la fisica sperimentale è stata più fedele al principio rispetto alla fisica matematica; i teorici ne hanno dubitato al fine di avere accordo con altre visioni generali; ma l'esperienza ostinatamente l'ha confermato. Si sono utilizzati diversi metodi, infine Michelson ha spinto la precisione sino all'ultimo limite; niente da fare".
Poincaré discute poi la misura del tempo e mostra che, come conseguenza del valore finito della velocità della luce, due osservatori in modo relativo misurano durate di tempo diverse, ma che, "come risultato del principio di relatività, ciascun osservatore non avrà alcun modo di sapere se è in quiete o in moto assoluto", e conclude: "Da tutti questi

risultati, se saranno confermati, sorgerà una meccanica interamente nuova, che sarà caratterizzata soprattutto dal fatto che nessuna velocità può superare quella della luce."

Anche Lorentz attribuì a Poincaré il merito di aver stabilito il PR, e nel 1921 scrisse: "Non ho stabilito il principio di relatività come rigorosamente e universalmente vero. Poincaré, al contrario, ha ottenuto una perfetta invarianza delle equazioni dell'elettrodinamica, e ha formulato il postulato di relatività, termine che è stato il primo a impiegare".

Non è chiaro fino a che punto Einstein fosse a conoscenza dei risultati raggiunti in precedenza.

Nell'articolo del 1905, contrariamente alla prassi, egli non fece nessun riferimento bibliografico. Scriverà nel 1907: "Dato che i problemi in esame sono qui trattati da un nuovo punto di vista, ho creduto di potermi risparmiare una ricerca bibliografica che sarebbe per me molto tediosa, tanto più che è lecito sperare che altri colmino questa lacuna".

Einstein negò sempre di aver conosciuto le pubblicazioni di Poincaré. In una lettera all'amico Carl Seelig del 1955 scrive: "Non c'è dubbio, se guardiamo indietro allo sviluppo della teoria della Relatività, che la relatività speciale stava per essere scoperta nel 1905. Lorentz aveva già messo in evidenza che le trasformazioni (di Lorentz) erano essenziali per la teoria e Poincaré era andato anche oltre. A quel tempo io conoscevo solo il lavoro di Lorentz del 1895, ma non conoscevo alcun altro lavoro né di Lorentz né di Poincaré. Posso quindi dire che il mio lavoro del 1905 fu indipendente". Ma lo stesso Seelig e Maurice Solovine affermano di aver letto e discusso con Einstein "*La science et l'hypothèse*" di Poincaré.

Inoltre, in una lettera alla moglie Mileva del settembre 1899, Einstein scrive che sta leggendo un lavoro di Wien nel quale è descritto l'esperimento di Michelson, e nei suoi appunti era inclusa la recensione di pubblicazioni in francese, inclusi gli atti dell'Accademia delle Scienze di Parigi, che contenevano anch'essi dei lavori di Poincaré.

Un esperimento semplice

L'idea di Einstein, apparentemente banale, ha in realtà delle conseguenze assai rilevanti.

Infatti, egli afferma che, se misuriamo la velocità della luce sulla Terra, su Marte, in altri punti del sistema solare e oltre, allora otterremo sempre lo stesso valore per c, anche se la velocità della Terra non è costante, né in grandezza né in direzione, la velocità di Marte è diversa da quella della Terra, quella degli altri pianeti ancora diversa.

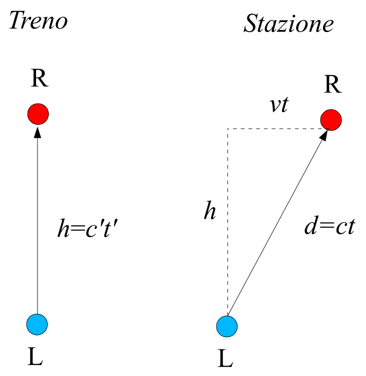
In altri termini, egli sostiene che la velocità della luce non si compone con quella del riferimento, al contrario di quello che accade negli esperimenti con proiettili e altri oggetti comuni.

Inoltre, questa idea comporta una seria conseguenza, che cominciamo a discutere su un esempio particolarmente semplice (sempre del prof. Fabri).

Immaginiamo la banchina di una piccola stazione, davanti alla quale passa in corsa un treno veloce (molto veloce...).

Sul treno c'è un fisico che sta facendo un esperimento: ha posto sul pavimento una sorgente di luce L, e più in alto, all'altezza h, un ricevitore R.

La sorgente L fa partire un lampo di luce, che arriva in R; il fisico misura il tempo che impiega il lampo per andare da L ad R.



Anche sulla banchina c'è un fisico, che con strumenti propri esegue misure sullo stesso esperimento.

In particolare, egli misura il tempo con propri orologi, fermi rispetto alla stazione.

Dato che il treno corre con una velocità *v*, nel tempo *t* (misurato dalla stazione) che il lampo di luce impiega per andare da L a R, l'apparato che sta sul treno si sarà spostato di un tratto *vt*.

Se indichiamo con *c* la velocità della luce rispetto alla stazione, vediamo che il percorso obliquo del lampo (visto dalla stazione) è lungo $d=ct$.

Indichiamo anche con *c'* la velocità della luce sul treno e con *t'* il tempo misurato, sempre sul treno, per cui $h=c't'$. Per il momento, non facciamo nessuna ipotesi sulle quantità *c*, *c'*, *t*, *t'*, neppure quelle che potrebbero sembrare più ovvie.

Confrontando i disegni, vediamo che $d>h$, per cui $ct>c't'$.

Di conseguenza, non potremo avere $c=c'$ e contemporaneamente $t=t'$!

- Nella meccanica newtoniana si dava per scontato che dovesse essere $t=t'$.

In questa concezione, il *tempo è assoluto* o *invariante*, nel senso che l'intervallo di tempo fra due eventi è lo stesso, in qualunque sistema di riferimento lo si misuri.

Seguiva di necessità che $c>c'$, ovvero che la velocità della luce (come quella di qualunque altro corpo in movimento) dipende dal riferimento, e quindi non è invariante.

In particolare, nel nostro caso, la velocità della luce si dovrebbe comporre con il moto del treno.

- Invece il PR, e quindi Einstein, richiede che $c=c'$: la *velocità della luce è invariante*.

Ma allora dovrà essere necessariamente $t>t'$, per cui *l'intervallo di tempo tra due eventi cambia a seconda del sistema di riferimento (non è invariante, è relativo).*

Nella prossima sezione riprenderemo questo esperimento ideale arrivando alla cosiddetta “dilatazione dei tempi”.

Trasformazioni di Lorentz

Come abbiamo detto, la scelta del secondo postulato di Einstein pone un nuovo problema: se la velocità delle onde elettromagnetiche è *c* in un certo riferimento, per le TG ci aspettiamo che la loro velocità in un riferimento che si muove rispetto al primo con velocità *v* (nella stessa direzione della luce) sia $c+v$ o $c-v$.

Einstein comprese quindi che era necessario sostituire le TG con delle nuove trasformazioni di coordinate, che avessero la proprietà di lasciare invariante la velocità delle onde elettromagnetiche *c* nel passaggio da un RI all'altro.

In realtà, queste trasformazioni erano già a sua disposizione, in quanto erano state ricavate tra il 1899 ed il 1904 da Lorentz e, per questo motivo, vengono chiamate *Trasformazioni di Lorentz* (nome attribuito loro da Poincaré) o TL.

- Lorentz aveva ripreso dei contributi di Voigt e Larmor, con lo scopo di trovare sotto quali condizioni le equazioni di Maxwell fossero valide in tutti i RI, ovvero quali trasformazioni lasciassero invarianti le equazioni di Maxwell nel passaggio da un RI ad un altro.

Più precisamente, Lorentz riteneva che le equazioni di Maxwell fossero valide solo in un sistema di riferimento privilegiato, quello in cui l'etere è fermo. Ma ogni modifica nella forma di quelle equazioni avrebbe comportato che negli altri sistemi di riferimento le leggi sperimentali dell'elettromagnetismo sarebbero state diverse; da ciò sarebbe seguita la possibilità di rivelare lo stato di moto rispetto all'etere. Poiché però tutti gli esperimenti volti a rivelare lo stato di moto della terra rispetto all'etere avevano dato esito negativo, dovevano esistere delle trasformazioni, diverse da quelle galileiane, che lasciano inalterate le equazioni di Maxwell; nel 1904 Lorentz giunse quindi a scrivere in forma definitiva queste trasformazioni.

- E' decisamente al di là delle mie competenze stabilire quanto il lavoro di Einstein sia stato originale e quanto, invece, risenta del contributo di altri ricercatori, primi fra tutti Poincaré e Lorentz, per cui mi limito a fornire alcune segnalazioni e citazioni, senza trarre delle conclusioni in merito.

Osserviamo che molti dei principi e dei risultati più rilevanti della RR erano già stati esposti in precedenza, soprattutto da Lorentz e Poincaré (ricordiamo il PR, le TL, l'invarianza della velocità della luce ed il fatto che questa sia una velocità limite, la contrazione delle lunghezze, la relatività della simultaneità, la dipendenza della misura degli intervalli di tempo dal riferimento, la legge di composizione delle velocità, la necessità di modificare la legge della gravitazione di Newton, l'esistenza di onde gravitazionali, e, con qualche distinguo, la relazione tra massa ed energia $E = mc^2$).

D'altra parte, in genere, tali risultati venivano presentati come ipotesi matematiche o come casi particolari, mentre solo nella teoria di Einstein essi assumono il loro pieno significato. L'opinione più diffusa è quindi quella secondo cui Lorentz e Poincaré fossero molto vicini alla formulazione <u>matematica</u> della teoria, ma che essi non ne avessero pienamente colto l'aspetto fisico (infatti, entrambi rimasero sempre poco convinti della validità della teoria di Einstein, e addirittura Poincaré non citò mai il lavoro di Einstein sulla RR).

Uno studioso che ha invece assunto una posizione decisamente opposta è Whittaker, che, nel suo trattato "*A History of the Theories of Aether and Electricity*" (1953), ha inserito un capitolo intitolato "*La teoria della relatività di Poincaré e Lorentz*", limitandosi a precisare (in una maniera che oggi appare ironica): "Nell'autunno dello stesso anno [1905] Einstein pubblicò un lavoro che portò avanti la teoria di Poincaré e Lorentz con alcune estensioni, e che attrasse molta attenzione".

- Ancora una volta, mi vedo costretto per motivi di "compatibilità" con le Indicazioni Ministeriali a edulcorare le idee del prof. Fabri, il quale sostiene che le TL non andrebbero neanche nominate nella scuola secondaria.

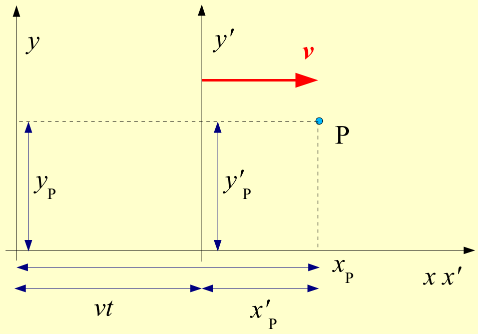
Egli afferma: "Se è vero che le TL sono uno strumento matematico che consente di ricavare automaticamente parecchi risultati della RR, è non meno vero che, come molti strumenti matematici, presentano un rischio: che lo studente apprenda la meccanica del procedimento, ma perda di vista il significato fisico di quello che sta facendo".

Cercheremo comunque di utilizzare le TL con parsimonia, e di dare la precedenza alle considerazioni sulla geometria dello spazio-tempo.

Inoltre, per problemi di tempo e per semplicità, ci limitiamo a scrivere le TL senza ricavarle, ma solo verificando che la velocità della luce nel vuoto c sia invariante sotto tali trasformazioni.

Come abbiamo fatto per le TG, prendiamo nuovamente in considerazione due riferimenti S ed S' che si muovono di *moto rettilineo uniforme* l'uno rispetto all'altro e, per semplicità, scegliamo in ciascun riferimento un sistema di coordinate cartesiane ortogonali tali che all'istante $t=0$ le due terne di assi cartesiani coincidano e che il riferimento S' si muova con velocità costante *v* lungo la direzione comune degli assi *x* e *x*'.

Ammettiamo ora che le coordinate di uno stesso *evento* misurate nei due riferimenti non siano più collegate dalle TG, ma dalle **Trasformazioni di Lorentz** (TL):



$$\begin{cases} \boldsymbol{x'=\dfrac{x-vt}{\sqrt{1-v^2/c^2}}} \\ \boldsymbol{y'=y} \\ \boldsymbol{z'=z} \\ \boldsymbol{t'=\dfrac{t-vx/c^2}{\sqrt{1-v^2/c^2}}} \end{cases}$$

che, introducendo i coefficienti adimensionali $\boldsymbol{\beta=\dfrac{v}{c}}$, $\boldsymbol{\gamma=\dfrac{1}{\sqrt{1-\beta^2}}}$,

assumono la forma più compatta:

$$\boldsymbol{x'=\gamma(x-vt)\,; \qquad y'=y\,; \qquad z'=z\,; \qquad t'=\gamma(t-\beta x/c)} \ .$$

Per renderci conto dei valori che possono assumere tali parametri, imponiamo la condizione di esistenza $1-v^2/c^2>0 \ \Rightarrow \ v<c$, da cui: $0\leq\beta<1$ e $\gamma\geq 1$.

Vediamo differenze e analogie con le TG.

- La quantità $x-vt$ (o, in generale, quella in direzione della velocità relativa *v*) viene moltiplicata per il fattore γ, che tende ad 1 quando *v* tende a zero, mentre tende all'infinito quando *v* tende a *c*.
- Le coordinate trasversali alla direzione di *v* (in questo caso *y* e *z*) mantengono ancora lo stesso valore in entrambi i riferimenti;
- Il tempo non è più invariante.

  Infatti, l'istante t' in cui un evento è visto dal riferimento S' dipende sia dalla coordinata spaziale *x* che dalla coordinata temporale *t* viste nel riferimento S. Anche per il tempo abbiamo un fattore moltiplicativo uguale a γ.
- La misura di una distanza (o di un intervallo di tempo) eseguita in un RI non dipende semplicemente dalla corrispondente misura di una distanza (o di un intervallo di tempo) compiuta in un diverso RI, ma “mescola” distanze e intervalli di tempo del secondo RI.

Poiché i principali effetti relativistici dipendono dal fattore γ, riportiamo a fianco il grafico della funzione $\gamma(\beta)$, che mostra come varia il fattore γ nell'intervallo $0\leq v<c$.

Dal grafico (e dai calcoli che possiamo svolgere) è evidente che tali effetti sono trascurabili finché la velocità *v* non è molto vicina a *c*.

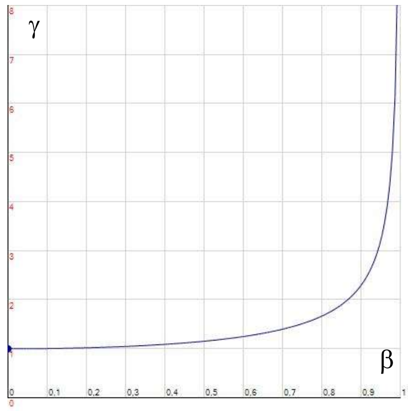


Grafico della funzione γ (β)

Conseguenze delle TL

- *Limite non relativistico.*

Poiché la meccanica newtoniana funziona bene per corpi che si muovono a velocità piccole rispetto alla velocità c delle onde elettromagnetiche nel vuoto, ci chiediamo se le TL si riducono alle TG quando $v \ll c$.

Vediamo infatti che, se $v/c \ll 1$, allora $\gamma \approx 1$ e $\beta \approx 0$.

Possiamo verificare che, sostituendo questi valori nelle TL, otteniamo le TG.

In termini più rigorosi, le TG si ottengono sviluppando le TL in serie di Taylor al primo ordine rispetto a β.

- *Risultato di MM.*

Nella RR, il risultato negativo dell'esperimento di MM è ovvio, in quanto non esiste un riferimento privilegiato dell'etere, e quindi non è possibile misurare la velocità della Terra rispetto ad esso.

Infatti, la luce si muove con velocità c sia nel braccio longitudinale che in quello trasversale dell'interferometro, per cui il tempo impiegato dalla luce a percorrere la distanza d è sempre $t=d/c$; quindi $t_1-t_2=0$, e non si può avere nessuno spostamento di frange.

- *Invarianza di c.*

Nel passaggio da un RI all'altro tramite le TL, la velocità delle onde elettromagnetiche nel vuoto c è un *invariante* (non cambia).

In altri termini, le TL verificano il secondo postulato di Einstein della RS.

- Verifichiamo che questa affermazione sia corretta.

  Supponiamo che un segnale luminoso si propaghi con velocità c in un RI S' nella direzione dell'asse x' .

  Quindi: $\Delta x' = c\Delta t'$.

  Consideriamo un secondo RI S tale che S' si muova rispetto ad S con velocità v.

  Possiamo quindi applicare le TL: $\gamma(\Delta x - v\Delta t) = c\gamma(\Delta t - \beta\Delta x/c) \Rightarrow$

  $$\Delta x - v\Delta t = c\Delta t - \beta\Delta x \Rightarrow \Delta x(1+\beta) = \Delta t(c+v) \Rightarrow \Delta x = \frac{c+v}{1+v/c}\Delta t = c\Delta t \quad .$$

  Di conseguenza, il segnale luminoso si propaga con velocità c anche nel riferimento S, c.v.d.

- *Trasformazioni inverse.*

Le TL che abbiamo scritto in precedenza esprimono le coordinate spaziali e temporali del riferimento S' in termini di quelle del riferimento S.

Se abbiamo bisogno delle trasformazioni inverse, osserviamo che S si muove con velocità $-v$ rispetto ad S', per cui basta scambiare le variabili di S ed S' (“con apici” e “senza apici”) e cambiare segno alla velocità v:

$$x=\frac{x'+vt'}{\sqrt{1-v^2/c^2}}; \qquad y=y'; \qquad z'=z'; \qquad t=\frac{t'+vx'/c^2}{\sqrt{1-v^2/c^2}}$$, ovvero:

$$x=\gamma(x'+vt'); \qquad y=y'; \qquad z=z'; \qquad t=\gamma(t'+\beta x'/c) \quad .$$

E' invece decisamente sconsigliabile, se non come esercizio di algebra, cercare di ricavare dalle trasformazioni dirette le incognite x, t in funzione di x' e t' .

- *Osservazione.*

Supponiamo di avere due eventi A e B che in un riferimento S hanno coordinate $A(x_A, t_A)$ e $B(x_B, t_B)$ e indichiamo con $\Delta x=x_B-x_A$, $\Delta t=t_B-t_A$ gli intervalli spaziali e temporali che li separano in S.

Dal momento che le TL sono *trasformazioni lineari*, ovvero di primo grado nelle coordinate spaziali e temporali, allora i corrispondenti intervalli $\Delta x'$ e $\Delta t'$ in un riferimento S' si ottengono semplicemente trasformando Δx e Δt con le TL:

$$\Delta x'=\gamma(\Delta x-v\Delta t); \qquad \Delta y'=\Delta y; \qquad \Delta z'=\Delta z; \qquad \Delta t'=\gamma(\Delta t-v\Delta x/c^2) \quad .$$

Infatti, possiamo applicare le TL alle coordinate degli eventi A e B:

$$\begin{cases} x_A'=\gamma(x_A-vt_A) \\ x_B'=\gamma(x_B-vt_B) \end{cases}$$

e sottrarre membro a membro le due equazioni.

Composizione (o trasformazione) delle velocità

Come abbiamo visto, nella meccanica newtoniana la velocità $\vec{u}$ di un corpo in movimento rispetto al riferimento S si ottiene componendo la sua velocità $\vec{u}'$ rispetto ad S' con la velocità relativa dei due riferimenti: $\vec{u}=\vec{u}'+\vec{v}$, ovvero: $\vec{u}'=\vec{u}-\vec{v}$.

In relatività, questo risultato sarebbe privo di senso, in quanto comporterebbe che un segnale luminoso che si muove a velocità c in un RI avrebbe velocità $c\pm v$ in un altro RI.

Dalle TL possiamo invece ricavare le seguenti formule per la composizione delle velocità:

$$u_x=\frac{u'_x+v}{1+u'_x v/c^2} \quad ; \qquad u_y=\frac{u'_y\sqrt{1-v^2/c^2}}{1+u'_x v/c^2} \quad ; \qquad u_z=\frac{u'_z\sqrt{1-v^2/c^2}}{1+u'_x v/c^2} \quad .$$

Ricordiamo che v indica la velocità del riferimento S' rispetto ad S (che, per semplicità, consideriamo nella direzione degli assi x e x'), le u_i sono le componenti della velocità che il corpo in movimento possiede nel sistema S e le u'_i sono le componenti della velocità dello stesso corpo nel sistema S'.

Anche in questo caso, per ricavare le trasformazioni inverse, è sufficiente scambiare le variabili di S ed S' ("con apici" e "senza apici") e cambiare segno alla velocità v:

$$u'_x=\frac{u_x-v}{1-u_x v/c^2} \quad ; \qquad u'_y=\frac{u_y\sqrt{1-v^2/c^2}}{1-u_x v/c^2} \quad ; \qquad u'_z=\frac{u_z\sqrt{1-v^2/c^2}}{1-u_x v/c^2} \quad .$$

Dimostrazione

- Poniamo $u_x = \dfrac{\Delta x}{\Delta t}$ e $u'_x = \dfrac{\Delta x'}{\Delta t'}$. Applichiamo le TL:

$$u_x = \frac{\Delta x}{\Delta t} = \frac{\gamma(\Delta x' + v\Delta t')}{\gamma(\Delta t' + \beta\Delta x'/c)} = \frac{u'_x + v}{1 + u'_x v/c^2} \quad \text{c.v.d.}$$

(Abbiamo semplificato per γ e diviso numeratore e denominatore per $\Delta t'$).

- In maniera analoga: $u_y = \dfrac{\Delta y}{\Delta t} = \dfrac{\Delta y'}{\gamma(\Delta t' + \beta\Delta x'/c)} = \dfrac{u'_y}{\gamma(1 + u'_x v/c^2)}$ c.v.d.

  Osserviamo che, pur essendo $\Delta y = \Delta y'$, nella cinematica relativistica le velocità trasversali <u>non</u> sono invarianti, perché $\Delta t \neq \Delta t'$.

Esempio 1

Supponiamo che nel RI collegato al laboratorio A vengano osservati un oggetto O in movimento lungo l'asse x alla velocità $v_{OA} = 1000\, m/s$ ed un secondo laboratorio B in moto lungo l'asse x alla velocità $v_{BA} = -1000\, m/s$.

Secondo le TG, la velocità dell'oggetto O nel RI collegato al laboratorio B sarebbe:

$$v_{OB} = v_{OA} - v_{BA} = 1000\, m/s + 1000\, m/s = 2000\, m/s \quad .$$

Secondo la composizione relativistica delle velocità, invece:

$$v_{OB} = \frac{v_{OA} - v_{BA}}{1 - v_{OA} v_{BA}/c^2} \simeq \frac{1000 + 1000}{1 + 10^6/(9 \cdot 10^{16})} \frac{m}{s} \simeq 1999{,}9999978\, m/s \quad .$$

In questo caso, l'errore relativo che si commetterebbe sostituendo il risultato newtoniano a quello relativistico è di circa 10^{-9}, che è del tutto trascurabile nell'esperienza quotidiana.

Esempio 2

Un'astronave si muove rispetto alla Terra con velocità $v_{AT} = 0{,}9000\, c$; nell'astronave è contenuto un acceleratore di particelle, all'interno del quale un fascio di protoni si muove con velocità $v_{PA} = 0{,}9000\, c$ rispetto all'astronave.

Secondo le TG, la velocità del fascio di protoni rispetto alla Terra sarebbe $v_{PT} = v_{PA} + v_{AT} = 1{,}8000\, c$.

Secondo la composizione relativistica delle velocità, avremo invece:

$$v_{PT} = \frac{v_{PA} + v_{AT}}{1 + v_{PA} \cdot v_{AT}} \simeq \frac{0{,}9000 + 0{,}9000}{1 + 0{,}9000^2} c \simeq 0{,}9945\, c \quad .$$

Vediamo che, per velocità dell'ordine di grandezza di quella della luce, i due risultati sono decisamente differenti.

Velocità limite

Consideriamo per semplicità $u'_x > 0$ e $v > 0$.

Osserviamo che, a differenza di quanto accade nella meccanica newtoniana, la velocità u_x è sempre <u>minore</u> della somma $u'_x + v$, in quanto il denominatore è sempre maggiore di uno.

A maggior ragione, anche u_y è sempre minore di u'_y perché, oltre al motivo precedente, tale velocità viene divisa per il fattore γ, che è sempre maggiore di uno.

Più precisamente, se $u'_x \leq c$ e $v \leq c$, allora anche $u_x \leq c$.

Ad esempio, se $u'_x = v = c/2$, allora: $u_x = \dfrac{c/2 + c/2}{1 + 1/4} = \dfrac{4}{5} c$.

Se volessimo spingerci, in maniera fisicamente non corretta, al caso limite in cui $u'_x = v = c$, allora ricaveremmo:

$$u_x = \frac{c + c}{1 + 1} = c \quad .$$

Di conseguenza, la velocità delle onde elettromagnetiche nel vuoto, oltre ad essere *invariante* per TL, assume anche il carattere di *velocità limite*, che non può essere superata da nessun corpo o da nessun segnale di qualunque genere.

Una verifica sperimentale abbastanza diretta dell'esistenza di una velocità limite è fornita dall'esperimento di Bertozzi, compiuto al MIT nel 1963-64 con un acceleratore di elettroni, che è stato oggetto di una simulazione ministeriale e che discuteremo con un certo dettaglio nella sezione 8 sulla Dinamica Relativistica.

- Proviamo a verificare la nostra affermazione per cui, se $u'_x < c$ e $v < c$, allora anche $u_x < c$.

Dalla disuguaglianza $\dfrac{u'_x + v}{1 + u'_x v / c^2} < c$ ricaviamo: $c u'_x + c v < c^2 + u'_x v$, ovvero: $v(c - u'_x) < c(c - u'_x)$.

Poiché $c - u'_x > 0$ per ipotesi, possiamo dividere entrambi i membri per tale quantità lasciando invariato il verso della disequazione, ottenendo quindi $v < c$, anch'essa vera per ipotesi c.v.d.

- Come in altri casi, già nel 1904 Poincaré aveva compreso che l'ipotesi di ammettere l'esistenza di una velocità di propagazione (di qualunque genere di segnale) che fosse maggiore di *c* sarebbe entrata in contraddizione con il PR.

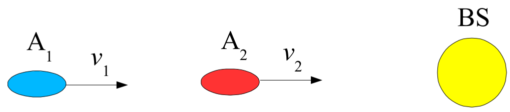
Egli scrisse: "Che succederebbe se potessimo comunicare mediante segnali diversi da quelli della luce, la cui velocità di propagazione differisse da quella della luce? Se, dopo aver regolato i nostri orologi con il metodo ottimale, desiderassimo verificare il risultato per mezzo di questi nuovi segnali, dovremmo osservare discrepanze dovute al comune moto traslatorio delle due stazioni. [...]

Da tutti questi risultati, se questi dovessero essere confermati, discenderebbe una meccanica completamente nuova che sarebbe caratterizzata soprattutto da questo fatto, che non ci potrebbe essere alcuna velocità maggiore di quella luce, non più di una temperatura al di sotto di quella dello zero assoluto. Per un osservatore, che partecipi egli stesso in un moto di traslazione di cui non ha alcun sospetto, nessuna velocità apparente potrebbe sorpassare quella della luce, e questa sarebbe una contraddizione, a meno che non si ricordi il fatto che questo osservatore non usa lo stesso tipo di cronometro di quello usato da un osservatore stazionario, ma piuttosto un orologio che dà il tempo locale.[...]

Forse, inoltre, dovremo costruire una meccanica interamente nuova della quale siamo riusciti a cogliere soltanto un barlume, dove, l'inerzia aumentando con la velocità, la velocità della luce diventerebbe un limite insuperabile. La meccanica ordinaria, più semplice, rimarrebbe una prima approssimazione, poiché essa sarebbe vera per velocità non troppo grandi, così che la vecchia dinamica si troverebbe ancora sotto la nuova. Non dovremmo rammaricarci di aver creduto nei principi, e perfino, poiché le velocità troppo grandi per le vecchie formule sarebbero sempre soltanto eccezionali, il modo più sicuro in pratica sarebbe ancora di agire come se continuassimo a credere in esse. [Tali principi] sono così utili, sarebbe necessario tenere un posto per essi. Decidere di escluderle completamente sarebbe privarsi di un'arma preziosa. Mi affretto a dire in conclusione che non ci siamo ancora, e finora niente prova che i principi non usciranno dalla contesa vittoriosi e intatti”.

Problema 4.1 (*Composizione delle velocità*)

Da una base stellare BS osserviamo due astronavi che si avvicinano provenendo dalla medesima direzione.



L'astronave A_1 viaggia con velocità $v_1 = 0{,}906\,c$, l'astronave A_2 con velocità $v_2 = 0{,}806\,c$.

Calcola:

a. la velocità dell'astronave A_2 rispetto all'astronave A_1;

b. la velocità dell'astronave A_2 rispetto all'astronave A_1 nel caso in cui l'astronave A_2 viaggi in direzione opposta.

Soluzione

a. Sappiamo che la formula per comporre due velocità aventi la stessa direzione è:

$$u_x = \frac{u'_x + v}{1 + u'_x v / c^2}$$

in cui v indica la velocità del riferimento S' rispetto ad S, u_x è la velocità che il corpo in movimento possiede nel sistema S e u'_x è la velocità dello stesso corpo nel sistema S'.

Nel nostro caso, S' è il riferimento della base stellare BS ed S il riferimento dell'astronave A_1.

Quindi $v = -v_1 = -0{,}906\,c$ e $u'_x = v_2 = 0{,}806\,c$.

Sostituiamo: $u_x = \frac{u'_x + v}{1 + u'_x v / c^2} = \frac{0{,}806\,c - 0{,}906\,c}{1 - 0{,}906\,c \cdot 0{,}806\,c / c^2} \simeq -0{,}371\,c$.

b. In questo caso $u'_x = v_2 = -0{,}806\,c$, per cui:

$$u_x = \frac{u'_x + v}{1 + u'_x v / c^2} = \frac{-0{,}806\,c - 0{,}906\,c}{1 + 0{,}906\,c \cdot 0{,}806\,c / c^2} \simeq -0{,}989\,c$$

Problema 4.2 (*Composizione velocità - Nelli*)

Nel riferimento del laboratorio vediamo un lampo di luce che si propaga nel piano (*xy*) formando un angolo $\alpha=45{,}0°$ con l'asse delle *x*.

Calcola quale angolo forma con l'asse delle *x* lo stesso lampo di luce per un astronave che, rispetto al laboratorio, si muove nella direzione positiva dell'asse *x* con velocità $v=c/3$.

Soluzione

Applicando la "composizione relativistica delle velocità", calcoliamo le componenti della velocità del lampo luminoso nel riferimento dell'astronave:

$$u'_x=\frac{u_x+v}{1+u_x v/c^2}=\frac{c\cos 45°-c/3}{1-c^2\cos 45°/3c^2}\simeq 0{,}489\,c \quad ;$$

$$u'_y=\frac{u_y}{\gamma(1+u_x v/c^2)}=\frac{c\,sen\,45°\sqrt{1-1/9}}{1-c^2\cos 45°/3c^2}\simeq 0{,}872\,c \quad .$$

Possiamo verificare che $\sqrt{u'^2_x+u'^2_y}\simeq\sqrt{(0{,}489\,c)^2+(0{,}872\,c)^2}\simeq c$, in accordo con il fatto che la velocità della luce nel vuoto è *c* in tutti i RI.

L'angolo nel riferimento dell'astronave misura quindi:

$$\alpha'=arctg\frac{u'_y}{u'_x}=arctg\frac{u_y}{\gamma(u_x+v)}\simeq arctg\frac{0{,}872\,c}{0{,}489\,c}\simeq 60{,}7° \quad .$$

Problema 4.3 (*Composizione velocità - McMillan* 1.20)

Due astronavi si avvicinano l'una all'altra. Nel riferimento della Terra esse hanno la stessa velocità (in modulo) e la loro velocità relativa di avvicinamento è $v_{rel}=0{,}70\,c$.

Determina la velocità di ciascuna astronave nel riferimento della Terra.

Soluzione

Indichiamo con v e $-v$ le velocità delle due astronavi nel riferimento della Terra.

Nel riferimento della seconda astronave la Terra si muove con velocità v, mentre la prima astronave si muove con velocità v_{rel}, per cui:

$$u'_x=\frac{u_x+v}{1+u_x v/c^2} \;\Rightarrow\; v_{rel}=\frac{v+v}{1+v^2/c^2}=\frac{2v}{1+v^2/c^2} \quad .$$

Sostituiamo per semplicità il valore numerico di v_{rel}:

$$0{,}7\,c=\frac{2\beta c}{1+\beta^2} \;\Rightarrow\; 0{,}7\,\beta^2-2\beta+0{,}7=0 \;\Rightarrow\; \beta=\frac{1-\sqrt{1-0{,}49}}{0{,}7}\simeq 0{,}41 \quad .$$

Quindi le velocità delle astronavi nel riferimento della Terra erano: $\pm v\simeq\pm 0{,}41\,c$.

Abbiamo scartato la seconda soluzione dell'equazione di secondo grado in quanto non rispettava il vincolo $\beta<1$.

Problema 4.4 (*Velocità della luce in un mezzo in movimento - McMillan* 1.23)

Quando la luce si propaga in un mezzo materiale in movimento, allora la sua velocità dipende dal moto di tale mezzo. Questo effetto fu scoperto e misurato da Fizeau nel 1851 nel caso dell'acqua e fu inizialmente interpretato come un indizio del fatto che la luce fosse parzialmente "trascinata" dal mezzo di propagazione, e quindi anche dall'etere.

Considera un serbatoio in cui l'acqua si muove con velocità v ed un fascio di luce che attraversa il serbatoio nella stessa direzione del flusso dell'acqua.

Determina la velocità u della luce misurata nel riferimento del laboratorio e scrivi l'approssimazione valida nel caso in cui $v \ll c$.

Soluzione

Sappiamo dall'ottica ondulatoria che la velocità della luce in un mezzo in quiete è $v_l = c/n$, dove n è l'indice d rifrazione del mezzo. Se il mezzo è in movimento, dobbiamo comporre la velocità della luce rispetto al mezzo con la velocità del mezzo rispetto al laboratorio:

$$u = \frac{v_l + v}{1 + v_l v/c^2} = \frac{c/n + v}{1 + v/(nc)} = \frac{c}{n} \frac{1 + vn/c}{1 + v/(nc)} = \frac{c}{n} \frac{1 + \beta n}{1 + \beta/n} \quad .$$

Utilizziamo lo sviluppo di Taylor al primo ordine per $v \ll c \;\Rightarrow\; \beta \ll 1 \;:\; \left(1 + \frac{\beta}{n}\right)^{-1} \simeq 1 - \frac{\beta}{n}$.

Ricaviamo quindi l'approssimazione:

$$u = \frac{c}{n} \frac{1 + \beta n}{1 + \beta/n} \simeq \frac{c}{n} (1 + \beta n)\left(1 - \frac{\beta}{n}\right) \simeq \frac{c}{n}\left(1 + \beta n - \frac{\beta}{n}\right) = \frac{c}{n} + \frac{c}{n} \cdot \frac{v}{c} \frac{n^2 - 1}{n} = \frac{c}{n} + v\left(1 - \frac{1}{n^2}\right)$$

che coincide con il risultato sperimentale di Fizeau.

Problema 4.5 (*Composizione velocità - McMillan* 1.25)

Nel riferimento della Terra due astronavi A e B vengono viste avvicinarsi lungo direzioni perpendicolari: l'astronave A ha velocità $u_y = -0{,}90\,c$ e l'astronave B ha velocità $u_x = +0{,}90\,c$.

Determina la velocità dell'astronave A nel riferimento dell'astronave B.

Soluzione

Nel riferimento S della Terra la velocità dell'astronave A ha componenti $\vec{u} \equiv (0\,, -0{,}90\,c)$, mentre nel riferimento S' dell'astronave B la velocità della Terra ha componenti $\vec{v} \equiv (-0{,}90\,c\,, 0)$.

Applichiamo la composizione delle velocità:

$$u'_x = \frac{u_x + v}{1 + u_x v / c^2} = \frac{0 - 0{,}90\,c}{1 - 0 \cdot 0{,}90\,c} = -0{,}90\,c \quad ;$$

$$u'_y = \frac{u_y}{\gamma (1 + u_x v / c^2)} = \frac{-0{,}90\,c \cdot \sqrt{1 - 0{,}90^2}}{1 - 0 \cdot 0{,}90\,c} \simeq -0{,}39\,c \quad .$$

Quindi la velocità richiesta ha modulo:

$$u' = \sqrt{u'^2_x + u'^2_y} \simeq c\sqrt{0{,}90^2 + 0{,}39^2} \simeq 0{,}98\,c \quad .$$

Problema 4.6 (*Composizione velocità - McMillan* 1.53)

Un'astronave si allontana dalla Terra con velocità v e lancia in avanti una navicella con velocità v rispetto all'astronave. Il pilota della navicella lancia in avanti una sonda con velocità v rispetto alla navicella.

Determina le velocità della navicella e della sonda rispetto alla Terra.

Soluzione

Applichiamo prima la composizione relativistica delle velocità per determinare la velocità della navicella rispetto alla Terra:

$$u'_x = \frac{u_x + v}{1 + u_x v / c^2} = \frac{v + v}{1 + v \cdot v / c^2} = \frac{2v}{1+\beta^2} \quad .$$

Quindi componiamo la velocità della navicella rispetto alla Terra con quella della sonda rispetto alla navicella:

$$u''_x = \frac{u'_x + v}{1 + u'_x v / c^2} = \frac{\frac{2v}{1+\beta^2} + v}{1 + \frac{2v^2/c^2}{1+\beta^2}} = \frac{\frac{(3+\beta^2)v}{1+\beta^2}}{\frac{1+3\beta^2}{1+\beta^2}} = \frac{3+\beta^2}{1+3\beta^2} v \quad .$$

Come parziale verifica, consideriamo i casi limite:

- se $\beta \to 0$, allora $u''_x \to 3v$, in accordo con le TG;
- se $\beta \to 1$, allora $v \to c$, e quindi $u''_x \to c$, in accordo con il fatto che la velocità della luce nel vuoto è la velocità limite per la trasmissione di un segnale.

5. Spazio e tempo nella Relatività Speciale

Spazio e tempo nella meccanica newtoniana

Se prendiamo sul serio i postulati della RS, dobbiamo essere disposti ad accettarne le conseguenze, che sono paradossali nel senso letterale del termine, in quanto vanno decisamente contro l'opinione comune. In primo luogo, come abbiamo accennato in precedenza, dobbiamo rinunciare alla concezione newtoniana di spazio e tempo come concetti assoluti.

- In realtà, mentre per quanto riguarda il concetto di tempo Einstein ha compiuto una vera e propria rivoluzione, il cambiamento nell'idea di spazio è avvenuto in modo più graduale.

Nei "*Principi matematici della filosofia naturale*", pubblicati nel 1687, Newton aveva affermato:

"Il tempo assoluto, vero, matematico, in sé e per sua natura senza relazione ad alcunché di esterno, scorre uniformemente; quello relativo, apparente e volgare, è una misura sensibile ed esterna della durata per mezzo del moto, che comunemente viene impiegata al posto del vero tempo: tali sono l'ora, il giorno, il mese, l'anno.

Lo spazio assoluto, per sua natura senza relazione ad alcunché di esterno, rimane sempre uguale e immobile; lo spazio relativo è una dimensione mobile o misura dello spazio assoluto, che i nostri sensi definiscono in relazione alla sua posizione rispetto ai corpi, ed è comunemente preso al posto dello spazio immobile.

Il moto assoluto è la traslazione di un corpo da un luogo assoluto in un luogo assoluto, il relativo da un luogo relativo in un luogo relativo".

Newton era però consapevole dei problemi posti dalla sua definizione, tanto da precisare: "“È veramente un problema di grande difficoltà lo scoprire e il distinguere efficacemente i moti veri di corpi particolari da quelli apparenti, perché le parti dello spazio immobile nelle quali quei moti si compiono, non possono in alcun modo venire sotto l'osservazione dei nostri sensi".

Molti studiosi, a partire da Leibniz ai primi del Settecento fino a Mach al termine dell'Ottocento, avevano criticato queste concezioni di Newton, in quanto lo spazio assoluto rimaneva un ente puramente ideale, non conoscibile sperimentalmente, mentre in pratica erano misurabili solo posizioni e spostamenti relativi.

Questo problema, che rimaneva irrilevante in meccanica, era però ritornato di attualità, come abbiamo visto, con l'elettromagnetismo, in quanto sembrava che lo spazio assoluto, concretizzato nell'etere, fosse necessario per individuare la velocità di propagazione delle onde elettromagnetiche.

Sincronizzare due orologi

Per poter eseguire misure di grandezze fisiche in un RI, è indispensabile che gli orologi posti in due luoghi diversi segnino lo stesso tempo, ovvero siano tra loro *sincronizzati*.

Questo requisito viene dato per scontato in una concezione newtoniana, in cui il tempo è assoluto, e sarebbe banalmente verificato se disponessimo di un sistema di comunicazione istantanea.

Nella RR abbiamo però stabilito che nessun segnale può viaggiare con velocità infinita, ma, al massimo, con velocità c.

Potremmo allora pensare di sincronizzare gli orologi localmente (ovvero in uno stesso punto) e poi di spostarli, ma nessuna legge fisica può garantirci che, dopo la sincronizzazione locale, gli orologi non perdano tale proprietà durante il trasporto (anzi, vedremo che questo è ciò che in genere avverrebbe, a meno che non vengano prese particolari precauzioni).

Sembra quindi ragionevole sincronizzare gli orologi a distanza, cioè metterli in sincronia senza spostarli dal punto in cui misureranno il tempo.

Seguendo Einstein, useremo dei segnali di luce per trasmettere le informazioni e faremo l'ipotesi che la luce impieghi lo stesso intervallo di tempo nell'andata e nel ritorno.

Una delle possibili procedure di sincronizzazione è la seguente:

- Consideriamo due punti A e B e misuriamo la distanza *d* tra di essi.
- Inviamo un segnale luminoso da A verso B.
- Se, al momento dell'invio del segnale, l'orologio posto in A segnava un tempo t_A, allora al momento della ricezione regoliamo l'orologio posto in B in modo che segni un tempo $t_B = t_A + d/c$, ovvero il tempo in cui è stato inviato il segnale secondo l'orologio posto in A aumentato del tempo impiegato dal segnale per compiere la distanza *d* tra A e B.

A questo punto, se ci troviamo in A e riceviamo un segnale da un punto P, la cui distanza da A misura *l*, allora per sapere quando il segnale è stato spedito dobbiamo sottrarre al tempo segnato dal nostro orologio nell'istante della ricezione il tempo di percorrenza:

$$t_{invio\ da\ P} = t_{ricezione\ in\ A} - l/c \quad .$$

Quindi, a parità di tempo di ricezione, il tempo di invio è tanto più indietro nel passato, quanto più P è lontano da A.

Tra gli studiosi di relatività, si discute sul significato di questa definizione di sincronizzazione.

Infatti, se volessimo verificare sperimentalmente che la luce ha la stessa velocità *c* sia nel percorso di andata che in quello di ritorno, dovremmo misurare la distanza AB (il che non pone particolari problemi) e i tempi impiegati a percorrere sia il viaggio di andata che quello di ritorno.

Ma, per misurare la differenza tra il tempo di arrivo in B e quello di partenza da A (o viceversa), è necessario disporre di due orologi sincronizzati posti in A e in B, e, come abbiamo visto, la procedura di sincronizzazione si basa sulla conoscenza della velocità *c* della luce, per cui ci troviamo in un circolo vizioso.

In realtà, quindi, la procedura che abbiamo descritto è una *definizione* di cosa si intende per sincronizzazione tra due orologi posti a distanza, che è in accordo con il *postulato* della costanza della velocità della luce. Di conseguenza, non possiamo dimostrare che la nostra definizione è corretta, ma solo che essa è *consistente*, ovvero che non porta a contraddizioni quando viene utilizzata per la misura degli intervalli di tempo.

Una procedura più dettagliata, ma equivalente alla precedente, è quella descritta dal prof. Fabri come segue.

- Verifichiamo che i due orologi siano in quiete relativa, ovvero che le loro distanze non cambino, controllando che il tempo di andata e ritorno di un impulso luminoso rimanga sempre lo stesso.
- Per assicurarci che i due orologi marcino secondo lo stesso ritmo, inviamo dall'orologio A due impulsi separati da un

intervallo Δt (secondo le letture di A) e verifichiamo che i tempi di arrivo dei due impulsi all'orologio B siano anch'essi separati dallo stesso intervallo Δt (questa volta secondo le letture di B).
Se così non fosse, correggeremo la marcia di uno dei due orologi.

- Per sincronizzare i due orologi, un impulso viene inviato da A a B e riflesso istantaneamente ad A.
  Se l'impulso viene inviato da A al tempo t_1 (di A), riflesso da B al tempo t_2 (di B) e ricevuto da A al tempo t_3 (di A), diciamo che A e B sono sincronizzati se t_2 è la media aritmetica tra t_1 e t_3 .
  In caso contrario, correggiamo lo zero di B in modo che la condizione sia soddisfatta.

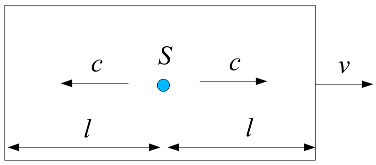
Abbiamo inserito questa discussione anche perché risulti chiaro che i risultati della RR, e in particolare *gli effetti che discuteremo in questa sezione* <u>*non*</u> *dipendono dal fatto che l'informazione portata da un segnale luminoso arriva "in ritardo" rispetto alla sua emissione.*
In altri termini, tutti gli osservatori (che siano esseri umani o dispositivi di misura) posti nei vari riferimenti sono "intelligenti", nel senso che tengono conto del fatto che i segnali luminosi impiegano un tempo non nullo per la loro propagazione.

Relatività della simultaneità

Supponiamo di avere un RI S in cui tutti gli orologi sono stati sincronizzati tra loro mediante la procedura che abbiamo descritto in precedenza, ed un secondo RI S', in moto rettilineo uniforme rispetto ad S, a tutti gli orologi del quale è stata applicata la medesima procedura di sincronizzazione.
Dai riferimenti S ed S' osserviamo due eventi A e B, che avvengono in due luoghi diversi, ed un fisico che si trova in S afferma che i due eventi sono *simultanei* o contemporanei.
Ci chiediamo: gli eventi A e B saranno simultanei anche in S'?
In altri termini: se i tempi segnati dai due orologi di S posti nei punti in cui accadono gli eventi sono uguali, avverrà lo stesso anche per i due orologi di S' posti negli stessi punti?

Come vedremo, la risposta sarà negativa, in quanto dai postulati della relatività segue che *il concetto di simultaneità è relativo*.
Più precisamente, *due eventi che in un certo riferimento avvengono nello stesso istante (sono simultanei), ma in luoghi diversi, verranno visti accadere in due istanti diversi (ovvero* <u>*non*</u> *saranno simultanei) in un secondo riferimento che si muove di moto rettilineo uniforme rispetto al primo*.
Quindi non potremo affermare che gli eventi A e B sono simultanei in assoluto, ma solo che *A e B sono simultanei nel riferimento S, mentre non sono simultanei nel riferimento S'.*

Per dimostrare questa affermazione, Einstein propose un esperimento ideale (*Gedankenexperiment*), che qui riportiamo con qualche modifica (dovuta a Landau).



Consideriamo un vagone ferroviario di lunghezza $2l$ in moto con velocità v rispetto al suolo, e supponiamo che da una sorgente S posta nel punto medio del vagone vengano emessi due segnali luminosi, uno che si propaga nella direzione del moto del treno e l'altro in direzione opposta.

Ragioniamo sui tempi impiegati dai raggi luminosi per raggiungere le due estremità del vagone nel riferimento del treno e nel riferimento del suolo.

i. Nel riferimento del treno, le estremità del vagone sono ferme, quindi la luce le raggiunge nello stesso istante: $t_1'=t_2'=l/c$.

   Pertanto, nel riferimento del treno gli eventi "la luce raggiunge la testa del vagone" e "la luce raggiunge la coda del vagone" sono simultanei.

ii. Nel riferimento del suolo, le estremità del vagone si muovono con velocità v insieme al treno, quindi la luce raggiunge prima la coda del vagone, che le viene incontro, e solo dopo la testa del vagone, che le si allontana.

   Quindi nel riferimento del suolo i due eventi <u>non</u> sono simultanei.

Dobbiamo pertanto concludere che il *concetto di simultaneità è relativo*, ovvero il fatto che due eventi avvengano nello stesso istante o meno dipende dal riferimento in cui ci troviamo.

■ Per risolvere il problema dal punto di vista quantitativo, possiamo utilizzare le TL.

Indichiamo con S' il riferimento del treno, con S quello del suolo, e scegliamo l'origine del sistema di coordinate nel punto medio del vagone. In questo caso, gli eventi "la luce raggiunge la testa del vagone" e "la luce raggiunge la coda del vagone" hanno in S' coordinate $x'=\mp l$ e $t'=l/c$.

In S essi avvengono nei tempi: $t_{12}=\dfrac{t'+vx'/c^2}{\sqrt{1-v^2/c^2}}=\dfrac{l/c\mp vl/c^2}{\sqrt{1-v^2/c^2}}=\dfrac{l}{c}\dfrac{1\mp\beta}{\sqrt{1-\beta^2}}=\dfrac{l}{c}\sqrt{\dfrac{1\mp\beta}{1\pm\beta}}$

che sono diversi tra loro (e diversi dai tempi $t_1'=t_2'=l/c$) nella maniera che avevamo previsto qualitativamente.

In particolare: $\Delta t=t_1-t_2=\gamma\dfrac{l}{c}(1+\beta-1+\beta)=2\gamma l\dfrac{v}{c^2}$.

■ Notiamo che, nonostante la presenza del fattore $\gamma v/c^2$, l'effetto della relatività della simultaneità può diventare rilevante anche a piccole velocità, se la distanza l tra i due eventi è molto grande.

Da questa osservazione ha origine il cosiddetto "paradosso di Andromeda", esposto da Roger Penrose ne "*La mente nuova dell'imperatore*", e ispirato al cosiddetto "argomento di Rietdijk e Putnam".

Vediamo invece come avremmo ragionato utilizzando la meccanica newtoniana.

i. Nel riferimento del treno, non sarebbe cambiato nulla, in quanto la velocità della luce dipende solo dalle proprietà del mezzo di propagazione, e non dalla velocità della sorgente.

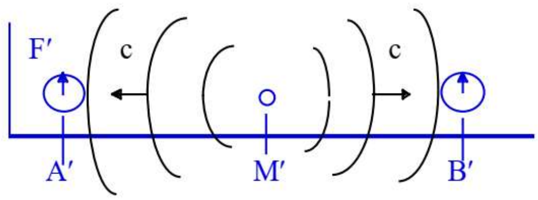
ii. Il riferimento del suolo è in moto con velocità $-v$ rispetto a quello del treno.

Di conseguenza, applicando le TG, avremmo trovato che la luce si propaga con velocità $c-v$ verso la coda del vagone e $c+v$ verso la sua testa. I tempi impiegati sono quindi:

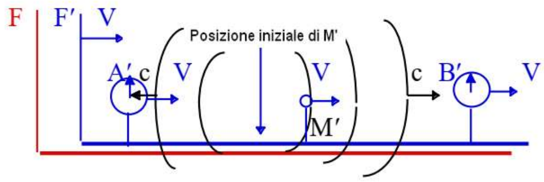
$$(c-v)t_1+vt_1=l \;\Rightarrow\; t_1=\frac{l}{c} \quad \text{e} \quad (c+v)t_2=l+vt_2 \;\Rightarrow\; t_2=\frac{l}{c} \quad .$$

Come era prevedibile, nella meccanica newtoniana (non relativistica) gli eventi “la luce raggiunge la testa del vagone” e “la luce raggiunge la coda del vagone” sono simultanei in tutti i riferimenti e avvengono in un istante che è lo stesso in tutti i riferimenti, in accordo con il concetto newtoniano di tempo assoluto.

- In maniera più intuitiva, la relatività della simultaneità può essere messa in evidenza anche dal seguente procedimento di sincronizzazione degli orologi.



Supponiamo di trovarci in un RI F' (F come “*frame*”), e che un segnale luminoso venga emesso dal punto medio M' del segmento A'B'.
Due orologi in quiete posti in A' e B' saranno sincronizzati (in F') dall'arrivo simultaneo dei segnali emessi da M'.

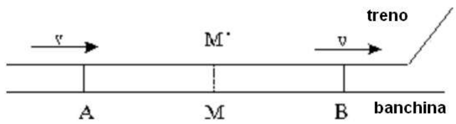


Se però ci poniamo in un RI F tale che F' si muova a velocità V rispetto ad F, vedremo che i segnali emessi da M' raggiungeranno l'orologio A' prima di quello posto in B' (in quanto A' “va incontro” al segnale luminoso, mentre B' se ne allontana).
Di conseguenza, un fisico posto in F dovrà concludere che l'orologio posto in A' è partito prima di quello posto in B', e, pertanto, i due orologi, che erano sincronizzati in F', non lo sono in F.
In generale, gli orologi posti “a destra” (nel verso in cui il riferimento F' si muove rispetto ad F) saranno in ritardo rispetto a quelli posti “a sinistra”; inoltre, in accordo con le TL, tale ritardo sarà direttamente proporzionale alla distanza tra gli orologi.

- Riportiamo anche l'esempio originale di Einstein, tratto da “*Relatività: esposizione divulgativa*”.

“Le nostre considerazioni sono state finora svolte rispetto a un particolare corpo di riferimento, a cui abbiamo dato il nome di "banchina ferroviaria". Supponiamo che un treno molto lungo viaggi sulle rotaie con velocità costante v nella direzione indicata dalla figura. Le persone che viaggiano su questo treno useranno vantaggiosamente il treno come corpo rigido di riferimento; esse considerano tutti gli eventi in riferimento al treno.
Ogni evento, poi, che ha luogo lungo la linea ferroviaria ha pure luogo in un determinato punto del treno. Anche la definizione di simultaneità può venir data rispetto al treno nello stesso preciso modo in cui venne data rispetto alla banchina. Ora però si presenta, come conseguenza naturale, la seguente domanda:
Due eventi (per esempio i due colpi di fulmine A e B) che sono simultanei rispetto alla "banchina ferroviaria" saranno tali anche rispetto al treno? Mostreremo subito che la risposta deve essere negativa.
Allorché diciamo che i colpi di fulmine A e B sono simultanei rispetto alla banchina intendiamo: i raggi di luce provenienti dai punti A e B dove cade il fulmine si incontrano l'uno con l'altro nel punto medio M' dell'intervallo AB

della banchina. Ma gli eventi A e B corrispondono anche alle posizioni A e B sul treno.



Sia M' il punto medio dell'intervallo sul treno in moto. Proprio quando si verificano i bagliori del fulmine, questo punto M' coincide naturalmente con il punto M, ma esso si muove verso la destra del diagramma con la velocità *v* del treno. Se un osservatore seduto in treno nella posizione M' non possedesse questa velocità, allora egli rimarrebbe permanentemente in M e i raggi di luce emessi dai bagliori del fulmine A e B lo raggiungerebbero simultaneamente, vale a dire s'incontrerebbero proprio dove egli è situato.
Tuttavia nella realtà (considerata con riferimento alla banchina ferroviaria), egli si muove rapidamente verso il raggio di luce che proviene da B, mentre corre avanti al raggio di luce che proviene da A. Pertanto, l'osservatore vedrà il raggio di luce emesso da B prima di vedere quello emesso da A. Gli osservatori che assumono il treno come loro corpo di riferimento debbono perciò giungere alla conclusione che il lampo di luce B ha avuto luogo prima del lampo di luce A. Perveniamo così al seguente importante risultato: gli eventi che sono simultanei rispetto alla banchina non sono simultanei rispetto al treno e viceversa (*relatività della simultaneità*); ogni corpo di riferimento ha il suo proprio tempo particolare: un'attribuzione di tempo è fornita di significato solo quando ci venga detto a quale corpo di riferimento tale attribuzione si riferisce.
Orbene, prima dell'avvento della teoria della relatività, nella fisica si era sempre tacitamente ammesso che le attribuzioni di tempo avessero un significato assoluto, cioè fossero indipendenti dallo stato di moto del corpo di riferimento. Abbiamo però visto or ora che tale ipotesi risulta incompatibile con la più naturale definizione di simultaneità.”

- Delle idee sulla relatività della simultaneità simili a quelle di Einstein erano già state elaborate da Henri Poincaré; ne riportiamo una citazione del 1898 da “*La mesure du temps*”.

“Non abbiamo alcuna intuizione diretta dell’uguaglianza di due intervalli temporali; coloro che ritengono di avere tale intuizione sono vittime di un’illusione. I tempi debbono essere definiti in maniera che le leggi della meccanica siano più semplici possibili. In altre parole, non c’è una maniera di misurare il tempo che sia più vera di un’altra; quella generalmente adottata è solamente più comoda. [...]
Bisogna cominciare con l’ammettere che che la luce abbia una velocità costante, in particolare che la sua velocità sia la medesima in tutte le direzioni. Questo è un postulato senza il quale sarebbe impossibile intraprendere qualsiasi misura di questa velocità. Questo postulato non potrà mai essere verificato direttamente dall’esperienza; potrà invece essere da questa contraddetto, se i risultati di diverse misure saranno contrastanti. [...]
È difficile separare il problema di carattere qualitativo della simultaneità da quello di carattere quantitativo della misura del tempo; sia che si usi il cronometro, sia che si debba tener conto della velocità di propagazione, come quella della luce, velocità che però non si può misurare senza una misura del tempo. [...]
Scegliamo perciò queste regole, non perché siano vere, ma perché sono le più convenienti, e potremmo riassumerle dicendo che la simultaneità di due eventi, o l’ordine in cui si succedono, così come l’uguaglianza di due intervalli temporali, si devono definire in modo tale che le leggi naturali assumano la forma più semplice possibile. In altre parole, tutte queste regole, tutte queste definizioni sono soltanto il frutto di un inconscio opportunismo”.

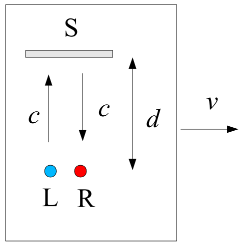
- Vediamo anche come Poincaré riassumeva le sue conclusioni nel 1902 ne “*La Science et l’Hypothese*”.

1. “Non esiste lo spazio assoluto e noi non conosciamo che movimenti relativi. [...]
2. Non esiste il tempo assoluto; dire che due durate sono uguali, è un’affermazione che per sé non ha senso e che ne può acquisire uno solo per convenzione [...]

3. Non solo noi non abbiamo alcuna intuizione diretta dell'uguaglianza di due durate, ma non abbiamo neppure quella di simultaneità di due eventi che avvengano in due luoghi diversi;
4. Infine la nostra geometria euclidea non è, essa stessa, che una sorta di convenzione linguistica; noi potremmo enunciare i fatti della meccanica in relazione ad uno spazio non euclideo che sarebbe un riferimento meno comodo, ma comunque legittimo come il nostro spazio ordinario.
Quindi lo spazio assoluto, il tempo assoluto, la stessa geometria non sono condizioni necessarie alla meccanica".

Dilatazione dei tempi

Introduciamo un "orologio" ideale che ha il pregio di essere particolarmente semplice da analizzare dal punto di vista didattico, ovvero l'*orologio a luce*.

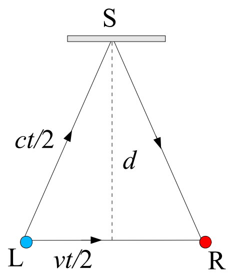


Analizziamo il suo funzionamento:

- una sorgente L emette un segnale luminoso verso l'alto;
- il segnale è riflesso verso il basso da uno specchio S posto ad una distanza d dalla sorgente;
- il segnale è assorbito da un rivelatore R che vede il segnale riflesso, fa scattare un contatore, e trasmette alla sorgente il comando di emettere istantaneamente un nuovo segnale.

L'intervallo di tempo tra due scatti successivi del contatore è il tempo impiegato dalla luce a compiere un percorso di andata e ritorno: $\tau = 2d/c$. Quindi il periodo dell'orologio dipende esclusivamente dalla distanza fra sorgente-rivelatore e specchio.

Supponiamo ora che l'orologio a luce si muova rispetto al nostro laboratorio, ad esempio perché si trova su un'astronave che si muove con velocità v rispetto alla Terra.



Mentre la luce sale, lo specchio si sposta, e lo stesso fa anche il rivelatore; perciò la luce che viene rivelata da R ha percorso un cammino obliquo.
Da questo fatto possiamo dedurre che il tempo t impiegato dalla luce per compiere il percorso LSR nel sistema di riferimento della Terra deve essere maggiore rispetto al tempo τ che la luce impiega a compiere lo stesso percorso nel sistema di riferimento dell'astronave.
Infatti, la luce, che per il secondo postulato della RS viaggia a velocità c in tutti i riferimenti, nel riferimento della Terra percorre un cammino più lungo, e quindi impiega un tempo maggiore.
Applicando il teorema di Pitagora, otteniamo:

$$c^2\frac{t^2}{4}=v^2\frac{t^2}{4}+d^2 \;\Rightarrow\; (c^2-v^2)t^2=4d^2 \;\Rightarrow\; t=\frac{2d}{\sqrt{c^2-v^2}}=\frac{2d}{c}\frac{1}{\sqrt{1-v^2/c^2}}=\frac{\tau}{\sqrt{1-v^2/c^2}} \quad .$$

Abbiamo ottenuto $\boldsymbol{t=\gamma\tau}$; quindi il periodo del nostro orologio (ovvero l'intervallo di tempo compreso tra l'emissione e l'assorbimento del lampo di luce) ha una durata diversa nei due sistemi di riferimento, ed esattamente:

- è *minimo nel riferimento in cui l'orologio si trova in quiete*;
- è maggiore in un riferimento in cui l'orologio è in movimento;
- la sua durata aumenta all'aumentare della velocità v dell'orologio nel riferimento considerato.

E' naturale chiedersi se il risultato che abbiamo trovato per un "orologio a luce" sarà valido anche per tutti gli altri tipi di orologio, quali quelli meccanici, atomici, biologici.

La risposta è positiva. Infatti, se così non fosse, un orologio a luce ed uno di tipo diverso, che sono stati regolati per andare d'accordo in un certo riferimento, segnerebbero tempi diversi in un riferimento che si muove rispetto al primo.

Ma questo fatto ci permetterebbe di identificare un riferimento privilegiato (quello in cui i due orologi segnano lo stesso tempo), violando così il PR.

Di conseguenza, l'intervallo di tempo tra due eventi misurato da un osservatore rispetto al quale tali eventi avvengono nello stesso luogo è sempre minore dell'intervallo di tempo tra gli stessi eventi misurati da un altro osservatore in moto relativo (per il quale i due eventi avvengono in luoghi diversi).

Consideriamo, per esempio, la successione di eventi costituita dagli scatti delle lancette di un orologio.

Gli osservatori in moto rispetto all'orologio lo vedranno procedere più lentamente di quanto non lo veda un osservatore solidale ad esso; e tanto maggiore è la velocità degli osservatori (rispetto all'orologio), tanto più lento esso sarà visto scandire il tempo.

Al fenomeno che abbiamo descritto è stato dato il nome, decisamente poco appropriato, ma purtroppo divenuto tradizionale, di **dilatazione dei tempi**.

Spesso lo troviamo espresso nella forma: "Il tempo segnato da un orologio dipende dalla sua velocità; in particolare un orologio in movimento va più lento rispetto a quando è fermo", o più brevemente: "Gli orologi in moto rallentano", o addirittura: "In un sistema di riferimento in moto il tempo scorre più lentamente".

Attenzione: le affermazioni precedenti sono tutte gravemente errate, in quanto contrarie al PR!

Infatti, se questo enunciato fosse corretto, allora ci permetterebbe di determinare un riferimento privilegiato, ovvero quello in cui un generico orologio "va più veloce", a cui potremmo attribuire uno stato di quiete assoluta. Inoltre, in base all'entità del ritardo subito dall'orologio, potremmo determinare la sua velocità assoluta.

Per comprendere che il tempo segnato da un orologio non dipende dal suo stato di moto, è sufficiente osservare che *il fenomeno della "dilatazione dei tempi" è simmetrico rispetto allo scambio dei due osservatori*.

Supponiamo ad esempio di avere due astronavi A e B, entrambe dotate di un orologio a luce, che si muovono l'una rispetto all'altra di moto rettilineo uniforme con velocità relativa v.

Ripetendo il ragionamento precedente, vediamo che:

- A dice a B: "il <u>tuo</u> orologio sta <u>rallentando</u> di un fattore γ";
- B risponde ad A: "no, è il <u>tuo</u> orologio che sta <u>rallentando</u> di un fattore γ".

Ognuno dei due piloti osserva nell'orologio dell'altro lo <u>stesso</u> difetto che l'altro attribuisce al suo, per cui non è possibile distinguere i due riferimenti.

- Naturalmente, risulta spontaneo chiedersi quale dei due piloti abbia ragione. La risposta è "entrambi".

Infatti, l'astronauta A misura il tempo segnato dall'orologio in B confrontandolo con due orologi sincronizzati con il proprio orologio e posti nei punti in cui si trova l'orologio di B rispettivamente nel momento in cui emette il segnale luminoso e nel momento in cui lo riceve (o, in generale, "all'inizio" ed "alla fine" dell'intervallo di tempo da misurare). Come sappiamo, però, tali orologi, sincronizzati nel RI di A, non lo sono nel RI di B (a causa della relatività della simultaneità), per cui, confrontandolo con <u>questi</u> orologi, quello di B appare rallentato di un fattore γ.
In maniera analoga, quando l'astronauta B afferma che l'orologio di A sta rallentando, egli lo sta confrontando con due orologi sincronizzati con il proprio e posti nei punti in cui si trova l'orologio di A nel momento iniziale ed in quello finale. Anche in questo caso, A non sarà d'accordo sul fatto che questi orologi siano sincronizzati.
In ogni caso, la conclusione è che ciascun orologio appare "lento" quando viene confrontato con degli orologi sincronizzati in un <u>diverso</u> RI.

- Spesso in didattica si spiega questo fatto affermando che l'effetto non è "intrinseco" al funzionamento dell'orologio, ma solo apparente.

Questa spiegazione non è sbagliata, ma è difficile presentarla correttamente, in modo che non venga confusa con l'interpretazione "ingenua" che va contro il PR. Inoltre essa rischia di aprire la strada a una serie di fraintendimenti filosofici (presunto ruolo dell'osservatore, soggettività dei dati dell'esperienza) che è bene evitare.

E' preferibile affermare che *non si può parlare di tempo assoluto*, ma che *ciascun orologio segna il proprio tempo*, che dipende dal modo in cui esso percorre lo spazio-tempo.

La quantità τ introdotta nell'esempio precedente, ovvero il tempo segnato dall'orologio a luce nel riferimento in cui esso si trova in quiete, viene chiamata *tempo proprio*.

In generale, chiamiamo **tempo proprio** *l'intervallo di tempo tra due eventi misurato da un osservatore in quiete*, ovvero *che vede gli eventi verificarsi in uno stesso punto del proprio riferimento* (quando questo è possibile).
Ripetiamo che il risultato $t=\gamma\tau$ trovato in precedenza significa che *il tempo proprio è il più breve intervallo di tempo che separa due eventi dati.*

Ripetiamo: per misurare il più breve intervallo di tempo che separa due eventi dati, è necessario porsi nel riferimento in cui tali eventi avvengono nello stesso punto (quando questo è possibile).

In pratica, *per misurare l'intervallo di tempo proprio tra due eventi serve un solo orologio* (quello dell'osservatore che vede i due eventi avvenire nello stesso luogo), mentre *per misurare l'intervallo di tempo coordinato* (non proprio) *ne servono due*: uno posto nella posizione in cui avviene il primo evento e l'altro nella posizione del secondo.

Avremmo potuto ricavare il fenomeno della “dilatazione dei tempi” in maniera più formale, utilizzando le TL.

Partiamo dalla formula: $t=\gamma(t'+\beta x'/c)$ e teniamo conto del fatto che l'orologio si trova in quiete nel sistema S' che consideriamo in movimento (quello “con gli apici”), per cui i due eventi considerati avranno diverse coordinate temporali t_1' e t_2' ma la stessa coordinata spaziale x_1' :

$$\begin{cases} t_1=\gamma(t_1'+\beta x_1'/c) \\ t_2=\gamma(t_2'+\beta x_1'/c) \end{cases} \Rightarrow t_2-t_1=\gamma(t_2'-t_1') \quad \text{c.v.d.}$$

- Quando nel 1904 Lorentz determinò la forma definitiva delle TL, si rese conto che esse, oltre a coinvolgere le coordinate spaziali, per garantire il risultato cercato dovevano prevedere una trasformazione anche per il tempo.

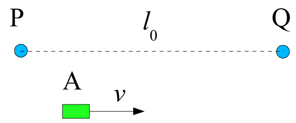
Egli, tuttavia, non attribuì significato fisico a questo fatto: chiamò “tempo locale” quello misurato in un riferimento in moto, ma, come scrisse egli stesso anni dopo la pubblicazione della teoria della relatività: “Io non pensai mai che questo tempo avesse niente a che fare con il tempo reale. Questo tempo reale per me era ancora rappresentato dalla più antica nozione classica di tempo assoluto, indipendente da ogni sistema di riferimento. Esisteva per me un solo tempo vero: consideravo la ma trasformazione del tempo solo come un'ipotesi di lavoro euristica, di modo che la teoria della relatività è davvero solo opera di Einstein”.

Anche Poincaré, sebbene ammettesse il carattere relativo e convenzionale dello spazio e del tempo, credeva che la convenzione classica fosse più conveniente, e continuò a distinguere fra tempo "vero" nell'etere e tempo "apparente" nei sistemi in movimento.

Affrontando la questione se sia necessaria una nuova convenzione dello spazio e del tempo, egli scrisse nel 1912: "Saremo obbligati a modificare le nostre conclusioni? Certamente no; avevamo adottato una convenzione perché sembrava conveniente e avevamo detto che niente potrebbe costringerci ad abbandonarla. Oggi alcuni fisici vogliono adottare una nuova convenzione. Non è che siano costretti a farlo; essi considerano questa nuova convenzione più conveniente; ecco tutto. E quelli che non sono di questa opinione possono legittimamente mantenere quella vecchia al fine di non disturbare le loro vecchie abitudini; e credo, detto tra noi, che questo è ciò che faranno per molto tempo a venire”.

Contrazione delle lunghezze

Supponiamo che dal pianeta P venga lanciata un'astronave A diretta con velocità v verso il pianeta Q; supponiamo inoltre che Q possa essere considerato in quiete nel riferimento di P.



Se nel riferimento di P l'astronave compie il viaggio in un tempo *t*, allora la distanza PQ misurata nel riferimento di P (in cui P e Q sono in quiete) è: $l_0=vt$.

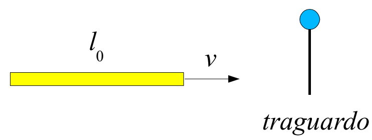
Osserviamo però che, per quanto abbiamo detto sulla dilatazione dei tempi, nel riferimento dell'astronave (in cui sono P e Q a muoversi con velocità $-v$) il viaggio è durato un tempo $\tau=t/\gamma$, per cui la distanza PQ misurata dall'astronave è: $l=v\tau$.

Otteniamo quindi: $\boldsymbol{l=\frac{l_0}{\gamma}=l_0\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}$.

In conclusione, la distanza tra i punti P e Q, ovvero la lunghezza del segmento PQ, è diversa nei due sistemi di riferimento, ed esattamente:

- è *massima* nel riferimento in cui il segmento PQ si trova in quiete;
- è minore in un riferimento in cui il segmento è in movimento;
- la lunghezza diminuisce all'aumentare della velocità del segmento nel riferimento considerato.

La quantità l_0 , ovvero la lunghezza di un un segmento misurata nel riferimento in cui esso si trova in quiete, viene chiamata **lunghezza propria**.



- Consideriamo un esempio, forse più concreto, in cui l_0 sia la lunghezza di un corpo materiale, e non una distanza astratta.

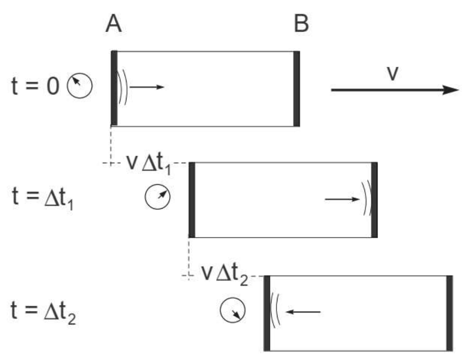
Supponiamo di avere un'asta, la cui lunghezza misurata in quiete sia l_0, che si muove con velocità v nel riferimento del laboratorio.

Per determinarne la lunghezza in tale riferimento, potremmo misurare il tempo Δt che l'asta impiega ad attraversare un “traguardo”, per cui $l_{lab}=v\,\Delta t$.

Nel riferimento in cui l'asta è in quiete il tempo Δt subisce una “dilatazione” $\Delta\tau=\gamma\,\Delta t$, mentre il “traguardo” si sposta verso l'asta con velocità $-v$, per cui: $l_0=v\,\Delta\tau=v\,\gamma\,\Delta t$.

Confrontando le due espressioni, ricaviamo ancora: $l_{lab}=\frac{l_0}{\gamma}$.

In conclusione, le dimensioni che un osservatore attribuisce ad un oggetto in quiete non sono le stesse di quelle attribuite da un osservatore in moto rispetto all’oggetto: le dimensioni nella direzione del moto subiscono una contrazione tanto maggiore quanto maggiore è la velocità dell’oggetto rispetto all’osservatore.



- In maniera equivalente, possiamo considerare un orologio a luce “longitudinale”, ovvero in moto con velocità v lungo la stessa direzione in cui la luce si propaga al suo interno.

Supponiamo che un impulso luminoso parta dalla sorgente A all'istante $t=0$.

Tenendo conto del moto dell'orologio, l'impulso raggiungerà lo specchio posto in B in un tempo t_1 dato dalla relazione:

$$ct_1=l+vt_1 \;\Rightarrow\; t_1=\frac{l}{c-v} \quad .$$

L'impulso verrà quindi riflesso dallo specchio, e tornerà al rivelatore in un tempo t_2 tale che:

$$vt_2 = l - ct_2 \;\Rightarrow\; t_2 = \frac{l}{c+v} \quad .$$

Il tempo complessivo impiegato dall'impulso luminoso a compiere il percorso di andata e ritorno nel riferimento del laboratorio sarà quindi:

$$t = t_1 + t_2 = \frac{l}{c-v} + \frac{l}{c+v} = \frac{2lc}{c^2-v^2} = \frac{2l}{c}\frac{1}{1-v^2/c^2} = \frac{2l}{c}\gamma^2 \quad .$$

Nel riferimento di quiete dell'orologio, invece, il tempo di andata e ritorno è: $\tau = \dfrac{2l_0}{c}$.

Sappiamo che questi due intervalli sono collegati dalla "dilatazione dei tempi": $t = \gamma\tau$.

Sostituendo, ricaviamo: $\dfrac{2l}{c}\gamma^2 = \gamma\dfrac{2l_0}{c} \;\Rightarrow\; l = \dfrac{l_0}{\gamma}$ c.v.d.

Attenzione: il risultato ottenuto è valido *solo per segmenti aventi la stessa direzione del moto.*

In generale, se la lunghezza di un segmento è l_0 nel suo riferimento di quiete S_0, allora la misura del segmento in un riferimento S in cui esso si muove con velocità v sarà:

- $l = \dfrac{l_0}{\gamma}$ se in S il segmento si muove longitudinalmente (ovvero con velocità v parallela al segmento stesso);
- $l = l_0$ se in S il segmento si muove trasversalmente (ovvero con velocità v perpendicolare al segmento stesso).
- Se, invece, il segmento è posto in modo da formare in S_0 un angolo α_0 con la velocità relativa v dei due riferimenti, allora dovremo considerare separatamente le sue componenti longitudinale e trasversale:

$$\begin{cases} l_{0x} = l_0 \cos\alpha_0 \;\Rightarrow\; l_x = l_{0x}/\gamma \\ l_{0y} = l_0\, sen\,\alpha_0 \;\Rightarrow\; l_y = l_{0y} \end{cases} \Rightarrow$$

$$l = \sqrt{l_x^2 + l_y^2} = \sqrt{\frac{l_0^2 \cos^2\alpha_0}{\gamma^2} + l_0^2\, sen^2\alpha_0} = l_0\sqrt{\cos^2\alpha_0(1-\beta^2) + sen^2\alpha_0} = l_0\sqrt{1-\beta^2\cos^2\alpha_0} \quad .$$

Possiamo verificare che nei casi limite $\alpha = 0°$ e $\alpha = 90°$ ritroviamo i risultati precedenti.

Inoltre, nel riferimento S in cui il segmento è in moto, esso forma con l'asse x (ovvero con la direzione della velocità relativa dei due riferimenti) un angolo tale che:

$$tg\,\alpha = \frac{l_y}{l_x} = \frac{l_0\, sen\,\alpha_0}{l_0/\gamma \cos\alpha_0} = \gamma\, tg\,\alpha_0 \quad ,$$

per cui nel riferimento S il segmento in moto appare sia contratto che ruotato.

Anche in questo caso, al fenomeno descritto è stato dato un nome poco felice, ma di uso ormai comune, ovvero quello di **contrazione delle lunghezze**.

Ripetiamo che le affermazioni del tipo: "la lunghezza di un corpo dipende dalla sua velocità" o "un corpo in movimento è più corto rispetto a quando è fermo" sono gravemente errate, in quanto contrarie al PR!

Infatti, se questo fosse vero, potremmo determinare un riferimento privilegiato, ovvero quello in cui

un generico corpo è “più lungo”, a cui potremmo attribuire uno stato di quiete assoluta. Inoltre, in base all'entità della contrazione subita dal corpo, potremmo determinare la sua velocità assoluta.
Anche in questo caso, per comprendere che la lunghezza di un corpo <u>non</u> dipende dal suo stato di moto, è sufficiente osservare che *il fenomeno della “contrazione delle lunghezze” è simmetrico rispetto allo scambio dei due osservatori*.

Supponiamo ancora di avere due astronavi A e B, entrambe dotate di un righello che usano come unità di misura delle lunghezze, che si muovono l'una rispetto all'altra di moto rettilineo uniforme con velocità relativa v.
Ripetendo il ragionamento precedente, vediamo che:

- A dice a B: “il <u>tuo</u> righello è più <u>corto</u> di un fattore γ”;
- B risponde ad A: “no, è il <u>tuo</u> righello che è più <u>corto</u> di un fattore γ”.

Ognuno dei due piloti osserva nel righello dell'altro lo <u>stesso</u> difetto che l'altro attribuisce al suo, per cui non è possibile distinguere i due riferimenti e stabilire chi dei due ha ragione.

- Ricordiamo che Lorentz aveva già proposto l'esistenza della “contrazione delle lunghezze” per spiegare il risultato negativo dell'esperimento di MM.

Egli, però, giustificava tale ipotesi come una conseguenza del cambiamento subìto dagli strumenti di misura quando cambiava il loro stato di moto rispetto al sistema di riferimento assoluto (cioè quello in cui l'etere è in quiete).
In questo senso, l'idea di Lorentz era proprio quella che qui abbiamo presentato come gravemente errata, ovvero che un corpo in movimento subisca una contrazione dipendente dalla sua velocità, e che quindi esista un riferimento privilegiato (quello dell'etere) in cui il corpo abbia lunghezza massima.

- Nell'esposizione che abbiamo seguito, la “contrazione delle lunghezze” è una conseguenza della relatività della simultaneità e della “dilatazione dei tempi”.

Infatti, come scrive il prof. Magri: “Bisogna ricordare che la misura di una lunghezza presuppone una misura di tempo: la lunghezza di un corpo è infatti per definizione la distanza tra le posizioni assunte dagli estremi allo stesso istante nel giudizio dell’osservatore che misura il regolo. In altre parole, *la lunghezza di un regolo è la distanza spaziale tra due eventi simultanei*. [...] Non può esistere la contrazione delle lunghezze senza che esista la dilatazione dei tempi: i due fenomeni sono indissolubilmente legati e spesso uno stesso fenomeno può essere spiegato o con l’uno o con l’altro dei due effetti, a seconda del punto di vista - ad esempio un fenomeno che si spiega con la contrazione delle lunghezze in un riferimento, si spiega con la dilatazione dei tempi in un altro riferimento”.

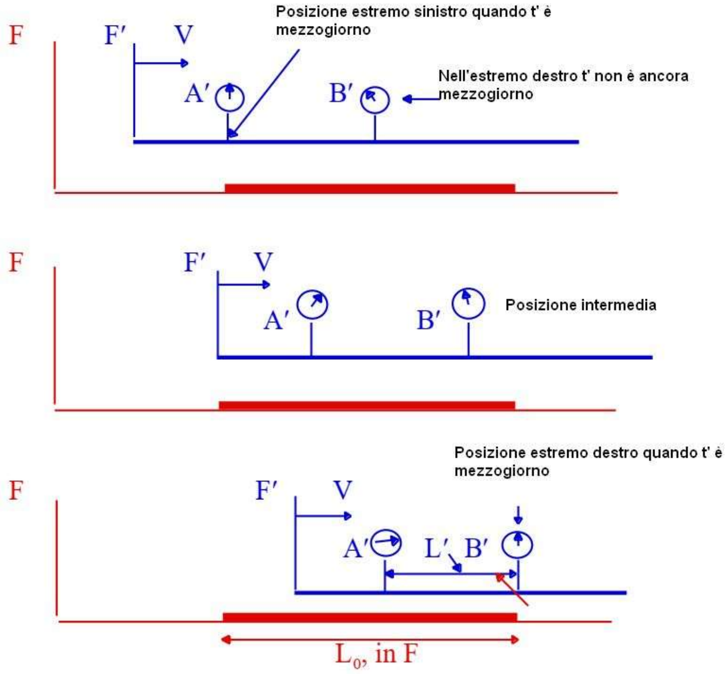
Ricaviamo di nuovo il fenomeno della “contrazione delle lunghezze” utilizzando le TL.
Consideriamo un righello in quiete nel riferimento S' i cui estremi abbiano ascisse x_1' e x_2'.
Imponiamo che tali ascisse vengano misurate <u>simultaneamente</u> (ad un istante t_0) <u>nel sistema S in cui il righello si trova in movimento</u> con velocità v (quella di S' rispetto ad S). Per le TL avremo quindi:

$$\begin{cases} x_1'=\gamma(x_1-vt_0) \\ x_2'=\gamma(x_2-vt_0) \end{cases} \Rightarrow \; x_2'-x_1'=\gamma(x_2-x_1) \; \Rightarrow \; l=\frac{l_o}{\gamma} \quad \text{c.v.d.}$$

Rivediamo in maniera più intuitiva il significato del calcolo precedente.

Supponiamo di avere una sbarra in quiete nel riferimento F ed avente lunghezza propria L_0.

Consideriamo ora un riferimento F' in moto rispetto ad F con velocità V e stabiliamo di misurare la lunghezza L' della sbarra nel riferimento F'. In F' la sbarra si sta muovendo verso sinistra con velocità $-V$, e la sua lunghezza è la distanza tra i suoi estremi misurata nello stesso istante, rispetto al tempo di F'.



Tutti gli orologi di F' sono stati sincronizzati tra loro, e pertanto indicano lo stesso tempo in F'.

Come abbiamo visto, però, essi appaiono desincronizzati in F, e, in particolare, un orologio che si trova più “a destra” appare in ritardo rispetto ad uno posto “a sinistra”, e tale ritardo è direttamente proporzionale alla distanza tra i due.

Pertanto, se gli osservatori si sono accordati per misurare la posizione dei due estremi della sbarra a mezzogiorno in punto (tempo di F'), le loro misure non appariranno simultanee in F, ma quella dell'estremo destro apparirà eseguita in ritardo rispetto a quella dell'estremo sinistro. Di conseguenza, la lunghezza della sbarra L', determinata dai fisici che si trovano in quiete rispetto ad F', apparirà, dal punto di vista dei fisici nel riferimento F, minore di L_0.

E' quindi evidente che la “contrazione delle lunghezze” non coinvolge dei fenomeni fisici che avvengono nella sbarra in movimento, ma è semplicemente una conseguenza della sincronizzazione degli orologi nei RI e della relatività della simultaneità.

Quesito. Le TL hanno una forma simmetrica rispetto allo scambio tra spazio e tempo (in realtà, la simmetria diventa perfetta se al posto del tempo t consideriamo la variabile ct).

Potremmo allora aspettarci che anche gli effetti relativistici su lunghezze e intervalli di tempo siano analoghi.

Come mai, invece, il tempo subisce una dilatazione, mentre le lunghezze subiscono una contrazione?

Se hai seguito con attenzione entrambi i ragionamenti, dovresti essere in grado di rispondere.

"Misurare" e "vedere"

Nella precedente discussione siamo stati attenti a parlare della "contrazione delle lunghezze" in termini di misura delle distanze. Abbiamo per esempio affermato che: "la misura della lunghezza di un oggetto eseguita in un riferimento in cui l'oggetto si muove con velocità v è minore della misura dello stesso oggetto eseguita nel suo riferimento di quiete di un fattore γ".

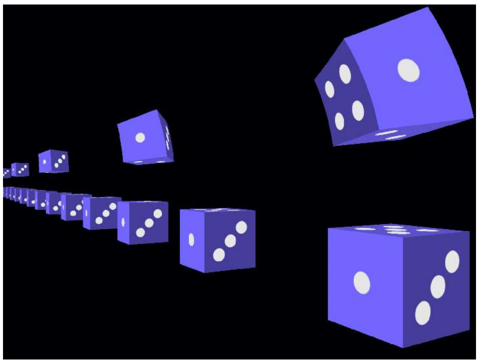
In alcune occasioni, però, non si parla della misura di un oggetto, ma di come esso viene visto da un osservatore o da una macchina fotografica, per cui l'affermazione precedente viene riformulata come segue: "un oggetto che si muove con velocità v ci appare (nella retina o nell'immagine fotografica) più corto di un fattore γ rispetto a quando esso si trova in quiete".

In realtà, quest'ultima affermazione è errata.

Senza entrare in spiegazioni complesse, riflettiamo sul fatto che, quando noi vediamo un certo oggetto, la nostra retina è colpita simultaneamente dai segnali luminosi provenienti dai diversi punti dell'oggetto. Ma, se l'oggetto in questione è esteso, i segnali che raggiungono il nostro occhio nello stesso istante avranno percorso lunghezze diverse, e quindi non saranno stati emessi nello stesso istante.

Di conseguenza, la lunghezza che "vediamo" nell'immagine non è uguale al risultato della misura dell'oggetto.

Se ti interessa approfondire l'argomento, puoi cercare su Google "*rotazione di Penrose-Terrel*" o "*invisibilità della contrazione di Lorentz*".



Nella figura (tratta da *www.spacetimetravel.org*) vediamo una ricostruzione di questo fenomeno: alcuni cubi in quiete in un dato RI sono disposti nella fila in basso, mentre altri si muovono con velocità $v=0{,}9\,c$ nella fila in alto. Contrariamente alle apparenze, tutti i cubi, sia in quiete che in movimento, hanno la stessa orientazione: la faccia con il "3" è in fronte all'osservatore, mentre quella con il "4" è sul retro.

Il fatto che riusciamo a vedere la parte posteriore dei cubi in movimento è una conseguenza del valore finito della velocità della luce.

Osserviamo che sulla precedente distinzione, in realtà piuttosto sottile, sono scivolati anche gli estensori della simulazione di Fisica proposta dal MIUR nel 2015 in preparazione agli Esami di Stato.

Infatti, parlando di un'astronave che si muove a velocità relativistica, essi pongono il seguente quesito:

"Il responsabile della sicurezza della missione ti comunica una sua preoccupazione: teme che, a causa della contrazione relativistica delle lunghezze, il simbolo della flotta terrestre riportato sulla fusoliera del razzo, un cerchio, possa apparire deformato agli occhi delle guardie di frontiera, che potrebbero quindi non riconoscerlo, e lanciare un falso allarme. Pensi che sia una preoccupazione fondata? Illustra le tue considerazioni in merito a questa preoccupazione e dai una risposta al responsabile della sicurezza, corredandola con argomenti quantitativi e proponendo una soluzione al problema".

La risposta che essi forniscono nelle soluzioni ufficiali è la seguente:

"La preoccupazione del responsabile della sicurezza è fondata, in quanto la contrazione di Lorentz avviene nella direzione longitudinale del moto e non in quella trasversale; il cerchio del simbolo della flotta appare più o meno deformato a seconda di come esso è orientato rispetto alla velocità del moto. Infatti, un raggio del cerchio diretto come la velocità apparirà contratto del fattore relativistico γ, mentre un raggio ad esso perpendicolare apparirà non contratto.

Per evitare la deformazione del cerchio, occorre che la navicella diriga il suo moto sempre verso il posto di guardia della frontiera e che il piano che contiene il simbolo sia sempre perpendicolare alla direzione del moto della navicella in modo che tutti i raggi del simbolo siano perpendicolari al moto e non risentano della contrazione di Lorentz".

Ripetiamo che tale risposta è errata, ma conveniamo sul fatto che uno studente di quinta superiore non sia tenuto a conoscere l'effetto a cui abbiamo accennato.

Attenzione! Nella risoluzione dei problemi, la "dilatazione dei tempi" e la "contrazione delle lunghezze" possono essere utili a trovare alcune risposte in maniera rapida e intuitiva, ma non possono sostituire del tutto le TL "complete".

Dalle spiegazioni precedenti dovrebbe risultare chiaro che:

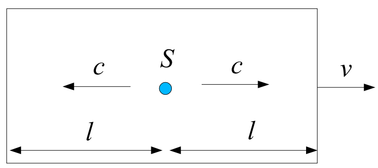
- la "dilatazione dei tempi" può essere utilizzata quando in uno dei riferimenti considerati due eventi avvengono nello stesso luogo: $\Delta x'=0$;
- la "contrazione delle lunghezze" può essere utilizzata quando in uno dei riferimenti considerati due eventi sono simultanei (avvengono nello stesso istante di tempo): $\Delta t=0$.

Nel caso generale, in cui gli eventi A e B hanno coordinate spaziali e temporali generiche, non è possibile parlare semplicemente di "dilatazione dei tempi" o "contrazione delle lunghezze", ma è necessario applicare le TL "complete".

Esempio 1.

Parlando di relatività della simultaneità, avevamo considerato l'esempio di due raggi luminosi emessi dal punto medio di un vagone ferroviario in moto con velocità *v* rispetto al suolo.

Ora siamo in grado di determinare i tempi impiegati dai raggi per raggiungere le due estremità del vagone nel riferimento del suolo senza utilizzare le TL.



Dobbiamo considerare il fatto che la luce viaggia con velocità *c*, le pareti del treno con velocità *v*, mentre le due metà del vagone subiscono una contrazione che porta le loro lunghezze a l/γ .

In accordo con i risultati precedenti, i tempi di percorrenza saranno quindi:

$$ct_1+vt_1=\frac{l}{\gamma} \;\Rightarrow\; t_1=\frac{l}{c+v}\sqrt{1-\beta^2}=\frac{l}{c}\sqrt{\frac{1-\beta}{1+\beta}} \quad \text{e} \quad ct_2=\frac{l}{\gamma}+vt_2 \;\Rightarrow\; t_2=\frac{l}{c-v}\sqrt{1-\beta^2}=\frac{l}{c}\sqrt{\frac{1+\beta}{1-\beta}} \;.$$

Esempio 2 (tratto da http://www.matematicamente.it/forum/viewtopic.php?f=19&t=125294&start=40).

Una strada rettilinea viene percorsa da un motociclista M. Su questa strada fissiamo un tratto AB di lunghezza $L=18\,km=18000\,m$. Agli estremi A e B del tratto L vi sono due paletti con degli orologi che misurano il tempo nel riferimento terrestre. Il motociclista M parte, accelera e prima di arrivare al palo di partenza A raggiunge la velocità costante $v=0{,}6\,c$ (*è superfluo commentare la mancanza di realismo*). Arrivato in A scatta una cellula fotoelettrica che fa partire entrambi gli orologi in A e in B. Nello stesso istante parte l'orologio che M porta con sé, e registra il suo tempo proprio.

Secondo gli orologi terrestri, la distanza $L = 18000\, m$ è percorsa nel tempo terrestre: $t = \frac{18000\, m}{0{,}6\, c} \simeq 100\, \mu s$.

Ma l'orologio di M, che ha cominciato a segnare il tempo proprio quando M ha tagliato il palo di partenza, segna alla fine del percorso un tempo proprio minore: $\tau = \gamma \cdot t \simeq 0{,}8 \cdot 100\, \mu s \simeq 80\, \mu s$.

M noterà che il suo tempo proprio è minore del tempo coordinato solo quando confronterà il proprio orologio con quello terrestre del palo di arrivo B. Per M il percorso è stato compiuto alla velocità $v = 0{,}6\, c$ (che in realtà M attribuisce ai paletti che vengono verso di lui), ed è durato un intervallo $\tau \simeq 80\, \mu s$ di tempo proprio.

La lunghezza del percorso per M è quindi: $L' = v\, \tau = 0{,}6\, c \cdot 80\, \mu\, s \simeq 14400\, m \simeq 14{,}4\, km$.

In altri termini: $L' = \gamma L \simeq 0{,}8 \cdot 18000\, m \simeq 14400\, m$.

- Precisiamo per correttezza che quella esposta in questi appunti, e particolarmente in questa sezione, pur essendo l'interpretazione della struttura matematica della RS accettata dalla grande maggioranza dei ricercatori, non è l'unica possibile.

Potremmo infatti fare riferimento alla cosiddetta *Teoria dell'Etere di Lorentz*, secondo la quale esiste un riferimento privilegiato (che, nelle prime versioni della teoria, era quello in cui l'etere era immobile), e, di conseguenza, sarebbe in linea di principio possibile stabilire se un corpo si trova in uno stato di quiete o di moto in senso assoluto, quale sia la sua velocità assoluta, quale sia il valore "reale" di una lunghezza o di un intervallo di tempo, e se due eventi siano o meno simultanei in senso assoluto.

D'altra parte, però, se ci spostiamo dal riferimento privilegiato ad un altro RI in moto, i valori di tutte le grandezze fisiche variano secondo le TL, ed in particolare hanno luogo gli effetti della contrazione delle lunghezze (di Lorentz e FitzGerald) e della dilatazione dei tempi (proposta da Larmor nel 1897), che in questa interpretazione devono essere visti come fenomeni dinamici, ovvero "reali" a tutti gli effetti.

Lorentz e Poincaré dimostrarono, però, che questi effetti comportano che un fisico che si trova nel RI in moto può compiere le stesse osservazioni di un suo collega che si trova nel riferimento privilegiato ed ottenere gli stessi risultati (come abbiamo già visto tra le possibili spiegazioni del risultato dell'esperimento di MM).

Di conseguenza, nella teoria di Lorentz il riferimento privilegiato esiste in linea di principio, ma in pratica è impossibile individuarlo, mentre il PR, pur non essendo assunto come postulato, viene dedotto, in maniera quasi fortuita, in seguito all'applicazione delle TL.

E' per questi motivi che, come abbiamo detto, la maggior parte dei fisici trova poco convincente la Teoria dell'Etere di Lorentz, e preferisce utilizzare l'interpretazione di Einstein e dei suoi continuatori. Ricordiamo comunque il rilevante controesempio di John Stewart Bell che, in "*Speakable and Unspeakable in Quantum Mechanics*" espresse il parere che la RR andasse insegnata dal punto di vista di Lorentz.

Ripetiamo, in ogni caso, che quella di Lorentz non è una teoria fisica alternativa rispetto alla RS, ma semplicemente una diversa interpretazione del suo formalismo matematico. In particolare, le due interpretazioni hanno lo stesso contenuto empirico e forniscono le stesse previsioni sperimentali, per cui è impossibile distinguere tra le due in base al risultato di un esperimento.

In conclusione, come avviene in maniera molto più rilevante per la meccanica quantistica, la scelta tra le due interpretazioni non può avvenire esclusivamente in base a considerazioni fisiche, ma è legata, in ultima analisi, alle convinzioni "filosofiche" dei ricercatori, ed in particolare alla loro scelta degli "elementi di realtà" della teoria, ovvero di una ontologia che possa soggiacere ai fenomeni osservati.

Problema 5.1 (*Questionario Sandri* - 2006)

1. Una nave spaziale si muove con una velocità di 0,500 *c* rispetto ad un osservatore che si trova sulla Terra. Secondo questo osservatore, quanto tempo occorre all'orologio sulla nave spaziale per avanzare di 1 secondo?
2. L'astronauta Luigi viaggia verso la stella Vega, lasciando la sua sorella gemella Stefania, di 35 anni, sulla Terra. Luigi viaggia con una velocità di 0,990 *c*, e Vega è a 26,4 anni-luce dalla Terra. Determina:
   a. quanto dura il viaggio dal punto di vista di Stefania;
   b. l'età che avrà Luigi quando arriverà su Vega.
3. Un astronauta, che viaggia con velocità *v* rispetto alla Terra, misura i battiti del suo cuore e trova che hanno un intervallo di 0,850 *s*. Il controllo missione sulla Terra, che sta monitorando le attività del suo cuore, osserva un battito ogni 1,4 *s*.
   Calcola la velocità dell'astronauta rispetto alla Terra.
4. Un corpo la cui lunghezza a riposo è 1 metro si muove ad una velocità tale che la sua lunghezza misurata nel riferimento del laboratorio è 0,500 *m*.
   Calcola la velocità del corpo nel riferimento del laboratorio.
5. Un'astronave si avvicina ad un asteroide con una velocità di 0,750 *c*. Supponi che l'astronauta lanci verso l'asteroide una sonda con una velocità di 0,800 *c* rispetto all'astronave stessa.
   Qual è la velocità della sonda rispetto all'asteroide?
6. Alla base stellare Faraway Point osservi due astronavi che si avvicinano provenendo dalla stessa direzione. L'astronave LaForge viaggia a una velocità di 0,606 *c* e la Picard a una velocità di 0,552 *c*. Trova la velocità della La Forge rispetto alla Picard.

Soluzioni

1. Per l'osservatore sulla Terra, l'orologio sulla nave viene rallentato di un fattore γ, per cui:
   $$\Delta t = \gamma \Delta \tau = \frac{1}{\sqrt{1-0{,}5^2}} \cdot 1\, s \simeq 1{,}15\, s \quad .$$
2.
   a. Per Stefania il viaggio ha una durata: $\Delta t = \frac{d}{v} = \frac{26{,}4\, anni \cdot c}{0{,}99\, c} \simeq 26{,}7\, anni$.
   b. Per Luigi, invece, la durata del viaggio è: $\Delta \tau = \frac{\Delta t}{\gamma} \simeq 26{,}7\, anni \cdot \sqrt{1-\frac{1}{0{,}99^2}} \simeq 3{,}77\, anni$.

   Quindi, quando Luigi raggiunge Vega la sua età è 38,8 anni.

   Osserviamo che, dal punto di vista di Luigi, il viaggio è durato 3,77 anni a una velocità di 0,990 *c*. Di conseguenza, egli afferma che la distanza percorsa nel viaggio è:

$$d' = v\,\Delta\tau = 0{,}99\,c \cdot 3{,}77\,anni \simeq 3{,}73\,anni\,luce \quad ,$$

ovvero: $$d' = \frac{d}{\gamma} = 26{,}4\,anni\,luce \cdot \sqrt{1-\frac{1}{0{,}99^2}} \simeq 3{,}73\,anni\,luce \quad .$$

3. $$\gamma = \frac{\Delta t}{\Delta\tau} = \frac{1{,}4\,s}{0{,}85\,s} \simeq 1{,}65 \;\Rightarrow\; \beta = \sqrt{1-\frac{1}{\gamma^2}} \simeq \sqrt{1-\frac{1}{1{,}65^2}} \simeq 0{,}795 \;\Rightarrow$$

$$v = \beta c \simeq 0{,}795 \cdot 3 \cdot 10^8 \frac{m}{s} \simeq 2{,}38 \cdot 10^8 \frac{m}{s} \quad .$$

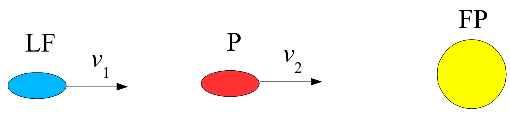
4. Sappiamo che: $l_0 = 1\,m$, $l = 0{,}5\,m$, $\gamma = \frac{l_0}{l} = \frac{1}{\sqrt{1-v^2/c^2}}$, da cui:

$$v = c\sqrt{1-\frac{1}{\gamma^2}} = c\sqrt{1-\left(\frac{l}{l_0}\right)^2} \simeq 3 \cdot 10^8 \frac{m}{s} \cdot \sqrt{1-\left(\frac{0{,}5\,m}{1\,m}\right)^2} \simeq 0{,}866\,c \simeq 2{,}60 \cdot 10^8 \frac{m}{s} \quad .$$

5. Per la composizione relativistica delle velocità:

$$v = \frac{v_1+v_2}{1+v_1 v_2/c^2} = \frac{0{,}750\,c+0{,}800\,c}{1+0{,}750\,c \cdot 0{,}800\,c/c^2} \simeq 0{,}969\,c \simeq 2{,}91 \cdot 10^8 \frac{m}{s} \quad .$$

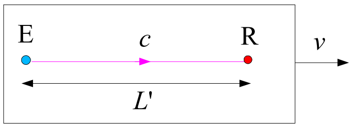
6. $$v = \frac{v_1-v_2}{1-v_1 v_2/c^2} = \frac{0{,}606\,c-0{,}552\,c}{1-0{,}606\,c \cdot 0{,}552\,c/c^2} \simeq 0{,}0811\,c \quad .$$



Come verifica, puoi controllare che, componendo v con v_2, si ottenga v_1.

Problema 5.2 ("*Paradosso relativistico*")

(*https://groups.google.com/forum/#!topic/it.scienza.fisica/3zgIyMN7CpY*)



Un'astronave si muove rispetto alla Terra con velocità $v=0{,}600\,c$.

Al suo interno, un lampo luminoso parte da un emettitore E, si propaga nella stessa direzione della velocità dell'astronave, e viene assorbito da un ricevitore R la cui distanza da E è $L'=100\,m$ (nel riferimento dell'astronave).

Calcola la distanza percorsa dal lampo di luce nel riferimento della Terra ed il tempo impiegato nello stesso riferimento a percorrere tale distanza.

Determina la relazione tra tali grandezze e le loro corrispondenti nel riferimento dell'astronave.

Soluzione

Nel riferimento dell'astronave, sia l'emettitore che il ricevitore sono fermi, per cui (ponendo $x'=0$ l'ascissa di E e $t'=0$ l'istante dell'emissione) l'assorbimento del lampo di luce avviene nella posizione $x'=L'=100\,m$ e nell'istante:

$$t'_{ass}=\frac{L'}{c}\simeq\frac{100\,m}{3\cdot10^{8}\,m/s}\simeq3{,}33\cdot10^{-7}\,s \quad .$$

Nel riferimento della Terra, l'emettitore ed il ricevitore si muovono con la velocità dell'astronave, per cui (ponendo ancora $x=0$ la posizione iniziale di E e $t=0$ l'istante dell'emissione) l'assorbimento del lampo di luce avviene quando: $ct=vt+L \Rightarrow$

$$t_{ass}=\frac{L}{c-v}=\frac{L'}{\gamma(c-v)}=\frac{c\sqrt{1-v^2/c^2}}{c-v}t'=\sqrt{\frac{c+v}{c-v}}t'\simeq\sqrt{\frac{1{,}6\,c}{0{,}4\,c}}\cdot3{,}33\cdot10^{-7}\,s\simeq6{,}66\cdot10^{-7}\,s$$

in cui abbiamo posto $L=L'/\gamma$ per la "contrazione delle lunghezze".

La distanza percorsa dal lampo luminoso è:

$$x_{ass}=ct_{ass}=c\,t_{ass}=\frac{c}{\gamma(c-v)}L'=\sqrt{\frac{c+v}{c-v}}L'\simeq\sqrt{\frac{1{,}6\,c}{0{,}4\,c}}\cdot100\,m=200\,m \quad .$$

Saremmo arrivati agli stessi risultati anche applicando le TL.

Problema 5.3 (*Maturità Scientifica* 2019 - *Quesito* 7)

In laboratorio si sta osservando il moto di una particella che si muove nel verso positivo dell'asse x di un sistema di riferimento a esso solidale. All'istante iniziale, la particella si trova nell'origine e in un intervallo di tempo di 2, 0 *ns* percorre una distanza di 25 *cm*. Una navicella passa con velocità $v=0,80c$ lungo la direzione x del laboratorio, nel verso positivo, e da essa si osserva il moto della stessa particella. Determina le velocità medie della particella nei due sistemi di riferimento. Quale intervallo di tempo e quale distanza misurerebbe un osservatore posto sulla navicella?

Soluzione

La velocità della particella nel riferimento del laboratorio è:

$$u=\frac{\Delta x}{\Delta t}=\frac{0,25\,m}{2\cdot 10^{-9}\,s}\simeq 1,25\cdot 10^{8}\,\frac{m}{s}\simeq 0,42\,c \quad .$$

La velocità della particella nel riferimento della navicella può essere trovata tramite la composizione delle velocità:

$$u'=\frac{u-v}{1-uv/c^{2}}\simeq\frac{(1,25-2,4)\cdot 10^{8}\,m/s}{1-0,42\cdot 0,8}\simeq -1,73\cdot 10^{8}\,\frac{m}{s}\simeq -0,58\,c \quad .$$

Osserviamo che gli eventi A "partenza della particella" e B "arrivo della particella" non avvengono nello stesso luogo e non sono simultanei in nessuno dei due riferimenti considerati (laboratorio e navicella); quindi, per determinare come vengono trasformati gli intervalli spaziale e temporale nei due riferimenti, non possiamo applicare la "dilatazione dei tempi" e la "contrazione delle lunghezze" (come sarebbe invece possibile nel riferimento della particella), ma dobbiamo utilizzare le TL "complete":

$$\begin{cases} \Delta x'=\gamma(\Delta x-v\,\Delta t)=\dfrac{(0,25\,m-2,4\cdot 10^{8}\,m/s\cdot 2\cdot 10^{-9}\,s)}{\sqrt{1-0,8^{2}}}\simeq -0,38\,m \\ \Delta t'=\gamma(\Delta t-\beta\,\Delta x/c)=\dfrac{(2\cdot 10^{-9}\,s-0,8\cdot 0,25\,m/(3\cdot 10^{8}\,m/s))}{\sqrt{1-0,8^{2}}}\simeq 2,2\cdot 10^{-9}\,s \end{cases} \quad .$$

Quindi un osservatore posto sulla navicella misura un intervallo di tempo $\Delta t'\simeq 2,2\,ns$ e una distanza $|\Delta x'|\simeq 38\,cm$.

Some verifica (o come svolgimento alternativo), possiamo ricavare:

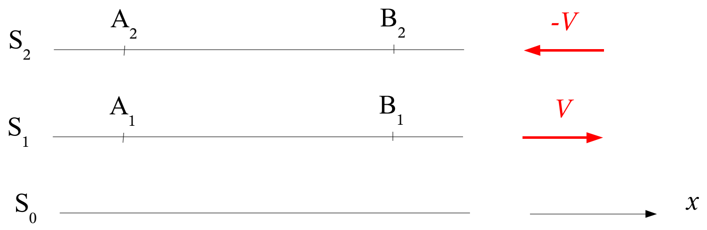
$$u'=\frac{\Delta x'}{\Delta t'}\simeq\frac{-0,38\,m}{2,2\cdot 10^{-9}\,s}\simeq -1,72\cdot 10^{8}\,\frac{m}{s}$$

che, tenendo conto degli arrotondamenti eseguiti, è compatibile con il risultato ricavato in precedenza.

Problema 5.4 (*Quesito* 6 *Simulazione AIF* 2014)

Sono dati tre sistemi di riferimento S_0, S_1, S_2.

S_1 si muove di moto rettilineo uniforme lungo x con velocità V rispetto a S_0 e S_2 si muove di moto rettilineo uniforme lungo x con velocità $-V$ rispetto a S_0 (vedi figura).



In S_1 è presente, a riposo, un regolo A_1B_1 e in S_2 è presente, a riposo, un regolo A_2B_2, entrambi di lunghezza propria L.

Ricava la lunghezza del segmento A_2B_2 misurata nel sistema S_0.

Stabilisci quale delle seguenti espressioni rappresenta la velocità relativa u dei sistemi S_1 ed S_2:

$$u=\frac{2V}{1-(V/c)^2} \quad ; \qquad u=2V \quad ; \qquad u=\frac{2V}{1+(V/c)^2} \quad ; \qquad u=0$$

possibilmente dando un motivo per cui le altre tre non possono essere a priori compatibili con la teoria della Relatività.

Determina infine la lunghezza del segmento A_1B_1 misurata nel sistema S_2 in funzione di V.

Soluzione

La lunghezza del segmento A_2B_2 misurata nel sistema S_0 subisce una contrazione di un fattore γ_V:

$$L_0=\frac{L}{\gamma_V}=L\sqrt{1-\frac{V^2}{c^2}} \quad .$$

Per la composizione delle velocità: $u=\frac{V-(-V)}{1-V\cdot(-VV)/c^2}=\frac{2V}{1+(V/c)^2} \quad .$

Quindi è corretta la terza opzione. Le prime due non possono essere corrette in quanto, se $V\to c$, forniscono dei risultati maggiori di c (o, addirittura, tendenti all'infinito). La quarta opzione, invece, è da scartare perché non fornisce il corretto limite newtoniano; se $V\ll c$, infatti, si avrebbe $u\simeq 2V$, e non $u=0$.

La lunghezza del segmento A_1B_1 misurata nel sistema S_2 subisce una contrazione di un fattore γ_u:

$$L_2=\frac{L}{\gamma_u}=L\sqrt{1-\frac{u^2}{c^2}}=\sqrt{1-\frac{4V^2/c^2}{(1+V^2/c^2)^2}}=\frac{\sqrt{(1+V^2/c^2)^2-4V^2/c^2}}{1+V^2/c^2}=\frac{1-V^2/c^2}{1+V^2/c^2} \quad .$$

Problema 5.5 (*Maturità Scientifica* 2019 *suppletiva* - *Quesito* 6)

Consideriamo un'astronave in moto che viaggia rispetto alla terra a velocità $v=0,90c$. Supponiamo che a bordo dell'astronave sia presente una scatola di dimensioni $a=40\,cm$, $b=50\,cm$ e $h=20\,cm$, con il lato b disposto parallelamente alla direzione del moto dell'astronave. Per un osservatore posto sulla terra, che volume avrà la scatola? Se l'astronauta lancia la scatola con una velocità $v_s=0,50c$ nella direzione del moto dell'astronave, quale velocità misura l'osservatore sulla terra?

Soluzione

Nel riferimento della Terra, la scatola ha subito una "contrazione" lungo la dimensione del lato *b*, per cui il suo volume risulta:

$$V'=\frac{V}{\gamma}=a\cdot\frac{b}{\gamma}\cdot h=40\,cm\cdot 50\,cm\cdot 20\,cm\cdot\sqrt{1-0,90^2}\simeq 1,7\cdot 10^4\,cm^3 \quad .$$

Per la "composizione delle velocità", la velocità misurata dall'osservatore sulla terra è:

$$v'=\frac{v+v_s}{1+vv_s/c^2}=\frac{(0,90+0,50)c}{1+0,9\cdot 0,5}\simeq 0,97\,c \quad .$$

Problema 5.6 (*https://www.matematicamente.it/forum/viewtopic.php?f=19&t=186249*)

L'osservatore B si muove, insieme ad un grande orologio, con velocità $v = c/2$ rispetto all'osservatore A, che si trova in un sistema di riferimento inerziale S. Al tempo $t = t' = 0$ entrambi gli osservatori si trovano in $x = x' = 0$. L'osservatore A guarda l'orologio del l'osservatore B negli istanti $t_1 = 6\,s$ e $t_2 = 15\,s$ (misurati in S) e annota i tempi t_1' e t_2'. Calcola la differenza tra t_2' e t_1'.

Soluzione

Stabiliamo di svolgere ragionamenti e calcoli nel sistema S.

Ripetiamo però che è impreciso affermare che "l'osservatore A si trova in un sistema di riferimento inerziale S", in quanto tutti gli oggetti esistono in tutti i riferimenti. Il testo intende dire che S è il riferimento in cui l'osservatore A si trova in quiete.

Se un segnale luminoso viene emesso da B ad un tempo t_e (misurato da A), allora B si trova rispetto ad A ad una distanza $d_e = (c/2) t_e$.

Poiché la stessa distanza viene percorsa dal segnale luminoso a velocità c, A riceverà il segnale al tempo t_r tale che:

$$t_r = t_e + \frac{d_e}{c} = t_e + \frac{1}{2} t_e = \frac{3}{2} t_e \quad .$$

Quindi, se l'intervallo tra i tempi di ricezione è Δt_r, quello tra i tempi di emissione è:

$$\Delta t_e = \frac{2}{3} \Delta t_r = \frac{2}{3} \cdot (15 - 6)\,s = 6\,s \quad .$$

Per la "dilatazione dei tempi", lo stesso intervallo misurato da B è:

$$\Delta t_e' = \frac{\Delta t_e}{\gamma} \simeq 6\,s \cdot \sqrt{1 - (1/2)^2} \simeq 5{,}2\,s \quad .$$

Caso generale. Se la velocità di B nel riferimento di A è $v = \beta c$, otteniamo:

$$t_r = (1+\beta) t_e \;\Rightarrow\; \Delta t_e = \frac{\Delta t_r}{1+\beta} \;\Rightarrow\; \Delta t_e' = \frac{\Delta t_e}{\gamma} = \frac{\sqrt{1-\beta^2}}{1+\beta} \Delta t_r = \Delta t_r \sqrt{\frac{1-\beta}{1+\beta}}$$

(vedi anche la soluzione dell'utente "*Shackle*" nel forum indicato).

6. Geometria dello spazio-tempo

- Dopo la pubblicazione degli articoli di Einstein, la RR cominciò ad essere studiata da altri ricercatori, ed in particolare dal matematico Hermann Minkowski, di origine lituana, che era stato insegnante di Einstein al Politecnico di Zurigo.

Egli propose di "unificare" spazio e tempo in un'unica entità, che da quel momento fu chiamata "spazio-tempo", mostrando che le TL possono essere viste come una trasformazione geometrica dello spazio-tempo che conserva la sua *metrica* (ovvero la misura delle distanze).

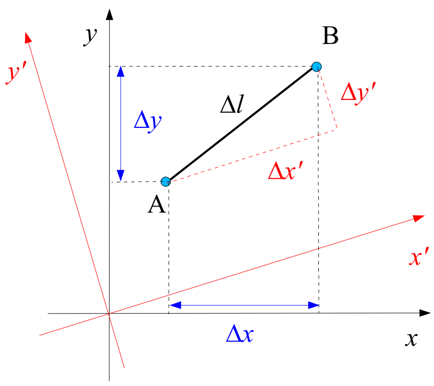
Nel 1908, egli espose le sue idee tramite la celebre affermazione: "D'ora in poi lo spazio di per sé stesso o il tempo di per sé stesso sono condannati a svanire in pure ombre, e solo una specie di unione tra i due concetti conserverà una realtà indipendente".

Einstein, inizialmente diffidente verso questo punto di vista, che gli dava l'impressione di riportare in vita, in forma diversa, lo spazio assoluto ed il tempo assoluto newtoniani, in seguito comprese le idee di Minkowski, e le utilizzò nelle sue ricerche successive. Purtroppo, Minkowski morì pochi mesi dopo, a 44 anni.

Anche in questo caso, osserviamo che le idee di Minkowski erano state anticipate da Poincaré, che però espresse l'opinione che la "traduzione" della fisica nel linguaggio della geometria quadrimensionale avrebbe comportato troppo sforzo per un profitto limitato, e quindi rifiutò di elaborarne le conseguenze.

Distanza tra due punti nello spazio euclideo

Consideriamo due punti A e B nel piano cartesiano.



La lunghezza Δl del segmento AB è una *proprietà intrinseca* del segmento stesso, in quanto può essere misurata in maniera diretta (con un metro) e non dipende dal sistema di coordinate.

Naturalmente, è anche possibile introdurre un sistema di coordinate (ad esempio cartesiane ortogonali) e misurare la distanza AB con la nota formula: $\Delta l=\sqrt{(\Delta x)^2+(\Delta y)^2}$.

Se cambiamo sistema di coordinate, le differenze tra le ascisse e le ordinate dei punti A e B cambieranno, ma avremo comunque: $\Delta l=\sqrt{(\Delta x')^2+(\Delta y')^2}$.

Osserviamo quindi che la distanza tra due punti nel piano (o nello spazio) euclideo è un *invariante*, in quanto non dipende dal sistema di coordinate scelto.

Naturalmente, se nel punto A avviene un determinato evento nell'istante t_A e nel punto B avviene un secondo evento nell'istante t_B, tra i due eventi vi sarà, oltre alla distanza spaziale Δl, anche una separazione temporale $\Delta t=t_B-t_A$.

Nella meccanica newtoniana, sia Δl che Δt sono invarianti, in quanto non dipendono né dal riferimento, né dal sistema di coordinate scelto.

Sappiamo già che questa proprietà non è valida in RS, in quanto sia le lunghezze dei segmenti che gli intervalli di tempo dipendono dal riferimento in cui ci troviamo. Ci chiediamo allora se esista una quantità che sia invariante sotto le TL e che possa essere considerata corrispondente al concetto di distanza tra due punti nello spazio euclideo.

Distanza tra due eventi nello spazio-tempo

Minkowski si accorse che nella RS, anche se l'intervallo spaziale Δl e quello temporale Δt considerati da soli dipendono dal riferimento scelto, la quantità $c^2(\Delta t)^2-(\Delta l)^2$ assume un valore che non dipende dal riferimento.

Esiste quindi un *intervallo spazio-temporale* Δs *che è un invariante relativistico*, ovvero il cui valore non cambia se viene sottoposto alle TL, ed esso è definito tramite la relazione:

$$(\Delta \boldsymbol{s})^2=\boldsymbol{c}^2(\Delta \boldsymbol{t})^2-(\Delta \boldsymbol{l})^2=\boldsymbol{c}^2(\Delta \boldsymbol{t})^2-(\Delta \boldsymbol{x})^2-(\Delta \boldsymbol{y})^2-(\Delta \boldsymbol{z})^2 \quad .$$

Per completare l'analogia con la distanza euclidea, saremmo tentati di definire una “distanza” nello spazio-tempo come: $\Delta s=\sqrt{c^2(\Delta t)^2-(\Delta l)^2}$. Osserviamo però che, a differenza del caso euclideo, il segno del radicando può essere positivo, nullo, ma anche negativo, per cui questo passaggio richiede una certa attenzione.

- Accenniamo ad una giustificazione intuitiva dell'affermazione secondo cui l'intervallo spazio-temporale è un invariante relativistico, cercando di mantenere l'analogia con la distanza tra due punti nello spazio euclideo.

Consideriamo un orologio fermo in un determinato riferimento S' (ad esempio un'astronave) e supponiamo che esso misuri un certo intervallo $\Delta\tau$ di tempo proprio. Come per la lunghezza di un segmento, questo è un risultato oggettivo, una proprietà intrinseca dell'intervallo temporale considerato, che non dipende dal riferimento. Inoltre, poiché l'orologio si trova in quiete nell'astronave, allora $\Delta x'=0$.

D'altra parte, se l'astronave è in moto rispetto al riferimento S della Terra con velocità *v*, sappiamo che lo stesso intervallo di tempo subirà una “dilatazione” $\Delta t=\gamma\Delta\tau$.

Ricaviamo quindi: $(\Delta\tau)^2=\frac{(\Delta t)^2}{\gamma^2}=(\Delta t)^2(1-\frac{v^2}{c^2})=(\Delta t)^2-\frac{v^2(\Delta t)^2}{c^2}=(\Delta t)^2-\frac{(\Delta x)^2}{c^2}$.

Moltiplicando entrambi i membri per c^2, ricaviamo:

$$c^2(\Delta t)^2-(\Delta x)^2=(\Delta s)^2=c^2(\Delta\tau)^2 \quad .$$

Quindi, se il tempo proprio è un invariante relativistico, lo è anche l'intervallo spazio-temporale di Minkowski.

- Riportiamo anche la noiosa dimostrazione formale dell'invarianza dell'intervallo spazio-temporale sotto le TL.

Per semplicità, consideriamo due riferimenti aventi origine comune e fissiamo in tale origine il primo dei due eventi, in modo da poter eliminare i fastidiosi simboli Δ.

In questo caso abbiamo: $s^2=c^2t^2-x^2-y^2-z^2$ e $s'^2=c^2t'^2-x'^2-y'^2-z'^2$.

Dalle TL ricaviamo:

- $x'=\gamma(x-vt) \Rightarrow x'^2=\gamma^2(x^2-2vxt+v^2t^2)$; $y'=y$; $z'=z$;
- $t'=\gamma(t-\beta x/c) \Rightarrow t'^2=\gamma^2(t^2-2\beta tx/c+\beta^2x^2/c^2)$.

Sostituendo e ricordando che $\beta = v/c$, $\gamma^2 = 1/(1-\beta^2)$, ricaviamo:

$$s'^2 = c^2 t'^2 - x'^2 - y'^2 - z'^2 = \gamma^2 c^2 t^2 - 2\gamma^2 \beta cxt + \gamma^2 \beta^2 x^2 - \gamma^2 x^2 + 2\gamma^2 vxt - \gamma^2 v^2 t^2 - y^2 - z^2 =$$

$$\gamma^2 c^2 (1-\beta^2) t^2 - \gamma^2 (1-\beta^2) x^2 - y^2 - z^2 = c^2 t^2 - x^2 - y^2 - z^2 = s^2 \quad \text{c.v.d.}$$

Osserviamo che, secondo l'interpretazione di Minkowski, la nostra definizione di unità di misura diverse per le distanze spaziali e per gli intervalli temporali è soltanto un'abitudine, dovuta al fatto che, storicamente, è stata riconosciuta molto tardi l'esistenza di una velocità invariante.

- Hermann Bondi spiega questa concezione ne “*La relatività e il senso comune*”.

“Immaginiamo una civiltà in cui il metro sia sconosciuto e ogni distanza sia espressa in secondi-luce o millimicrosecondi-luce o in qualsiasi altra unità opportuna; i membri di questa società considererebbero piuttosto sciocco chi chiedesse il valore della velocità della luce, essi non la considererebbero una quantità da esprimere in metri al secondo o chilometri al secondo, ma semplicemente come una unità, l’unità naturale di velocità. La velocità di un oggetto verrebbe misurata paragonandola a quella della luce: tutte le velocità ordinarie sarebbero espresse in termini di questo campione. [...] In altre parole accettando come campione di velocità la velocità della luce, questa civiltà avrebbe eliminato la necessità di costruire oltre a un campione di tempo anche uno di lunghezza, e di usare uno scomodo numero per esprimere la velocità della luce. In questa civiltà esisterebbe solo un campione di tempo, i suoi componenti ci considererebbero delle persone che lavorano con lunghezze e tempi nel modo più complicato e assurdo. [...]
Immaginiamo invece una civiltà in cui la direzione nord-sud viene considerata sacra ed è sempre misurata in miglia, mentre quella est-ovest viene considerata volgare e profana ed è sempre misurata in yarde. Se la gente venisse abituata a vedere le cose sotto questo aspetto fin dalla prima età, occorrerebbe una mente audace per suggerire l’esistenza di un qualche legame tra le distanze nella direzione nord-sud e quelle nella direzione est-ovest”.

Diagrammi spazio-temporali

Lo spazio-tempo (o, con il termine greco introdotto da Minkowski, il *cronotopo*), può essere visualizzato in un determinato riferimento tramite un grafico, ogni punto del quale rappresenta un *evento*, ovvero un fatto accaduto in un luogo ed in un istante di tempo ben definiti.
Consideriamo per semplicità un moto che si svolga in una, o al massimo in due dimensioni spaziali, in quanto non abbiamo modo di rappresentare su un foglio di carta uno spazio che possiede quattro dimensioni (tre spaziali ed una temporale).
Rispetto ai grafici posizione-tempo che conosciamo fin dal biennio, introduciamo però alcune modifiche.

- Rappresentiamo la *coordinata spaziale sulle ascisse* e quella *temporale sulle ordinate* (al contrario di come siamo abituati a fare).
- Come *variabile sulle ordinate* non prendiamo il tempo, ma il *prodotto ct tra la velocità della luce nel vuoto e il tempo* , per cui le grandezze rappresentate su entrambi gli assi sono omogenee (entrambe distanze).

  Questa scelta ci permette di ottenere dei diagrammi leggibili, anche nel caso (assai frequente) in cui dobbiamo descrivere la propagazione di segnali luminosi.

  Come abbiamo già ricordato, le unità di misura della lunghezza e del tempo sono state definite prima che si comprendesse la stretta relazione fra spazio e tempo. Oggi, invece, una scelta più naturale sarebbe quella di misurare le lunghezze in secondi-luce anziché in metri, in modo da ottenere $c=1$ (come è abituale fare nella fisica teorica, soprattutto quella delle alte energie).

- La differenza più significativa è che, come abbiamo visto in precedenza, nel caso euclideo il quadrato della distanza è la *somma* dei quadrati delle due grandezze Δx e Δy, mentre nello spazio-tempo compare la *differenza* delle grandezze $c\Delta t$ e Δx.

Il movimento di un punto materiale (o di un segnale luminoso) è descritto da una curva la cui coordinata temporale è sempre crescente (ovvero la curva "sale sempre"), che viene detta *linea oraria* (o *linea di universo*) del corpo o del segnale.

- Se un *corpo è fermo*, la sua linea oraria è una retta parallela all'asse dei tempi, e quindi sarà una *retta verticale*, e non orizzontale, come siamo abituati a vedere.
- Il *moto di un segnale luminoso*, che in qualunque riferimento si muove con velocità $v=c$, è rappresentato da una *retta inclinata di 45° rispetto all'asse dei tempi*, e quindi parallela ad una delle bisettrici dei quadranti.

Infatti, la sua pendenza vale: $m=\frac{c\,\Delta t}{\Delta x}=\frac{c\,\Delta t}{c\,\Delta t}=1$.

- Il *moto rettilineo uniforme di un punto materiale* (che ha $v<c$) è rappresentato da una *retta che forma un angolo minore di 45° rispetto all'asse dei tempi*.

Cerchiamo di abituarci al fatto che, *all'aumentare della velocità, la pendenza della retta, che è legata all'angolo formato con l'asse delle ascisse, diminuisce*, e non aumenta.

Infatti: $m=\frac{c\,\Delta t}{\Delta x}=\frac{c\,\Delta t}{v\,\Delta t}=\frac{1}{\beta}>1$.

- Anche nel caso di *moto generico*, la linea oraria di un *punto materiale* deve avere in ogni punto una *tangente che forma un angolo minore di 45° rispetto all'asse dei tempi.*

Infatti, come nel caso precedente, la pendenza della retta tangente al diagramma spazio-tempo è legata alla velocità istantanea dalla relazione $m=c/v$, e quindi deve essere $m>1$.

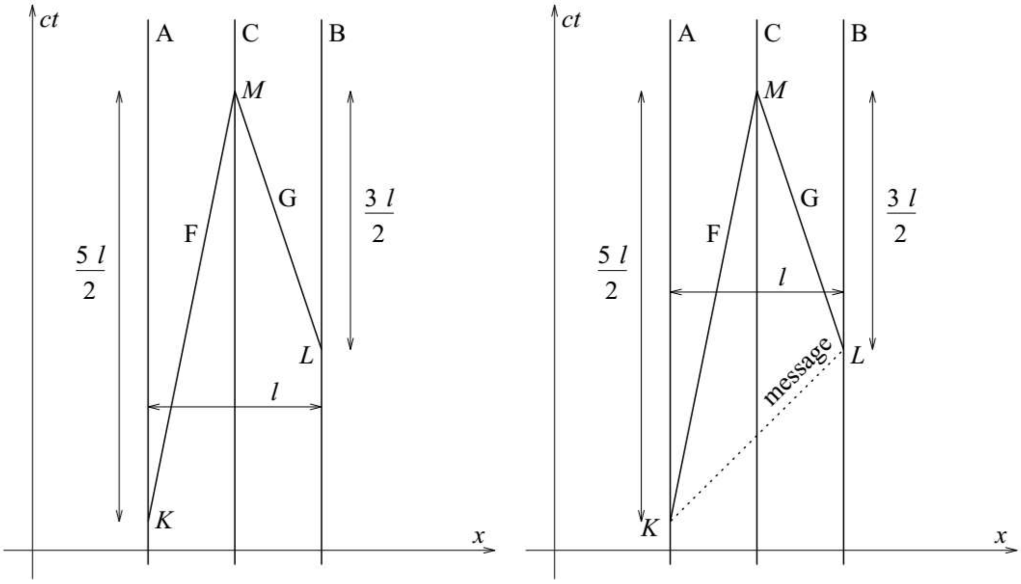
Esempio 1 (*da "Special Relativity" di D. W. Hogg – Princeton* 1997)

Gli astronauti F e G vivono rispettivamente sui pianeti A e B, in quiete tra loro e separati dalla distanza *l*. Esattamente a metà strada dai loro pianeti di residenza, sul segmento che li congiunge, si trova il caffè interplanetario C, presso il quale decidono di ritrovarsi per mezzogiorno.

F possiede un'astronave standard, che viaggia alla velocità $v_F=c/5$ rispetto al riferimento dei due pianeti, mentre G ha un modello sportivo che raggiunge la velocità $v_G=c/3$. Di conseguenza, i tempi impiegati da F e da G a raggiungere il caffè sono rispettivamente:

$$\Delta t_F = \frac{l/2}{v_F} = \frac{5}{2}\frac{l}{c} \quad \text{e} \quad \Delta t_G = \frac{l/2}{v_G} = \frac{3}{2}\frac{l}{c} \quad .$$

La situazione è rappresentata dal primo dei diagrammi seguenti, in cui K ed L rappresentano gli eventi "partenza di F" e "partenza di G", ed M è l'evento del loro incontro.



Il giorno dopo, F decide di incontrare di nuovo G al caffè, ma, poiché non si sono messi d'accordo in anticipo, stabilisce di inviargli un radiomessaggio. Se G parte appena ricevuto il messaggio di F, allora F deve spedirglielo nello stesso momento in cui parte, in modo che:

$$\Delta t_F = \Delta t_G + \Delta t_{messaggio} \;\Rightarrow\; \frac{5}{2}\frac{l}{c} = \frac{3}{2}\frac{l}{c} + \frac{l}{c} \quad .$$

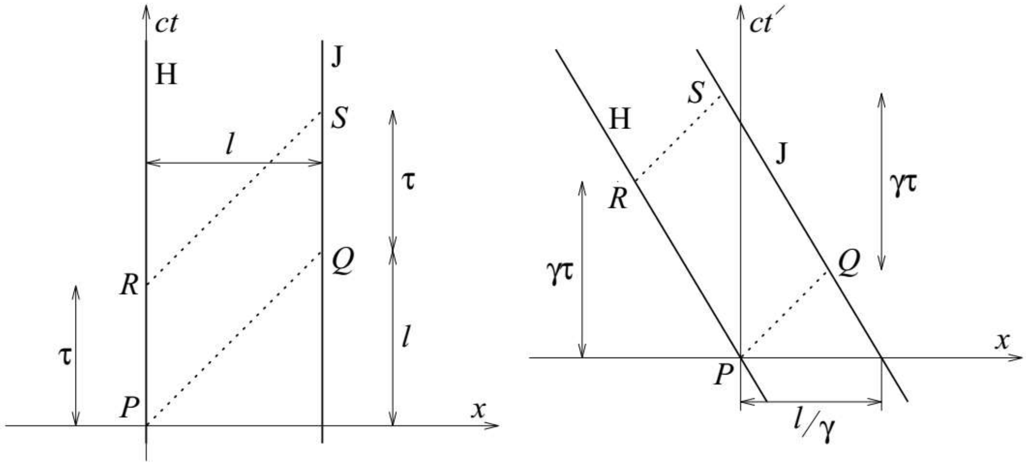
In termini geometrici, è sufficiente tracciare la retta passante per l'evento L e inclinata di 45° rispetto all'asse delle ascisse, e verificare che essa interseca la linea oraria di F nell'evento K (secondo diagramma).

Esempio 2 (*Cambiare riferimento - Hogg*)

Anche H e J sono due residenti dei pianeti A e B dell'esempio precedente. La mattina presto H manda a J un messaggio radio (evento P) e J lo riceve (evento Q) dopo un tempo $\Delta t_{messaggio} = l/c$.
Dopo un tempo τ, H manda a J un secondo messaggio (evento R) e J lo riceve (evento S), sempre dopo un tempo $\Delta t = l/c$.
Il primo dei diagrammi seguenti rappresenta la situazione descritta nel riferimento in cui i pianeti A e B (e i loro residenti H e J) sono in quiete.
Mentre questo avviene, l'astronauta K sta viaggiando con velocità u dal pianeta A verso B.
Di conseguenza, nel riferimento di K i pianeti A e B si muovono con velocità $-u$, per cui le loro linee orarie sono due rette aventi pendenze uguali tra loro e opposte a quella di K nel riferimento di quiete di A e B. Invece, le linee orarie dei segnali radio saranno sempre parallele alle bisettrici degli

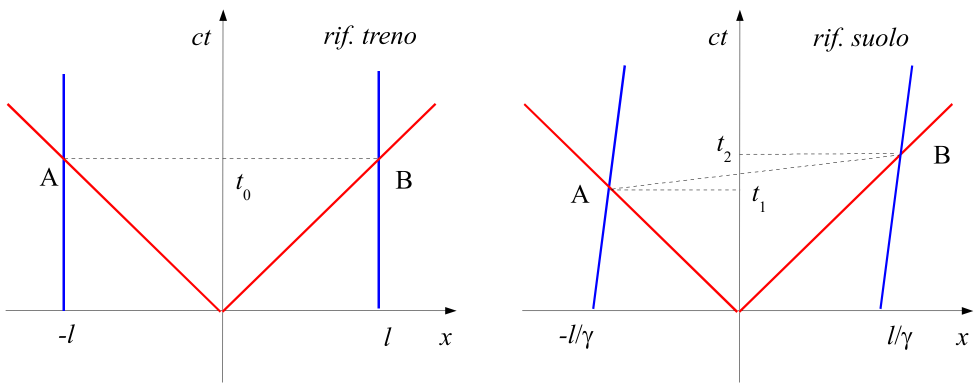
assi cartesiani per l'invarianza della velocità della luce in tutti i RI.

Inoltre, nel riferimento di K gli intervalli di tempo appaiono “dilatati” e le lunghezze “contratte” di un fattore γ (secondo diagramma).



Esempio 3 (*Relatività della simultaneità - Fabri*).

Consideriamo la situazione che abbiamo utilizzato per parlare di relatività della simultaneità, ovvero l'emissione di due segnali luminosi dal punto medio di un vagone ferroviario in movimento rispetto al suolo, e rappresentiamola in un diagramma spazio-temporale.



Nel riferimento del treno, poniamo l'origine nel punto medio del vagone e indichiamo in blu le linee orarie degli estremi del vagone (rette parallele all'asse dei tempi) e in rosso le linee orarie dei segnali luminosi (bisettrici dei quadranti).

Vediamo dal grafico che gli eventi A “la luce raggiunge la testa del vagone” e B “la luce raggiunge la coda del vagone” avvengono nello stesso istante $t_0 = l/c$, e sono quindi simultanei nel riferimento del treno.

Nel riferimento del suolo, invece, gli estremi del vagone non sono in quiete, ma si muovono con velocità v, per cui le loro linee orarie diventano delle rette che formano con l'asse dei tempi un angolo minore di 45°, mentre le linee orarie dei segnali luminosi restano immutate.

Il grafico ci conferma che gli eventi A e B avvengono in due istanti diversi t_1 e t_2, e pertanto non sono simultanei nel riferimento del suolo.

Osservazioni

- Nel grafico relativo al riferimento del suolo, la distanza tra gli estremi del vagone è diminuita di un fattore γ per tenere conto della "contrazione delle lunghezze".
- L'intervallo spazio-temporale tra gli eventi A e B (come tra qualunque coppia di eventi) è invariante, ovvero non dipende dal riferimento scelto, ma questo non appare evidente dai grafici precedenti, in quanto noi tendiamo ad utilizzare la metrica euclidea (ovvero la lunghezza del segmento AB), e non quella di Minkowski, che contiene il segno negativo.

"*Struttura*" *dello spazio-tempo*

Come abbiamo visto, l'ordinamento temporale di due eventi non è definito in maniera assoluta, ma dipende dal RI scelto per descriverlo. D'altra parte, però, esso non può essere completamente arbitrario; sarebbe decisamente preoccupante se riuscissimo a trovare un RI in cui l'effetto di una determinata azione precede la causa che lo ha generato. Tale ordinamento è quindi soggetto a certi vincoli, che cerchiamo di descrivere.

- Se avviene che $(\Delta s_{AB})^2 = c^2(\Delta t)^2 - (\Delta l)^2 < 0$, e quindi che $\Delta l > c\Delta t$, allora diciamo che l'intervallo AB è di **tipo spazio** (*space-like*).

Esempio: nel riferimento della nostra aula scolastica, alle ore 8.01 l'insegnante comincia la lezione (evento A) ed un alunno ritardatario apre la porta (evento B).

Nel riferimento considerato, gli eventi A e B sono simultanei $(\Delta t = 0)$, ma sono spazialmente separati, per cui l'intervallo AB è di tipo spazio.

Vediamo che l'esempio precedente non descrive solo un caso particolare, ma ha carattere generale.

Se due eventi sono separati da un intervallo di tipo spazio, allora esiste sempre un riferimento in cui essi avvengono nello stesso istante di tempo (*sono simultanei*).

Supponiamo infatti che nel riferimento S del laboratorio gli eventi A e B siano separati da una distanza spaziale Δx e da una distanza temporale Δt con $\Delta x > c\Delta t$, per cui l'intervallo AB è di tipo spazio.

Verifichiamo se esiste un riferimento S' in cui gli eventi A e B sono simultanei: $\Delta t' = 0$.

Per le TL: $\Delta t' = \gamma(\Delta t - \beta \Delta x / c) = 0 \Rightarrow \beta = \dfrac{c\Delta t}{\Delta x}$.

Poiché l'intervallo è di tipo spazio, avremo $\beta < 1$, il che è corretto, per cui il riferimento S' esiste realmente.

Abbiamo così determinato la velocità $v = \beta c$ del riferimento S' rispetto ad S.

- Se avviene che $(\Delta s_{AB})^2 = c^2(\Delta t)^2 - (\Delta l)^2 = 0$, e quindi che $\Delta l = c\Delta t$, allora diciamo che l'intervallo AB è di **tipo luce** (*light-like* o *null*).

Esempio: nell'orologio a luce, indichiamo con A l'evento “il segnale luminoso viene emesso dalla sorgente”, con B l'evento “il segnale viene riflesso dallo specchio”, con C l'evento “il segnale viene assorbito dal rivelatore”. Gli intervalli AB e BC sono di tipo luce.

In generale, se l'intervallo AB è di tipo luce, allora un segnale luminoso può propagarsi dall'evento A all'evento B o viceversa. Infatti, la distanza percorsa dal segnale luminoso è $\Delta l = c\,\Delta t$.

Osserviamo che la proposizione precedente non è invertibile.

Infatti, se riprendiamo l'esempio dell'orologio a luce, è semplice vedere che l'intervallo AC non è di tipo luce, ma di tipo tempo, anche se gli eventi A e C sono collegati da un segnale luminoso.

- Se avviene che $(\Delta s_{AB})^2 = c^2 (\Delta t)^2 - (\Delta l)^2 > 0$, e quindi che $c\,\Delta t > \Delta l$, allora diciamo che l'intervallo AB è di **tipo tempo** (*time-like*).

Esempio: un punto materiale che nell'istante t_1 si trovava nella posizione x_1 (evento A) si sposta in modo che al tempo t_2 assuma la posizione x_2 (evento B).

Poiché ogni corpo dotato di massa deve muoversi con $v < c$, lo spazio da esso percorso è $\Delta x = v\,\Delta t < c\,\Delta t$, e quindi l'intervallo AB è di tipo tempo.

Come caso limite, se consideriamo un riferimento in cui il punto materiale è fermo, abbiamo $\Delta x = 0$, per cui l'intervallo AB è sempre di tipo tempo. Questo esempio può essere generalizzato come segue.

Se due eventi sono separati da un intervallo di tipo tempo, allora esiste sempre un riferimento in cui essi avvengono nello stesso luogo.

Supponiamo infatti che nel riferimento S del laboratorio gli eventi A e B siano separati da una distanza spaziale Δx e da una distanza temporale Δt con $\Delta x < c\,\Delta t$, per cui l'intervallo AB è di tipo tempo.

Verifichiamo se esiste un riferimento S' in cui gli eventi A e B avvengono nello stesso luogo: $\Delta x' = 0$.

Per le TL: $\Delta x' = \gamma(\Delta x - v\,\Delta t) = 0 \;\Rightarrow\; v = \dfrac{\Delta x}{\Delta t} \;\Rightarrow\; \beta = \dfrac{\Delta x}{c\,\Delta t}$.

Poiché l'intervallo è di tipo tempo, avremo $\beta < 1$, il che è corretto, per cui il riferimento S' esiste realmente.

Inoltre, il riferimento S' si muove con velocità $v = \beta c = \Delta x / \Delta t$, che è proprio quella necessaria perché gli eventi A e B siano collegati dalla linea oraria di un punto materiale che si muove di moto uniforme.

Osserviamo infine che $\Delta t' = \Delta \tau$ è l'intervallo di tempo proprio che intercorre tra i due eventi.

Attenzione. Alcuni libri di testo utilizzano una convenzione diversa, in cui l'intervallo spazio-temporale viene scritto con il segno opposto rispetto al nostro: $(\Delta s)^2 = (\Delta l)^2 - c^2 (\Delta t)^2$ anziché $(\Delta s)^2 = c^2 (\Delta t)^2 - (\Delta l)^2$.

Le due scelte sono assolutamente equivalenti dal punto di vista fisico, in quanto, se una quantità è invariante, rimane tale anche se viene cambiata di segno.

In questo caso, però, gli intervalli di tipo spazio avranno $(\Delta s)^2 > 0$ e quelli di tipo tempo $(\Delta s)^2 < 0$.

Inoltre, alcuni autori continuano a seguire la convenzione, che un tempo era piuttosto diffusa, di definire una variabile tempo immaginaria $\tau = it$, con $i^2 = -1$, in modo che l'intervallo spazio-temporale abbia in apparenza la usuale

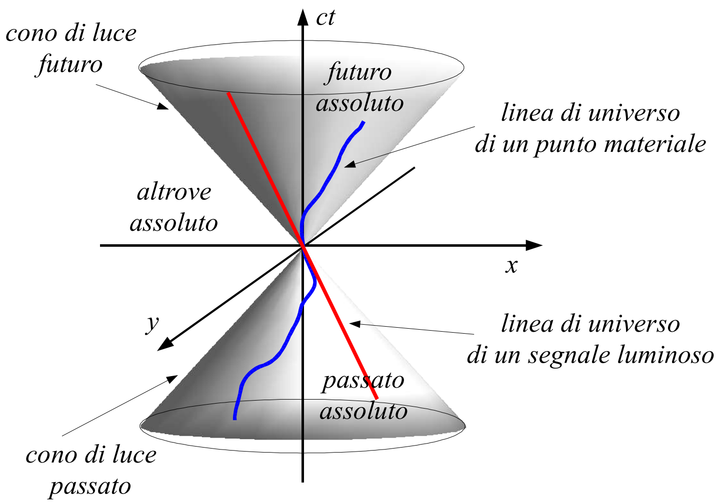
metrica euclidea $(\Delta s)^2=(\Delta l)^2+c^2(\Delta\tau)^2$ con la somma dei quadrati, anziché la loro differenza.
Naturalmente, però, si tratta solo di un artificio matematico, che non può modificare la realtà fisica.

Consideriamo un evento A, ad esempio "io mi trovo in una determinata posizione ad un determinato istante", e prendiamolo come origine del nostro sistema di coordinate.
La classificazione degli intervalli spazio-temporali che abbiamo descritto ci porta a suddividere lo spazio-tempo, rispetto all'evento A, in diverse regioni.

- Tutti gli eventi B tali che l'intervallo AB sia di tipo tempo (ovvero $(\Delta s_{AB})^2>0$) e che, rispetto ad A, nel nostro riferimento avvengono ad un tempo successivo (ovvero $t_B>t_A$) formano il cosiddetto **futuro assoluto** di A.

Geometricamente, questa regione dello spazio-tempo comprende la parte interna del cono avente come generatrice una bisettrice dei quadranti e che si trova nel semispazio delle ordinate positive.

Anche cambiando riferimento, gli eventi B che appartengono a questa regione saranno sempre separati da A da un intervallo di tipo tempo, e saranno sempre situati nel futuro di A; è per questo motivo che il futuro è detto "assoluto".
In questo caso, gli eventi A e B possono essere collegati dalla linea oraria di un corpo materiale (linea blu in figura), per cui tra A e B può esserci un *rapporto di causa ed effetto*; più esattamente, *A può mandare informazioni a B*, e l'evento *A può essere la causa dell'evento B*.



- In maniera analoga, gli eventi B tali che l'intervallo AB sia di tipo tempo (ovvero $(\Delta s_{AB})^2>0$) e che, rispetto ad A, nel nostro riferimento avvengono ad un tempo precedente (ovvero $t_B<t_A$) formano il cosiddetto **passato assoluto** di A.

Geometricamente, si tratta della parte interna del cono avente come generatrice una bisettrice dei quadranti e che si trova nel semispazio delle ordinate negative.

Anche in questo caso, pur cambiando riferimento, gli eventi B che appartengono a questa regione

saranno sempre separati da A da un intervallo di tipo tempo, e saranno sempre situati nel passato di A, che perciò viene detto “assoluto”.
Gli eventi A e B possono ancora essere collegati dalla linea oraria di un corpo materiale, per cui tra A e B può esserci un *rapporto di causa ed effetto*, ma ora *A può ricevere informazioni da B*, e l'evento *A può essere l'effetto dell'evento B*.

- Tutti gli eventi B tali che l'intervallo AB sia di tipo luce (ovvero $(\Delta s_{AB})^2=0$) formano la superficie che viene detta **cono di luce** (del futuro se $t_B>t_A$, del passato se $t_B<t_A$).

Volendo essere pignoli, la superficie in questione è un doppio cono di vertice A nel senso della geometria euclidea solo nel caso in cui abbiamo due dimensioni spaziali, mentre è un ente più complesso se ne abbiamo tre.

Anche in questo caso tra gli eventi A e B può esserci uno *scambio di informazioni*, e quindi una *relazione di causa ed effetto*, ma, poiché essi non possono essere collegati dalla linea oraria di un punto materiale, A può inviare a B (o ricevere da B) soltanto un segnale elettromagnetico (linea rossa in figura).

- Tutti gli eventi B tali che l'intervallo AB sia di tipo spazio (ovvero $(\Delta s_{AB})^2<0$) formano la regione che viene talvolta chiamata **altrove assoluto** (o *presente relativo*).

Geometricamente, si tratta della regione di spazio-tempo esterna al doppio cono di luce di vertice in A.

Se un evento B si trova in questa regione, allora nessuna linea oraria (né di un punto materiale, né di un segnale luminoso) può collegare A e B, per cui *tra A e B non può esserci nessuno scambio di informazioni e nessuna relazione di causa ed effetto* (per questo si parla di “altrove assoluto”); tali eventi sono *causalmente disconnessi*.
Inoltre, *non è possibile ordinare nel tempo in maniera univoca gli eventi A e B*, nel senso che:

- in alcuni riferimenti l'evento A <u>precede</u> l'evento B;
- in alcuni riferimenti l'evento A <u>segue</u> l'evento B;
- esiste un unico riferimento (a meno di isometrie) in cui gli eventi A e B sono <u>simultanei</u> (per questo si parla anche di “presente relativo”).

Se cambiamo riferimento, a causa della relatività della simultaneità, avremo una differente suddivisione dello spazio-tempo in passato, presente e futuro.

D'altra parte, a causa dell'invarianza della quantità $(\Delta s_{AB})^2$, l'intervallo tra due eventi mantiene il suo “genere” in ogni riferimento. Quindi *un intervallo di tipo spazio (o di tipo luce, o di tipo tempo) è visto come tale in tutti i riferimenti inerziali.*

Questa osservazione elimina anche il dubbio, che si era posto dopo la pubblicazione della teoria di Einstein, che in qualche riferimento un determinato fenomeno potesse accadere prima della causa che l'ha prodotto.

Tentiamo una sintesi di alcuni dei concetti che abbiamo esposto.

- Lo spazio-tempo è una struttura unitaria, che ciascuno di noi separa in spazio e tempo;
- però questa separazione avviene in modo diverso nei diversi RI;
- quindi il tempo non è più assoluto, perché eventi simultanei in un riferimento non lo sono in un altro;
- ma in ciascun riferimento lo spazio rimane ancora euclideo, e rimane lo stesso a tempi diversi.

Il tempo proprio come "lunghezza" dello spazio-tempo

Supponiamo di avere una curva di equazione $y = f(x)$ nello spazio euclideo.

Per misurarne la lunghezza, potremmo eseguire i seguenti passaggi:

- suddividiamo la curva in un numero molto grande di "trattini" sufficientemente piccoli, in modo che ciascuno di essi possa essere considerato rettilineo;
- calcoliamo la lunghezza di ogni trattino con il teorema di Pitagora:

  $$\Delta l = \sqrt{(\Delta x)^2 + (\Delta y)^2} = \Delta x \sqrt{1 + \left(\frac{\Delta y}{\Delta x}\right)^2} \quad ;$$

- sommiamo le lunghezze di tutti i trattini;
- passiamo al limite in cui il numero di archi tende all'infinito e la lunghezza di ciascuno di essi tende a zero.
- In questo modo, la somma tende all'integrale, l'incremento Δx tende al differenziale dx e il rapporto incrementale tende alla derivata.

Otteniamo così la formula cercata per la lunghezza della curva: $\Delta l = \int_{x_A}^{x_B} dx \sqrt{1 + [y'(x)]^2}$.

Dalla geometria euclidea sappiamo poi che la lunghezza di una curva che congiunge due punti dati A e B è <u>minima</u> se la curva è il segmento AB.

Questa è una conseguenza della *disuguaglianza triangolare* che abbiamo studiato in prima:

$\overline{AB} \leq \overline{AC} + \overline{BC}$, dove l'uguaglianza è vera se e solo se il punto C è allineato con A e B.

Torniamo ora nello spazio-tempo e prendiamo in considerazione una linea oraria di tipo tempo, che possa quindi rappresentare il moto di un punto materiale. Applichiamo il procedimento precedente per calcolare la "lunghezza", ovvero la misura dell'intervallo invariante, della linea oraria nello spazio-tempo:

- suddividiamo la linea oraria in un numero molto grande di "trattini" sufficientemente piccoli, in modo che ciascuno di essi possa essere considerato rettilineo;
- calcoliamo la "lunghezza" di ogni trattino con la formula dell'intervallo spazio-temporale:

  $$(\Delta s)^2 = c^2 (\Delta t)^2 - (\Delta x)^2 \quad ;$$

- se ci poniamo nel riferimento S' del corpo materiale il cui movimento descrive il "trattino" considerato, abbiamo:

  $\Delta x' = 0$ e $\Delta t' = \Delta \tau$, per cui: $(\Delta s)^2 = c^2 (\Delta \tau)^2$;

- confrontiamo tra loro le due relazioni ottenute: $(\Delta\tau)^2=(\Delta t)^2-\frac{(\Delta x)^2}{c^2} \Rightarrow \Delta\tau=\Delta t\sqrt{1-\frac{1}{c^2}(\frac{\Delta x}{\Delta t})^2}$;
- sommiamo e passiamo al limite, come abbiamo fatto in precedenza.

Otteniamo così la formula della "lunghezza" della linea oraria: $\Delta\tau=\int_{t_A}^{t_B} dt\sqrt{1-\frac{v^2(t)}{c^2}}$.

Si tratta della stessa formula ottenuta per un orologio che si muove di moto rettilineo uniforme rispetto ad un RI:

$$\Delta\tau=\frac{\Delta t}{\gamma}=\Delta t\sqrt{1-v^2/c^2} \quad ,$$

che è stata generalizzata al caso in cui l'orologio si muove di moto generico, e quindi la velocità v è funzione del tempo.

E' evidente l'analogia tra la formula della lunghezza di una curva nello spazio e quella di una linea oraria nello spazio-tempo.

Concludiamo che, per misurare la "lunghezza" (ovvero l'intervallo invariante) di una linea oraria di tipo tempo, possiamo portarci dietro un orologio che sia sempre in quiete nel nostro riferimento e misurare il tempo segnato da esso, ovvero il tempo proprio.

D'altra parte, tra la formula euclidea e quella di Minkowski esiste anche una notevole differenza dovuta al segno meno nell'integrando. P dimostrare che, a causa del segno negativo che appare nella "distanza" nello spazio-tempo, e quindi al carattere non euclideo della sua geometria, tale distanza si comporta in maniera opposta rispetto alla lunghezza geometrica.

In particolare, dati due eventi A e B il cui intervallo sia di tipo tempo, allora il tempo proprio misurato sul segmento AB è <u>maggiore</u> di quello misurato su qualunque altra curva che congiunga tali eventi.
Ricordando poi che, in un diagramma spazio-tempo, il segmento AB corrisponde a un moto uniforme, possiamo affermare che il tempo proprio $\Delta\tau$ calcolato nel moto uniforme non è il minimo, ma il <u>massimo</u> rispetto a quelli calcolati su tutte le altre curve (ovvero su tutti gli altri moti possibili) fra gli stessi eventi A e B.

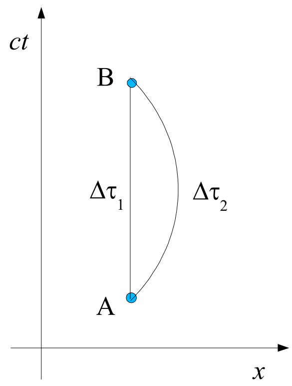
■ Infatti, l'intervallo spazio-temporale che separa gli eventi A e B è $\Delta s_{AB}^2=c^2\Delta t^2-\Delta l^2$.

Se consideriamo il segmento AB, poiché tale intervallo è un invariante relativistico, possiamo calcolarlo nel RI in cui A e B si trovano nello stesso luogo, ovvero quello di un punto materiale che si muove di moto rettilineo uniforme da A a B, per cui $\Delta l=0$, $\Delta t=\Delta\tau_{rett}$ e $\Delta s_{AB}^2=c^2\Delta\tau_{rett}^2$.

Se, invece, consideriamo una qualunque curva AB, avremo semplicemente $\Delta s_{AB}^2=c^2\Delta\tau_{curv}^2-\Delta l_{curv}^2$, ma, poiché essa non corrisponde ad un moto rettilineo uniforme, un punto materiale che si sposta da A verso B seguendo quella curva non definisce un RI.

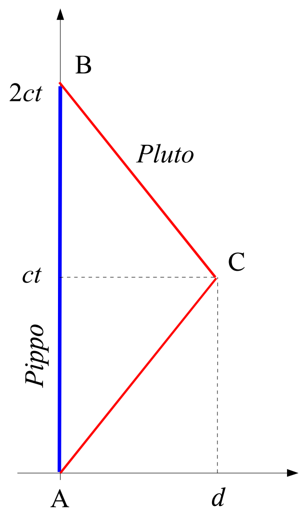
Uguagliando le due espressioni per Δs_{AB}^2 , ricaviamo: $\Delta\tau_{rett}>\Delta\tau_{curv}$.

Sottolineiamo ancora che questo fatto non è in contrasto con la nostra affermazione che il tempo proprio sia un invariante relativistico. Infatti, in quel caso parlavamo del passaggio da un RI ad un altro, mentre qui stiamo considerando tutti i possibili moti che congiungono A con B che, in generale, non saranno rettilinei uniformi, e quindi non corrisponderanno a dei RI.



La proprietà enunciata vale in particolare nel riferimento in cui la linea di universo AB rappresenta un corpo in quiete.
Nel grafico a fianco (che, come vedremo, esprime il cosiddetto "paradosso dei gemelli"), avremo quindi $\Delta\tau_1 > \Delta\tau_2$, al contrario di quello che saremmo tentati di concludere dal disegno.

In termini meno rigorosi, *la linea oraria più "corta" nel senso della distanza euclidea corrisponde ad un intervallo spazio-temporale maggiore nel senso di Minkowski, e quindi ad un tempo proprio più "lungo".*



Esempio. Supponiamo di trovarci in un RI nel quale Pippo resta fermo nell'origine delle coordinate spaziali per un tempo 2*t*, mentre Pluto, che al tempo $t_0=0$ si trovava con Pippo, si muove per un tempo *t* con velocità *v*, allontanandosi da Pippo di una quantità $d=vt$, e quindi torna indietro sempre per un tempo *t* con velocità $-v$, come indicato nel diagramma a destra.
Indichiamo con A l'evento "Pluto si separa da Pippo", con B l'evento "Pluto ritorna da Pippo" e con C l'evento "Pluto inverte la direzione del moto".
Poiché Pippo è in quiete, l'intervallo di tempo proprio che per lui trascorre tra l'evento A e l'evento B è $\Delta\tau_{Pippo}=2t$.
Poiché Pluto si muove sempre con velocità *v*, tra gli eventi A e B trascorre per lui un tempo proprio:

$$\Delta\tau_{Pluto}=\frac{2t}{\gamma}=2t\sqrt{1-v^2/c^2}<\Delta\tau_{Pippo} \quad .$$

Abbiamo quindi verificato su questo esempio che il segmento AB, la cui lunghezza euclidea è minore di quella della spezzata ACB, ha però una "lunghezza" invariante, qui misurata dal tempo proprio, maggiore della spezzata (anzi, maggiore rispetto a qualunque altra curva che abbia per estremi A e B).

Sottolineiamo che in RS non si può più parlare di tempo assoluto, ma *ciascun orologio segna il <u>suo</u> tempo, che dipende dal modo in cui esso percorre lo spazio-tempo.*

- A questo proposito, anche per spiegare la sua riluttanza a parlare di "dilatazione dei tempi" e "contrazione delle lunghezze", il prof. Fabri propone una analogia con i percorsi stradali.

"E' ovvio che non esiste <u>una</u> determinata distanza fra due città; tale distanza dipende dalla strada che percorriamo.
E a nessuno viene in mente di affermare che il contachilometri della nostra macchina cambia modo di funzionare a seconda della strada che percorriamo: è la lunghezza del percorso che non è assoluta.
Le due città stanno dove stanno sulla superficie della Terra; ma dall'una all'altra si può andare per più strade

(concettualmente infinite) e ciascun percorso ha una sua lunghezza.
Nessuno ci trova niente di strano, solo perché ci siamo abituati per lunga esperienza.
Quello che ora stiamo scoprendo è che con lo spazio-tempo succede la stessa cosa: fissati due punti dello spazio-tempo, esistono infiniti percorsi (ossia moti di corpi) che li uniscono, e ciascuno ha una sua "lunghezza" (leggi: "tempo segnato dall'orologio").
E' questo quadro concettuale che in relatività sostituisce il tempo assoluto newtoniano".

- Se avessimo il tempo e le competenze necessarie per una riflessione filosofica, potremmo chiederci qual è la natura dello spazio-tempo definito dalla RR, ed in particolare se esso esiste oltre e al di là degli oggetti materiali, o se invece non ha un'esistenza indipendente, ma rappresenta solo la "forma" della relazione tra i corpi.

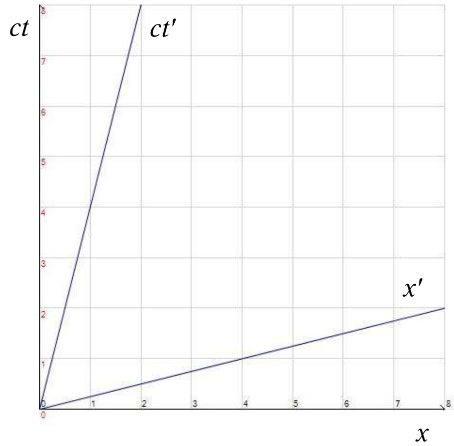
La prima scelta prende il nome di *sostanzialismo*, la seconda di *relazionismo*.
Per quanto riguarda lo spazio, si può far risalire questa dualità a Newton (sostanzialista) e a Leibniz (relazionista), ma, in realtà, questa alternativa attraversa tutta la filosofia della scienza.
In relatività, il punto di vista sostanzialista è legato al nome di Minkowski, che ha introdotto il concetto di spazio-tempo, e di cui ricordiamo ancora la citazione che abbiamo riportato in apertura di paragrafo: "D'ora in avanti, lo spazio singolarmente inteso, ed il tempo singolarmente inteso, sono destinati a svanire in nient'altro che ombre, e solo una connessione dei due potrà preservare una realtà indipendente".
In genere si tende a vedere Einstein come relazionista, ma in realtà le posizioni filosofiche di Einstein variano nel tempo e non sono mai nettamente definite. Ad esempio, in una lettera a Michele Besso del 1952, Einstein rimprovera l'amico dicendogli: "Tu non prendi sul serio le quattro dimensioni della relatività, ma consideri invece il presente come se fosse la sola realtà. Ciò che tu chiami 'mondo' corrisponde, nella terminologia fisica, a delle 'sezioni spaziali', alle quali la teoria della relatività nega realtà oggettiva". Ma, in "*Relatività: esposizione divulgativa*", Einstein scrive: "Lo spaziotempo non è di necessità qualcosa a cui si possa attribuire un'esistenza separata, indipendentemente dagli oggetti effettivi della realtà fisica. Gli oggetti fisici non sono nello spazio, bensì spazialmente estesi. In tal modo il concetto di 'spazio vuoto' perde il suo significato".
Molto più decisa è la posizione relazionista (o convenzionalista) di Poincaré, che afferma: "È impossibile rappresentarsi lo spazio vuoto. Tutti i nostri sforzi per immaginare uno spazio puro, da cui siano esclusi degli oggetti materiali, non possono avere altro risultato che una rappresentazione nella quale le superfici intensamente colorate, ad esempio, sono sostituite da linee di colori tenui, e non potremmo percorrere fino in fondo questa strada perché tutto svanirebbe e finirebbe nel nulla. Da ciò deriva l'irriducibile relatività dello spazio. Chiunque parli dello spazio assoluto fa uso di una parola priva di senso". Ancora: "Scarterò in primo luogo l'idea di un preteso senso dello spazio che ci farebbe localizzare le nostre sensazioni in uno spazio bell'e fatto, la cui nozione sarebbe preesistente a qualsiasi esperienza, e che prima di qualsiasi esperienza avrebbe tutte le proprietà dello spazio della geometria". E, infine: ""Se la geometria non è una scienza sperimentale, è una scienza la cui nascita è legata all'esperienza; siamo noi ad aver creato lo spazio che essa studia, ma adattandolo al mondo in cui viviamo. Abbiamo scelto lo spazio più comodo, ma è l'esperienza ad aver guidato la nostra scelta. Poiché questa scelta è inconscia, ci sembra imposta; alcuni dicono che ci è imposta dall'esperienza, altri sostengono che nasciamo tutti con il nostro spazio bell'e e pronto. Le considerazioni precedenti mostrano in quale misura queste due concezioni siano in parte vere e in parte errate".
Al di là delle preferenze personali, facciamo presente che in genere risulta spontaneo tendere ad una visione sostanzialista quando si affronta la Relatività Generale.

TL e diagrammi spazio-tempo

Fino a questo punto, per rappresentare una determinata situazione fisica in due diversi RI, abbiamo utilizzato due diversi diagrammi spazio-temporali. Vediamo, invece, come è possibile visualizzare entrambi i riferimenti nello stesso diagramma.

Consideriamo un RI S e tracciamo il diagramma spazio-tempo riferito ad S ed avente assi x e ct perpendicolari tra loro.

Come sappiamo, un RI S' in moto rispetto ad S con velocità v avrà coordinate spaziali e temporali collegate con quelle di S dalle TL:



$$\begin{cases} x'=\gamma(x-vt) \\ t'=\gamma(t-\beta x/c) \;\Rightarrow\; ct'=\gamma(ct-\beta x) \end{cases} .$$

Nel nostro diagramma, l'asse x' sarà definito dalla condizione:

$$ct'=0 \;\Rightarrow\; \gamma(ct-\beta x)=0 \;\Rightarrow\; ct=\beta x$$

che, essendo della forma $y=mx$, rappresenta una retta passante per l'origine ed avente pendenza $m=\beta$.

In maniera analoga, l'asse ct' sarà definito dalla condizione:

$$x'=0 \;\Rightarrow\; \gamma(x-vt)=0 \;\Rightarrow\; ct=\frac{1}{\beta}x$$

che rappresenta ancora una retta passante per l'origine, ma avente pendenza $m=1/\beta$.

Osserviamo che il grafico si riferisce al caso $v>0$ (in particolare, abbiamo preso $\beta=1/4$); nel caso $v<0$, invece, i “nuovi” assi attraverserebbero il 2° ed il 4° quadrante.

Gli assi cartesiani riferiti ad S' non risultano perpendicolari tra loro nel diagramma costruito in S.

Più precisamente, sapendo dalla goniometria che due angoli complementari hanno le tangenti una reciproca dell'altra, vediamo che l'angolo che l'asse x' forma con l'asse x è uguale a quello che l'asse ct forma con l'asse ct', per cui il disegno è simmetrico rispetto alla bisettrice del 1° e del 3° quadrante.

Ora dobbiamo “calibrare” gli assi cartesiani relativi ad S', ovvero determinarne l'unità di misura.

Se fossimo nel piano euclideo, sarebbe sufficiente considerare la circonferenza di centro l'origine e raggio unitario, di equazione $x^2+y^2=1$, che è il luogo dei punti del piano aventi distanza dall'origine uguale ad uno.

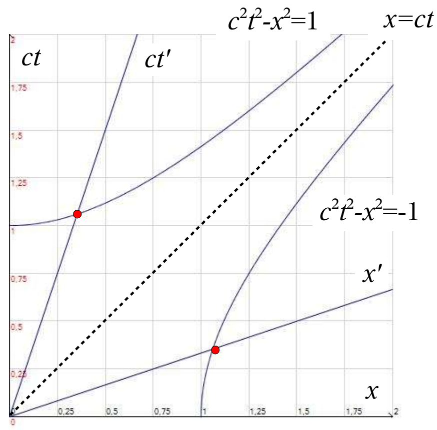
Poiché, però, la metrica di Minkowski è diversa da quella euclidea, dobbiamo procedere diversamente. Consideriamo gli eventi $(0,0)$ e (x,ct) e imponiamo che la loro “distanza” (nel senso di Minkowski) sia uguale a ± 1 in S:

$$(\Delta s)^2=c^2(\Delta t)^2-(\Delta x)^2=c^2t^2-x^2=\pm 1 .$$

A causa dell'invarianza dell'intervallo spazio-temporale, avremo anche:

$$(\Delta s')^2 = c^2(\Delta t')^2 - (\Delta x')^2 = c^2 t'^2 - x'^2 = \pm 1 \quad .$$

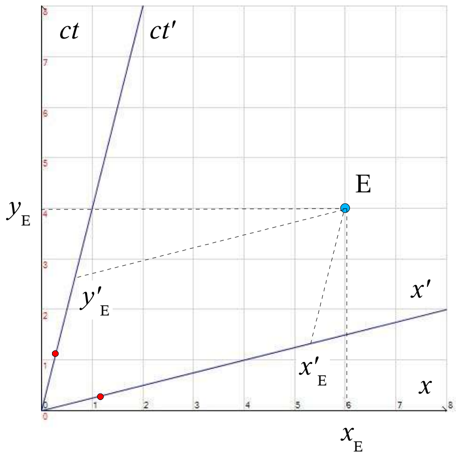
Quindi, l'insieme di tutti gli eventi aventi "distanza" dall'origine uguale a ± 1 è descritto dalle equazioni $c^2 t^2 - x^2 = \pm 1$, che, essendo della forma $x^2 - y^2 = \mp 1$, rappresentano due iperboli equilatere di centro l'origine ed aventi gli assi di simmetria coincidenti con gli assi cartesiani.



Di conseguenza, le unità di misura degli assi *x*' e *ct*' si ottengono dai punti di intersezione di tali assi con le iperboli considerate, il che ci permette di "calibrare" i nuovi assi.

Tali punti (*in rosso nel grafico*) hanno pertanto coordinate $(1,0)$ e $(0,1)$ in S'; le loro coordinate in S, invece, si ottengono dalle TL inverse, e sono rispettivamente $(\gamma, \beta\gamma)$ e $(\beta\gamma, \gamma)$, ancora simmetriche rispetto alla bisettrice del 1° e del 3° quadrante.

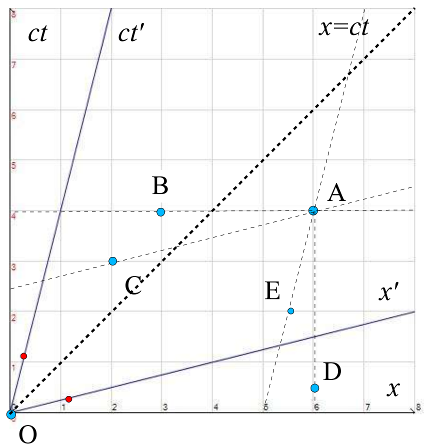
A questo punto, per determinare le coordinate di un evento E (*in azzurro nel grafico*) è sufficiente condurre dal punto che lo rappresenta nel diagramma le rette parallele agli assi che ci interessano (*x*, *ct* nel riferimento S o *x*', *ct*' nel riferimento S') e confrontare le lunghezze dei segmenti ottenuti con le unità di misura di ciascun asse che, come abbiamo appena visto, sono diverse per *x* e *x*' o per *t* e *t*'.



Nel riferimento S, l'insieme di tutti gli aventi che avvengono in uno stesso luogo è rappresentato da una retta "verticale" di equazione $x = cost$, mentre l'insieme di tutti gli eventi simultanei è rappresentato da una retta "orizzontale" di equazione $t = cost$.

Anche nel riferimento S' tutti gli eventi che avvengono in uno stesso luogo sono rappresentati da una retta di equazione $x' = cost$ e tutti gli eventi che avvengono in uno stesso istante sono rappresentati da una retta di equazione $t' = cost$, ma ora queste rette sono "oblique", e quindi non coincidono con le precedenti.

Ritroviamo quindi il nostro precedente risultato secondo cui il *concetto di simultaneità è relativo*: due eventi simultanei in un RI non lo sono in un altro in movimento rispetto al primo.



In particolare, riferendoci al grafico, possiamo affermare che gli eventi A e B sono simultanei per S (in quanto $t_A = t_B$), ma non per S', mentre A e C sono simultanei per S' (in quanto $t'_A = t'_C$), ma non per S.

In maniera analoga, A e D avvengono nello stesso luogo per S (in quanto $x_A = x_D$), ma non per S', mentre A ed E avvengono nello stesso luogo per S' (in quanto $x'_A = x'_E$), ma non per S.

Vediamo di nuovo che, *se due eventi sono separati da un intervallo di tipo spazio, allora il loro ordinamento temporale può essere invertito cambiando riferimento*.

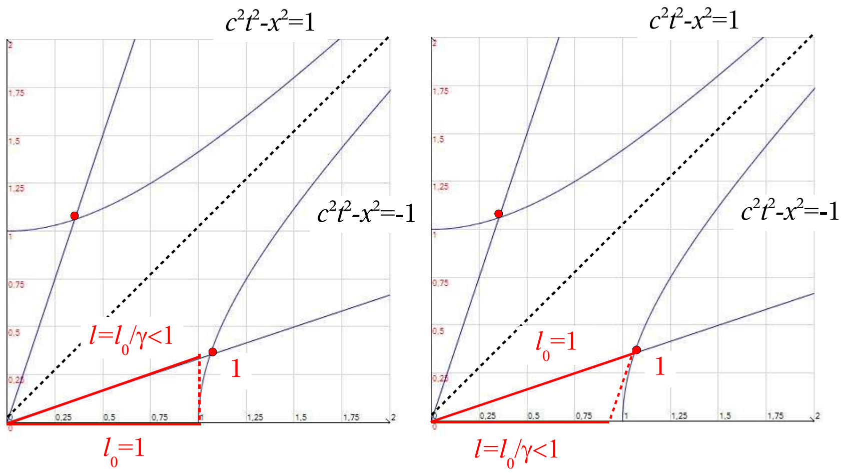
Ad esempio, nel riferimento S l'evento O <u>precede</u> D (in quanto $t_D > 0$), mentre in S' l'evento O <u>segue</u> D (in quanto $t'_D < 0$).

Infine, osserviamo che l'equazione della bisettrice del 1° e del 3° quadrante ha la stessa forma in entrambi i riferimenti: $x = ct$ o $x' = ct'$, e in entrambi rappresenta la propagazione di un segnale luminoso a partire dall'evento O.

Supponiamo ora di voler misurare un segmento in quiete nel riferimento S, per cui le linee orarie dei suoi punti sono rette di equazione $x = cost$. Dobbiamo quindi calcolare la distanza tra le posizioni degli estremi del segmento prese simultaneamente in S.

Consideriamo il caso in cui tale distanza risulti unitaria: $l_0 = 1$.

Sappiamo, però, che due eventi simultanei in S non lo sono in S'. Vediamo quindi dal grafico (*a sinistra*) che, se le posizioni degli estremi vengono misurate nello stesso istante riferito ad S', allora la misura della lunghezza ottenuta in S' è minore di quella ottenuta in S: abbiamo così ritrovato il fenomeno della "*contrazione delle lunghezze*".



Attenzione: dal disegno sembra che $l > l_0$, ma solo perché tendiamo ad usare spontaneamente la metrica euclidea. Per ottenere la risposta corretta con la metrica minkowskiana, dobbiamo prendere in considerazione la posizione dell'unità di misura su *x'* (*sempre in rosso*), che abbiamo ottenuto in precedenza con l'iperbole di calibrazione.

Arriviamo alla stessa conclusione, scambiando il ruolo dei due riferimenti, se il segmento è in quiete rispetto ad S' (*disegno a destra*).

Dal diagramma spazio-temporale è ancora più evidente che il risultato trovato non significa che gli oggetti subiscano una vera "contrazione" in senso fisico, ma semplicemente che gli osservatori non concordano sulla nozione di simultaneità.

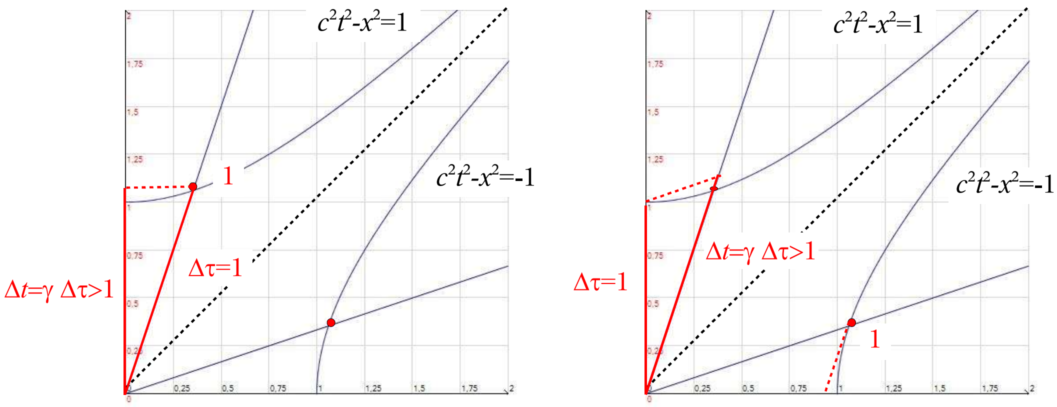
Decidiamo quindi di misurare un intervallo di tempo, ovvero di calcolare la distanza temporale tra due eventi misurata da un orologio in quiete (rispetto a cui, quindi, i due eventi avvengano nello stesso luogo).

Consideriamo il caso in cui tale intervallo, misurato in S', risulti unitario: $\Delta\tau=1$.

D'altra parte, due eventi che avvengono nello stesso luogo in S' non hanno questa proprietà in S.

Vediamo quindi dal grafico (*a sinistra*) che, se la distanza temporale tra i due eventi viene misurata nella stessa posizione riferita ad S', allora la misura dell'intervallo temporale ottenuta in S è maggiore di quella ottenuta in S'.

Abbiamo quindi ritrovato per altra via il fenomeno della "*dilatazione dei tempi*".



Possiamo giungere alla stessa conclusione, scambiando il ruolo dei due riferimenti, se l'orologio è in quiete rispetto ad S (*disegno a destra*).

Anche in questo caso, il risultato trovato non implica che gli orologi abbiano subito dei cambiamenti nella loro struttura fisica, ma è conseguenza dei fatti che gli osservatori non concordano sulla nozione di "trovarsi nello stesso luogo" e che la velocità della luce sia finita.

Riassumiamo ancora una volta alcuni dei concetti di questa sezione.

- Lo spazio-tempo è un ente 4-dimensionale, nel quale si possono introdurre in infiniti modi delle coordinate.
- Nell'ambito della RR esistono dei sistemi di coordinate privilegiati, ovvero quelli associati ai RI.
- In tali sistemi, tre coordinate sono spaziali, mentre una rappresenta il tempo del riferimento,

ovvero il tempo segnato da orologi fermi e opportunamente sincronizzati tra loro.

- Lo spazio-tempo è dotato di una metrica, grazie alla quale ad ogni curva si può attribuire una lunghezza.
- Quando la curva è la linea oraria di un corpo in movimento, la sua lunghezza misura il tempo segnato da un orologio che accompagna il corpo (tempo proprio).
- Quindi il tempo proprio, in generale, differisce dal tempo del RI (tempo coordinato).
- Se due corpi partono e arrivano dagli stessi punti, ma seguono traiettorie diverse, e/o si muovono con leggi orarie diverse, i loro tempi propri saranno in generale diversi.

Problema 6.1 (*Taylor-Wheeler cap.*1*, n.*1)

Due eventi hanno luogo nello stesso punto nel riferimento del laboratorio e sono separati nel tempo da 3 secondi.

a. Calcola la distanza spaziale tra i due eventi nel riferimento di un'astronave in cui i due eventi sono separati nel tempo da 5 secondi.
b. Calcola la velocità dell'astronave rispetto al riferimento del laboratorio.

Soluzione

a. Nel riferimento del laboratorio: $\Delta x=0$, $\Delta t=3s$.

   Nel riferimento dell'astronave: $\Delta x'$ è incognita, $\Delta t'=5s$.

   Poiché l'intervallo spazio-temporale è invariante:

   $$c^2(\Delta t)^2-(\Delta x)^2=c^2(\Delta t')^2-(\Delta x')^2 \Rightarrow$$

   $$\Delta x'=\sqrt{25c^2-9c^2}=4c\simeq 4s\cdot 3\cdot 10^8\frac{m}{s}\simeq 1{,}2\cdot 10^9 m \quad .$$

b. Sappiamo che nel riferimento del laboratorio i due eventi hanno avuto luogo nello stesso punto.

   Nel riferimento dell'astronave tale punto ha subito uno spostamento $\Delta x'$ nel tempo $\Delta t'$.

   La velocità relativa è quindi: $v=\dfrac{\Delta x'}{\Delta t'}\simeq\dfrac{1{,}2\cdot 10^9 m}{5s}\simeq 2{,}4\cdot 10^8\dfrac{m}{s}$.

   In alternativa, sappiamo che il coefficiente di "dilatazione temporale" è: $\gamma=\dfrac{\Delta t'}{\Delta t}=\dfrac{5}{3}$.

   D'altra parte: $\gamma=\dfrac{1}{\sqrt{1-\beta^2}} \Rightarrow \beta=\sqrt{1-\dfrac{1}{\gamma^2}} \Rightarrow v=c\sqrt{1-\dfrac{1}{(5/3)^2}}=\dfrac{4}{5}c$

   che coincide con il precedente risultato.

- Potremmo anche utilizzare le TL: $\begin{cases} x'=\gamma(x-vt) \\ t'=\gamma(t-\beta x/c) \end{cases}$.

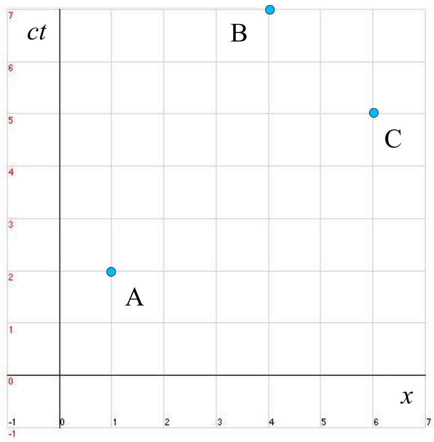
  Differenziamo e sostituiamo $\Delta x=0$: $\begin{cases} \Delta x'=-\gamma v\Delta t \\ \Delta t'=\gamma\Delta t \end{cases}$.

  Dalla seconda eq. ricaviamo γ, e quindi *v*; sostituiamo nella prima e ricaviamo $\Delta x'$.

  Con questo metodo scopriamo anche che il segno di $\Delta x'$ è negativo.

Problema 6.2 (*Taylor-Wheeler cap.*1*, n.*3)

Gli eventi A, B, C sono riportati nel diagramma spazio-tempo del riferimento del laboratorio (sia x che ct sono misurati in metri).



Per ciascuna coppia di eventi, determina:

a. di che genere è l'intervallo tra di essi;

b. qual è il tempo proprio o la distanza propria tra di essi;

c. se è possibile che uno dei due eventi sia causato dall'altro.

Soluzione

Per la coppia di eventi AB:

- $(\Delta s)^2_{AB}=c^2(\Delta t)^2-(\Delta x)^2=25\,m^2-9\,m^2=16\,m^2>0$, quindi l'intervallo AB è di tipo tempo.
- $\Delta\tau_{AB}=\sqrt{\frac{(\Delta s)^2}{c^2}}\simeq\sqrt{\frac{16\,m^2}{9\cdot10^{16}\,m^2/s^2}}\simeq1{,}3\cdot10^{-8}\,s$.
- A può avere causato B per mezzo di un segnale affidato ad un punto materiale.

Per la coppia di eventi AC:

- $(\Delta s)^2_{AC}=c^2(\Delta t)^2-(\Delta x)^2=9\,m^2-25\,m^2=-16\,m^2<0$, quindi l'intervallo AC è di tipo spazio.
- $\Delta l_{AC}=\sqrt{(\Delta s)^2}\simeq\sqrt{16\,m^2}=4\,m$.
- A e C non possono essere in rapporto di causa ed effetto.

Per la coppia di eventi BC:

- $(\Delta s)^2_{BC}=c^2(\Delta t)^2-(\Delta x)^2=9\,m^2-9\,m^2=0$, quindi l'intervallo BC è di tipo luce.
- Poiché non esiste un riferimento in cui un segnale luminoso risulti in quiete, non ha senso definire un tempo proprio per l'intervallo BC, anche se formalmente risulterebbe $\Delta\tau_{BC}=0$.
- C può avere causato B per mezzo di un segnale luminoso.

Problema 6.3 (*Relatività della simultaneità - Scherr* - 2000)

Ai due estremi di una pista di atterraggio, distanti $3000\,m$, avvengono due esplosioni.

Nel riferimento di un ingegnere, che si trova a riposo rispetto alla striscia, l'esplosione all'estremità destra avviene con un ritardo di $4\,\mu s$ rispetto a quella all'estremità sinistra.

Esiste un riferimento in cui le due esplosioni sono simultanee?

In caso affermativo, determina la velocità relativa di tale riferimento rispetto a quello dell'ingegnere.

Soluzione

Nel riferimento dell'ingegnere: $\Delta x=3\cdot 10^3 m$, $\Delta t=4\cdot 10^{-6} s$.

Cerchiamo un riferimento in cui $\Delta t'=0$.

Dalle TL: $t'=\gamma(t-\beta x/c) \Rightarrow \Delta t'=\gamma(\Delta t-\beta\Delta x/c)$.

Pertanto: $\Delta t'=0 \Rightarrow \gamma(\Delta t-\beta\Delta x/c)=0 \Rightarrow \beta=\dfrac{c\,\Delta t}{\Delta x}\simeq\dfrac{3\cdot 10^8 m/s\cdot 4\cdot 10^{-6} s}{3\cdot 10^3 m}\simeq 0{,}4$.

Quindi il riferimento cercato esiste, e si muove nel verso positivo (da sinistra verso destra) con velocità $v\simeq 0{,}4\,c$.

- Possiamo anche utilizzare l'intervallo spazio-temporale invariante:

  $c^2(\Delta t)^2-(\Delta x)^2=c^2(\Delta t')^2-(\Delta x')^2 \Rightarrow$

  $\Delta x'=\sqrt{(3\cdot 10^3 m)^2-(3\cdot 10^8 m/s\cdot 4\cdot 10^{-6} s)^2}\simeq 2{,}75\cdot 10^3 m$.

  Sappiamo che $\gamma=\dfrac{\Delta x}{\Delta x'}\simeq\dfrac{3\cdot 10^3 m}{2{,}75\cdot 10^3 m}\simeq 1{,}09$.

  Quindi: $\beta=\sqrt{1-\dfrac{1}{\gamma^2}}\simeq 0{,}40$, come in precedenza.

Problema 6.4 (*Fabri - Arezzo 2015*)

Una pulsar che si allontana da noi con velocità $v=0.6c$ emette lampi di luce a intervalli di $0.2\,s$ (nel suo riferimento di quiete).

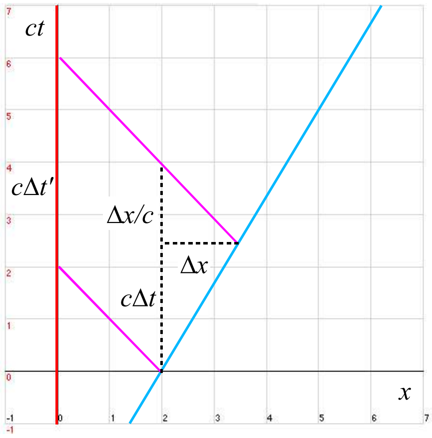
Disegna il diagramma orario della pulsar, e alcuni lampi di luce che arrivano a noi.

Qual è l'intervallo di tempo tra le emissioni di due lampi successivi, nel nostro riferimento?

Con quali intervalli riceviamo i lampi?

Nota. Mentre esistono molte pulsar con lampi di quella frequenza (e anche maggiore), non ne conosciamo di così veloci. Perciò il dato sulla velocità non va preso sul serio: è stato scelto per rendere più evidenti gli effetti relativistici.

Soluzione



Nel riferimento della Terra, l'intervallo di tempo tra le emissioni di due lampi successivi è:

$$\Delta t=\gamma\,\Delta\tau=\frac{\Delta\tau}{\sqrt{1-\beta^2}}=\frac{0{,}2\,s}{\sqrt{1-0{,}6^2}}=0{,}25\,s \quad .$$

L'intervallo di tempo con cui riceviamo i lampi è maggiore di quello tra le emissioni dei lampi stessi, in quanto la pulsar si allontana dalla Terra, per cui il secondo lampo deve percorrere una distanza maggiore rispetto al primo.

Più precisamente, nel tempo Δt la pulsar si allontana di:

$$\Delta x=v\,\Delta t\simeq 0{,}6\cdot 3\cdot 10^8\frac{m}{s}\cdot 0{,}25\,s\simeq 4{,}5\cdot 10^7\,m \quad .$$

L'intervallo di tempo tra la ricezione di due lampi consecutivi è quindi:

$$\Delta t'=\Delta t+\frac{\Delta x}{c}\simeq 0{,}25\,s+\frac{4{,}5\cdot 10^7\,m}{3\cdot 10^8\,m/s}\simeq 0{,}4\,s \quad .$$

Determiniamo anche la formula generica che lega $\Delta t'$ e $\Delta\tau$:

$$\Delta t'=\Delta t+\frac{\Delta x}{c}=\Delta t+\frac{v\,\Delta t}{c}=(1+\beta)\Delta t=(1+\beta)\gamma\,\Delta\tau=\frac{(1+\beta)}{\sqrt{1-\beta^2}}\Delta\tau=\sqrt{\frac{1+\beta}{1-\beta}}\Delta\tau \quad .$$

Nel diagramma spazio-tempo in figura, relativo al riferimento della Terra, la linea oraria della Terra è in rosso, quella della pulsar in azzurro, quella di due lampi luminosi consecutivi in viola.

Problema 6.5 (*Relatività della simultaneità - Scherr* - 2000)

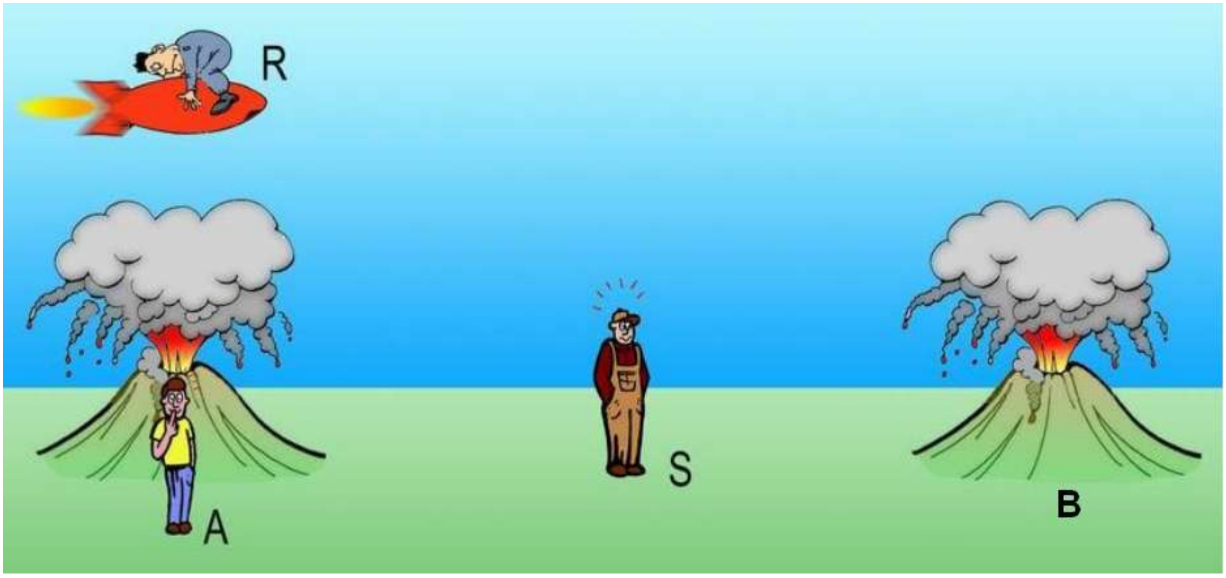
I vulcani A e B sono separati nel loro riferimento di quiete da una distanza $d = 300\,km$.

In entrambi avviene un'eruzione ed essi emettono due lampi luminosi.

Un geologo che si trova in un laboratorio situato nel punto medio del segmento che congiunge i due vulcani riceve i segnali luminosi dei due vulcani nello stesso istante.

Un assistente del geologo si trova in quiete in un laboratorio alla base del vulcano A.

Un'astronave si muove con velocità costante $v = 0{,}8\,c$ relativa al suolo dal vulcano A verso il vulcano B. Nell'istante in cui avviene l'eruzione del vulcano A, l'astronave si trova direttamente sopra di esso, per cui essa riceve il segnale luminoso del vulcano A in un tempo praticamente istantaneo.



Spiega se l'eruzione del vulcano A avviene *prima*, *dopo* o *nello stesso istante* dell'eruzione del vulcano B per il geologo, per il suo assistente e per il pilota dell'astronave.

Nota: tutti gli eventi ed i moti di cui parla il problema avvengono lungo una stessa linea retta. Inoltre, tutte le persone di cui si parla sono degli *osservatori intelligenti*, ovvero sanno che devono tenere conto del tempo di propagazione dei segnali luminosi per determinare l'istante in cui avviene un determinato evento nel proprio riferimento di quiete.

Soluzione

- Per il geologo i due eventi sono simultanei, in quanto entrambi sono avvenuti ad un istante $t_A = t_B = -d/(2c)$ precedente alla loro ricezione.
- Anche per l'assistente i due eventi sono simultanei, in quanto egli si trova a riposo rispetto al sismologo; entrambi si trovano quindi nello stesso riferimento.

  In altri termini, se il segnale luminoso del vulcano A viene emesso e ricevuto dall'assistente all'istante $t_A = 0$, il segnale luminoso del vulcano B viene ricevuto all'istante $t_{ric\,B} = d/c$, e quindi deve essere stato emesso all'istante $t_{em\,B} = d/c - d/c = 0 = t_A$.

- Per il pilota dell'astronave, invece, *l'eruzione del vulcano B avviene prima dell'eruzione del vulcano A*.

  In termini qualitativi, questo avviene perché l'astronave si sta muovendo verso il segnale luminoso emesso dal vulcano B, per cui lo incontra quando la distanza percorsa da tale segnale è minore di *d*, ma la correzione che egli deve compiere sul tempo di ricezione per tenere conto della velocità di propagazione della luce è d/c , per cui il tempo di emissione del segnale emesso dal vulcano B nel riferimento dell'astronave è negativo, e rimane tale anche tenendo conto della "contrazione delle lunghezze".

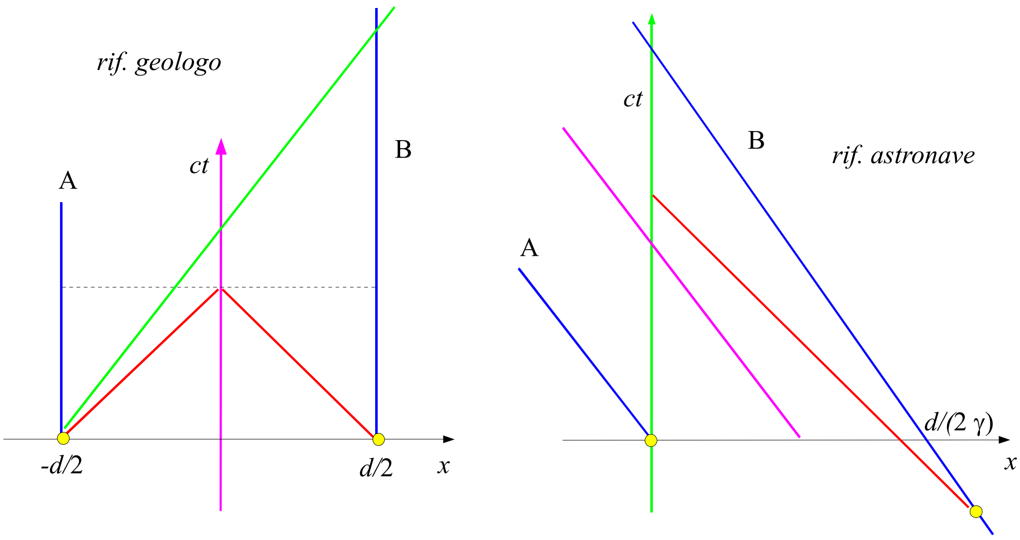
  Utilizzando le TL, sappiamo che nel riferimento del geologo l'eruzione del vulcano A avviene per $x_A=0$, $t_A=0$, mentre quella del vulcano B avviene per $x_B=d$, $t_B=0$.

  Quindi nel riferimento dell'astronave $t'_A=0$, mentre:

  $$t_B'=\gamma(t_B-\beta\frac{x_B}{c})=-\frac{5}{3}\cdot 0{,}8\cdot\frac{3\cdot 10^5\,m}{3\cdot 10^8\,m/s}\simeq -1{,}3\cdot 10^{-3}\,s<0 \quad .$$

- I seguenti diagrammi spazio-tempo rappresentano la situazione nel riferimento del geologo ed in quello dell'astronave.

  Sono rappresentate in blu le linee orarie dei vulcani, in verde quella dell'astronave, in rosso quelle dei segnali luminosi, in giallo gli eventi delle due eruzioni.



7. Gli effetti relativistici sono reali?

Realtà e apparenza

E' naturale chiedersi se gli effetti di cui abbiamo parlato, quali la dilatazione dei tempi e la contrazione delle distanze, siano "reali" o "apparenti".

Per rispondere, bisogna intendersi sul significato dei termini.

Se per "reali" intendiamo che essi siano l'effetto di "forze" o cause di natura imprecisata che agiscano sulle particelle che costituiscono un metro o un orologio in moto, comprimendole o rallentandole, allora la risposta è "no". Anzi, ripetiamo che una concezione di questo genere, che era quella di Lorentz, è in completo disaccordo con il PR.

Gli effetti relativistici sono però "reali" in quanto risultano essere in perfetto accordo con tutte le misure che possiamo compiere sui corpi in movimento.

Ricordiamo che tutte le grandezze fisiche hanno una *definizione operativa*, ovvero sono definite tramite il loro procedimento di misura, per cui chiedersi se una determinata grandezza possa avere un valore "vero" differente da quello che viene misurato è una domanda che ha ben poco a che fare con la fisica.

Einstein nel 1911 diede la seguente risposta:

"La domanda se la contrazione delle lunghezze esista realmente o no è fuorviante. Essa non esiste "realmente" in quanto non avviene per un osservatore che si muova insieme al corpo; d'altra parte essa esiste "realmente" in quanto, in linea di principio, può essere verificata con delle misure fisiche da parte di un osservatore che non si muova insieme al corpo".

Vediamo la stessa questione da un altro punto di vista.

Ricordiamo che in RS un corpo è definito nello spazio-tempo a quattro dimensioni, e non semplicemente in uno spazio geometrico a tre dimensioni a cui venga aggiunta una dimensione temporale. Un oggetto esteso, come una matita o un'astronave, è rappresentato dal suo "tubo di universo", ovvero dall'insieme delle linee di universo dei punti che lo compongono.

D'altra parte, noi possiamo percepire soltanto una sezione in tre dimensioni del corpo, e per fare questo utilizziamo il nostro concetto di simultaneità: prendiamo in considerazione tutti i punti che compongono il corpo nello stesso istante di tempo.

Ma, come abbiamo visto, quando due diversi RI compiono delle misure sullo stesso corpo, ognuno di essi percepisce un diverso insieme di eventi simultanei, per cui ogni riferimento vedrà una diversa sezione del corpo in tre dimensioni, e quindi i risultati delle misure saranno diversi nei vari riferimenti.

Vediamo ora alcuni risultati sperimentali che confermano la "realtà" degli effetti relativistici.

Vita media dei muoni

Il *mesone* μ, o *muone*, viene chiamato mesone solo per tradizione, ma in realtà è un *leptone*, ovvero una particella che, oltre all'interazione elettromagnetica, interagisce solo tramite quella nucleare debole, e non attraverso quella forte.

In un certo senso, è un “parente” più pesante dell'elettrone, con una massa che è circa 206 volte quella dell’elettrone. A differenza dell'elettrone, però, il mesone μ è instabile e decade in altre particelle (elettrone e neutrini) con vita media $\tau \simeq 2{,}2 \cdot 10^{-6} s$, il che significa che, quando i muoni sono a riposo, il loro numero varia in funzione del tempo secondo la legge esponenziale:

$$N(t) = N_0 e^{-t/\tau} \quad .$$

Nelle alte zone dell’atmosfera i raggi cosmici ad alta energia, principalmente protoni, interagiscono con i nuclei degli atomi di gas ivi presenti. Queste interazioni generano dei mesoni π, o pioni, che in tempi brevissimi (rispetto alla vita media del muone) decadono in muoni aventi una velocità molto vicina a quella della luce: $v \approx 0{,}998\, c$.

Di conseguenza, un muone prodotto negli alti strati dell’atmosfera dovrebbe compiere un tragitto medio $l_0 \approx v \tau \approx 3 \cdot 10^8 m/s \cdot 2{,}2 \cdot 10^{-6} s \approx 600\, m$, e quindi avrebbe una probabilità molto bassa di raggiungere il livello del mare.

In realtà, alla superficie terrestre arriva un numero di muoni molto maggiore rispetto alle attese.

Un esperimento realizzato da Bruno Rossi e D. B. Hall nel 1940 permise di misurarne la vita media, confermando l'esistenza della dilatazione dei tempi (e, indirettamente, quella della dilatazione delle lunghezze).

Infatti, nel riferimento della Terra il muone si muove con velocità *v*, per cui la sua vita media subisce una “dilatazione” assumendo il valore:

$$t = \gamma \tau \simeq \frac{1}{\sqrt{1 - 0{,}998^2}} \tau \simeq 16 \cdot 2{,}2 \cdot 10^{-6} s \simeq 3{,}5 \cdot 10^{-5} s \quad .$$

Il cammino percorso nel riferimento della Terra aumenta così di un fattore γ, diventando:

$$l_1 = \gamma l_0 \approx 16 \cdot 600\, m \approx 9600\, m \quad .$$

Tale cammino viene percorso nel tempo: $t_1 = l_1 / v \approx 3{,}2 \cdot 10^{-5} s$.

La percentuale di muoni che raggiunge il livello del mare è quindi:

$$\frac{N(t_1)}{N_0} = e^{-t_1/t} \approx e^{-\frac{3{,}2 \cdot 10^{-5} s}{3{,}5 \cdot 10^{-5} s}} \approx 40\% \quad .$$

Se, invece, ci poniamo nel riferimento dei muoni, vedremo la Terra muoversi con velocità $-v$.

Quindi, lo spessore dell'atmosfera, che per questo problema può essere stimato in $h \approx 10\, km$, subisce una “contrazione” diventando: $h' \approx h/\gamma \approx 630\, m$.

Esso viene percorso nel tempo $t' = h'/v \approx 2{,}1 \cdot 10^{-6} s$, comparabile con la vita media a riposo.

Anche in questo caso, quindi, la percentuale di muoni che raggiunge il suolo è:

$$\frac{N(t')}{N_0}=e^{-t'/\tau}\approx e^{-\frac{2,1\cdot 10^{-6}s}{2,2\cdot 10^{-6}s}}\approx 40\%$$

L'esperimento è stato ripetuto da Frisch e Smith (1962) con una precisione maggiore e, fin dagli anni '50, utilizzando, al posto delle particelle dei raggi cosmici, quelle che circolano in un acceleratore.

In questo caso, delle particelle (mesoni μ, π, K) di grande energia vengono poste in un anello di accumulazione, dove si muovono ad velocità *v* molto vicina a *c*, e vengono lasciate nell'anello per un tempo sufficientemente lungo per poterne vedere il decadimento.

Misurando come varia il loro numero nel tempo, si può calcolarne la vita media e verificare che essa è più lunga di un fattore γ rispetto a quella a riposo.

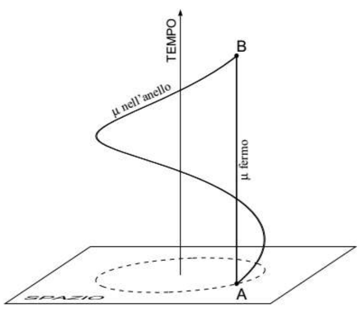
Riportiamo anche (con qualche piccolo adattamento) le riflessioni del prof. Fabri sul fenomeno discusso.

"La spiegazione tradizionale è che si tratta di un classico esempio di dilatazione del tempo: un orologio che cammina va più lento di un orologio fermo. Ma questo approccio è pericoloso: la dilatazione del tempo è una delle cose che creano confusione perché non si capisce mai bene se si tratta di un effetto oggettivo o soggettivo, se l'orologio che cammina va realmente più lento oppure no, se vale ancora il PR. Se lui si muove rispetto a me, io mi muovo rispetto a lui, quindi per lui il mio orologio va più piano: come possono accadere entrambe le cose? [...]

Ricordo che quando si parla di vita media dei muoni ci si riferisce a una legge di decadimento analoga a quella dei nuclei radioattivi: una legge esponenziale. Vita media τ significa che al tempo τ solo una frazione 1/*e* dei muoni sopravvive, gli altri sono decaduti. Perciò per misurare la vita media si procede così: si comincia con un certo numero di particelle, e si va a vedere quante ne sono rimaste dopo un dato tempo.

La domanda cruciale è: tempo di chi? Il tempo che io misuro è quello del laboratorio, ma i muoni in questo riferimento sono in moto. D'altra parte stiamo parlando di una proprietà della particella, la sua vita media, alla quale dovremo attribuire un determinato valore come facciamo con la massa, la carica, eccetera. Tale proprietà dovrà essere misurata in un riferimento in cui la particella è ferma. In altre parole, la vita media va misurata col tempo proprio della particella. Se sto nel mio laboratorio, è ovvio che misuro un'altra cosa. Se il muone è fermo, il tempo proprio coincide con quello del laboratorio; ma se è in movimento il tempo misurato sarà: $\Delta t=\gamma\Delta\tau$, che è maggiore di $\Delta\tau$.

Possiamo vedere questo fatto graficamente, disegnando la curva oraria del muone.



Il segmento AB rappresenta un muone fermo, mentre la curva oraria del muone in movimento dentro l'anello è un'elica. Come abbiamo visto in precedenza, a parità di estremi il tratto rettilineo è più lungo dell'arco di curva; quindi nel punto B per il muone fermo è passato più tempo che per il muone in moto. Tra i due, è più probabile che sia decaduto il primo, mentre è meno probabile che sia decaduto quello in moto, che ha vissuto di meno. Perciò, per gli strumenti del laboratorio i muoni in movimento sembrano avere una vita media maggiore dei muoni fermi".

Paradosso dei gemelli

Già nel suo primo articolo del 1905, dopo avere parlato della "dilatazione dei tempi", Einstein osservava che, se poniamo due orologi sincronizzati in un dato punto P, e muoviamo uno dei due lungo una curva chiusa con velocità costante v fino a riportarlo in P, allora l'orologio che è rimasto fermo segnerà un tempo maggiore di un fattore γ rispetto a quello che si è mosso.

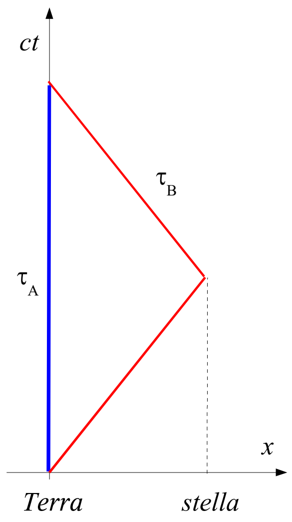
Nel 1911 egli riprese tale osservazione affermando che: "Se ponessimo un organismo vivente in una scatola, osserveremmo che, dopo un volo di lunghezza arbitraria, esso ritornerebbe al suo punto di partenza con pochi cambiamenti, mentre gli organismi della stessa specie che fossero rimasti nella posizione di partenza avrebbero già da tempo dato vita a nuove generazioni. Per l'organismo in movimento, la durata del viaggio sarebbe di un istante, purché il viaggio avesse luogo ad una velocità quasi uguale a quella della luce".

Sempre nel 1911, Paul Langevin elaborò la versione classica del paradosso applicandola ad un essere umano, ovvero immaginando un astronauta che compie un viaggio con un fattore di Lorentz $\gamma=100$, cioè con velocità $v=99{,}995\,\%\,c$. Egli rimane nella sua astronave per un anno del suo tempo, e quindi inverte la rotta. Al ritorno, si osserva che il viaggiatore è invecchiato di due anni, mentre sulla Terra ne sono passati 200.

- Quello di Einstein e di Langevin è senza dubbio un risultato "paradossale" in senso etimologico, in quanto è "contrario all'opinione comune", ma fino a qui non si tratta di un "paradosso" nell'uso che di questo termine si fa in logica, in quanto non è "autocontraddittorio o logicamente impossibile".

Il vero e proprio "paradosso" nascerebbe, secondo il filosofo inglese Dingle, dal fatto, su cui abbiamo più volte insistito, che il fenomeno della "dilatazione dei tempi" è simmetrico rispetto allo scambio dei due osservatori.

Di conseguenza, se il gemello A (rimasto sulla Terra) vede muoversi il gemello B con velocità v, e quindi può attendersi di essere più vecchio al momento dell'incontro, anche B vede A muoversi con velocità $-v$, e pertanto potrebbe fare la medesima previsione. Secondo i detrattori della RS, questa contraddizione proverebbe la mancanza di coerenza interna della teoria.



In realtà, dobbiamo ricordare che la RR asserisce l'equivalenza tra riferimenti <u>inerziali</u>.

Non è però possibile che entrambe le astronavi siano sempre riferimenti inerziali: può esserlo una, o nessuna delle due, ma non entrambe.

Nel nostro esempio, il gemello B, dovendo subire delle accelerazioni almeno al momento di invertire il cammino (senza tenere conto di quelle alla partenza ed all'arrivo) non può trovarsi per tutto il viaggio in un RI.

Dunque, la presunta equivalenza non sussiste, la situazione dei gemelli non è simmetrica, ed alla fine del viaggio le loro età risultano diverse.

Il risultato corretto si ottiene in maniera estremamente semplice ragionando nel RI del gemello A (ma sarebbe possibile, anche se piuttosto complicato, svolgere i calcoli nel riferimento accelerato di B), quindi il gemello B è effettivamente molto più giovane di A

quando lo incontra nuovamente alla fine del suo lungo viaggio interstellare.
Ma, anche senza occuparci di riferimenti, è sufficiente prendere in considerazione il concetto di tempo proprio.
Il fatto che $\tau_A > \tau_B$ è evidente dal diagramma spazio-tempo, in cui le linee di universo dei due gemelli condividono i punti di partenza e di arrivo; pertanto, come abbiamo visto, al segmento più breve (in senso euclideo) percorso dal gemello A corrisponde il tempo proprio (distanza di Minkowski) maggiore.
Per distinguere la situazione della "dilatazione dei tempi" (simmetrica tra i due riferimenti e dipendente dal riferimento) da quella del "paradosso dei gemelli" (asimmetrica e indipendente dal riferimento), nei testi anglosassoni quest'ultima viene definita "*differential aging*", ovvero "invecchiamento differenziale", e quindi "che dipende dalla linea oraria seguita".
Cogliamo anche l'occasione per osservare che il nome di "Teoria della Relatività", che non è dovuto ad Einstein, ma ai suoi primi commentatori, a cominciare da Planck e Bucherer, può, come in questo caso, creare fraintendimenti e portare all'errata convinzione che tutto sia relativo e che non esistano risultati oggettivi.
Al contrario, come abbiamo cercato di mostrare, la parte principale della RS è quella che cerca gli elementi invarianti, assoluti, oggettivi, che non cambiano nel passaggio da un RI ad un altro.

- A costo di essere noioso, riporto le osservazioni del prof. Faetti, analoghe a quelle precedenti del prof. Fabri, che mi sembrano utili per comprendere meglio il fenomeno descritto.

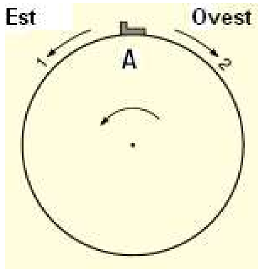
"Ovviamente, il fatto che, dopo il viaggio, i tempi trascorsi da A e da B risultino diversi (B è più giovane di A) ci sorprende molto perché esso va contro la nostra idea preconcetta che il tempo sia assoluto ed uguale per tutti, basata sulla nostra esperienza quotidiana in cui i sistemi si muovono a velocità enormemente più piccole di quella della luce nel vuoto. Concettualmente, però, se facciamo propria l'idea che il tempo non è altro che una coordinata aggiuntiva che si aggiunge alle ordinarie coordinate spaziali, allora il risultato ottenuto non ci dovrebbe sorprendere.
Infatti, se si hanno due punti nello spazio, nessuno si sorprende se la lunghezza della curva che congiunge i due punti cambia da curva a curva. Allo stesso modo, non ci dovremmo sorprendere se la "lunghezza" quadridimensionale di una curva che congiunge due punti nello spazio-tempo (cioè il tempo proprio misurato da un orologio che descrive il moto rappresentato dalla curva) dipende dalla curva considerata.
Un'analogia piuttosto efficace è quella del contachilometri di una macchina. Il contachilometri è uno strumento che misura la lunghezza del percorso effettuato da un'automobile, mentre l'orologio misura la lunghezza nello spazio-tempo. Ora, se due automobili distinte vanno da Pisa a Firenze seguendo percorsi diversi (una passa dalla superstrada, mentre l'altra fa un percorso panoramico sulle colline), nessuno si sorprende se, alla fine del viaggio, i contachilometri segnano numeri diversi nonostante essi siano perfettamente funzionanti. Per tutti noi è evidente che non c'è un modo unico per andare da Pisa a Firenze! Allo stesso modo non ci dovremmo sorprendere se gli orologi di due persone che partono da uno stesso punto nello spazio-tempo per incontrarsi nuovamente in uno stesso punto segnano tempi diversi. Infatti, gli orologi non fanno altro che misurare la lunghezza quadridimensionale nello spazio-tempo".

Notiamo che l'allungamento della vita media dei muoni (e di tutte le altre particelle), di cui abbiamo parlato in precedenza, nella versione in cui fa uso di un anello di accumulazione rappresenta una conferma sperimentale del paradosso, in quanto in esso si confronta la vita media dei "gemelli-muoni" che rimangono a riposo nel laboratorio con quella dei "gemelli-muoni" che si muovono nell'acceleratore.

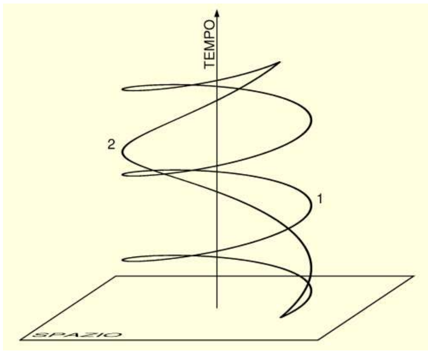
Esperimento di Hafele e Keating

Non discutiamo in maniera completa questo importante esperimento, sia per la sua complessità, sia perché per analizzarlo dovremmo tenere conto del campo gravitazionale terrestre, e quindi della Relatività Generale.

In questo esperimento, realizzato nel 1971, due orologi atomici furono montati su due aerei che facevano il giro del mondo in versi opposti. Gli orologi, che erano stati sincronizzati alla partenza, quando rientrarono all'aeroporto dal quale erano partiti, segnavano tempi diversi. Più esattamente, alla fine del viaggio, durato poco più di due giorni, l'orologio che aveva viaggiato verso Ovest era avanti rispetto all'altro di 332 *ns*.



Supponiamo per semplicità che tutto il viaggio degli aerei si svolga lungo l'equatore, che il loro moto sia uniforme (con la stessa velocità per entrambi) e che la loro quota sia costante.
Gli orologi partono quindi dall'aeroporto A posto all'equatore; l'orologio 1 gira in senso antiorario (visto da Nord), l'orologio 2 in senso orario.
Quando ritornano in A, si confronta l'intervallo di tempo $\Delta\tau_1$ segnato dall'orologio 1 con quello $\Delta\tau_2$ segnato dall'orologio 2. L'esperimento mostra che: $\Delta\tau_2 < \Delta\tau_1$.
Nonostante le apparenze, a causa della rotazione terrestre i due orologi non si trovano in condizioni simmetriche.
Infatti, se consideriamo un RI K solidale alla Terra (ma non in rotazione), allora in K l'orologio 1 ha velocità maggiore dell'orologio 2. Anzi, nel riferimento K entrambi gli orologi viaggiano verso Est, perché in generale la velocità di un aereo di linea è minore della velocità periferica della Terra, che all'equatore vale circa 460 *m/s*.
Quindi, la differenza fra i due aerei è che, sempre rispetto a K, uno viaggia più velocemente dell'altro, perché l'aereo 1 somma la sua velocità a quella della Terra, mentre l'aereo 2 la sottrae.
Ancora una volta, ripetiamo che non possiamo dire che il tempo segnato da ciascun orologio dipende dalla velocità dell'aereo su cui si trova. Piuttosto, se nell'esperimento i due orologi, partiti d'accordo, ritornano segnando tempi diversi, significa che non possiamo più parlare di tempo assoluto, ma che ciascun orologio segna il proprio tempo, che dipende dal modo in cui esso percorre lo spazio-tempo.



L'esperimento è schematizzato dal diagramma a fianco, che rappresenta lo spazio-tempo con due sole dimensioni spaziali.
Le due eliche, contrassegnate 1 e 2, sono le linee orarie dei due aerei.
Entrambe "salgono" nel tempo in senso antiorario, ma 1 fa tre giri nel tempo in cui 2 ne fa solo uno, a causa della diversa velocità in K.
Secondo la metrica euclidea, l'elica 1 è più lunga, ma con la metrica di Minkowski, a causa della presenza del segno negativo, la 1 è in realtà più corta, il che è in accordo con il fatto che l'orologio 1 segna un intervallo di tempo proprio più breve.

Osserviamo che anche l'esperimento di Hafele e Keating rappresenta una conferma sperimentale del paradosso dei gemelli, che in questo caso sono rappresentati dai due orologi.

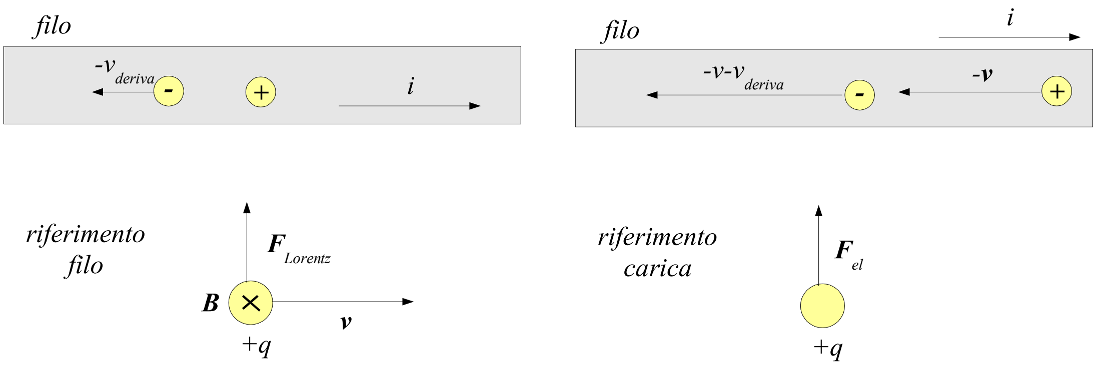
Ci limitiamo poi a citare per la loro importanza storica, ma senza descriverli, i primi esperimenti che hanno fornito, sia pure in maniera non del tutto diretta, una conferma quantitativa del fattore γ di "dilatazione dei tempi", che sono quelli di Kennedy-Thorndike (1932) e di Ives-Stilwell (1938).

Contrazione delle lunghezze

Attualmente non esistono verifiche diRETTE della contrazione delle lunghezze, in quanto non è possibile misurare la lunghezza di un oggetto in movimento con la precisione richiesta.

Riportiamo comunque una delle indicazioni indirette dell'esistenza di questo effetto.

Un filo percorso da corrente è (a tutti gli effetti pratici) elettricamente neutro nel suo riferimento di quiete, ma genera un campo magnetico nello spazio circostante ad esso. Di conseguenza, una particella carica (ad esempio positivamente), che si muova con velocità v parallelamente al filo è soggetta ad una forza di Lorentz proporzionale alla sua velocità relativa al filo.



Cosa succede se ci poniamo nel riferimento di quiete della particella carica?

In questo riferimento, il campo magnetico generato dal filo non agisce sulla particella, in quanto essa è in quiete. Allora, da dove ha origine la forza che essa subisce? Questo è uno dei motivi che avevano spinto molti fisici a mettere in dubbio la validità del PR nell'ambito dell'elettromagnetismo e a cercare di identificare un riferimento privilegiato.

In RS, invece, il paradosso non sussiste. Nel riferimento di quiete della carica, le cariche positive del filo si muovono con velocità $-v$, mentre la velocità degli elettroni di conduzione è leggermente maggiore a causa della loro velocità di deriva di qualche *mm* al secondo.

Dal momento che le due distribuzioni di carica si muovono con delle velocità leggermente diverse, anche la contrazione relativistica delle lunghezze che esse subiscono sarà leggermente diversa, e quindi, nel riferimento della carica in quiete, la distribuzione di carica negativa, che si muove più velocemente, avrà una densità lineare di carica lievemente maggiore. In questo riferimento, quindi, il filo non appare neutro, ma carico negativamente, e la forza subita dalla particella non è di tipo magnetico, ma elettrostatico.

In altri termini, il campo magnetico può essere considerato come una conseguenza relativistica del campo elettrico ed è degno di nota il fatto che tale effetto sia osservabile anche a velocità modeste.

Problema 7.1 (*Decadimento del muone*)

Un muone è una particella che, a riposo, decade dopo un tempo di vita media di circa $2{,}15\,\mu s$; la stessa particella in moto rispetto alla Terra a velocità molto elevata, percorre $6{,}4\,km$ nel riferimento terrestre prima di decadere. Considerando i due eventi:

A = creazione della particella; B = decadimento della particella, calcola:

a. la separazione temporale tra i due eventi nel sistema della Terra;

b. la velocità con cui si muove la particella rispetto alla Terra;

c. la distanza che la particella 'ritiene' di avere percorso nell'atmosfera terrestre.

Soluzione

a. Nel riferimento del muone, gli eventi A e B sono separati da una distanza temporale $\Delta t' = 2{,}15\cdot 10^{-6}\,s$ e da una distanza spaziale $\Delta x' = 0$.

Nel riferimento della Terra, gli eventi A e B sono separati da una distanza spaziale $\Delta x = 6{,}4\cdot 10^{3}\,m$, mentre la distanza temporale Δt è incognita.

Imponiamo l'invarianza dell'intervallo spazio-temporale:

$$(\Delta x)^2 - c^2(\Delta t)^2 = (\Delta x')^2 - c^2(\Delta t')^2 \;\Rightarrow$$

$$(\Delta t)^2 = \frac{(\Delta x)^2}{c^2} + (\Delta t')^2 \simeq \left(\frac{6{,}4\cdot 10^3\,m}{3\cdot 10^8\,m/s}\right)^2 + (2{,}15\cdot 10^{-6}\,s)^2 \simeq 459\cdot 10^{-12}\,s^2 \;\Rightarrow\; \Delta t \simeq 21{,}4\cdot 10^{-6}\,s \quad .$$

b. Nel riferimento della Terra, il muone si muove con velocità:

$$v = \frac{\Delta x}{\Delta t} \simeq \frac{6{,}4\cdot 10^3\,m}{21{,}4\cdot 10^{-6}\,s} \simeq 2{,}99\cdot 10^8\,\frac{m}{s}$$, che è ultrarelativistica.

Come verifica, calcoliamo il coefficiente di "dilatazione temporale":

$$\gamma = \frac{\Delta t}{\Delta t'} \simeq \frac{21{,}4\cdot 10^{-6}\,s}{2{,}15\cdot 10^{-6}\,s} \simeq 9{,}95 \quad .$$

Osserva che gli apici sono scambiati rispetto alle nostre solite notazioni.

Quindi: $\beta = \sqrt{1 - \frac{1}{\gamma^2}} \simeq 0{,}995 \;\Rightarrow\; v = \beta c \simeq 0{,}995\cdot 3\cdot 10^{-8}\,\frac{m}{s} \simeq 2{,}99\cdot 10^{-8}\,\frac{m}{s}$, come già visto.

c. La domanda è lievemente impropria, in quanto nel proprio riferimento la particella non "ritiene" di muoversi. L'estensore del quesito intende chiedere quale è la distanza percorsa dalla Terra nel riferimento del muone.

Ponendo $d = 6{,}4\,km$, abbiamo: $d' = \frac{d}{\gamma} \simeq \frac{6{,}4\cdot 10^3\,m}{9{,}95} \simeq 643\,m$.

Problema 7.2 (*Verifica "Sabin"* - 2010)

1. Un'astronave viaggia verso un pianeta di un sistema stellare distante 10 anni luce alla velocità di 0,9 c rispetto alla Terra. Determina quanto impiega l'astronave a raggiungere il pianeta:
    a. per un osservatore O rimasto sulla Terra;
    b. per un osservatore O' posto sull'astronave.
2. In un riferimento O avvengono due eventi A e B. L'evento A precede l'evento B di 50 s, e la distanza tra essi è $2{,}0 \cdot 10^{10}\,m$.
    a. Se un osservatore O' viaggia da A verso B con $v=0{,}7\,c$, quale distanza e quale intervallo di tempo misura tra i due eventi?
    b. Quale distanza e quale intervallo di tempo misurerebbe O' se invece di viaggiare da A verso B viaggiasse da B verso A?
    c. A quale velocità e in quale direzione dovrebbe viaggiare un osservatore per vedere i due eventi simultanei?
3. Nella scena iniziale di "Guerre Stellari" l'astronave Tantive IV è inseguita, nei pressi del pianeta Tatooine, da un incrociatore stellare. Sul pianeta, Luke Skywalker osserva la scena con il suo speciale binocolo, con cui egli registra che l'incrociatore viaggia alla velocità di 0,65 c, mentre l'astronave si muove alla velocità di 0,55 c.
    a. Qual è la velocità con cui l'incrociatore si avvicina all'astronave per un osservatore che si trova sull'incrociatore?
    b. Se la strumentazione del binocolo di Luke misura che, nel riferimento di Luke, la Tantive IV è lunga 150 metri, qual è la lunghezza propria dell'astronave?
    Qual è la lunghezza dell'astronave per un osservatore che si trova sull'incrociatore?
4. Un rettangolo ha i lati di dimensioni $a=3\,m$ e $b=2\,m$ se osservato da fermo. Quando è in moto con velocità v nella direzione del lato maggiore, il rettangolo sembra un quadrato.
Calcola la velocità v per cui avviene questo fenomeno.
5. Un'astronave viaggia verso un lontano pianeta alla velocità di 0,9 c rispetto alla Terra.
Per un astronauta che si trova sull'astronave il viaggio dura 16 anni.
    a. Quanto impiega l'astronave a raggiungere il pianeta per un osservatore O rimasto sulla Terra?
    b. Quanto è distante il pianeta per lo stesso osservatore terrestre?
6. Un osservatore solidale con il sistema di riferimento O vede un'esplosione localizzata sull'asse x nel punto di ascissa $x_1=480\,m$.
Una seconda esplosione si verifica, 5 μs dopo, nel punto di ascissa $x_2=1200\,m$.
    a. Qual è la separazione spaziale e temporale delle due esplosioni secondo un osservatore che si muove con velocità $v=+0{,}4\,c$ rispetto ad O?

b. A che velocità si deve muovere un terzo osservatore rispetto al riferimento O affinché veda le due esplosioni avvenire nello stesso luogo?
c. Qual è la separazione temporale tra i due eventi secondo il terzo osservatore?

7. Un veicolo spaziale parte dalla Terra alla volta di Antares, viaggiando alla velocità di 0,8 *c* rispetto alla Terra. Un anno dopo, un modello perfezionato del veicolo parte dalla Terra alla volta di Antares alla velocità di 0,9 *c*.
   a. Qual è la velocità della nuova astronave misurata da un astronauta che si trova sulla vecchia?
   b. A che distanza dalla Terra e dopo quanto tempo dal lancio della prima astronave avviene l'incontro tra le due astronavi secondo l'astronauta che si trova sull'astronave più vecchia?

Soluzioni

1.
   a. $t_O=\frac{d}{v}=\frac{10\,anni\cdot c}{0{,}9\,c}\simeq 11{,}1\,anni$;
   b. $t_{O'}=\frac{t_O}{\gamma}=t_0\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}\simeq 11{,}1\,anni\cdot\sqrt{1-0{,}9^2}\simeq 4{,}84\,anni$.

2.
   a. Consideriamo un asse delle ascisse diretto dal punto in cui avviene l'evento A verso il punto in cui avviene l'evento B.

   Calcoliamo $\gamma=\frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}}=\frac{1}{\sqrt{1-0{,}7^2}}\simeq 1{,}40$.

   Per le TL: $\begin{cases}\Delta x'=\gamma(\Delta x-v\,\Delta t)\simeq 1{,}4(2\cdot 10^{10}\,m-0{,}7\cdot 3\cdot 10^8\,m/s\cdot 50\,s)\simeq 1{,}3\cdot 10^{10}\,m\\ \Delta t'=\gamma(\Delta t-\beta\,\Delta x/c)\simeq 1{,}4(50\,s-0{,}7\cdot 2\cdot 10^{10}\,m/(3\cdot 10^8\,m/s))\simeq 4{,}7\,s\end{cases}$.

   Come verifica, puoi controllare che (compatibilmente con i pesanti arrotondamenti eseguiti) l'intervallo spazio-temporale risulta invariante): $(\Delta x)^2-c^2(\Delta t)^2=(\Delta x')^2-c^2(\Delta t')^2$.

   b. In questo caso, dobbiamo considerare $v=-0{,}7\,c$, da cui:

   $\begin{cases}\Delta x'=\gamma(\Delta x-v\,\Delta t)\simeq 1{,}4(2\cdot 10^{10}\,m+0{,}7\cdot 3\cdot 10^8\,m/s\cdot 50\,s)\simeq 4{,}3\cdot 10^{10}\,m\\ \Delta t'=\gamma(\Delta t-\beta\,\Delta x/c)\simeq 1{,}4(50\,s+0{,}7\cdot 2\cdot 10^{10}\,m/(3\cdot 10^8\,m/s))\simeq 135\,s\end{cases}$.

   Verifica che anche in questo caso: $(\Delta x)^2-c^2(\Delta t)^2=(\Delta x')^2-c^2(\Delta t')^2$.

   c. I due eventi sono simultanei quando:

   $$\Delta t'=\gamma(\Delta t-\beta\,\Delta x/c)=0\ \Rightarrow\ \beta=\frac{\Delta t}{\Delta x}c=\frac{50\,s}{2\cdot 10^{10}\,m}\cdot 3\cdot 10^8\frac{m}{s}=0{,}75\ \Rightarrow\ v\simeq 2{,}25\cdot 10^8\frac{m}{s}$$.

   Poiché la velocità è positiva, l'osservatore deve muoversi da A verso B.

3.
   a. Per la composizione delle velocità: $v=\frac{v_1-v_2}{1-v_1 v_2/c^2}=\frac{0{,}65\,c-0{,}55\,c}{1-0{,}65\,c\cdot 0{,}55\,c/c^2}\simeq 0{,}156\,c$.

b. Lunghezza propria: $l_0=\gamma_{Luke}\cdot l_{Luke}=\dfrac{l_{Luke}}{\sqrt{1-\beta_{Luke}^2}}=\dfrac{150\,m}{\sqrt{1-0{,}55^2}}\simeq 180\,m$.

Lunghezza misurata dall'incrociatore: $l_{incr}=\dfrac{l_0}{\gamma_{incr}}\simeq\dfrac{180\,m}{\sqrt{1-0{,}156^2}}\simeq 178\,m$.

4. Ricordando la nostra osservazione sulla "invisibilità della contrazione di Lorentz", stabiliamo che la frase "il rettangolo sembra un quadrato" debba essere interpretata come: "le misure dei lati del rettangolo sono uguali", e non come "il rettangolo viene visto come un quadrato", che sarebbe falsa.

   Imponiamo quindi che il lato maggiore "contratto" sia uguale al lato minore:

$$\frac{a}{\gamma}=b\ \Rightarrow\ \gamma=\frac{a}{b}\ \Rightarrow\ \frac{1}{\sqrt{1-v^2/c^2}}=\frac{a}{b}\ \Rightarrow\ v=c\sqrt{1-\frac{b^2}{a^2}}\simeq 3\cdot 10^8\frac{m}{s}\sqrt{1-\left(\frac{2\,m}{3\,m}\right)^2}\simeq 2{,}24\cdot 10^8\frac{m}{s}\ .$$

5.

a. Per l'osservatore terrestre è presente il fenomeno della "dilatazione dei tempi":

$$t=\gamma\tau=\frac{16\,anni}{\sqrt{1-(0{,}9\,c/c)^2}}\simeq 36{,}7\,anni\ .$$

b. $d=vt\simeq 0{,}9\,c\cdot 36{,}7\,anni\simeq 33{,}0\,anni\ luce$.

6.

a. Calcoliamo $\gamma=\dfrac{1}{\sqrt{1-\beta^2}}=\dfrac{1}{\sqrt{1-0{,}4^2}}\simeq 1{,}09$.

Per le TL:
$$\begin{cases}\Delta x'=\gamma(\Delta x-v\Delta t)\simeq 1{,}09(720\,m-0{,}4\cdot 3\cdot 10^8\,m/s\cdot 5\cdot 10^{-6}\,s)\simeq 131\,m\\ \Delta t'=\gamma(\Delta t-\beta\Delta x/c)\simeq 1{,}09(5\cdot 10^{-6}\,s-0{,}4\cdot 720\,m/(3\cdot 10^8\,m/s))\simeq 4{,}40\,s\end{cases}\ .$$

b. Imponiamo: $\Delta x'=\gamma(\Delta x-v\Delta t)=0\ \Rightarrow\ v=\dfrac{\Delta x}{\Delta t}\simeq\dfrac{720\,m}{5\cdot 10^{-6}\,s}\simeq 1{,}44\cdot 10^8\dfrac{m}{s}\simeq 0{,}48\,c$.

c. $\gamma=\dfrac{1}{\sqrt{1-\beta^2}}=\dfrac{1}{\sqrt{1-0{,}48^2}}\simeq 1{,}14$.

$$\Delta t'=\gamma(\Delta t-\beta\Delta x/c)\simeq 1{,}14(5\cdot 10^{-6}\,s-0{,}48\cdot 720\,m/(3\cdot 10^8\,m/s))\simeq 4{,}39\cdot 10^{-6}\,s\ .$$

7.

a. Composizione delle velocità: $v=\dfrac{v_1-v_2}{1-v_1v_2/c^2}=\dfrac{0{,}9\,c-0{,}8\,c}{1-0{,}9\,c\cdot 0{,}8\,c/c^2}\simeq 0{,}357\,c$.

b. Poniamoci nel riferimento della Terra e misuriamo il tempo in anni, lo spostamento in anni luce e, quindi, la velocità in frazioni di *c*.

   Se poi poniamo $t=0$ nell'istante in cui parte la nuova astronave, la vecchia avrà una posizione iniziale $x_0=0{,}8\,anni\ luce$.

   Le equazioni del moto delle due astronavi sono quindi:

$$x_{old}=v_{old}\,t+x_0=0{,}8\,t+0{,}8\ \ ;\ \ x_{new}=v_{new}\,t=0{,}9\,t\ .$$

L'incontro avviene quando: $x_{new}=x_{old} \;\Rightarrow\; 0{,}9\,t=0{,}8\,t+0{,}8 \;\Rightarrow\; 0{,}1\,t=0{,}8 \;\Rightarrow\; t=8\,anni$.

Nel riferimento terrestre, è quindi trascorso un tempo $t+1=9\,anni$ dalla partenza dell'astronave più vecchia.

Al momento dell'incontro, entrambe le astronavi hanno percorso una distanza:

$$d=0{,}9\cdot 8=7{,}2\,anni\ luce \quad .$$

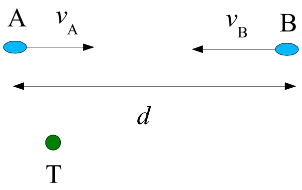
Nel riferimento dell'astronave più vecchia, il tempo trascorso è:

$$\tau=\frac{t+1}{\gamma}=9\sqrt{1-0{,}8^2}=5{,}4\,anni \quad .$$

Nello stesso riferimento, l'astronave ha "visto" la Terra e Antares spostarsi di una distanza:

$$d'=v_{old}\,\tau=\frac{d}{\gamma}=0{,}8\cdot 5{,}4=4{,}32\,anni\ luce \quad .$$

Problema 7.3



Nel riferimento della Terra, due astronavi A e B si dirigono l'una verso l'altra rispettivamente con velocità $v_A = 0{,}6\,c$, $v_B = 0{,}4\,c$; al tempo $t = 0$ la loro distanza è $d = 1\,anno\,luce$.

E' evidente che nel riferimento della Terra, le astronavi si incontrano al tempo $t_{inc} = 1\,anno$.

Se l'affermazione precedente non fosse così evidente, scrivi le leggi orarie delle due astronavi: $x_A = 0{,}6\,t$, $x_B = -0{,}4\,t + 1$ (in cui misuriamo il tempo in anni, lo spostamento in anni luce e, quindi, la velocità in frazioni di c) e imponi: $x_A = x_B$.

Ci chiediamo quanto dura il viaggio delle due astronavi nel riferimento di una di esse, ad esempio dell'astronave A.

Soluzione

Gli eventi"partenza dell'astronave A" e "partenza dell'astronave B", che erano simultanei nel riferimento della Terra, non lo sono nel riferimento dell'astronave A, per cui non è possibile applicare la "contrazione delle lunghezze".

Invece, gli eventi"partenza dell'astronave A" e "incontro delle due astronavi" nel riferimento dell'astronave A avvengono nello stesso luogo (che è, appunto, l'astronave), per cui è possibile applicare la "dilatazione dei tempi".

La durata del viaggio nel riferimento dell'astronave A è quindi:

$$\tau_{inc\,A} = \frac{t_{inc}}{\gamma_A} = 1\,anno \cdot \sqrt{1 - 0{,}6^2} = 0{,}8\,anni \quad .$$

In caso di dubbio, possiamo applicare le TL "complete" per capire meglio la situazione.

- L'evento "partenza dell'astronave A", che nel riferimento della Terra avviene nella posizione $x_0 = 0\,a.l.$ ed al tempo $t_0 = 0$, nel riferimento di A ha (come è ovvio) coordinate:
$$\begin{cases} x'_0 = \gamma_A (x_0 - v_A t_0) = 0 \\ t'_0 = \gamma_A (t_0 - \beta_A x_0 / c) = 0 \end{cases} .$$
- L'evento "incontro delle due astronavi", che nel riferimento della Terra avviene nella posizione $x_1 = 0{,}6\,a.l.$ ed al tempo $t_1 = 1\,anno$, nel riferimento di A ha coordinate:
$$\begin{cases} x'_2 = \gamma_A (x_2 - v_A t_2) = 1{,}25 \cdot (0{,}6 - 0{,}6 \cdot 1) = 0 \\ t'_2 = \gamma_A (t_2 - \beta_A x_2 / c) = 1{,}25 \cdot (1 - 0{,}6 \cdot 0.6) = 0{,}8\,anni \end{cases} .$$

  Osserviamo che il primo risultato è banale, in quanto l'astronave A nel proprio riferimento è in quiete.

Quindi, nel riferimento dell'astronave A l'intervallo temporale tra gli eventi “partenza dell'astronave A” e “incontro delle due astronavi” è $t_2'-t_0'=0{,}8\, anni$, come avevamo previsto con la semplice applicazione della “dilatazione dei tempi”.

Problema 7.4 (*Simulazione MIUR* 2015 - *Problema n.*2)

Nel 2200 il più moderno razzo vettore interplanetario costruito dall'uomo può raggiungere il 75,0 % della velocità della luce nel vuoto. Farai parte dell'equipaggio della missione che deve raggiungere un pianeta che orbita intorno alla stella Sirio, che dista 8,61 anni-luce e si avvicina con velocità di $7{,}63\, km/s$ al sistema solare, effettuare ricerche lì per 2,00 anni e poi rientrare sulla Terra. Devi contribuire alla programmazione di tutti i dettagli della missione, come ad esempio le scorte di cibo e acqua; prendendo come istante di riferimento $t=0$ il momento della partenza dalla Terra, considerando che viaggerai sempre alla massima velocità possibile e trascurando tutti gli effetti dovuti alla accelerazione del moto nella fase di partenza e di arrivo, fatte tutte le ipotesi aggiuntive che ritieni necessarie, devi valutare:

1. quanto tempo durerà la missione per un osservatore sulla terra;
2. quanto tempo durerà il viaggio di andata e quello di ritorno secondo i componenti dell'equipaggio;
3. quanto tempo durerà complessivamente la missione secondo i componenti dell'equipaggio.
4. Alcuni test effettuati nei laboratori della Terra sui componenti elettronici simili a quelli utilizzati sull'astronave, indicano che è necessario effettuare alcuni interventi di manutenzione sull'astronave. Dopo 1,00 anni dalla partenza (tempo terrestre) viene quindi inviato un segnale alla navicella. Quanto tempo è trascorso sulla navicella dall'inizio del viaggio quando il capitano riceve il segnale?
5. Ricevuto il segnale, il capitano invia immediatamente la conferma alla Terra; dopo quanto tempo dall'invio del segnale alla navicella la base terrestre riceve la conferma della ricezione?
6. Durante il viaggio di andata, il ritardo nelle comunicazioni con l'astronave aumenta con l'aumentare della distanza; per illustrare al pubblico questo effetto, disegna su un piano cartesiano i grafici che mostrino rispetto al riferimento terrestre la distanza dalla Terra dell'astronave e dei due segnali di comunicazione, in funzione del tempo.
7. Il responsabile della sicurezza della missione ti comunica una sua preoccupazione: teme che, a causa della contrazione relativistica delle lunghezze, il simbolo della flotta terrestre riportato sulla fusoliera del razzo, un cerchio, possa apparire deformato agli occhi delle guardie di frontiera, che potrebbero quindi non riconoscerlo, e lanciare un falso allarme. Pensi che sia una preoccupazione fondata? Illustra le tue considerazioni in merito a questa preoccupazione e dai una risposta al responsabile della sicurezza, corredandola con argomenti quantitativi e proponendo una soluzione al problema.

Soluzione

1. Per un osservatore sulla Terra, la durata della missione è data dal tempo dei viaggi di andata e ritorno sommato al tempo di permanenza su Sirio:

   $$t_T = 2\frac{d}{v_a} + t_S = 2\cdot\frac{8{,}61\,a.l.}{0{,}75\,c} + 2\,anni \simeq 25{,}0\,anni \quad .$$

   Come al solito, per semplicità, misuriamo lo spostamento in anni-luce, il tempo in anni, e consideriamo *c* come unità di misura della velocità.

2. Per il fenomeno della "dilatazione dei tempi":

   $$\tau_{and} = \tau_{rit} = \frac{d/v_a}{\gamma_a} \simeq \frac{8{,}61\,a.l.}{0{,}75\,c}\sqrt{1-0{,}75^2} \simeq 7{,}59\,anni \quad .$$

3. Quando l'astronave si trova su Sirio, il fattore di "dilatazione temporale" è:

   $$\gamma_S = \frac{1}{\sqrt{1-(7{,}63/3\cdot 10^5)^2}} \simeq 1 + \frac{1}{2}\left(\frac{7{,}63}{3\cdot 10^5}\right)^2 \simeq 1 + 3\cdot 10^{-10} = 1{,}00$$

   entro la precisione dei dati forniti dal testo.

   Quindi: $\tau_a = 2\,\tau_{and} + \tau_S \simeq 2\cdot 7{,}59 + 2 \simeq 17{,}2\,anni$.

4. Dopo 1 anno dalla partenza, l'astronave ha percorso: $s_1 = v_a t = 0{,}75\,c\cdot 1\,anno = 0{,}75\,a.l.$.

   Il segnale di controllo (che, in assenza di informazioni dal testo, supponiamo muoversi con la velocità della luce) raggiunge l'astronave quando:

   $$v_s t = v_a t + s_1 \;\Rightarrow\; ct = 0{,}75\,ct + 0{,}75 \;\Rightarrow\; 0{,}25\,ct = 0{,}75 \;\Rightarrow\; t_2 = 3\,anni \quad .$$

   Quindi, quando il segnale raggiunge l'astronave, sulla Terra sono passati 3 anni dell'invio del segnale, e 4 anni dall'inizio della missione.

   Il tempo trascorso sull'astronave è: $\tau_2 = \frac{t_2}{\gamma_a} \simeq 4\,anni\cdot\sqrt{1-0{,}75^2} \simeq 2{,}65\,anni$.

5. Per tornare indietro, il segnale impiega altri tre anni, per cui la base terrestre riceve la conferma della ricezione dopo 6 anni dall'invio del segnale alla navicella.

   Diamo per scontato che il testo stia chiedendo il tempo trascorso nel riferimento della Terra.

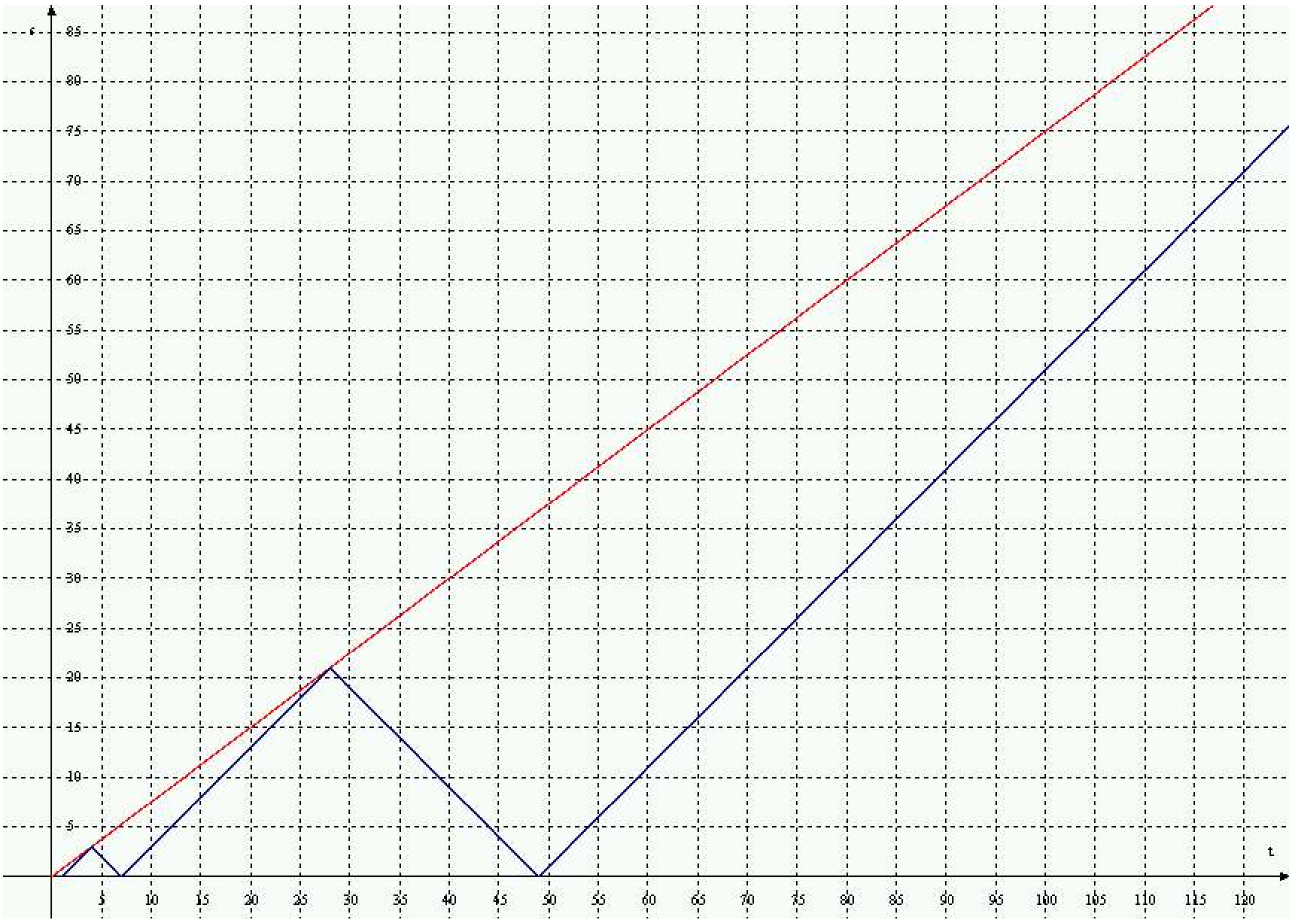
6. Il grafico posizione-tempo dell'astronave (*in rosso nel disegno*) è una retta la cui pendenza rappresenta la velocità dell'astronave (0,75 *c*), mentre il grafico posizione-tempo del segnale di controllo (*in blu nel disegno*) è una successione di segmenti aventi pendenza *c* (durante il viaggio dalla Terra all'astronave) o $-c$ (durante il viaggio di ritorno).

   Svolgendo i calcoli, otteniamo i seguenti eventi:

   - $t_1 = 1\,anno$: il primo segnale parte dalla Terra;
   - $t_2 = 4\,anni$: il primo segnale arriva all'astronave e parte la prima risposta;
   - $t_3 = 7\,anni$: la prima risposta arriva a Terra e parte il secondo segnale;
   - $t_4 = 28\,anni$: il secondo segnale arriva all'astronave e parte la seconda risposta;

- $t_5 = 49\,anni$: la seconda risposta arriva a Terra e parte il terzo segnale, e così via.

Di conseguenza, gli intervalli che intercorrono tra la partenza di un segnale dalla Terra e l'arrivo della relativa risposta sono: $t_3 - t_1 = 6\,anni$, $t_5 - t_3 = 42\,anni$, e aumentano regolarmente con l'aumentare della distanza (*potremmo dimostrare che la durata di ciascun intervallo si ottiene da quella del precedente moltiplicandola per 7*) c.v.d.



7. Come abbiamo accennato negli appunti di teoria, in realtà la preoccupazione del responsabile della sicurezza non sarebbe fondata, in quanto non stiamo parlando della misura di un oggetto, ma di come l'oggetto viene visto dall'occhio, da una pellicola fotografica o da un rivelatore di altro genere.

Nel primo caso, infatti, dobbiamo rilevare la posizione dei diversi punti dell'oggetto nello stesso istante (nel riferimento in cui viene eseguita la misura); nel secondo caso, invece, stiamo considerando i segnali luminosi che raggiungono nello stesso istante la nostra retina o la pellicola, ma che sono stati emessi in momenti diversi.

E' evidente, però (ed è confermato dalle soluzioni ufficiali fornite dal MIUR) che gli estensori del quesito non prendono in considerazione tale effetto, detto “rotazione di Penrose-Terrell”, ma vogliono verificare la conoscenza da parte dello studente della “contrazione delle lunghezze”.

Riportiamo quindi di seguito la risposta tratta dalle soluzioni ministeriali.

La preoccupazione del responsabile della sicurezza è fondata, in quanto la contrazione di Lorentz avviene nelle direzione longitudinale del moto e non in quella trasversale; il cerchio del simbolo della flotta appare più o meno deformato a seconda di come esso è orientato rispetto alla velocità del moto. Infatti un raggio del cerchio diretto come la velocità apparirà contratto del fattore

relativistico $\gamma \simeq 1{,}51$, mentre un raggio ad esso perpendicolare apparirà non contratto.
Per evitare la deformazione del cerchio occorre che la navicella diriga il suo moto sempre verso il posto di guardia della frontiera e che il piano che contiene il simbolo sia sempre perpendicolare alla direzione del moto della navicella in modo che tutti i raggi del simbolo siano perpendicolari al moto e non risentano della contrazione di Lorentz.

Problema 7.5 (*Simulazione MIUR 12 gennaio 2017 - Quesito* 5)

L'astronave Millennium Falcon della trilogia originale di Guerre Stellari ha una lunghezza a riposo pari a 34,5 *m*. L'astronave, in viaggio con velocità $0{,}90\,c$ rispetto a un sistema di riferimento inerziale, incrocia una seconda astronave identica che viaggia in direzione opposta con velocità $0{,}75\,c$ rispetto allo stesso sistema di riferimento inerziale.

Qual è la lunghezza della seconda astronave misurata da un passeggero della prima astronave?

Soluzione

La velocità della seconda astronave rispetto alla prima è:

$$v_{rel}=\frac{v_1+v_2}{1+v_1 v_2/c^2}\simeq\frac{0{,}90\,c+0{,}75\,c}{1+0{,}90+0{,}75}\simeq 0{,}985\,c \quad .$$

La lunghezza della seconda astronave misurata dalla prima astronave è quindi:

$$l=\frac{l_0}{\gamma_{rel}}\simeq 34{,}5\,m\cdot\sqrt{1-0{,}985^2}\simeq 5{,}94\,m \quad .$$

Problema 7.6 (*Paramatti n.*3)

a. Determina la vita media di un mesone π^+ che viaggia nel riferimento del laboratorio con velocità $\beta = 0.73$, sapendo che la sua vita media propria è $\tau_0(\pi^+) = 2.6 \cdot 10^{-8}\, s$.

b. Qual è la distanza percorsa in media dal mesone nel riferimento del laboratorio?

c. Quale sarebbe la distanza percorsa in assenza di effetti relativistici?

d. Quanti π^+ sopravvivono dopo 10 *m*?

Soluzione

a. $\tau = \gamma \tau_0 = \dfrac{\tau_0}{\sqrt{1-\beta^2}} \simeq \dfrac{2{,}6 \cdot 10^{-8}\, s}{\sqrt{1-0{,}73^2}} \simeq 1{,}463 \cdot 2{,}6 \cdot 10^{-8}\, s \simeq 3{,}8 \cdot 10^{-8}\, s \simeq 38\, ns$.

b. $d = v\tau = \beta c \tau \simeq 0{,}73 \cdot 3{,}00 \cdot 10^8\, m/s \cdot 3{,}8 \cdot 10^{-8}\, s \simeq 8{,}3\, m$.

c. $d_{cl} = v \tau_0 = \dfrac{d}{\gamma} \simeq \dfrac{8{,}3\, m}{1{,}463} \simeq 5{,}7\, m$.

d. Il numero delle particelle decade nel tempo secondo la legge $N(t) = N_0 e^{-t/\tau}$.

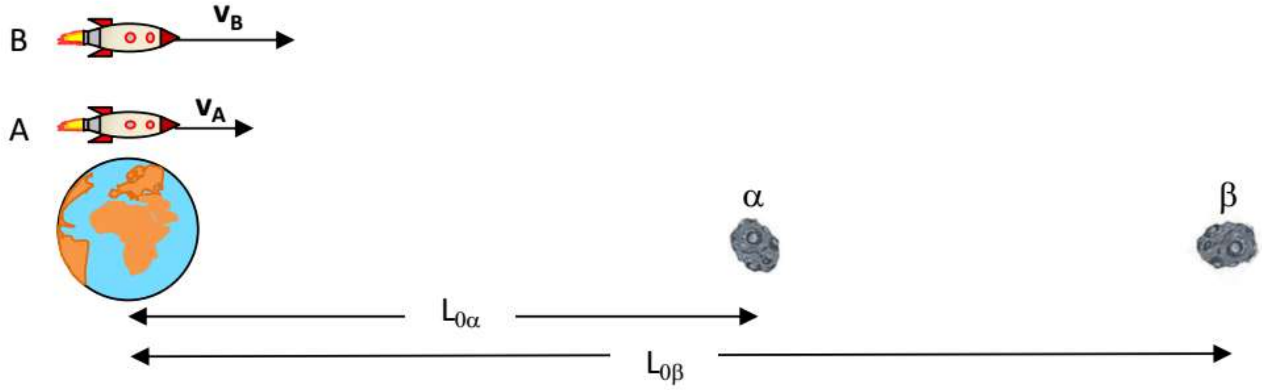
La lunghezza $L = 10\, m$ viene percorsa nel tempo $t_1 = \dfrac{L}{v} \simeq \dfrac{10\, m}{0{,}73 \cdot 3{,}00 \cdot 10^8\, m/s} \simeq 4{,}57 \cdot 10^{-8}\, s$.

Quindi: $\dfrac{N(t_1)}{N_0} = e^{-t_1/\tau} \simeq e^{-\frac{4{,}6 \cdot 10^{-8}\, s}{3{,}8 \cdot 10^{-8}\, s}} \simeq e^{-1{,}2} \simeq 0{,}30 \simeq 30\%$.

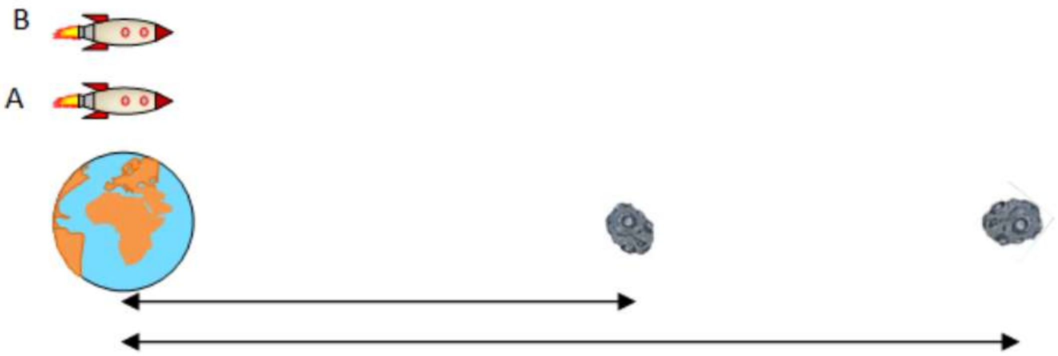
Problema 7.7 (*Simulazione MIUR Fisica Dicembre* 2018 - *Problema n.*2)

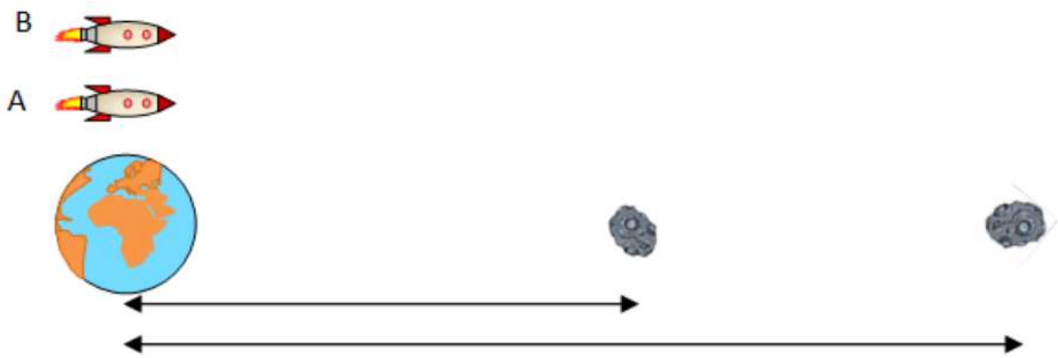
Due asteroidi, denominati α e β, sono stati individuati a distanze $L_{0\alpha}=4\,ore\,luce$ (pari a $4{,}317\cdot10^{12}\,m$) e $L_{0\beta}=7{,}5\,ore\,luce$ (pari a $8{,}094\cdot10^{12}\,m$) rispetto alla Terra. I due asteroidi sono allineati con la Terra e la loro velocità rispetto alla Terra è trascurabile. Due astronavi, A e B, partono nello stesso istante verso i due asteroidi per un volo di ricognizione. L'astronave A ha il compito di sorvolare l'asteroide α mentre l'astronave B ha il compito di sorvolare l'asteroide β.

Le due astronavi viaggiano a velocità relativistiche con moto rettilineo uniforme. L'astronave B, che deve percorrere una distanza maggiore, utilizza dei propulsori più potenti e viaggia ad una velocità maggiore di quella dell'astronave A. Nel sistema di riferimento della Terra, all'istante iniziale $t=0$, la situazione è quella rappresentata nella figura seguente.



Le due figure seguenti illustrano invece la situazione all'istante $t=0$ nei sistemi di riferimento dell'astronave A e dell'astronave B.





1. Completa le due figure disegnando su ciascun oggetto un vettore che rappresenti la sua velocità nel sistema di riferimento in esame e scrivendo in corrispondenza di ciascuna distanza la relazione che permette di calcolarla. Spiega cosa cambia nei due sistemi di riferimento A e B rispetto al riferimento della Terra.

Il comandante della missione decide di premiare l'astronauta che per primo raggiungerà l'asteroide che gli è stato assegnato. I due astronauti si accordano di inviare all'altro il tempo di arrivo sull'asteroide obiettivo della propria missione.

2. Quando l'astronave A raggiunge l'asteroide α, il suo orologio di bordo indica un tempo $t'_\alpha = 9\,h\ \ 9\,min\ \ 54\,s$ (pari a $3{,}299 \cdot 10^4\,s$) e quando l'astronave B raggiunge l'asteroide β, il suo orologio di bordo indica anch'esso il tempo $t'_\beta = 9\,h\ \ 9\,min\ \ 54\,s$.

Determina la velocità dell'astronave A e quella dell'astronave B (in unità *c*) rispetto alla terra. Determina anche la velocità relativa tra le due astronavi.

Quando l'astronauta A riceve l'informazione sul tempo di arrivo di B sull'asteroide β, ritiene di aver vinto, e di avere quindi diritto al premio.

3. Dalle trasformazioni di Lorentz o dalle relazioni tra intervalli di tempo misurati in sistemi di riferimento diversi, deduci il tempo t'_β di arrivo di B sull'asteroide come determinato da A e verifica che effettivamente egli giustamente ritiene di aver diritto alla promozione.

4. Ma anche l'astronauta B ritiene di aver vinto, in base alla sua misura del tempo t'_α impiegato da A. Utilizzando ancora una volta le trasformazioni di Lorentz o le relazioni tra intervalli di tempo misurati in sistemi di riferimento diversi, verifica la giustezza delle conclusioni tratte da B.

Il comandante della missione, consultato un testo di relatività, si scusa con i due astronauti e li premia entrambi: ha capito infatti che si è verificata una inversione temporale tra due eventi visti da osservatori diversi, da lui non prevista.

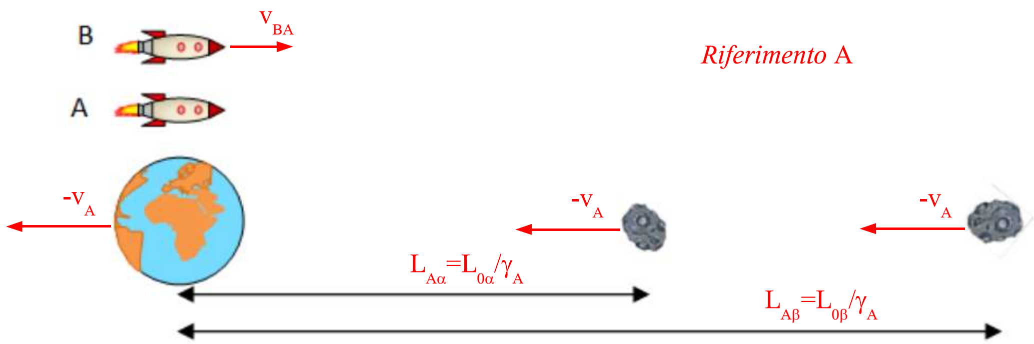
5. Spiega se questa inversione temporale è possibile, in quali condizioni si può verificare e se, nel caso in esame, è questa la ragione del contenzioso tra i due astronauti.

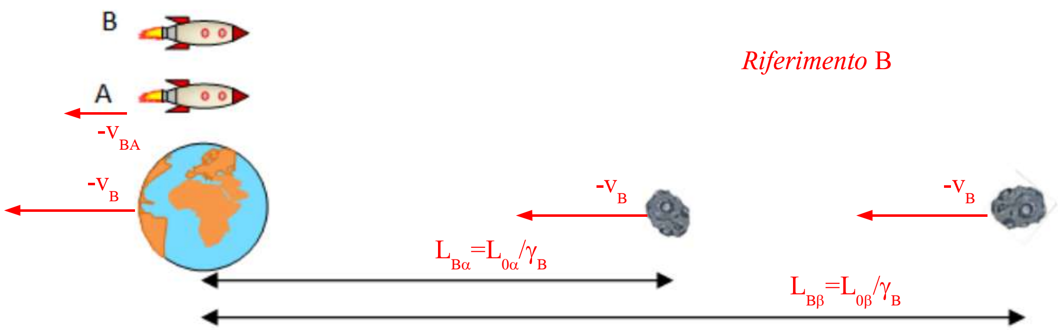
Soluzione

1. Nel riferimento dell'astronave A:
   - la Terra e i due asteroidi si muovono con velocità $-v_A$;
   - l'astronave B si muove con velocità $v_{BA} = \dfrac{v_B - v_A}{1 - v_A v_B / c^2}$;
   - le distanze degli asteroidi dalla Terra subiscono una contrazione di un fattore γ_A.

   Nel riferimento dell'astronave B:
   - la Terra e i due asteroidi si muovono con velocità $-v_B$;

- l'astronave A si muove con velocità $v_{AB} = -v_{BA}$;
- le distanze degli asteroidi dalla Terra subiscono una contrazione di un fattore γ_B.





2. Indichiamo con τ_α e τ_β i tempi propri misurati durante il viaggio dagli orologi posti nelle astronavi A e B (*che il testo chiama* t'_α *e* t'_β).

   Se ci poniamo nel riferimento della Terra, per il fenomeno della "dilatazione dei tempi", le durate dei viaggi delle due astronavi saranno $t_\alpha = \gamma_A \tau_\alpha$ e $t_\beta = \gamma_B \tau_\beta$, per cui le velocità delle astronavi saranno:

   $$v_A = \frac{L_{0\alpha}}{t_\alpha} = \frac{L_{0\alpha}}{\gamma_A \tau_\alpha} \quad \text{e} \quad v_B = \frac{L_{0\beta}}{t_\beta} = \frac{L_{0\beta}}{\gamma_B \tau_\beta} \quad .$$

   Se, invece, ci poniamo nei riferimenti delle due astronavi, allora, come abbiamo affermato nel punto precedente, per il fenomeno della "contrazione delle lunghezze", le distanze degli asteroidi saranno: $L_{A\alpha} = L_{0\alpha}/\gamma_A$ e $L_{A\beta} = L_{0\beta}/\gamma_B$, per cui le velocità (qui interpretate come velocità con cui gli asteroidi si avvicinano alle astronavi) saranno le stesse.

   Poiché i fattori γ contengono le velocità, per ricavarle è necessario qualche passaggio algebrico:

   $$v = \frac{L}{\gamma \tau} \Rightarrow v^2 \tau^2 = L^2 \left(1 - \frac{v^2}{c^2}\right) \Rightarrow v^2 (L^2 + c^2 \tau^2) = L^2 c^2 \Rightarrow v = \frac{c}{\sqrt{1 + \left(\frac{c\tau}{L}\right)^2}} \quad .$$

   Quindi:

$$v_A = \frac{c}{\sqrt{1+(\frac{c\tau_\alpha}{L_{0\alpha}})^2}} = \frac{c}{\sqrt{1+(\frac{9{,}165\,ore\cdot c}{4\,ore\cdot c})^2}} \simeq 0{,}400\,c \quad ;$$

$$v_B = \frac{c}{\sqrt{1+(\frac{c\tau_\beta}{L_{0\beta}})^2}} = \frac{c}{\sqrt{1+(\frac{9{,}165\,ore\cdot c}{7{,}5\,ore\cdot c})^2}} \simeq 0{,}633\,c \quad ;$$

$$v_{BA} = \frac{v_B - v_A}{1 - v_A v_B / c^2} \simeq \frac{0{,}633 - 0{,}400}{1 - 0{,}400 \cdot 0{,}633}\, c \simeq 0{,}312\, c \quad .$$

3. Nel riferimento dell'astronave A, l'astronave B si muove con velocità v_{AB}, per cui la durata del suo viaggio subisce la “dilatazione”:

$$t'_\beta = \gamma_{AB} \tau_\beta = \frac{9{,}165\,ore}{\sqrt{1-0{,}312^2}} \simeq 9{,}646\,ore > \tau_\alpha \quad ;$$

quindi A ritiene di avere diritto al premio.

4. Ma, nel riferimento dell'astronave B, l'astronave A si muove con la stessa (in modulo) velocità v_{AB}, per cui la durata del suo viaggio subisce la “dilatazione”:

$$t'_\alpha = \gamma_{AB} \tau_\alpha = \frac{9{,}165\,ore}{\sqrt{1-0{,}312^2}} \simeq 9{,}646\,ore > \tau_\beta \quad ;$$

quindi anche B ritiene di avere diritto al premio.

5. Consideriamo l'evento 1: “l'astronave A arriva sull'asteroide α” e l'evento 2: “l'astronave B arriva sull'asteroide β”. Poniamoci nel riferimento della Terra e calcoliamo le coordinate di tali eventi:

$$t_1 = \gamma_A \tau_\alpha = \frac{9{,}165\,ore}{\sqrt{1-0{,}400^2}} \simeq 10{,}0\,ore \quad ; \qquad x_1 = L_{0\alpha} = 4\,ore\,luce \quad ;$$

$$t_2 = \gamma_B \tau_\beta = \frac{9{,}165\,ore}{\sqrt{1-0{,}633^2}} \simeq 11{,}8\,ore \quad ; \qquad x_1 = L_{0\alpha} = 7{,}5\,ore\,luce \quad ;$$

o, più semplicemente: $t_1 = \frac{x_1}{v_A} = \frac{4\,ore\cdot c}{0{,}400\,c} \simeq 10{,}0\,ore$, $t_2 = \frac{x_2}{v_B} = \frac{7{,}5\,ore\cdot c}{0{,}633\,c} \simeq 11{,}8\,ore$.

L'intervallo relativistico invariante che separa gli eventi 1 e 2 è:

$$\Delta s_{12}^2 = c^2 \Delta t_{12}^2 - \Delta x_{12}^2 \simeq [(11{,}8-10{,}0)^2 - (7{,}5-4)^2](ore\,luce)^2 \simeq -9{,}0(h\,c)^2 \simeq -32.400(s\,c)^2 \quad .$$

Poiché $\Delta s_{12}^2 < 0$, l'intervallo tra gli eventi 1 e 2 è di tipo spazio, per cui non esiste un ordinamento temporale univoco degli eventi 1 e 2, ma esisteranno:

- dei riferimenti in cui l'evento 1 <u>precede</u> l'evento 2;
- dei riferimenti in cui l'evento 1 <u>segue</u> l'evento 2;
- un riferimento (a meno di isometrie) in cui i due eventi sono <u>simultanei</u>.

Di conseguenza, la richiesta iniziale del comandante della missione è ambigua, in quanto egli non ha precisato in quale riferimento si sarebbero dovuti prendere i risultati.

Se, come potrebbe essere naturale, il comandante avesse stabilito che la sfida dovesse essere definita nel riferimento della Terra, allora avrebbe vinto l'astronave A, in quanto, come abbiamo appena visto, $t_1 < t_2$.

Problema 7.8 (*http://www.matematicamente.it/forum/viewtopic.php?f=19&t=164999* - *Soluzione e grafico sono dell'utente "Al Nilam"*)

A quale istante *T* di un orologio terrestre deve essere inviato un segnale elettromagnetico diretto ad un'astronave in moto con velocità costante *v* (nel riferimento della Terra) se si vuole che il segnale venga ricevuto al tempo T' dell'astronave?

(Supponiamo che entrambi gli orologi siano stati sincronizzati al tempo $t=t'=0$ al momento della partenza dell'astronave e che l'intervallo temporale in cui l'astronave accelera sia trascurabile).

Soluzione

Nel riferimento della Terra, le leggi orarie dell'astronave e del segnale e.m. sono:

$x_a=vt$, $x_l=c(t-T)$ (la seconda è valida per $t\geq T$).

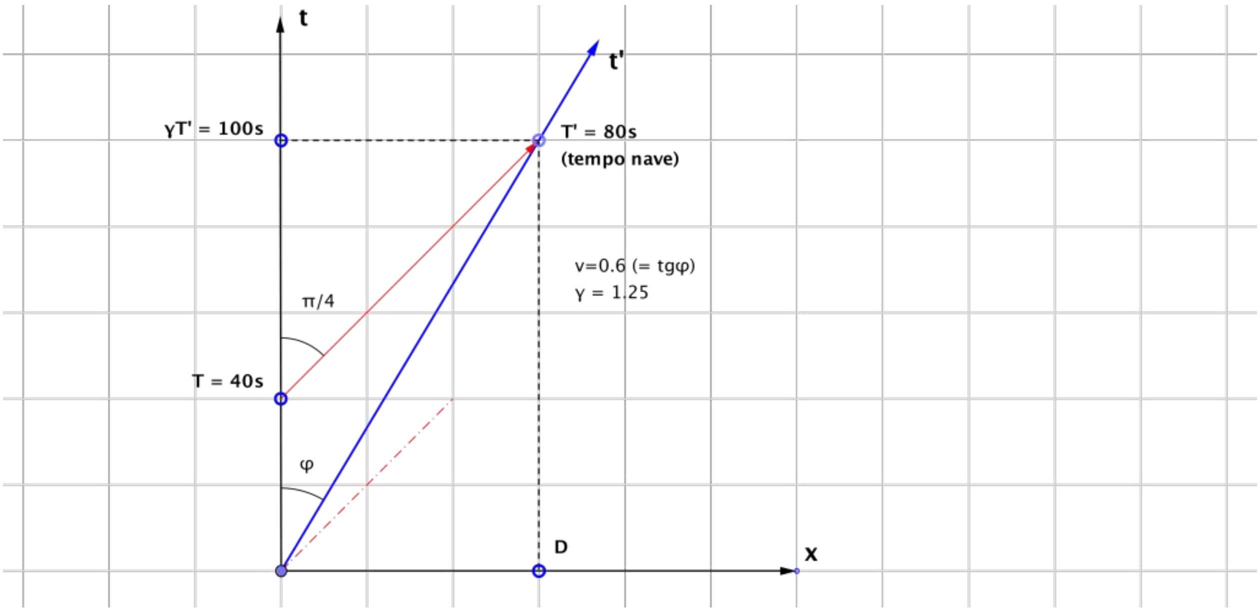
Il segnale luminoso raggiunge l'astronave quando: $x_a=x_l \Rightarrow vt=c(t-T) \Rightarrow t_T=\dfrac{cT}{c-v}$.

Poiché nel riferimento della Terra l'orologio dell'astronave subisce la "dilatazione dei tempi":

$$T'=\gamma t_T=\frac{\gamma cT}{c-v} \Rightarrow T=\frac{c-v}{c}\gamma T'=(1-\beta)\gamma T' \ .$$

Esempio numerico. Se poniamo $v=0{,}6c$ e $T'=80s$, ricaviamo:

$T=(1-0{,}6)\cdot 1{,}25\cdot 80s=40s$.



Problema 7.9 (*McMillan* 1.59)

Due astronavi hanno esaurito il carburante e si muovono l'una verso l'altra lungo una stessa retta in rotta di collisione. Nel riferimento della Terra, l'astronave 1 ha velocità $v_1 = 0{,}800\, c$, l'astronave 2 ha velocità $v_2 = 0{,}600\, c$, entrambe le astronavi hanno lunghezza $l = 50{,}0\, m$ e la loro distanza iniziale è $d = 2{,}52 \cdot 10^{12}\, m$.

a. Quali sono le lunghezze proprie delle due astronavi?
b. Qual è la lunghezza di ciascuna astronave misurata dall'altra astronave?
c. Nel riferimento della Terra, dopo quanto tempo le due astronavi entrano in collisione?
d. Quanto tempo manca alla collisione nel riferimento di ciascuna delle due astronavi?
e. Se gli equipaggi delle astronavi hanno bisogno di 50 minuti (di tempo proprio) per svolgere in sicurezza la procedura di evacuazione, riusciranno ad abbandonare le loro astronavi in tempo prima della collisione?

Soluzione

a. Applichiamo la "contrazione delle lunghezze":

$$l_{01} = \frac{l}{\gamma_1} = \frac{50\, m}{\sqrt{1-0{,}8^2}} \simeq 83{,}3\, m \quad ; \quad l_{02} = \frac{l}{\gamma_2} = \frac{50\, m}{\sqrt{1-0{,}6^2}} \simeq 62{,}5\, m \quad .$$

b. Calcoliamo la velocità relativa delle due astronavi:

$$u'_x = \frac{u_x + v}{1 + u_x v / c^2} = \frac{v_1 + v_2}{1 + v_1 v_2 / c^2} = \frac{0{,}8\, c + 0{,}6\, c}{1 + 0{,}8 \cdot 0{,}6} \simeq 0{,}946\, c \quad .$$

Applichiamo la "contrazione delle lunghezze" utilizzando la velocità relativa:

$$l_{1rel} = \gamma_{rel}\, l_{01} \simeq 83{,}3\, m \cdot \sqrt{1-0{,}946^2} \simeq 27{,}0\, m \quad ;$$

$$l_{2rel} = \gamma_{rel}\, l_{02} \simeq 62{,}5\, m \cdot \sqrt{1-0{,}946^2} \simeq 20{,}3\, m \quad .$$

c. Le astronavi entrano in collisione quando la somma delle distanze percorse è uguale alla loro distanza iniziale:

$$x_1 + x_2 = d \;\Rightarrow\; v_1 t + v_2 t = d \;\Rightarrow\; t_T = \frac{d}{v_1 + v_2} = \frac{2{,}52 \cdot 10^{12}\, m}{(0{,}8+0{,}6) \cdot 3 \cdot 10^8\, m/s} \simeq 5{,}76 \cdot 10^4\, s \simeq 96{,}0\, min \quad .$$

d. Applichiamo la "dilatazione dei tempi":

$$\tau_1 = \gamma_1 t_T \simeq 96\, min \cdot \sqrt{1-0{,}8^2} \simeq 57{,}6\, min \quad ; \quad \tau_2 = \gamma_2 t_T \simeq 96\, min \cdot \sqrt{1-0{,}6^2} \simeq 76{,}8\, min \quad .$$

e. Poiché entrambi i risultati ottenuti nel punto precedente sono maggiori di 50 minuti, possiamo concludere che entrambi gli equipaggi riusciranno ad evacuare le astronavi prima della collisione.

Problema 7.10 (*https://www.matematicamente.it/forum/viewtopic.php?f=19&t=201887*)

Siamo incaricati di progettare un viaggio interstellare su Aldebaran, che dista 68,0 a.l. dalla Terra. Vorremmo che la durata del viaggio fosse di 40,0 anni, misurati dagli astronauti. Calcola:

a. Qual è la durata del viaggio per l'Agenzia Spaziale a Terra.

b. A quale velocità minima (misurata da Terra) deve viaggiare l'astronave.

c. Quanto dista Aldebaran per gli astronauti.

Soluzione

Poiché la durata del viaggio in tempo proprio è $\tau = 40\,a.l.$, quella misurata nel riferimento della Terra subirà la "dilatazione dei tempi": $t = \gamma\tau$.

Se d è la distanza di Aldebaran nel riferimento della Terra, dovremo avere:

$$2d = v_{min} t = v_{min}\gamma\tau = \frac{v_{min}\tau}{\sqrt{1 - v_{min}^2/c^2}} \Rightarrow 4d^2\left(1 - \frac{v_{min}^2}{c^2}\right) = v_{min}^2\tau^2 \Rightarrow 4d^2c^2 - 4d^2v_{min}^2 = v_{min}^2\tau^2c^2 \Rightarrow$$

$$v_{min}^2(4d^2 + c^2\tau^2) = 4d^2c^2 \Rightarrow v_{min} = \frac{2dc}{\sqrt{4d^2 + c^2\tau^2}} \simeq \frac{136\,a.l.\cdot c}{\sqrt{4\cdot(68\,a.l.)^2 + (40\,anni\cdot c)^2}} \simeq 0{,}959\,c \quad .$$

Abbiamo calcolato la velocità minima a cui deve viaggiare l'astronave nel riferimento della Terra.

Ad essa corrisponde un fattore di Lorentz: $\gamma_{min} = \frac{1}{\sqrt{1 - v_{min}^2/c^2}} \simeq \frac{1}{\sqrt{1 - 0{,}959^2}} \simeq 3{,}54$.

La durata del viaggio per la Terra è: $t = \gamma\tau \simeq 3{,}54\cdot 40\,a.l. \simeq 142\,anni$.

La distanza di Aldebaran per l'astronave è: $d_{astr} = \frac{d}{\gamma} \simeq \frac{68\,a.l.}{3{,}54} \simeq 19{,}2\,a.l.$

Problema 7.11 (*Hogg 2.12*)

Alfa Centauri si trova alla distanza $l = 4{,}34\, anni\, luce$ dalla Terra.

A quale velocità *v* (rispetto alla Terra) deve viaggiare un astronauta dell'età di 25 anni per tornare sulla Terra prima di averne compiuto 45?

Quanti anni saranno passati nel riferimento della Terra?

Soluzione

Indichiamo $\tau = 20\, anni$ l'intervallo di tempo proprio trascorso per l'astronauta e *t* il tempo trascorso sulla Terra.

Abbiamo $t = \frac{2l}{v}$ per la legge oraria e $t = \gamma \tau$ per la "dilatazione dei tempi".

Confrontando tali relazioni, ricaviamo:

$$\gamma \tau = \frac{2l}{v} \Rightarrow v\tau = \frac{2l}{\gamma} \Rightarrow v^2\tau^2 = 4l^2\left(1 - \frac{v^2}{c^2}\right) \Rightarrow v^2c^2\tau^2 + 4l^2v^2 = 4l^2c^2 \Rightarrow$$

$$\beta^2 = \frac{v^2}{c^2} = \frac{4l^2}{c^2\tau^2 + 4l^2} \simeq \frac{4\cdot(4{,}34\, anni\cdot c)^2}{(20\, anni)^2\cdot c^2 + 4\cdot(4{,}34\, anni\cdot c)^2} \simeq 0{,}159 \Rightarrow$$

$$v = \beta c \simeq 0{,}398\cdot 3{,}00\cdot 10^8 \frac{m}{s} \simeq 1{,}19\cdot 10^8 \frac{m}{s} \quad .$$

Il tempo trascorso sulla Terra è quindi:

$$t = \gamma\tau = \frac{\tau}{\sqrt{1-\beta^2}} \simeq \frac{20\, anni}{\sqrt{1 - 0{,}398^2}} \simeq 21{,}8\, anni \quad .$$

8. Dinamica relativistica

Principi della dinamica

Finora abbiamo visto come la teoria della relatività ci porti a modificare le nostre concezioni riguardanti le *grandezze cinematiche*, che si riferiscono alla semplice descrizione geometrica del moto, e, in particolare, a rivedere i nostri concetti di spazio, tempo e velocità.

E' naturale chiederci se e come cambiano le definizioni delle *grandezze dinamiche*, che intervengono nella spiegazione delle cause del moto, quali massa, forza, energia e quantità di moto, e, in particolare, se cambiano i principi della dinamica newtoniana che abbiamo trattato tra il secondo ed il terzo anno.

- E' evidente che il primo principio, o *principio di inerzia*, che afferma che "un corpo non soggetto a forze mantiene il proprio stato di quiete o di moto rettilineo uniforme", non va modificato in alcun modo, ed anzi ci permette di individuare i RI.

- Anche il secondo principio può essere salvato, a condizione che non lo si scriva nella forma $\vec{F}=m\vec{a}$, ma in quella $\vec{F}=d\,\vec{p}/dt$, che, d'altra parte, costituiva l'enunciato originario di Newton.

In meccanica newtoniana, queste due formulazioni sono equivalenti se, come avviene generalmente, consideriamo un sistema la cui massa rimanga costante.

Infatti: $\dfrac{d\,\vec{p}}{dt}=\dfrac{d}{dt}(m\vec{v})=m\dfrac{d\,\vec{v}}{dt}=m\vec{a}$.

Vedremo, però, che in meccanica relativistica la quantità di moto non è definita come $\vec{p}=m\vec{v}$, per cui le due formule non risultano equivalenti.

- Sul terzo principio, o *principio di azione e reazione* (PAR) dobbiamo ragionare in maniera più articolata, e vedremo che *non lo potremo mantenere nella forma di "principio di azione e reazione", ma solo come "conservazione della quantità di moto"*.

Ricordiamo che in seconda abbiamo enunciato il PAR nella forma: "le forze in natura esistono sempre a coppie, le quali hanno lo stesso modulo, la stessa direzione, verso opposto, e sono applicate sulla stessa retta e a corpi diversi".

Quindi, in terza, abbiamo dimostrato che dal PAR segue la conservazione della quantità di moto di un sistema isolato.

Infatti, per un sistema composto da due particelle interagenti A e B, abbiamo:

$$\frac{d}{dt}\vec{p}_{tot}=\frac{d}{dt}(\vec{p}_A+\vec{p}_B)=\vec{F}_A+\vec{F}_B=0 \;\Rightarrow\; \vec{p}_{tot}=\vec{cost}\ .$$

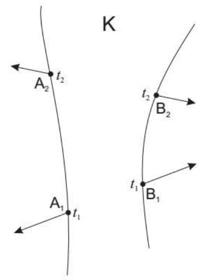
L'enunciato inverso, ovvero che la conservazione della quantità di moto implichi il PAR, non risulta invece vero perché:

- il PAR non dice solo che le forze sono opposte come vettori, ma anche che agiscono sulla stessa retta;

- se il sistema è composto da più di due punti materiali, il PAR vale per tutte le coppie azione-reazione.

Entrambe queste affermazioni non possono essere ricavate dalla sola conservazione della quantità. di moto totale, che quindi risulta un'affermazione più "debole" rispetto al PAR.

In RR la validità del PAR pone dei seri problemi.



Supponiamo infatti che il PAR sia valido in un RI che chiamiamo K, tra due particelle interagenti A e B che si muovono su determinate traiettorie. Di conseguenza, le forze che le particelle esercitano l'una sull'altra sono uguali ed opposte ad ogni istante di tempo (ad esempio, negli istanti t_1 e t_2 indicati in figura).

Ma, se osserviamo lo stesso fenomeno da un altro RI che chiamiamo K', troveremo che gli eventi A_1 e B_1, che erano simultanei in K, non lo sono in K' a causa della relatività della simultaneità. Infatti, in K', quando la particella A si trova in A_1, la particella B non si troverà in B_1, ma in un altro punto, per cui in K' le forze di interazione saranno diverse.

Dobbiamo quindi concludere che, se il PAR vale in K, non vale in K'.

La conclusione a cui siamo giunti ci crea una difficoltà.

Infatti, per il PR, vorremmo che, se il terzo principio vale in un RI, allora valga anche nell'altro; ma questo entra in conflitto con il fatto che la simultaneità è relativa.

La causa di questo problema è la nostra pretesa che ogni coppia azione-reazione sia istantanea.

Nella fisica newtoniana, infatti, è insita l'idea che le azioni a distanza siano istantanee: se il corpo B si muove, il corpo A sente istantaneamente l'effetto di questo spostamento, e viceversa.

Quindi il PAR, nella sua formulazione classica, è intimamente connesso con l'istantaneità delle azioni a distanza.

Noi invece abbiamo imparato che esiste una velocità limite, per cui ci aspettiamo che non possano esistere delle azioni istantanee; è per questo che il PAR non è compatibile con la relatività.

- In ambito relativistico, ogni azione è mediata da un *campo*, che si propaga con velocità finita.

In relatività, quindi, per dimostrare la validità della legge di conservazione della quantità di moto, è necessario definire una quantità di moto del campo che media l'interazione, come abbiamo fatto in precedenza per il campo elettromagnetico, e includere nel bilancio della quantità del moto anche quella del campo.

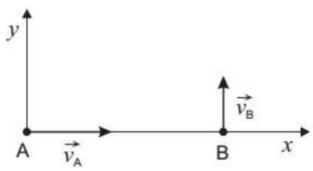
Se, ad esempio, la quantità di moto del sistema A+B non si conserva, è perché varia in maniera corrispondente la quantità di moto del campo, e la variazione dell'una compensa la variazione dell'altra.

Nota. Una eccezione al ragionamento precedente è costituita dal caso degli *urti*, in cui l'interazione avviene a brevissima distanza e può essere considerata nulla se i corpi non sono assai vicini.

In tutti gli esercizi che svolgeremo su questo argomento, imporremo quindi la conservazione della quantità di moto delle particelle tra un istante precedente ed uno successivo all'urto, perché in quell'intervallo di tempo la quantità di moto del campo non fornisce un contributo apprezzabile.

- *Esempio*. Consideriamo due particelle cariche positive, che si muovono con le velocità indicate in figura.

La particella A genera nel punto B un campo elettrico diretto lungo il verso positivo dell'asse x; la particella B genera in A un campo elettrico, ancora diretto lungo l'asse x, ma nel verso negativo.



Inoltre, la particella A genera un campo magnetico a simmetria circolare, il cui asse coincide con l'asse x, che risulta nullo in B. La particella B, invece, genera in A un campo magnetico diretto come l'asse z.

Sulla particella A agisce quindi anche una forza di Lorentz diretta nel verso negativo dell'asse y. Dunque le due forze, su A e su B, non sono opposte, visto che almeno le loro componenti y sono diverse. Concludiamo perciò che: $\vec{F}_A+\vec{F}_B\neq 0$.

Vediamo quindi che, nel caso di due particelle cariche in moto, il PAR non vale, e quindi la quantità di moto delle particelle non si conserva. Per salvare la conservazione occorre tener conto della quantità di moto del campo elettromagnetico.

Può sembrare che in questo esempio non sia coinvolta la relatività. Riesci a vedere dove, in realtà, sono nascoste delle considerazioni relativistiche?

Quantità di moto

E' evidente che in relatività non possiamo mantenere la formula newtoniana $\vec{p}=m\vec{v}$.

Infatti, se consideriamo un corpo di massa m sottoposto ad una forza costante, allora da $\vec{p}=m\vec{v}$ e $\vec{F}=d\vec{p}/dt$ segue $\vec{F}=m\vec{a}$, e se la forza è costante, sarà costante anche l'accelerazione.

Ma, in tal caso, la velocità crescerebbe indefinitamente in maniera proporzionale al tempo, e non potrebbe esistere una velocità limite.

Esempio. Consideriamo un elettrone soggetto alle leggi della dinamica newtoniana e sul quale agisca un campo elettrico uniforme. Esso sarebbe sottoposto ad una accelerazione costante $a=eE/m$, per cui, dalle leggi del moto uniformemente accelerato:

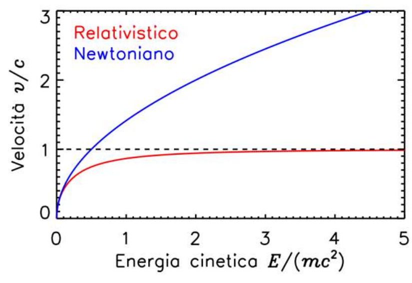
$$s=\frac{eE}{2m}t^2;\quad v=\frac{eE}{m}t;\quad \Rightarrow\quad s=\frac{mv^2}{2eE}\quad .$$

Ponendo $v=c$, ricaveremmo la differenza di potenziale:

$$V=Es=\frac{mc^2}{2e}\simeq 250\,KV$$

che, secondo la meccanica newtoniana, sarebbe sufficiente a permettere all'elettrone di raggiungere la velocità della luce.

In realtà, i risultati sperimentali ottenuti accelerando delle particelle mostrano che il grafico della velocità raggiunta in funzione della differenza di potenziale applicata, e quindi dell'energia fornita, ha un asintoto orizzontale per $v=c$, confermando l'esistenza di una velocità limite.



Avendo compreso che l'espressione $\vec{p}=m\vec{v}$ non può essere corretta in dinamica relativistica, dobbiamo stabilire quale sia il risultato corretto. Sappiamo che deve trattarsi di una grandezza che si conserva negli urti e che per piccole velocità deve ridursi alla forma newtoniana. Potremmo dimostrare, anche se in maniera molto laboriosa, che questi due criteri determinano l'espressione della quantità di moto.

Il risultato è: $\vec{p}=m\dfrac{d\vec{r}}{d\tau}$ o, per moti in una dimensione: $p_x=m\dfrac{dx}{d\tau}$.

Ma, ricordando che $d\tau=dt/\gamma$, possiamo scrivere:

$$\boldsymbol{\vec{p}=\gamma m\vec{v}=\frac{m\vec{v}}{\sqrt{1-v^2/c^2}}} \quad .$$

La precedente espressione fu ricavata da Planck nel 1906.

Come abbiamo affermato in precedenza, ci sono numerose verifiche sperimentali del fatto che l'espressione fornita sia in accordo con la forma $\vec{F}=d\vec{p}/dt$ del secondo principio; anzi, tali verifiche (esperimenti di Abraham, Kaufmann, Bucherer condotti agli inizi del '900 sugli elettroni emessi nel decadimento β) hanno costituito la prima indicazione che qualcosa non funzionava quando la meccanica newtoniana veniva applicata a velocità molto alte.

Energia

La definizione relativistica di energia è: $E=mc^2\dfrac{dt}{d\tau}$, da cui:

$$\boldsymbol{E=\gamma mc^2=\frac{mc^2}{\sqrt{1-v^2/c^2}}} \quad .$$

Se $v/c\ll 1$, possiamo sviluppare in serie di Taylor:

$$\gamma=\left(1-\frac{v^2}{c^2}\right)^{-1/2}\simeq 1+\frac{v^2}{2c^2} \quad \text{, ricavando:} \quad E\simeq mc^2+\frac{1}{2}mv^2 \quad .$$

Osserviamo che il primo termine dello sviluppo in serie corrisponde all'energia che la particella possiede quando si trova in quiete, mentre il secondo è l'energia cinetica newtoniana.

Possiamo quindi definire l'energia cinetica relativistica:

$$T=E-mc^2=(\gamma-1)mc^2 \quad .$$

Questa relazione può essere sottoposta a verifica sperimentale, ad esempio studiando il moto degli elettroni in un acceleratore lineare. Possiamo infatti misurare la velocità delle particelle, dal tempo di volo fra due traguardi, e la loro energia cinetica, dal riscaldamento di un bersaglio su cui gli elettroni vengono frenati. In questo modo, controlliamo che l’energia cinetica misurata per via calorimetrica, coincida con quella ricavata dalla velocità.

Partendo dalle relazioni relativistiche di energia e quantità di moto, elevandole al quadrato e sottraendole membro a membro, otteniamo:

$$\begin{cases} E=\gamma mc^2 \\ c\vec{p}=\gamma mc\vec{v} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} E^2=\gamma^2 m^2 c^4 \\ c^2 p^2=\gamma^2 m^2 c^2 v^2 \end{cases} \Rightarrow .$$

Se dividiamo membro a membro le due equazioni, troviamo l'espressione della velocità di un corpo in funzione della sua quantità di moto e dell'energia totale:

$$\frac{\gamma^2 m^2 c^2 v^2}{\gamma^2 m^2 c^4}=\frac{c^2 p^2}{E^2} \Rightarrow v^2=\frac{c^4 p^2}{E^2} \Rightarrow \boldsymbol{v}=\frac{\boldsymbol{pc^2}}{\boldsymbol{E}} .$$

Sottraendole membro a membro le due equazioni, otteniamo invece:

$$E^2-c^2 p^2=\gamma^2 m^2 c^4 (1-\frac{v^2}{c^2}) ,$$

da cui, ricordando la definizione del fattore γ, otteniamo:

$$\boldsymbol{E^2-c^2 p^2=m^2 c^4} . \qquad (*)$$

La formula (*) appena scritta è la **relazione fondamentale della dinamica relativistica**, ed è di gran lunga più importante delle singole definizioni di quantità di moto ed energia, sia dal punto di vista pratico che concettuale. Discutiamone quindi alcuni aspetti.

- Poiché il secondo membro della relazione (*) è un invariante relativistico, ovvero non dipende dal riferimento, anche *la quantità* $E^2-c^2 p^2$ *è invariante*, mentre l'energia e la quantità di moto separatamente non sono invarianti.

- Se ci poniamo nel riferimento di quiete della particella, in cui $p=0$, otteniamo: $E_0=mc^2$, per cui *l'energia di una particella in quiete è proporzionale alla sua massa.*

  Osserviamo che la tipica energia cinetica di un corpo macroscopico può avere l'ordine di grandezza:

  $$K=\frac{1}{2}mv^2\approx\frac{1}{2}\cdot 1\,kg\cdot(1\frac{m}{s})^2\approx 1\,J ,$$

  mentre l'energia di quiete dello stesso corpo è:

  $$mc^2\approx 1\,kg\cdot(3\cdot 10^8\frac{m}{s})^2\approx 10^{17}\,J ,$$

  per cui, in meccanica non relativistica trascuriamo la parte predominante dell'energia. D'altra parte, in fisica newtoniana l'energia è sempre definita a meno di una costante additiva, per cui aggiungere la costante mc^2 all'energia cinetica non pone problemi concettuali, nonostante il fatto che a velocità ordinarie questa costante risulti molto maggiore dell'energia cinetica. Invece, in meccanica relativistica l'energia di una particella è completamente determinata, e non sono ammesse costanti additive.

- Se, invece, $p\neq 0$, ricaviamo: $E=\sqrt{m^2 c^4+c^2 p^2}$, da cui vediamo che l'energia è una funzione crescente della quantità di moto.

- La relazione (*) può essere utilizzata per calcolare la massa di una particella anche quando questa non si trova in quiete; è sufficiente infatti misurare la sua energia e la sua quantità di moto.

  In realtà, questo è il procedimento seguito abitualmente quando non è facile fermare una particella, ad esempio perché essa è instabile e decade in un tempo più breve di quello richiesto per la misura.

- Può accadere che una *particella abbia massa nulla*; ad esempio, questo vale per il fotone.

  In questo caso, ricaviamo: $\boldsymbol{E=cp}$.

  Sostituendo nell'espressione della velocità, ricaviamo: $v=\frac{pc^2}{E}=\frac{pc^2}{pc}=c$.

  Perciò, *una particella di massa nulla si muove sempre a velocità c*, e per essa non può esistere un riferimento in cui si trova in quiete.

  Poiché tutte le misure sono affette da incertezza, non è semplice stabilire che la massa di una particella sia esattamente nulla, ma possiamo dire solo che lo è entro gli errori sperimentali. L'esempio tipico è quello dei neutrini, per i quali il problema dell'esistenza o meno di una massa è stato a lungo dibattuto, e solo recentemente sembra essersi risolto in senso favorevole.

- Differenziamo la relazione (*), e ricordiamo che la massa è una costante del moto:

  $2E\,dE=2c^2\,p\,dp \;\Rightarrow\; \gamma mc^2\,dE=c^2\gamma\,mv\,dp \;\Rightarrow\; dE=v\,dp$;

  sostituiamo per il secondo principio $dp=F\,dt$:

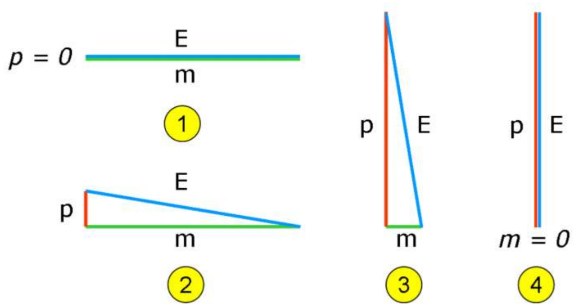
  $dE=vF\,dt=F\,dx=dL$.

  Quindi anche in relatività è valido il *teorema dell'energia cinetica* (o *teorema lavoro-energia*, o delle *forze vive*), secondo il quale il lavoro complessivo compiuto su un corpo è uguale alla variazione della sua energia cinetica.

Poniamo (come si usa spesso in fisica delle alte energie) $c=1$.

Possiamo allora scrivere la relazione (*) come: $E^2=p^2+m^2$ e, seguendo un suggerimento dello studioso russo Okun, ripreso sul blog del fisico delle particelle Marco Delmastro, interpretarla (senza alcuna pretesa di rigore, ma soltanto a fini didattici) come una relazione pitagorica. La figura a lato può quindi essere letta come segue.

1. Il corpo è fermo e la sua energia è uguale alla sua massa.
2. Il corpo si muove con una quantità di moto molto più piccola della sua massa; siamo nel caso non relativistico, in cui $v \ll c$, ed è valida con buona approssimazione la meccanica newtoniana.
3. Il corpo si muove con una quantità di moto molto più grande della sua massa; siamo nel caso relativistico, in cui $v \approx c$, e non può essere utilizzata la meccanica newtoniana.



4. Il corpo ha massa nulla, la sua energia è uguale alla sua quantità di moto, ed esso si muove alla velocità della luce; è questo il caso dei segnali elettromagnetici.

Problema 8.1 (*Paramatti n.*5)

a. A quale velocità l'energia cinetica di una particella è pari alla sua energia a riposo?

b. Che velocità deve avere una palla di cannone da 1 *kg* affinché la sua energia cinetica sia pari a quella di un protone con $\gamma = 10^{11}$?

Soluzione

a. Imponiamo: $K = (\gamma - 1) mc^2 = mc^2 \Rightarrow \gamma = 2 \Rightarrow v = c\sqrt{1 - \frac{1}{\gamma^2}} \simeq \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot 3 \cdot 10^8 \frac{m}{s} \simeq 2{,}60 \cdot 10^8 \frac{m}{s}$.

b. Per il protone: $K_p = (\gamma - 1) m_p c^2 \simeq \gamma m_p c^2 \simeq 10^{11} \cdot 1{,}67 \cdot 10^{-27} kg \cdot (3{,}00 \cdot 10^8 m/s)^2 \simeq 15{,}0\, J$.

E' ragionevole supporre che la palla di cannone si muova con velocità non relativistica:

$$K_c \simeq \frac{1}{2} m_c v_c^2 \Rightarrow v_c \simeq \sqrt{\frac{2K_c}{m_c}} \simeq \sqrt{\frac{2 \cdot 15\, J}{1\, kg}} \simeq 5.48 \frac{m}{s}$$.

Problema 8.2 (*Irodov n*.1.372)

Calcola il lavoro che deve essere compiuto su una particella di massa *m* perché la sua velocità aumenti da $v_1 = 0{,}60\,c$ a $v_2 = 0{,}80\,c$.

Confronta il risultato ottenuto con quello newtoniano (non relativistico).

Soluzione

Sia nella meccanica newtoniana che in quella relativistica è valido il teorema dell'energia cinetica (o delle forze vive). Quindi:

$$L_{cl} = K_2 - K_1 = \frac{1}{2} m (v_2^2 - v_1^2) = \frac{1}{2} mc^2 (0{,}8^2 - 0{,}6^2) = 0{,}14\, mc^2 \quad ;$$

$$L_{rel} = K_2 - K_1 = (\gamma_2 - \gamma_1) mc^2 = \left(\frac{1}{\sqrt{1-0{,}8^2}} - \frac{1}{\sqrt{1-0{,}6^2}}\right) mc^2 \simeq 0{,}42\, mc^2 \quad .$$

Come sappiamo, il lavoro richiesto nel caso relativistico è maggiore, in quanto la presenza di una velocità limite rende più difficile accelerare un corpo man mano che la sua velocità si avvicina a quella della luce.

Problema 8.3 (*Amaldi blu n*. 9 *pag*. 1127)

Il mesone π^+ ha una massa $m_\pi \simeq 140\, MeV/c^2$ ed è instabile. Quando decade, dà origine a un muone μ^+, di massa $m_\mu \simeq 106\, MeV/c^2$ e a un neutrino ν, di massa trascurabile.

Calcola la quantità di moto e l'energia del muone nel riferimento in cui il mesone π^+ è fermo.

Soluzione

Poiché il mesone π^+ era fermo, la conservazione della quantità di moto impone che il muone ed il neutrino abbiano quantità di moto uguali in valore assoluto:

$$0 = p_\mu + p_\nu \;\Rightarrow\; |p_\mu| = |p_\nu| = p \quad .$$

Imponiamo la conservazione dell'energia:

$$E_\pi = E_\mu + E_\nu \;\Rightarrow\; M_\pi c^2 = \sqrt{m_\nu^2 c^4 + p^2 c^2} + pc \;\Rightarrow\; M_\pi c^2 - pc = \sqrt{m_\nu^2 c^4 + p^2 c^2} \;\Rightarrow$$

$$M_\pi^2 c^4 - 2 M_\pi pc^3 + p^2 c^2 = m_\nu^2 c^4 + p^2 c^2 \;\Rightarrow$$

$$pc = \frac{(M_\pi^2 - m_\nu^2) c^4}{2 M_\pi c^2} \simeq \frac{(140^2 - 106^2)\, MeV^2}{2 \cdot 140\, MeV} \simeq 29{,}9\, MeV \;\Rightarrow$$

$$p \simeq 29{,}9 \frac{MeV}{c} \simeq \frac{29{,}9 \cdot 10^6 \cdot 1{,}6 \cdot 10^{-19}\, kg \cdot m^2/s^2}{3 \cdot 10^8\, m/s} \simeq 1{,}59 \cdot 10^{-20}\, kg \cdot \frac{m}{s} \quad .$$

Sostituiamo il valore ottenuto nell'espressione dell'energia del muone:

$$E_\nu = \sqrt{m_\nu^2 c^4 + p^2 c^2} \simeq \sqrt{106^2 + 29{,}9^2}\, MeV \simeq 110\, MeV \simeq 110 \cdot 10^6 \cdot 1{,}6 \cdot 10^{-19}\, J \simeq 1{,}76 \cdot 10^{-11}\, J \quad .$$

Problema 8.4 (*Simulazione MIUR n°*1 2017 - *Problema* 2)

Negli anni 1963-1964 il fisico W. Bertozzi con la sua equipe realizzò un esperimento al MIT di Boston verificando l'esistenza di una velocità limite, pari a quella della luce nel vuoto.

Secondo la fisica classica è possibile accelerare un corpo dalla quiete fino a una velocità qualunque, per quanto grande essa sia, mentre per la relatività questo non è possibile.

L'esperimento consiste nell'accelerare elettroni attraverso opportuni campi elettrici prodotti da un acceleratore di Van de Graaff e da un acceleratore lineare a radiofrequenza (LINAC). Il fascio di elettroni è prodotto da un catodo caldo, sotto forma di impulsi della durata di 3 ns $(3\cdot10^{-9}s)$ e viene accelerato dall'acceleratore di Van de Graaff attraverso differenze di potenziale variabili fino a un massimo di 1,5 milioni di volt.

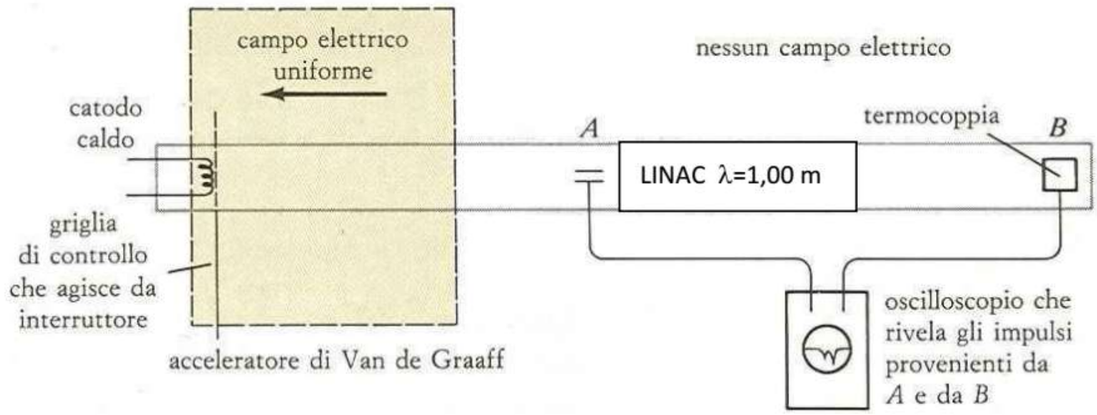


Figura 1

Gli elettroni, usciti dall'acceleratore di Van de Graaff, attraversano un tubicino metallico posto in A nel quale inducono un impulso di corrente che viene inviato all'oscilloscopio (vedi figure 1 e 2). Il tragitto da A e B è lungo 8,40 m ed è privo di aria e di campi elettrici che possano modificare la velocità degli elettroni (l'acceleratore LINAC è spento in una prima fase dell'esperimento e in particolare non è utilizzato nelle prime tre misure di sotto riportate). Arrivati in B gli elettroni urtano un disco di alluminio nel quale provocano un impulso di corrente che viene inviato anch'esso all'oscilloscopio. Sull'oscilloscopio la distanza tra i due impulsi dà la misura del tempo impiegato dagli elettroni per andare da A a B e quindi, nota la distanza AB, è possibile calcolare la loro velocità.

Ogni quadretto del reticolo dell'oscilloscopio (divisione) corrisponde ad un tempo di circa $0{,}98\cdot10^{-8}s$.

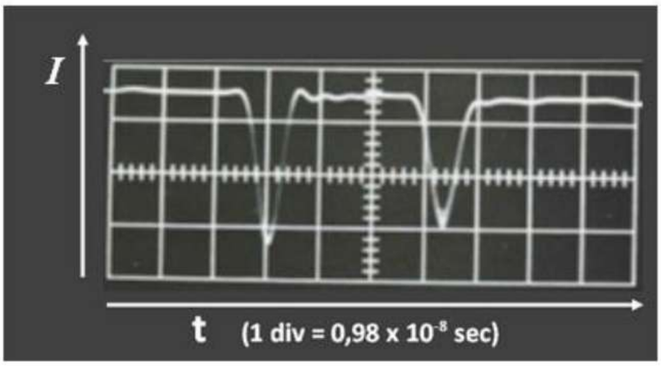


Figura 2. *Impulsi provenienti da A e da B*

Leggendo sull'oscilloscopio la distanza tra i due impulsi, al variare della differenza di potenziale applicata dall'acceleratore agli elettroni, si ottengono i seguenti valori (Tabella 1):

Differenza di potenziale $(10^6 V)$	0,5	1,0	1,5
N° divisioni tra i due impulsi	3,30	3,10	2,95

In una seconda fase dell'esperimento, per aumentare ulteriormente l'energia degli elettroni viene utilizzato anche l'acceleratore lineare (LINAC) presente nel primo metro successivo al punto A, nel quale gli elettroni vengono accelerati da ulteriori 3,0 milioni di volt.

Nell'esperimento viene anche misurato il calore prodotto dagli elettroni sul disco B adoperando una termocoppia, e la carica incidente sullo stesso disco B, per mezzo di un misuratore di cariche. I risultati ottenuti per due diversi valori di differenza di potenziale complessiva sono (Tabella 2):

Differenza di potenziale $(10^6 V)$	1,5	4,5
Energia del fascio in B (*J*)	10,0	29,2
Carica del fascio in B (μ*C*)	6,1	6,1

Dopo questa breve esposizione, ti viene richiesto di:

1. Analizzare l'esperimento descritto e rappresentare in un piano cartesiano l'andamento di v^2/c^2, dove *v* è la velocità degli elettroni nel punto B e *c* è la velocità della luce nel vuoto, in funzione del lavoro *W* compiuto dal campo elettrico nell'acceleratore, sia per i valori di velocità previsti dal modello classico che per i valori effettivamente misurati nell'esperimento.
2. Individuare il modello fisico più adatto a descrivere la situazione sperimentale, relativamente all'andamento di v^2/c^2 in funzione del lavoro *W* compiuto dal campo elettrico nell'acceleratore.
3. Calcolare i valori di v^2/c^2 attesi in base al modello fisico individuato, confrontandoli con quelli sperimentali e discutere l'andamento atteso.
4. Verificare, utilizzando i dati di Tabella 2 nei casi di differenza di potenziale 1,5 e 4,5 milioni di volt, che l'energia cinetica posseduta dagli elettroni quando arrivano in B è circa uguale a quella fornita dall'acceleratore, giustificando così la seguente affermazione: "Il fatto che il valore della velocità misurata sia inferiore a quello previsto dalla fisica classica non è dovuto a perdite di energia nell'apparato"

Soluzione

Poiché in questo problema le richieste del testo sono formulate in maniera particolarmente oscura, non seguiamo alla lettera i vari punti, ma cerchiamo di attenerci al senso dell'esperimento di Bertozzi.

Considerando trascurabile la velocità con cui gli elettroni vengono emessi dal catodo caldo (effetto termoionico), dobbiamo concludere che l'energia cinetica da essi posseduta nel tratto AB è uguale all'energia potenziale elettrostatica ad essi fornita dall'acceleratore di Van de Graaf.

- Secondo la dinamica newtoniana, avremo quindi:

$$K=\frac{1}{2}mv^2=qV \Rightarrow \frac{v^2}{c^2}=\frac{2qV}{mc^2}=\frac{2W}{mc^2}$$

per cui la quantità β^2 dovrebbe variare in maniera direttamente proporzionale al lavoro W compiuto dal campo elettrico nell'acceleratore.

- Secondo la dinamica relativistica, invece:

$$K=(\gamma-1)mc^2=qV \Rightarrow \gamma=1+\frac{W}{mc^2} \Rightarrow \frac{1}{1-v^2/c^2}=(1+\frac{W}{mc^2})^2 \Rightarrow \frac{v^2}{c^2}=1-\frac{1}{(1+W/(mc^2))^2} .$$

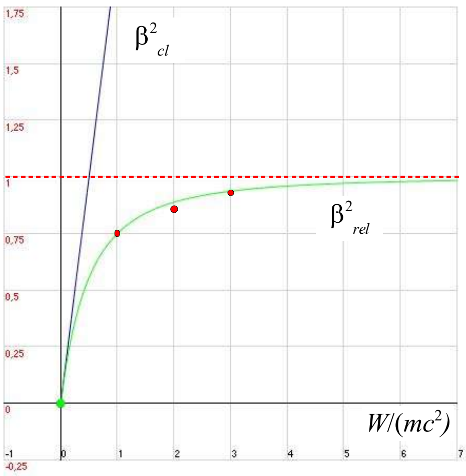
Vediamo che, al crescere del lavoro W compiuto dal campo elettrico nell'acceleratore, la quantità β^2 non cresce indefinitamente, ma tende ad 1, per cui la velocità v degli elettroni tende asintoticamente alla velocità c della luce nel vuoto.

Per decidere quale dei due modelli si adatta meglio ai dati sperimentali, calcoliamo la quantità β^2 ricavata dal tempo di volo degli elettroni nel tratto AB:

- per $V=0{,}5\cdot 10^6 J \Rightarrow \beta^2_{exp}=(\frac{d}{c\Delta t})^2 \simeq (\frac{8{,}40\,m}{3{,}00\cdot 10^8\,m/s\cdot 3{,}30\cdot 0{,}98\cdot 10^{-8}\,s})^2 \simeq 0{,}75$;
- per $V=1{,}0\cdot 10^6 J \Rightarrow \beta^2_{exp}=(\frac{d}{c\Delta t})^2 \simeq (\frac{8{,}40\,m}{3{,}00\cdot 10^8\,m/s\cdot 3{,}10\cdot 0{,}98\cdot 10^{-8}\,s})^2 \simeq 0{,}85$;
- per $V=0{,}5\cdot 10^6 J \Rightarrow \beta^2_{exp}=(\frac{d}{c\Delta t})^2 \simeq (\frac{8{,}40\,m}{3{,}00\cdot 10^8\,m/s\cdot 2{,}95\cdot 0{,}98\cdot 10^{-8}\,s})^2 \simeq 0{,}94$.

Confrontiamo, sia con una tabella che con un grafico, i valori sperimentali della quantità β^2 con quelli ricavati dal modello newtoniano e da quello relativistico.

$V\,(MV)$	β^2_{exp}	β^2_{cl}	β^2_{rel}
0,5	0,75	1,96	0,74
1,0	0,85	3,91	0,90
1,5	0,94	5,87	0,94



E' evidente, sia dalla tabella che dal grafico, che i dati sperimentali sono maggiormente in accordo con il modello relativistico che con quello newtoniano.

Per trarre delle conclusioni più sicure sulla validità della dinamica relativistica, dovremmo conoscere con quale incertezza sono noti i dati sperimentali, informazione che però il testo non ci fornisce.

Nell'ultimo quesito del problema, lo studente dovrebbe verificare l'affermazione per cui "Il fatto che il valore della velocità misurata sia inferiore a quello previsto dalla fisica classica non è dovuto a perdite di energia nell'apparato".

In questo caso, è presente anche un secondo acceleratore (LINAC) che contribuisce a compiere lavoro sugli elettroni, ed è possibile confrontare il lavoro compito su ogni "pacchetto" o "impulso" di elettroni $W_{tot}=QV$ con l'energia posseduta dal “pacchetto” nel punto B (misurata tramite una termocoppia).

Il problema è che, mentre il lavoro compiuto sugli elettroni triplica (poiché la differenza di potenziale applicata passa da 1,5 a 4,5 *MV*), l'energia misurata dalla termocoppia ha un incremento minore, passando da 10 a 29,2 J.

Gli estensori del quesito sostengono che lo studente dovrebbe rendersi conto che tale differenza è dovuta alle incertezze sperimentali, che però non vengono fornite dal testo (e potrebbero essere stimate solo in maniera laboriosa e incerta tramite la “propagazione degli errori”).

Problema 8.5 (*Simulazione MIUR n*°1 2017 - *Quesito* 2)

Un elettrone e un positrone (antiparticella dell'elettrone con la stessa massa dell'elettrone, ma con carica opposta) si muovono uno contro l'altro con la stessa velocità. L'energia posseduta da entrambe le particelle è di $1{,}51\,MeV$.

Sapendo che la loro massa a riposo è di $0{,}511\,MeV/c^2$, qual è la velocità del positrone nel sistema di riferimento dell'elettrone?

Soluzione

L'energia delle due particelle nel riferimento del laboratorio è:

$$E=\gamma mc^2 \;\Rightarrow\; \gamma=\frac{E}{mc^2}\simeq\frac{1{,}51\,MeV}{0{,}511\,MeV/c^2\cdot c^2}\simeq 2{,}95 \quad .$$

Ricaviamo la velocità nel riferimento del laboratorio:

$$\gamma=\frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}} \;\Rightarrow\; \beta=\sqrt{1-\frac{1}{\gamma^2}}\simeq\sqrt{1-\frac{1}{2{,}95^2}}\simeq 0{,}941 \;\Rightarrow\; v\simeq 0{,}941\,c \quad .$$

Per ricavare la velocità del positrone nel riferimento dell'elettrone, applichiamo la composizione delle velocità:

$$v=\frac{v_1+v_2}{1+v_1 v_2/c^2}\simeq\frac{0{,}941\,c+0{,}941\,c}{1+0{,}941\,c\cdot 0{,}941\,c/c^2}\simeq 0{,}998\,c\simeq 2{,}99\cdot 10^8\,\frac{m}{s} \quad .$$

Problema 8.6 (*Esempio Fisica MIUR Dicembre* 2018 - *Quesito* 3)

In un tubo a raggi catodici gli elettroni prodotti dal catodo vengono accelerati da una differenza di potenziale di $1{,}00\cdot 10^5\,V$. Sapendo che la distanza tra catodo e anodo è di 20,0 *cm*, determina la velocità degli elettroni (in metri al secondo) in prossimità dell'anodo tenendo conto degli effetti relativistici.

Soluzione

Supponendo che la velocità iniziale degli elettroni prodotti dal catodo sia trascurabile, possiamo imporre che la loro energia cinetica finale sia uguale (in valore assoluto) alla variazione della loro energia potenziale:

$$K=|\Delta U| \;\Rightarrow\; (\gamma-1)mc^2=|e\,\Delta V| \;\Rightarrow\; \gamma=1+\frac{|e\,\Delta V|}{mc^2}\simeq 1+\frac{1{,}6\cdot 10^{-19}\,C\cdot 1\cdot 10^5\,V}{9{,}11\cdot 10^{-31}\,kg\cdot(3\cdot 10^8\,m/s)^2}\simeq 1{,}20 \quad .$$

$$v=\beta c=c\sqrt{1-\frac{1}{\gamma^2}}\simeq 0{,}55\,c\simeq 1{,}66\cdot 10^8\,\frac{m}{s} \quad .$$

Osserviamo che il dato sulla distanza tra catodo e anodo è superfluo.

Problema 8.7 (*Annichilazione elettrone-positrone* - *McMillan* 1.46)

Un elettrone e^- di energia cinetica $K = 1{,}000\,MeV$ colpisce un positrone e^+ a riposo. (Il positrone è una particella di antimateria che ha la stessa massa dell'elettrone ma carica opposta).

Nella collisione si ha la "annichilazione" delle due particelle e la produzione di due fotoni di uguale energia le cui traiettorie formano angoli uguali θ con la direzione di moto dell'elettrone.

(Nell'esercizio possiamo considerare, in maniera decisamente impropria, il fotone come se fosse una "particella" di radiazione elettromagnetica priva di massa).

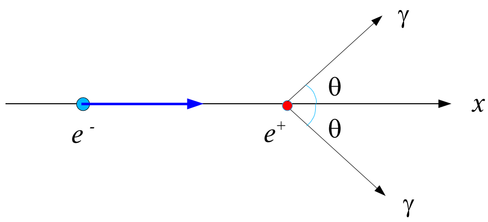
La reazione è quindi: $e^- + e^+ \rightarrow 2\gamma$.

Determina l'energia *E*, la quantità di moto *p* e l'angolo di emissione θ di ciascun fotone.

Soluzione

L'elettrone ha energia $E_{e^-} = K + m_e c^2 \simeq 1{,}511\,MeV$.

Ricaviamo la quantità di moto dell'elettrone:



$$E_{e^-}^2 = p_{e^-}^2\,c^2 + m_e^2 c^4 \;\Rightarrow\; p_{e^-} = \frac{\sqrt{E_{e^-}^2 - m_e^2 c^4}}{c} \simeq$$

$$\sqrt{1{,}511^2 - 0{,}511^2}\,\frac{MeV}{c} \simeq 1{,}422\,\frac{MeV}{c} \quad .$$

Nella situazione descritta dal testo sappiamo per simmetria che i due fotoni devono avere la stessa energia *E*, e quindi la stessa quantità di moto *p*.

Imponiamo la conservazione dell'energia:

$$E_{e^-} + E_{e^+} = 2E_\gamma \;\Rightarrow\; K + 2m_e c^2 = 2E_\gamma \;\Rightarrow\; E_\gamma = \frac{K}{2} + m_e c^2 \simeq (0{,}500 + 0{,}511)\,MeV \simeq 1{,}011\,MeV \quad .$$

Poiché il fotone ha massa nulla, la sua quantità di moto è: $p_\gamma = \dfrac{E_\gamma}{c} \simeq 1{,}011\,\dfrac{MeV}{c}$.

Imponiamo la conservazione della quantità di moto lungo l'asse *x* (ovvero lungo la direzione di moto dell'elettrone):

$$p_e = 2\,p_\gamma \cos\theta \;\Rightarrow\; \theta = \arccos\frac{p_e}{2\,p_\gamma} = \arccos\frac{1{,}422\,MeV/c}{2{,}022\,MeV/c} \simeq 45{,}3\,° \quad .$$

Osserviamo che nella situazione descritta dal testo la conservazione della quantità di moto lungo l'asse *y* è verificata necessariamente, e quindi non ci fornisce nuove informazioni.

9. Massa ed energia

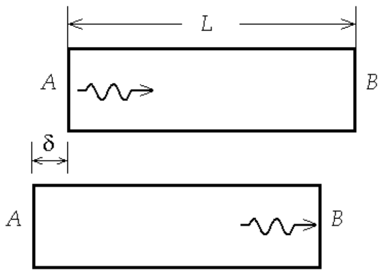
Inerzia dell'energia

Nel settembre 1905 Einstein pubblicò un breve articolo dal titolo "*L'inerzia di un corpo dipende dal suo contenuto di energia?*" che segnò la nascita del concetto noto, in maniera piuttosto impropria, come "*equivalenza massa-energia*".

Einstein riprese l'argomento anche in lavori successivi, e discusse diversi esempi ed esperimenti ideali che lo conducevano tutti alla stessa conclusione.

Tra questi esperimenti ideali, forse il più celebre è quello della "*scatola di Einstein*".

Nonostante la sua semplicità, lo espongo con una certa riluttanza, perché, pur trattandosi di un argomento corretto, temo che possa essere frainteso.



Supponiamo di avere una scatola di massa M e lunghezza L inizialmente ferma.

Dal punto A, che si trova sulla parete di sinistra, viene emesso verso destra un impulso di radiazione elettromagnetica che porta con sé un'energia E e, come sappiamo, una quantità di moto $p = E/c$.

Per la conservazione della quantità di moto, la scatola subisce un rinculo verso sinistra muovendosi con velocità V, che possiamo ragionevolmente supporre molto minore di c.

Dopo avere percorso la lunghezza L della scatola, la radiazione viene completamente assorbita dalla parete di destra nel punto B, e cede la sua quantità di moto alla scatola, che, di conseguenza, si ferma.

Ora, sulla scatola non hanno agito forze esterne; quindi, essa costituisce un sistema isolato. Poiché il centro di massa della scatola era inizialmente fermo, esso dovrà mantenere la stessa posizione per tutta la durata del fenomeno.

Ma, poiché la scatola nel suo complesso ha subito uno spostamento δ verso sinistra, perché il centro di massa rimanga fermo è necessario attribuire una "massa" m alla radiazione elettromagnetica, che si è spostata verso destra.

Nell'approssimazione $V \ll c$, abbiamo:

- $mL = M\,\delta$ perché il centro di massa deve rimanere fermo;
- $\frac{E}{c} = MV = M\,\frac{\delta}{t}$ per la conservazione della quantità di moto;
- $t = L/c$ perché la radiazione elettromagnetica viaggia alla velocità della luce.

Eliminando M e t dalle equazioni precedenti, ricaviamo: $\frac{E}{c} = mc \;\Rightarrow\; E = mc^2$.

Di conseguenza, se la radiazione elettromagnetica possiede una energia E, dobbiamo attribuirle anche una "massa" data dalla relazione precedente.

Ripetiamo che l'esempio è corretto, ma, dal momento che la radiazione elettromagnetica può, in alcuni casi, essere considerata come composta da fotoni, esso può condurre alla conclusione errata che il fotone abbia una massa, il che è in contrasto con quanto sappiamo su di esso.

Il fotone ha massa nulla, e l'esperimento ideale che abbiamo discusso mostra soltanto che:

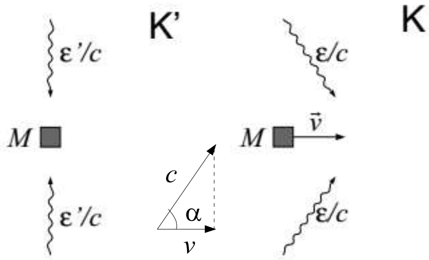
- quando viene emesso un fotone di energia E, allora il corpo che lo emette perde una massa $m = E/c^2$;
- quando viene assorbito un fotone di energia E, allora il corpo che lo assorbe acquista una massa $m = E/c^2$.

Presentiamo ora un esperimento ideale più complesso, ma che presenta minori rischi di fraintendimenti.

Vogliamo dimostrare che in un urto anelastico si ha necessariamente una variazione di massa.

Consideriamo un oggetto di massa M sul quale vengono inviati simultaneamente due impulsi di radiazione elettromagnetica aventi la stessa energia.

Analizziamo l'esperimento in due diversi riferimenti.



i. In K' l'oggetto è inizialmente fermo e i due impulsi si muovono in direzione verticale con versi opposti.

   In tale riferimento ciascuno dei due pacchetti di radiazione porta una quantità di moto $p'=\epsilon'/c$, ma, poiché essi procedono in versi opposti, quando vengono assorbiti l'oggetto rimane fermo.

ii. In K, invece, l'oggetto e i due impulsi hanno una velocità orizzontale v diretta verso destra, quindi il corpo dovrà conservare tale velocità dopo l'urto. Ma questo è in contrasto con la conservazione della componente orizzontale della quantità di moto:

   $$\gamma Mv+2\frac{\epsilon}{c}sen\,\alpha=\gamma Mv+2\frac{\epsilon}{c}\frac{v}{c}=\gamma Mv \quad \text{, in quanto} \quad sen\,\alpha=\frac{v}{c} \quad .$$

   Per eliminare la contraddizione, dobbiamo ammettere che il corpo dopo l'urto possieda una diversa massa M_f.

   Avremo quindi: $M_f=M+\frac{2\epsilon}{c^2}=M+\frac{\Delta E}{\gamma c^2} \Rightarrow \Delta E=\gamma\Delta M c^2$.

Concludiamo quindi che, *se un corpo assorbe della radiazione senza cambiare la sua velocità*, allora la sua massa aumenta di $\Delta M=\Delta E/(\gamma c^2)$.

In particolare, se $\gamma=1$, ovvero se $v=0$, come nel riferimento K', allora $\Delta M=\Delta E/c^2$.

Quindi, *se un corpo fermo assorbe energia restando in quiete, allora accresce la sua massa.*

Quello che abbiamo esposto è il solo significato reale dell'inerzia dell'energia (o dell'equivalenza massa-energia): *se, in qualunque modo, facciamo in modo che l'energia di un oggetto cambi, senza che cambi la sua velocità, per esempio se esso rimane fermo, allora necessariamente cambierà anche la sua massa.*

Per un corpo in quiete, questo fatto si può tradurre nella nota relazione $E_0=mc^2$.

In generale, avremo invece: $E=\gamma mc^2$.

Discutiamo l'esempio precedente.

- Forse ti è venuto in mente che la nostra conclusione è stata dimostrata solo nel caso particolare in cui l'energia cambia per assorbimento di radiazione elettromagnetica, e non in generale.

  In realtà, quando la radiazione viene assorbita, il suo effetto sul corpo può essere ad esempio quello di scaldarlo, ovvero di aumentarne la temperatura. Ma lo stesso aumento di temperatura potrebbe essere stato ottenuto in modi diversi, ad esempio mettendo in contatto il nostro oggetto con un corpo più caldo. Ora, se supponiamo che tutte le grandezze fisiche del corpo dipendano solo dal suo stato presente, e non dalla sua storia, questo dovrà essere vero in particolare per la sua massa. Quindi, se la massa è aumentata nel nostro esperimento, lo stesso accadrà quando il corpo arriverà allo stesso stato finale anche per altra via; ad esempio, se lo riscaldiamo cedendogli calore. Ciò che conta per determinare la massa del corpo è la quantità di energia che gli è stata fornita, e non il modo in cui essa è stata ottenuta.

- Dovresti avere notato che la relazione $E=\gamma mc^2$ era già stata introdotta nel paragrafo precedente come definizione di energia relativistica, per cui con il nostro esperimento ideale non avremmo scoperto niente di nuovo.

  In precedenza, però, avevamo considerato un oggetto di *massa costante*, e avevamo considerato come varia la sua energia al variare della velocità, quando esso viene sottoposto ad una forza.

  In questo caso, invece, teniamo *costante la velocità*, e vediamo che la massa di un corpo può variare in seguito a scambi di energia.

  La relazione $E=\gamma mc^2$ ha quindi validità generale, e afferma che ci sono due modi distinti per cambiare l'energia di un corpo:

  a) modificarne la velocità, e quindi cambiare γ;

  b) cedergli energia senza cambiarne la velocità, e quindi variarne la massa.

- Poiché $E_0=mc^2$, possiamo affermare che *la massa di un corpo non è altro che una misura della sua energia quando esso è fermo*.

  La presenza del fattore c^2 è infatti solo un fatto accidentale, dovuto alla scelta di unità di misura indipendenti per le lunghezze ed i tempi. Se, invece, come unità di lunghezza usassimo il secondo-luce, avremmo $c=1$ ed $E=m$.

  Esempi. La massa *aumenta* se: si scalda un corpo, si carica la molla di un orologio, si porta un atomo in uno stato eccitato. Viceversa, la massa *diminuisce* quando: un corpo cede calore all'esterno, la molla si scarica, l'atomo torna allo stato fondamentale.

- Mentre nella meccanica newtoniana l’energia si conserva quando agiscono soltanto forze conservative, nel caso relativistico la variazione della massa tiene conto anche delle interazioni non conservative, e quindi nella massa sono incluse tutte le possibili forme di energia, anche non meccanica.

  Perciò, se teniamo conto sia dell’energia cinetica che di tutte le altre possibili forme di energia che contribuiscono alla massa dei corpi, vediamo che *l’energia relativistica si conserva sempre*.

Lo stesso Einstein, al termine del suo articolo del 1905, ipotizzò che la previsione relativa alla "equivalenza tra massa ed energia" si sarebbe potuta verificare sperimentalmente, affermando:

"Non è impossibile che con corpi il cui contenuto di energia è variabile in grande misura (per esempio i sali di radio) si possa mettere la teoria alla prova con successo".

Egli si riferiva alla scoperta della radioattività (Becquerel 1896) e dell'elemento radio, responsabile in gran parte dell'attività dei minerali di uranio (Marie e Pierre Curie 1898).

Nel 1922, invece, Enrico Fermi affermava: "Non appare possibile che, almeno in un prossimo avvenire, si trovi il modo di mettere in libertà queste spaventose quantità di energia, cosa del resto che non si può che augurarsi, perché l'esplosione di una così spaventosa quantità di energia avrebbe come primo effetto di ridurre in pezzi il fisico che avesse la disgrazia di trovar il modo di produrla".

Ricordiamo che Fermi progettò e guidò la costruzione del primo reattore nucleare a fissione che produsse la prima reazione nucleare a catena controllata e fu uno dei direttori tecnici del Progetto Manhattan che portò alla realizzazione della bomba atomica.

La "massa relativistica"

Ricordiamo la nostra definizione di quantità di moto relativistica: $\vec{p}=\gamma m\vec{v}$.

In questa formula, come in tutti questi appunti, la massa m è quella misurata quando il corpo si trova in quiete e, per mettere in evidenza questo fatto, a volte di parla di "massa a riposo" o "massa di quiete".

Alcuni testi, invece, preferiscono introdurre una nuova grandezza detta "massa relativistica", definita $m_r=\gamma m$, allo scopo di lasciare invariata a livello formale la definizione newtoniana $\vec{p}=m_r\vec{v}$.

In maniera analoga, l'energia $E=\gamma mc^2$ verrebbe riscritta $E=m_r c^2$.

In questo modo, la "massa relativistica" dipenderebbe dalla velocità e, pertanto, non sarebbe più una quantità invariante, né una costante del moto. D'altra parte, essa esprimerebbe l'idea intuitiva di massa come "inerzia" di un corpo, ovvero della "tendenza di un corpo ad opporsi alla variazione della sua velocità", in quanto in relatività risulta sempre più difficile accelerare un corpo man mano che aumenta la sua velocità.

Questo concetto può essere generalizzato anche per i fotoni. Per essi, non potendo utilizzare $m_r=\gamma m$, dato che hanno "massa a riposo" nulla, , mentre il fattore γ non è definito (o è infinito), si può definire la "massa relativistica" come $m_r=E/c^2$.

Possiamo osservare che, con questa definizione, la conservazione della quantità di moto nell'esperimento ideale che abbiamo discusso in precedenza sarebbe verificata automaticamente.

Sempre seguendo l'esposizione del prof. Fabri, vediamo perché, anche se la precedente definizione è del tutto lecita, non sembra opportuno introdurla a livello didattico.

- Potremmo pensare che, conservando formalmente la definizione newtoniana $\vec{p}=m_r\vec{v}$, allora si mantenga anche il secondo principio nella forma $\vec{F}=m_r\vec{a}$.

  In realtà, non solo questo non è vero in generale, ma si avrebbero addirittura due leggi diverse corrispondenti ai casi in cui la forza sia parallela o ortogonale alla velocità: $F_{\parallel}=\gamma^3 m a_{\parallel}$ e $F_{\perp}=\gamma m a_{\perp}$.

  Infatti, nel periodo immediatamente successivo all'elaborazione della relatività speciale, c'era addirittura chi parlava di una “massa longitudinale” $m_L=\gamma^3 m$ e di una “massa trasversale” $m_T=\gamma m$, il che non contribuisce alla chiarezza ed alla semplicità del discorso.

- Riportiamo per completezza i calcoli, piuttosto laboriosi, che conducono ai risultati precedenti:

$$\vec{F}=\frac{d\,\vec{p}}{dt}=m\frac{d}{dt}(\gamma\,\vec{v})=m\,\vec{v}\frac{d\,\gamma}{dt}+m\,\gamma\frac{d\,\vec{v}}{dt} \quad .$$

Osserviamo che $d\,\vec{v}/dt=\vec{a}$, mentre:

$$\frac{d\,\gamma}{dt}=\frac{d}{dt}(1-\frac{v^2}{c^2})^{-1/2}=-\frac{1}{2}(1-\frac{v^2}{c^2})^{-3/2}\cdot(-\frac{2}{c^2}\vec{v}\cdot\frac{d\,\vec{v}}{dt})=\frac{\gamma^3}{c^2}\vec{v}\cdot\vec{a} \quad .$$

Sostituendo questo risultato nell'equazione di partenza e prendendo la componente ortogonale a $\vec{v}$, ricaviamo subito: $F_{\perp}=\gamma\, m\, a_{\perp}$, mentre dalla componente parallela a $\vec{v}$ otteniamo:

$$F_{\parallel}=m\,\gamma^3\frac{v^2}{c^2}a_{\parallel}+m\,\gamma\, a_{\parallel}=m\,\gamma\, a_{\parallel}\,(1+\gamma^2\frac{v^2}{c^2})$$

da cui, sostituendo a γ la sua espressione, otteniamo: $F_{\parallel}=\gamma^3 m\, a_{\parallel}$.

- Per un principio di economia del pensiero (o, se preferisci, per il “rasoio di Occam”), se la “massa relativistica” coincide con l’energia, a meno del fattore c^2, allora diventa un concetto inutile, e non si vede il motivo per cui debba essere introdotta.
- Nessun fisico usa mai la “massa relativistica” nel suo lavoro, e non se ne trova traccia nelle riviste scientifiche da parecchi anni. Solo alcuni libri di testo (soprattutto a livello di scuola superiore) o alcune esposizioni divulgative introducono questo concetto, ma, di fatto, non lo utilizzano in nessuno degli sviluppi successivi e, quando parlano di massa, intendono sempre la “massa di quiete”.
- Einstein non utilizzò mai esplicitamente questo concetto, e, in una lettera a Barnett del 1948 espresse la sua opinione in questi termini: “Non è bene parlare della massa $m_r=\gamma\, m$ di un corpo in moto, poiché non se ne può dare una definizione chiara. Se si vogliono descrivere le proprietà inerziali dei corpi in moto veloce, è meglio limitarsi alla massa di riposo *m* e dare piuttosto le espressioni dell’impulso e dell’energia”.
- L'uso della “massa relativistica” tende a nascondere il fatto che la “vera” massa è un invariante relativistico.
  Ad esempio, quando affermiamo che l’elettrone ha una massa $m_e\approx 9\cdot 10^{-31}\,kg$, è chiaro che stiamo parlando della massa invariante (o “di quiete”).
- Utilizzare il concetto di “massa relativistica” può far pensare che gli effetti relativistici siano dovuti a “qualcosa che sta succedendo” all'interno dei corpi e delle particelle che li compongono, mentre essi sono dovuti alle proprietà dello spazio-tempo.
- L'uso della “massa relativistica” può favorire una certa confusione, se non dei veri e propri errori di ragionamento.
  Riferendosi alla massa relativistica, il fisico russo Lev Okun affermava: “Ogni anno viene insegnata a milioni di studenti la relatività speciale in modo che essi ne perdono l’essenza. Nozioni arcaiche e confuse vengono martellate nelle loro teste. È nostro dovere – dovere dei fisici professionisti – fermare questo processo”.

La massa non è additiva

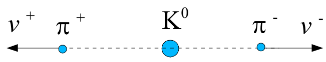
Consideriamo una particella nota come mesone K^0; si tratta di una particella instabile, che può decadere in diversi modi. Prendiamo in considerazione quello in cui i prodotti del decadimento sono due pioni, o mesoni π, aventi cariche opposte: $K^0 \rightarrow \pi^+ + \pi^-$. La massa (invariante) del K^0 è $m_K = 498\, MeV/c^2$, mentre quella di ciascun pione è $m_\pi = 140\, MeV/c^2$.

L'osservazione del decadimento ci obbliga quindi ad affermare che *ci sono fenomeni in cui la massa dei costituenti non si conserva*, nel senso che la somma delle masse delle particelle iniziali è diversa dalla somma delle masse delle particelle finali.

Esercizio. Calcoliamo le velocità dei pioni nel riferimento di quiete del mesone K^0.

Osserviamo che nel decadimento si conservano:

- la carica elettrica (in quanto una particella neutra decade in due particelle aventi carica opposta);
- la quantità di moto del sistema (non agiscono forze esterne);
- l'energia del sistema (come avviene sempre in relatività).



Dalla conservazione della quantità di moto:

$$\vec{p}_+ + \vec{p}_- = 0 \;\Rightarrow\; \gamma_+ \, m_\pi \vec{v}_+ + \gamma_- \, m_\pi \vec{v}_- = 0 \;\Rightarrow\; \vec{v}_+ = -\vec{v}_- \quad .$$

Vediamo quindi che, nel riferimento in cui il K^0 è in quiete, i pioni vengono emessi nella stessa direzione (che in figura abbiamo scelto come asse *x*), in versi opposti, e con velocità aventi lo stesso modulo *v*. Per la conservazione dell'energia:

$$E_+ + E_- = E_K \;\Rightarrow\; \gamma_+ \, m_\pi c^2 + \gamma_- \, m_\pi c^2 = m_K c^2 \;\Rightarrow\; 2\gamma m_\pi = m_K \;\Rightarrow\; \gamma = \frac{m_K}{2 m_\pi} \;\Rightarrow$$

$$\frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}} = \frac{m_K}{2 m_\pi} \;\Rightarrow\; \beta = \sqrt{1 - \frac{4 m_\pi^2}{m_K^2}} \simeq \sqrt{1 - \frac{4 \cdot (140\, MeV/c^2)^2}{(498\, MeV/c^2)^2}} \simeq 0{,}827 \;\Rightarrow\; v \simeq 0{,}827\, c \quad .$$

Quelle dei mesoni π sono quindi velocità relativistiche.

Nel caso in cui il K^0 avesse una velocità iniziale v_0, dovremmo applicare al risultato trovato la composizione relativistica delle velocità, distinguendo tra le componenti di *v* longitudinali e trasversali, ovvero parallele e perpendicolari a v_0.

- Se, invece, utilizzassimo la “massa relativistica”, avremmo: $m_{r\pi} = \gamma m_\pi$ e $m_{rK} = 2 m_{r\pi}$, per cui la “massa” si conserverebbe, come è ovvio che sia, dal momento che è direttamente proporzionale all'energia.

Chiaramente, se adottiamo questa impostazione, e diciamo che la massa si conserva, non possiamo poi affermare che in un processo di questo genere c’è stata una “trasformazione di massa in energia”.

Anche nella nostra impostazione, in cui non utilizziamo la “massa relativistica”, è comunque preferibile evitare il concetto di “trasformazione di massa in energia”.

Infatti, se l’energia si conserva, come è possibile che la massa si converta in energia?

Tutt'al più, potremmo dire che la massa si trasforma in energia cinetica, ovvero che c’è stata una conversione tra energia sotto forma di massa di riposo ed energia cinetica: $m_K = 2 m_\pi + 2 T_\pi / c^2$, ma questa affermazione rischia di essere poco utile e di non aumentare la chiarezza del discorso.

La nostra precedente affermazione sul fatto che la massa non si conserva sembra contraddire i principi fondamentali della chimica, a partire dal "Nulla si crea e nulla si distrugge".

Osserviamo però che, quando in chimica si parla di conservazione della massa, in realtà si intende un procedimento sperimentale ben diverso.

Supponiamo ad esempio di avere un recipiente al cui interno sono presenti idrogeno e ossigeno, e facciamo partire la reazione chimica che forma acqua. Cosa troviamo se pesiamo il recipiente prima e dopo la reazione, ammesso di avere una bilancia che abbia la sensibilità necessaria?

i. Se il recipiente è isolato, allora non può scambiare con l'esterno né energia, né materia.
   D'altra parte, la massa totale è direttamente proporzionale all'energia totale, per cui la massa totale non cambia.
ii. Se, invece, lasciamo uscire del calore, per riportare il sistema all'equilibrio termico con l'esterno, allora l'energia del recipiente diminuisce, e lo stesso accade alla sua massa.

Quindi la massa totale, che è direttamente proporzionale all'energia, è costante se il sistema è isolato, ma decresce se si lascia sfuggire dell'energia.

Invece, la somma delle masse dei singoli atomi di idrogeno e ossigeno non cambia.

Pertanto, misurare la massa del recipiente in cui avviene la reazione <u>non</u> è equivalente a sommare le masse di tutte le particelle che lo compongono.

Per questo motivo, dato che *non c'è una relazione diretta tra la somma delle masse e la massa totale*, la somma delle masse ha scarsa utilità pratica, e non conviene prenderla in considerazione.

Possiamo anche chiederci cosa succede quando si scalda un corpo, ad esempio un pezzo di ferro.

Il teorema dell'inerzia dell'energia che stiamo discutendo ci informa che la sua massa aumenta (anche se ben al di sotto di qualunque possibilità di rilevazione sperimentale).

A livello microscopico, sappiamo che gli atomi del ferro sono sempre in movimento, in quanto oscillano attorno alle loro posizioni di equilibrio. Se aumentiamo la temperatura, cresce l'ampiezza media delle oscillazioni, e quindi aumentano sia l'energia cinetica che quella potenziale e, di conseguenza, la massa del blocco.

D'altra parte, le masse dei singoli atomi che costituiscono il gas non sono cambiate, anche se la massa del pezzo di ferro è aumentata.

Dobbiamo quindi concludere che *la massa non è una grandezza additiva*, ovvero *la massa di un sistema non è la somma delle masse dei suoi costituenti.*

Ma, anche se cercassimo di salvare l'additività della massa, avremmo il problema dell'energia potenziale: se due corpi A e B interagiscono, la loro energia potenziale è una caratteristica del sistema A+B, e non può essere attribuita a nessuno dei due corpi singolarmente.

Anche quando, in meccanica newtoniana, affermiamo che un corpo di massa *m* che si trova ad un'altezza *h* dalla superficie della Terra "possiede" un'energia potenziale $U = mgh$, stiamo utilizzando un linguaggio poco preciso: in realtà, l'energia potenziale dovrebbe essere attribuita al sistema "Terra + corpo", sul quale andrebbero svolte tutte le nostre considerazioni energetiche.

Ad esempio, un nucleo di elio è costituto da due protoni e due neutroni, e la somma delle masse dei suoi costituenti sarebbe $2m_n + 2m_p$. Ma la massa di una particella α (ovvero un nucleo di elio) risulta minore di tale quantità, e la differenza (il cosiddetto *difetto di massa*) è $28\,MeV/c^2$, circa lo 0,7%. Questo significa che per scindere un nucleo di elio nei suoi componenti è necessario spendere energia contro le forze nucleari, che sono attrattive.

In conclusione:

- *la massa dei costituenti di un sistema non si conserva*, nel senso che la somma delle masse non rimane sempre costante durante un processo fisico;
- *la massa non è additiva*, ovvero la somma delle masse dei costituenti del sistema non è la massa totale del sistema;
- *la massa totale del sistema si conserva*, in quanto essa misura, a parte il solito fattore c^2, l'energia complessiva.

Come abbiamo osservato, la *massa di un sistema può essere maggiore della somma delle masse dei suoi componenti*, a causa del contributo delle energie cinetiche di tali costituenti.

Sono esempi di questa situazione un blocco di ferro che viene scaldato o un gas che è composto da molecole in rapido movimento.

Ma la *massa di un sistema può anche essere minore della somma delle masse dei suoi componenti*, quando il contributo positivo delle energie cinetiche dei costituenti è minore di quello negativo delle energie potenziali di interazione.

Questo è ciò che avviene:

- in una molecola rispetto agli atomi che la formano;
- in un atomo rispetto a nucleo ed elettroni;
- in un nucleo rispetto a protoni e neutroni.

In tutti questi casi si parla di *difetto di massa*.

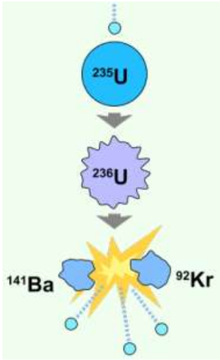
In pratica, per atomi e molecole il difetto di massa è talmente piccolo da non essere misurabile, in quanto ammonta a 10^{-9} o 10^{-10} della massa. Per i nuclei, invece, tale difetto è dell'ordine di 10^{-3}, e può essere quindi misurato con grande precisione.

In linea di principio, però, non c'è nessuna differenza tra questi casi.

- Osserviamo a questo proposito che, quando si affronta l'argomento delle reazioni nucleari, viene spesso, e in maniera non del tutto appropriata, fatto riferimento alla relatività.

Le stesse “Indicazioni nazionali” per l'insegnamento della Fisica nel Liceo Scientifico affermano che “l'aver affrontato l'equivalenza massa-energia permetterà (allo studente) di sviluppare un'interpretazione energetica dei fenomeni nucleari (radioattività, fissione, fusione)”.

Consideriamo un esempio di *fissione nucleare*, fenomeno alla base del funzionamento dei reattori nucleari (e delle prime bombe atomiche).



In figura vediamo un nucleo di Uranio 235 che viene colpito da un neutrone lento, lo assorbe e viene suddiviso in due nuclei più leggeri (Bario 141 e Kripton 92), con l’emissione di alcuni neutroni (tre in figura), più altre particelle (neutrini, fotoni) non indicate.

Uno o più dei neutroni che vengono emessi, opportunamente rallentati, possono poi scindere un altro nucleo di uranio, e così via, dando luogo ad una *reazione a catena*.

La fissione può essere sfruttata per produrre energia, perché, mentre le particelle iniziali sono quasi ferme, quelle finali hanno complessivamente un’energia cinetica di quasi 200 MeV (circa $3{,}2\cdot 10^{-11} J$), per cui un grammo di uranio potrebbe teoricamente fornire $5{,}8\cdot 10^{8} J$, pari a circa 160 *kWh*.

Se ci chiediamo da dove viene questa energia, possiamo osservare che la somma delle masse iniziali (Uranio + neutrone) supera la somma di quelle finali (Bario + Kripton + 3 neutroni), anche se per meno dello 0,1%, per cui nel processo di fissione si ha un *difetto di massa*. A questo proposito, si usa tirare in ballo la relatività, affermando che la <u>causa</u> della produzione di energia nella fissione sia il difetto di massa, secondo la relazione $E=mc^2$.

- In realtà, il fatto che si liberi energia può anche essere presentato in un altro modo.

Supponiamo di decomporre tutti i nuclei che partecipano alla reazione $^{235}U+n\rightarrow\ ^{141}Ba+\ ^{92}Kr+3n$ in protoni e neutroni (avremmo in totale 92 protoni e 144 neutroni). Per fare questo dovremo spendere una certa energia, perché le particelle nei nuclei sono legate dalla forza nucleare forte.

L'esperienza mostra che l'energia necessaria per decomporre il nucleo di Uranio è minore di quella che occorre per il Bario ed il Kripton, e quindi (poiché il risultato della decomposizione è lo stesso in entrambi i casi) che l'energia posseduta da $^{235}U+n$ è maggiore di quella di $^{141}Ba+\ ^{92}Kr+3n$ quando questi sono in quiete.

Poiché, l'energia diminuisce, anche la massa diminuisce: il difetto di massa quindi ci appare come <u>conseguenza</u>, e non come causa, della maggiore energia di legame. Ma, poiché l'energia si deve conservare, la differenza si ritrova come energia cinetica dei prodotti di reazione, ed è questa energia cinetica che viene utilizzata (sotto forma di calore) per il funzionamento della centrale nucleare.

Riassumendo, nella reazione di fissione, la diversa energia di legame tra reagenti e prodotti rende disponibile la differenza come energia cinetica, e quindi come calore, ma questo è un concetto indipendente dalla relatività.

Naturalmente, la diversa energia di legame implica anche un difetto di massa, che può essere utilmente sfruttato proprio per misurare le energie di legame. Ma la relatività non è direttamente coinvolta né con le centrali nucleari, né con le bombe atomiche.

In conclusione, la differenza in termini energetici tra i comuni fenomeni chimico-fisici e quelli nucleari indica semplicemente che nei fenomeni nucleari entra in gioco un'interazione diversa (l'interazione nucleare forte), molto più intensa dell'interazione elettromagnetica che regola le reazioni chimiche.

Problema 9.1 (*Quesiti Sandri* - 2006)

1. Un satellite, che possiamo considerare inizialmente in quiete nello spazio profondo, esplode in due frammenti. Uno ha una massa di 150 kg e si muove dal punto in cui è avvenuta l'esplosione con una velocità di 0,76 *c*. L'altro frammento si muove con una velocità di 0,88 *c*.

   Determina la massa del secondo frammento del satellite.
2. Il Sole irraggia energia ad un ritmo di $3{,}92\cdot 10^{26}\,W$.
   a. Calcola la corrispondente diminuzione della massa del Sole per ogni secondo di irraggiamento.
   b. Sapendo che il Sole ha una massa di $2\cdot 10^{30}\,kg$, e supponendo che mantenga l'attuale ritmo di irraggiamento, calcola in quanti anni avrà perso lo 0,01% della sua massa.
3. Un osservatore guarda un'astronave che passa ad alta velocità, e nota che un orologio a bordo è rallentato di un fattore l,50. Se la massa a riposo dell'orologio è 0,320 *kg*, calcola la sua velocità, la sua energia totale e la sua energia cinetica (tutte nel riferimento dell'osservatore).

Soluzioni

1. Il satellite può essere considerato un sistema isolato, in quanto su di esso non agiscono forze esterne, per cui la sua quantità di moto si conserva.

   Ponendoci nel riferimento del centro di massa del satellite, la quantità di moto iniziale è nulla.

   La quantità di moto del primo frammento è:

$$p_1=\gamma_1 m_1 v_1=\frac{m_1 v_1}{\sqrt{1-v_1^2/c^2}}=\frac{150\,kg\cdot 0{,}76\,c}{\sqrt{1-(0{,}76\,c)^2/c^2}}\simeq 5{,}26\cdot 10^{10}\,kg\cdot\frac{m}{s} \quad .$$

   La quantità di moto del secondo frammento deve essere uguale in modulo e opposta in direzione:

$$p_2=\gamma_2 m_2 v_2=p_1 \;\Rightarrow\; m_2=\frac{p_1}{\gamma_2 v_2}=\frac{p_1}{v_2}\sqrt{1-\frac{v_2^2}{c^2}}\simeq\frac{5{,}26\cdot 10^{10}\,kg\cdot m/s}{0{,}88\,c}\sqrt{1-\frac{(0{,}88\,c)^2}{c^2}}\simeq 95\,kg \quad .$$

2.
   a. $$\frac{\Delta m}{t}=\frac{1}{c^2}\frac{\Delta E}{t}=\frac{P}{c^2}=\frac{3{,}92\cdot 10^{26}\,W}{(3\cdot 10^8\,m/s)^2}\simeq 4{,}36\cdot 10^9\,\frac{kg}{s} \quad .$$
   b. Se indichiamo con T il periodo di tempo richiesto, dovremo avere:

$$\frac{\Delta m/t}{m}\cdot T=10^{-4} \;\Rightarrow\; T=10^{-4}\frac{m}{\Delta m/t}\simeq 10^{-4}\cdot\frac{2\cdot 10^{30}\,kg}{4{,}36\cdot 10^9\,kg/s}\simeq 4{,}59\cdot 10^{16}\,s\simeq 1{,}5\cdot 10^9\,anni$$

   ovvero, circa 1,5 miliardi di anni.

3. Poiché $\gamma=1{,}50 \;\Rightarrow\; v=c\sqrt{1-\frac{1}{\gamma^2}}\simeq c\cdot\sqrt{1-\frac{1}{1{,}5^2}}\simeq 0{,}745\,c\simeq 2{,}24\cdot 10^8\,\frac{m}{s}$.

$$E_{tot}=\gamma\, mc^2\simeq 1{,}5\cdot 0{,}32\,kg\cdot\left(3\cdot 10^8\,\frac{m}{s}\right)^2\simeq 4{,}32\cdot 10^{16}\,J \quad .$$

$$K = (\gamma - 1) mc^2 \simeq 0{,}5 \cdot 0{,}32\,kg \cdot (3 \cdot 10^8 \frac{m}{s})^2 \simeq 1{,}44 \cdot 10^{16}\,J \quad .$$

Problema 9.2 (*Paramatti n.*1)

Calcola la vita media di una particella π^+ in un sistema di riferimento nel quale l'impulso del pione è pari a $100\,GeV/c$. La massa e la vita media propria del π^+ sono rispettivamente:

$m(\pi^+)=139.6\,MeV/c^2$ e $\tau_0(\pi^+)=2.6\cdot10^{-8}s$.

Soluzione

In un dato sistema di riferimento, la vita media di una particella si dilata di un fattore γ rispetto alla sua vita media propria. Lo stesso fattore γ esprime il rapporto tra l'energia della particella in quel sistema di riferimento e la sua massa. Quindi:

$$\tau=\gamma\tau_0=\frac{E}{mc^2}\tau_0=\frac{\sqrt{p^2c^2+m^2c^4}}{mc^2}\tau_0\simeq\frac{\sqrt{(1{,}00\cdot10^{11}eV/c)^2c^2+(1{,}396\cdot10^8eV/c^2)^2c^4}}{1{,}396\cdot10^8eV/c^2\cdot c^2}\cdot2{,}6\cdot10^{-8}s\simeq$$

$$\frac{\sqrt{1{,}00\cdot10^{22}+2\cdot10^{16}}}{1{,}396\cdot10^8}\cdot2{,}6\cdot10^{-8}s\simeq\frac{1{,}00\cdot10^{11}}{1{,}396\cdot10^8}\cdot2{,}6\cdot10^{-8}s\simeq716\cdot2{,}6\cdot10^{-8}s\simeq1{,}86\cdot10^{-5}s\simeq18{,}6\,\mu s\quad.$$

In questo caso, il termine contenente la massa della particella è trascurabile rispetto a quello con la quantità di moto, per cui $E\simeq pc$. Si dice quindi che la particella, a causa dell'alto valore di γ, si trova in regime *ultrarelativistico*.

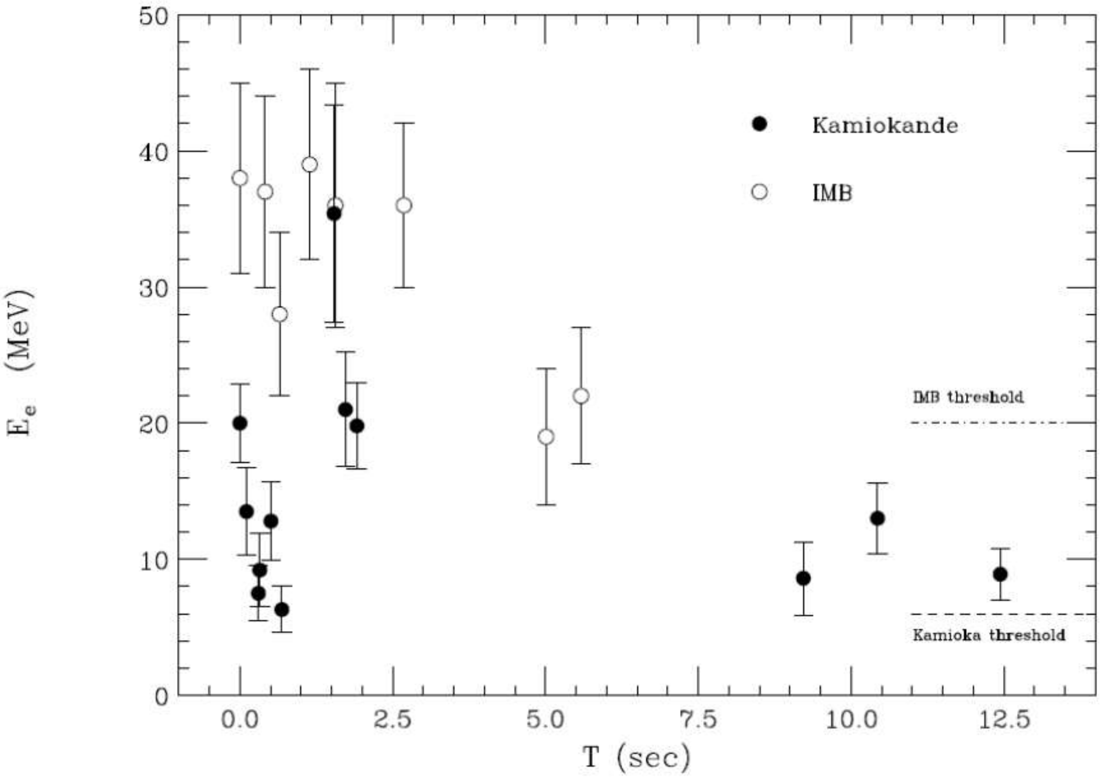
Problema 9.3 (*Paramatti n.*9)

Il 23 febbraio del 1987 due rivelatori di neutrini, Kamiokande in Giappone e IMB negli Stati Uniti, osservarono, simultaneamente e in un arco di tempo di 13 secondi, una decina di eventi ciascuno.

I neutrini provenivano dall'esplosione della Supernova SN1987A situata nella Nube di Magellano a 170000 anni luce dalla Terra.

L'assenza di una chiara correlazione tra l'energia dei neutrini ed il loro tempo di osservazione permise di porre un limite alla massa del neutrino.

Determina questo limite osservando in figura le energie misurate dai due rivelatori.



Soluzione

Supponiamo che il neutrino abbia una massa m. Avremmo allora:

$$E^2 = p^2c^2 + m^2c^4 \;\Rightarrow\; E^2 - m^2c^4 = \gamma^2 m^2 v^2 c^2 = \frac{m^2v^2c^2}{1-v^2/c^2} = \frac{m^2v^2c^4}{c^2-v^2} \;\Rightarrow$$

$$E^2c^2 - m^2c^6 - E^2v^2 + m^2v^2c^4 = m^2v^2c^4 \;\Rightarrow\; v^2 = \frac{c^2}{E^2}(E^2 - mc^4) \;\Rightarrow\; v = \frac{c}{E}\sqrt{E^2 - m^2c^4} \quad .$$

Di conseguenza, i neutrini con maggiore energia impiegheranno un tempo minore a raggiungere la Terra, ed esattamente:

$$\Delta t = t_{max} - t_{min} = \frac{d}{v_{min}} - \frac{d}{v_{max}} = \frac{d}{c}\left(\frac{E_{min}}{\sqrt{E_{min}^2 - m^2c^4}} - \frac{E_{max}}{\sqrt{E_{max}^2 - m^2c^4}}\right) =$$

$$\frac{d}{c}\left(\frac{1}{\sqrt{1-m^2c^4/E_{min}^2}} - \frac{1}{\sqrt{1-m^2c^4/E_{max}^2}}\right) \simeq \frac{d}{c}\left(1 + \frac{m^2c^4}{2E_{min}^2} - 1 - \frac{m^2c^4}{2E_{max}^2}\right) = \frac{dm^2c^4}{2c}\left(\frac{1}{E_{min}^2} - \frac{1}{E_{max}^2}\right) \quad .$$

Quindi il ritardo dovrebbe crescere con il quadrato della massa del neutrino.

Dal grafico vediamo che $\Delta t \leq 13\,s$, $E_{max} \approx 40\,MeV$, $E_{min} \approx 10\,MeV$, da cui:

$$mc^2 \leq \sqrt{\frac{2\,\Delta t}{d/c} \cdot \frac{E_{max}^2 E_{min}^2}{E_{max}^2 - E_{min}^2}} \simeq \sqrt{\frac{2 \cdot 13\,s}{1{,}7 \cdot 10^5 \cdot 3{,}15 \cdot 10^7\,s} \cdot 1{,}1} \cdot 10^6\,eV \simeq 23\,eV \quad .$$

Problema 9.4 (*Verifica Matinfinito*)

1. Un protone ha energia cinetica $K=1{,}0\cdot 10^{-10}\,J$. Determina la sua quantità di moto.
2. Determina la velocità di un elettrone in corrispondenza della quale la sua energia è uguale a quella di 10 elettroni a riposo.
3. Un mesone μ ha massa a riposo $m=1{,}88\cdot 10^{-28}\,kg$ e tempo medio di decadimento (valutato a riposo) $\tau\simeq 2{,}0\cdot 10^{-6}\,s$. Un fascio di mesoni μ in moto è caratterizzato da un tempo medio di decadimento $t\simeq 6{,}0\cdot 10^{-6}\,s$. Determina l'energia di questi mesoni.
4. Un blocco metallico di massa $m=1{,}0\,kg$ e calore specifico $C=0{,}1\,cal/(g\cdot {}^\circ C)$ si trova in quiete. La sua temperatura passa da 300 *K* a 600 *K*.
   Determina l'aumento percentuale della massa del blocco.
5. Un mesone K^0 inizialmente in quiete decade in due mesoni π^0. Le masse a riposo delle particelle sono: $m_K=498\,MeV/c^2$, $m_\pi=140\,MeV/c^2$.
   Determina l'energia cinetica di ciascuno dei due mesoni π^0.
6. Un corpo di massa *m* che muove con velocità $v_1=0{,}600\,c$ urta in maniera perfettamente anelastica un corpo uguale che si trova in quiete.
   Calcola (in funzione di *m*) la massa *M* del corpo che si forma nell'urto.

Soluzioni

1. *Primo metodo*. Applichiamo la definizione di energia cinetica:

$$K=(\gamma-1)mc^2 \;\Rightarrow\; \gamma=1+\frac{K}{mc^2}\simeq 1+\frac{1{,}0\cdot 10^{-10}\,J}{1{,}67\cdot 10^{-27}\,kg\,(3\cdot 10^8\,m/s)^2}\simeq 1{,}7 \quad .$$

$$\gamma=\frac{1}{\sqrt{1-v^2/c^2}} \;\Rightarrow\; v=c\sqrt{1-\frac{1}{\gamma^2}}\simeq 3\cdot 10^8\frac{m}{s}\cdot\sqrt{1-\frac{1}{1{,}7^2}}\simeq 2{,}4\cdot 10^8\frac{m}{s} \quad .$$

$$p=\gamma\, m\, v\simeq 1{,}7\cdot 1{,}67\cdot 10^{-27}\,kg\cdot 2{,}4\cdot 10^8\frac{m}{s}\simeq 6{,}8\cdot 10^{-19}\frac{kg\cdot m}{s} \quad .$$

   Secondo metodo. Utilizziamo l'invariante energia-impulso:

$$E^2=p^2c^2+m^2c^4 \;\Rightarrow\; (K+mc^2)^2=p^2c^2+m^2c^4 \;\Rightarrow\; K^2+2\,Kmc^2+m^2c^4=p^2c^2+m^2c^4 \;\Rightarrow$$

$$p=\frac{\sqrt{K^2+2\,Kmc^2}}{c}\simeq\frac{\sqrt{(1\cdot 10^{-10}\,J)^2+2\cdot 1\cdot 10^{-10}\,J\cdot 1{,}67\cdot 10^{-27}\,kg\cdot(3\cdot 10^8\,m/s)^2}}{3\cdot 10^8\,m/s}\simeq 6{,}7\cdot 10^{-19}\frac{kg\cdot m}{s} \quad .$$

2. Imponiamo: $E=10\,E_0 \;\Rightarrow\; \gamma\, mc^2=10\,mc^2 \;\Rightarrow\; \gamma=10 \;\Rightarrow$

$$v=c\sqrt{1-\frac{1}{\gamma^2}}\simeq 3\cdot 10^8\frac{m}{s}\cdot\sqrt{1-\frac{1}{10^2}}\simeq 2{,}98\cdot 10^8\frac{m}{s} \quad .$$

3. Il fattore di “dilatazione del tempo” è: $\gamma=\frac{t}{\tau}\simeq\frac{6{,}0\cdot 10^{-6}\,s}{2{,}0\cdot 10^{-6}\,s}\simeq 3{,}0$.

$$E=\gamma n c^2 \simeq 3\cdot 1{,}88\cdot 10^{-28}\,kg\cdot\left(3\cdot 10^8\,\frac{m}{s}\right)^2 \simeq 5{,}1\cdot 10^{-11}\,J \quad .$$

4. Sappiamo che $\Delta E=\Delta m\,c^2$. L'aumento percentuale di massa è quindi:
$$\frac{\Delta m}{m}\cdot 100=\frac{\Delta E}{mc^2}\cdot 100=\frac{m\,C\,\Delta T}{mc^2}\cdot 100=\frac{0{,}1\,cal/(g\cdot{}^\circ C)\cdot 4{,}19\,J/cal\cdot 300\,K}{10^3\,g/kg\cdot(3\cdot 10^8\,m/s)^2}\cdot 100\simeq 1{,}4\cdot 10^{-10}\,\% \quad .$$

5. Poiché il mesone K^0 era inizialmente in quiete, i due mesoni π^0 avranno la stessa quantità di moto, e quindi la stessa energia cinetica. Imponiamo la conservazione dell'energia:
$$m_K c^2=2\,m_\pi c^2+2\,K_\pi \;\Rightarrow\; K_\pi=\frac{(m_K-2\,m_\pi)c^2}{2}\simeq\frac{(498-2\cdot 140)\,MeV/c^2\cdot c^2}{2}\simeq 109\,MeV \quad .$$

6. Poiché $v_1=0{,}600\,c \;\Rightarrow\; \gamma_1=\frac{1}{\sqrt{1-v_1^2/c^2}}=\frac{1}{\sqrt{1-0{,}6^2}}=1{,}25$.

   Imponiamo la conservazione della quantità di moto e dell'energia:
$$\begin{cases}\gamma_1 m v_1=\gamma_2 M V_2\\ \gamma_1 mc^2+mc^2=\gamma_2 Mc^2 \;\Rightarrow\; (\gamma_1+1)m=\gamma_2 M\end{cases} \quad .$$

   Dividiamo membro a membro le due eq. ottenute:
$$V_2=\frac{\gamma_1}{\gamma_1+1}v_1\simeq\frac{1{,}25}{2{,}25}\cdot 0{,}6\,c\simeq 0{,}333\,c \;\Rightarrow\; \gamma_2=\frac{1}{\sqrt{1-v_2^2/c^2}}\simeq\frac{1}{\sqrt{1-0.333^2}}\simeq 1{,}06 \quad .$$

   Sostituiamo nella prima eq: $M=\gamma_2 v_2 m\simeq\frac{1{,}25\cdot 0{,}6\,c}{1{,}06\cdot 0{,}333\,c}m\simeq 2{,}12\,m$.

Problema 9.5 (*Quesito* 5 *Simulazione AIF* 2014)

La fusione di tre nuclei di $^{4}He_{2}$ (cioè tre particelle α), a formare un nucleo di ^{12}C è uno dei processi importanti per l'evoluzione di una stella. Tenuto conto che la massa di un protone è pari a $m_p = 1{,}67262 \cdot 10^{-27}\, kg$, quella di un neutrone è $m_n = 1{,}67493 \cdot 10^{-27}\, kg$, quella di una particella α vale $m_\alpha = 4{,}002603\, u$ (unità di massa atomica $1\, u = 1{,}66054 \cdot 10^{-27}\, kg$) e che la massa di un nucleo di ^{12}C è pari a 12 *u*, calcola l'energia di legame per nucleone, in MeV, in una particella α e l'energia coinvolta nel processo di fusione.

L'energia viene liberata o assorbita durante il processo di fusione?

Soluzione

La somma delle masse dei costituenti una particella α è: $2\, m_p + 2\, m_n \simeq 6{,}69510 \cdot 10^{-27}\, kg$, per cui nella formazione di una particella α a partire da due protoni e due neutroni si ha un difetto di massa:

$$\Delta m_1 = 2(m_p + m_n) - m_\alpha \simeq 4{,}862 \cdot 10^{-29}\, kg \quad .$$

L'energia di legame per nucleone nella particella α è pertanto:

$$\Delta E_1 = \frac{\Delta m_1 \cdot c^2}{4} \simeq \frac{4{,}862 \cdot 10^{-29}\, kg \cdot (2{,}998 \cdot 10^8\, m/s)^2}{4} \simeq 1{,}092 \cdot 10^{-12}\, J \simeq \frac{1{,}092 \cdot 10^{-12}\, J}{1{,}602 \cdot 10^{-19}\, J/eV} \simeq 6{,}82\, MeV \quad .$$

Nel processo di fusione di tre nuclei di elio in un nucleo di carbonio si ha ancora un <u>difetto</u> di massa: $\Delta m_2 = 3\, m_\alpha - m_C \simeq 7{,}809 \cdot 10^{-3}\, u \simeq 1{,}297 \cdot 10^{-29}\, kg$.

In tale processo viene quindi <u>emessa</u> l'energia:

$$\Delta E_2 = \Delta m_2 \cdot c^2 \simeq 1{,}297 \cdot 10^{-29}\, kg \cdot \left(2{,}998 \cdot 10^8 \frac{m}{s}\right)^2 \simeq 1{,}165 \cdot 10^{-12}\, J \simeq 7{,}28 \cdot MeV \quad .$$

Problema 9.6 (*Problema* 2 *Maturità Brocca* 1998)

Un nucleo di torio, di massa 232,03714 *amu* (*atomic mass unit,* $1\,amu = 1{,}6606 \cdot 10^{-27}\,kg$), decade in un nucleo di radio di massa 228,02873 *amu* ed in una particella α (nucleo di elio) di massa 4,00260 *amu* secondo il processo: ${}^{232}_{90}Th \rightarrow {}^{228}_{88}Ra + {}^{4}_{2}He$.

Determina la massa che si trasforma in energia cinetica e, supposto in prima approssimazione che tutta l'energia cinetica sia acquisita dalla particella α, la velocità *v* con cui la particella α esce dalla disintegrazione.

Tale particella può considerarsi relativistica?

Quale deve essere l'intensità di un campo magnetico ortogonale alla velocità *v* perché la particella descriva una circonferenza di diametro 1 *m*, supposto che essa si muova nel vuoto?

Soluzione

Poiché il testo non fornisce informazioni sullo stato di moto dell'atomo di torio, supponiamo che al momento del decadimento esso fosse in quiete nel riferimento del laboratorio.

La massa dei prodotti del decadimento è inferiore rispetto alla massa iniziale di una quantità:

$$\Delta m = m_{Th} - (m_{Ra} + m_{He}) \simeq 5{,}81 \cdot 10^{-3}\,amu \simeq 9{,}65 \cdot 10^{-30}\,kg \quad .$$

Nel decadimento viene quindi liberata l'energia:

$$\Delta E = \Delta m \cdot c^2 \simeq 9{,}65 \cdot 10^{-30}\,kg \cdot (3 \cdot 10^8\,m/s)^2 \simeq 8{,}68 \cdot 10^{-13}\,J \quad .$$

Nell'approssimazione in cui tutta l'energia sviluppata sia acquisita dalla particella α come energia cinetica, la velocità della particella α sarebbe (nel caso non relativistico):

$$\Delta E = \frac{1}{2} m_\alpha v^2 \;\Rightarrow\; v = \sqrt{\frac{2\,\Delta E}{m_\alpha}} \simeq \sqrt{\frac{2 \cdot 8{,}68 \cdot 10^{-13}\,J}{4{,}00260 \cdot 1{,}6606 \cdot 10^{-27}\,kg}} \simeq 1{,}62 \cdot 10^7\,\frac{m}{s} \quad .$$

Per un calcolo più preciso, avremmo dovuto imporre la conservazione della quantità di moto e dell'energia per ricavare le velocità dell'atomo di radio e della particella α.

Possiamo utilizzare per la particella α l'approssimazione newtoniana (non relativistica), in quanto l'energia cinetica della particella è molto minore della sua energia a riposo, che vale:

$$E_0 = m_{He} c^2 \simeq 4{,}00260 \cdot 1{,}6606 \cdot 10^{-27}\,kg \cdot (3 \cdot 10^8\,m/s)^2 \simeq 5{,}98 \cdot 10^{-10}\,J \quad .$$

Questo equivale a dire che per la particella α si ha $\gamma \ll 1$, condizione che risulta verificata dalla velocità dhe abbiamo determinato.

Utilizzando ancora l'approssimazione non relativistica, possiamo imporre che la forza di Lorentz si comporti come forza centripeta:

$$qvB = \frac{mv^2}{r} \;\Rightarrow\; B = \frac{mv}{rq} \simeq \frac{4{,}00260 \cdot 1{,}6606 \cdot 10^{-27}\,kg \cdot 1{,}62 \cdot 10^7\,m/s}{1\,m \cdot 1{,}602 \cdot 10^{-19}\,C} \simeq 0{,}672\,T \quad .$$

Problema 9.7 (*Esempio Matematica e Fisica MIUR Dicembre* 2018 - *Quesito* 5)

Un elettrone si muove, partendo da fermo, in un campo elettrico uniforme di intensità $E=10\,kV/cm$. Descrivi il procedimento che adotteresti per determinare l'istante in cui l'energia cinetica dell'elettrone sarà uguale alla sua energia a riposo.

Soluzione

Si tratta di un quesito il cui svolgimento rigoroso è piuttosto laborioso. D'altra parte, l'indicazione del testo è "Descrivi il procedimento che adotteresti per determinare", anziché "Determina", per cui probabilmente gli estensori del quesito si attendevano semplicemente che i calcoli venissero impostati, e non risolti completamente.

L'energia cinetica dell'elettrone è uguale alla sua energia a riposo quando:

$$K=E_0 \;\Rightarrow\; (\gamma-1)mc^2=mc^2 \;\Rightarrow\; \gamma=2 \;\Rightarrow\; v=\beta c=c\sqrt{1-\frac{1}{\gamma^2}}=\frac{\sqrt{3}}{2}c \quad .$$

Come abbiamo accennato negli appunti di teoria, la generalizzazione relativistica del secondo principio della dinamica dipende dalla direzione della forza rispetto alla velocità, ed esattamente è:

- $F_{\parallel}=\gamma^3 m a_{\parallel}$ se la forza è parallela alla velocità;
- $F_{\perp}=\gamma m a_{\perp}$ se la forza è ortogonale alla velocità.

Nel nostro caso, poiché l'elettrone parte da fermo, la sua velocità è sempre parallela alla forza generata dal campo elettrico, per cui: $eE=\gamma^3 ma$.

Ricordiamo che $a=dv/dt$, e che γ è funzione della velocità, per cui non può essere portata fuori dal segno di integrale:

$$eE=\gamma^3 m\frac{dv}{dt} \;\Rightarrow\; \frac{dv}{\left(\sqrt{1-v^2/c^2}\right)^3}=\frac{eE}{m}dt \;\Rightarrow\; \int_0^{\frac{\sqrt{3}}{2}c}\frac{dv}{\left(\sqrt{1-v^2/c^2}\right)^3}=\int_0^t\frac{eE}{m}dt \quad .$$

L'integrale del secondo membro è semplicemente $\frac{eE}{m}t$.

Per il primo membro, poniamo: $v=c\,sen\,u \;\Rightarrow\; dv=c\cos u\,du$ e sostituiamo (ricordandoci di farlo anche negli estremi di integrazione):

$$\int_0^{\pi/3}\frac{c\cos u}{\sqrt{(1-sen^2 u)^3}}du=c\int_0^{\pi/3}\frac{1}{\cos^2 u}du=[c\,tg\,u]_0^{\pi/3}=c\sqrt{3} \quad .$$

Il tempo richiesto è quindi:

$$c\sqrt{3}=\frac{eE}{m}t \;\Rightarrow\; t=\frac{\sqrt{3}\,c\,m}{e\,E}\simeq\frac{\sqrt{3}\cdot 3\cdot 10^8\,m/s\cdot 9{,}1\cdot 10^{-31}\,kg}{1{,}6\cdot 10^{-19}\,C\cdot 10^6\,V/m}\simeq 3{,}0\cdot 10^{-9}\,s \quad .$$

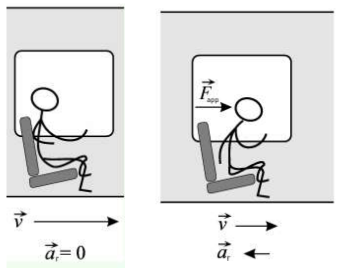
Osserviamo che, in realtà, anche l'approssimazione grossolana di porre $\gamma=2$ e "portarlo fuori" dal segno di integrale, benché concettualmente errata, avrebbe fornito lo stesso risultato numerico, entro la precisione dei dati forniti.

10. Gravità e accelerazione

Anche dopo avere elaborato la RS, Einstein non si riteneva soddisfatto dei risultati ottenuti.
Egli aveva stabilito che tutte le leggi della natura sono invarianti rispetto alle trasformazioni di Lorentz, e che esse sono valide in tutti i RI, i quali si trovano in moto rettilineo uniforme gli uni relativamente agli altri.
Non risultava chiaro, però, come fosse possibile identificare un RI in maniera non ambigua, né per quale motivo i RI dovessero essere "privilegiati" rispetto agli altri. Inoltre, un moto accelerato rispetto ad un RI veniva ad assumere un significato assoluto, mentre Einstein avrebbe voluto interpretare qualunque moto come relativo. Egli intraprese quindi un percorso che gli consentisse di formulare le leggi della fisica in modo che esse fossero valide per tutti i riferimenti, non soltanto per quelli inerziali, ma anche per quelli non inerziali (*principio di covarianza generale*).
In realtà, Einstein si accorse che, per fare questo, avrebbe dovuto prima costruire una teoria relativistica della gravitazione, interpretando la gravità non come una caratteristica dei corpi o una forza agente su di essi, ma come una proprietà dello spazio-tempo in cui tali corpi si muovono.
In questo modo, il suo programma di ricerca iniziale, ovvero quello di generalizzare la relatività a riferimenti in moto generico, è passato in secondo piano, cedendo il posto allo studio della gravitazione.
Per seguire almeno i primi passi del ragionamento di Einstein, ricordiamo come (durante il terzo anno) abbiamo imparato a risolvere i problemi della dinamica nei RNI.

Forze apparenti nei RNI

Cominciamo con un esempio qualitativo.
Se siamo seduti su un autobus che si muove a velocità costante (in direzione e modulo), non ci accorgiamo del suo moto, per il PR.
Se però l'autobus improvvisamente frena, ci sentiamo spinti "in avanti" (cioè in direzione opposta a quella in cui l'autobus ha accelerato) e, se non siamo vincolati, ad esempio dalle cinture di sicurezza, veniamo accelerati in avanti.



Nel riferimento dell'autobus, il primo ed il secondo principio della dinamica non valgono, perché abbiamo subito un'accelerazione in assenza di qualunque forza evidente.
Quindi, la prima interpretazione del fenomeno che un fisico ci può fornire è: "ti trovi in un RNI (l'autobus che frena) e le leggi della dinamica non sono valide in questo riferimento".
D'altra parte, la nostra interpretazione "ingenua" sarà diversa, in quanto per noi risulterà spontaneo affermare: "c'è una forza che mi spinge in avanti". Ma una forza presuppone una causa, ovvero qualcosa o qualcuno che la produce, e qui la causa non c'è.
Per venire incontro alla nostra intuizione, e soprattutto per poter utilizzare le leggi della dinamica anche nei RNI (accelerati), la fervida fantasia dei fisici ha però inventato delle forze "speciali", che prendono il nome di *forze apparenti*.
Come sappiamo, la regola di applicazione è la seguente:

Se ci troviamo in un RNI che si muove (rispetto ad un RI) con accelerazione $\vec{a}_r$ (che supponiamo costante in direzione, per cui non consideriamo i riferimenti in rotazione), possiamo ancora utilizzare le leggi di Newton a condizione di aggiungere alle forze "reali" agenti su un corpo (quelle generate da altri corpi) la forza apparente $\vec{F}_{app}=-m\vec{a}_r$.

Aggiungiamo due osservazioni.

- Il segno negativo significa che la forza apparente è opposta all'accelerazione del RNI.
  Ad esempio, nel caso dell'autobus che frena, l'accelerazione è diretta verso la coda, quindi la forza apparente è diretta in avanti.
- La forza apparente agisce su qualsiasi corpo il cui moto venga studiato nel RNI, ma tale forza differisce per intensità da un corpo all'altro, in quanto è *proporzionale alla massa del corpo* stesso, esattamente *come la forza di gravità*.

Ricordiamo che la teoria newtoniana delle forze gravitazionali si riassume tramite la *legge di gravitazione universale*:

$$F=G\frac{mM}{r^2}\quad .$$

Essa afferma che due corpi si attraggono con una forza proporzionale al prodotto delle due masse e inversamente proporzionale al quadrato della distanza.

Anche se non è scritto in maniera esplicita, notiamo che per Newton la *forza è istantanea*: se il corpo M si muove, la forza cambia immediatamente in funzione della sua posizione. Il fatto che la forza di gravità newtoniana si propaghi istantaneamente è però *incompatibile con la relatività, dove c è una velocità limite.*

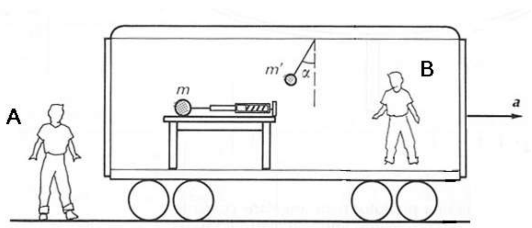
La proporzionalità rispetto alla massa *m* fa sì che l'accelerazione di un corpo sia indipendente dalla sua massa:

$$F=ma\ \Rightarrow\ G\frac{mM}{r^2}=ma\ \Rightarrow\ a=G\frac{M}{r^2}$$

per cui, come sappiamo, tutti i gravi cadono con la stessa accelerazione.

Rivediamo gli stessi concetti in forma lievemente più rigorosa.

Supponiamo che un vagone si muova con accelerazione costante *a*, che al soffitto sia appeso, tramite un filo, un corpo di massa *m*' e che un altro corpo di massa *m* sia attaccato ad una molla di costante elastica *k*.

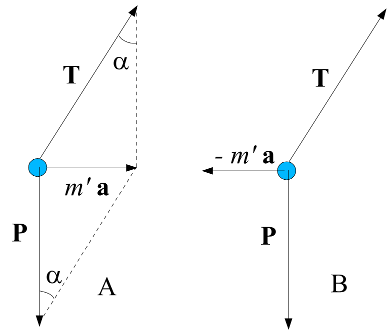


In tutti i riferimenti possiamo osservare che il filo viene deviato dalla verticale di un angolo α, la molla si allunga di un tratto *x*, ed entrambi i fenomeni avvengono in verso opposto a quello dell'accelerazione del vagone.

Questi fatti, però, vengono spiegati diversamente in un RI, come quello dell'osservatore A fermo al suolo, ed in un RNI, come quello dell'osservatore B che si trova sul vagone.

A. Per l'osservatore A le masse *m* ed *m*' sono in moto con la stessa accelerazione *a* del vagone, quindi egli applica ad entrambe il 2° principio della dinamica:

$\boldsymbol{F}_{el}=m\boldsymbol{a}$; $\boldsymbol{T}+\boldsymbol{P}=m'\boldsymbol{a}$.

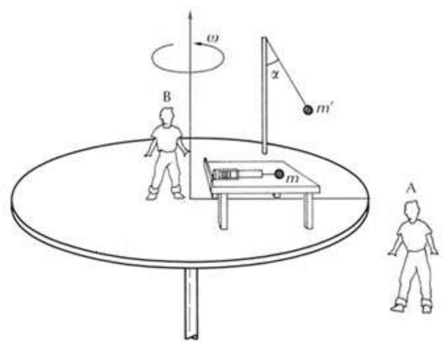


B. Per l'osservatore B, invece, le due masse sono in quiete, anche se su di esse agiscono delle forze non equilibrate.

Per poter spiegare questo fatto tramite il 2° principio, egli deve introdurre una forza apparente di inerzia $\boldsymbol{F}_{in}=-m\boldsymbol{a}$, in modo che: $\boldsymbol{F}_{el}+\boldsymbol{F}_{in}=0$; $\boldsymbol{T}+\boldsymbol{P}+\boldsymbol{F}_{in}=0$.

In entrambi i riferimenti possiamo ricavare la deviazione del filo e l'allungamento della molla con lo stesso procedimento:

$$tg\,\alpha=\frac{m'a}{m'g} \Rightarrow \alpha=tg^{-1}\frac{a}{g} \quad ; \quad kx=ma \Rightarrow x=\frac{ma}{k} \quad .$$



Anche se in seguito non prenderemo in considerazione dei riferimenti in rotazione, supponiamo per esercizio che tutto l'apparato del problema precedente venga montato su una piattaforma in rotazione con velocità angolare costante ω ad una distanza *r* dal centro.

Possiamo ancora osservare che il filo viene deviato dalla verticale verso l'esterno di un angolo α, e che la molla si allunga di un tratto *x*, sempre verso l'esterno.

Come in precedenza, queste osservazioni sperimentali verranno spiegate diversamente in un RI (osservatore A fermo al suolo) ed in un RNI (osservatore B che si trova sulla piattaforma).

A. Per l'osservatore A le masse *m* ed *m*' subiscono una accelerazione centripeta $a_c=\omega^2 r$, per cui vale il 2° principio della dinamica: $\boldsymbol{F}_{el}=m\boldsymbol{a}_c$; $\boldsymbol{T}+\boldsymbol{P}=m'\boldsymbol{a}_c$.

B. Per l'osservatore B, invece, le due masse sono in quiete, anche se su di esse agiscono delle forze non equilibrate.

Per spiegare questo fatto tramite il 2° principio, egli deve introdurre una forza apparente centrifuga $\boldsymbol{F}_c=-m\boldsymbol{a}_c$, in modo che: $\boldsymbol{F}_{el}+\boldsymbol{F}_c=0$; $\boldsymbol{T}+\boldsymbol{P}+\boldsymbol{F}_c=0$.

Anche in questo caso, possiamo ricavare la deviazione del filo e l'allungamento della molla utilizzando lo stesso procedimento in entrambi i riferimenti:

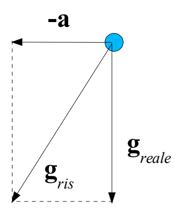
$$tg\,\alpha=\frac{m'\omega^2 r}{m'g} \Rightarrow \alpha=tg^{-1}\frac{\omega^2 r}{g} \quad ; \quad kx=m\omega^2 r \Rightarrow x=\frac{m\omega^2 r}{k} \quad .$$

Fino a questo punto, ci siamo limitati a riprendere dei problemi che avevamo già svolto in terza. Aggiungiamo ora un'osservazione a cui in precedenza avevamo appena accennato.

Tutte le cosiddette *"forze apparenti"* che siamo costretti ad introdurre nei RNI per salvare la validità dei principi della dinamica (la "forza di inerzia", quella centrifuga, quella di Coriolis, che qui non abbiamo citato) *sono direttamente proporzionali alla massa, esattamente come la forza*

peso.
Di conseguenza, le forze apparenti in un riferimento accelerato possono essere viste come una "gravità apparente", che non è distinguibile da quella "reale".

Nell'esempio precedente, il fisico B che si trova nel vagone che accelera potrebbe affermare che, nel suo riferimento, oltre al campo gravitazionale "reale" $\vec{g}$, è presente un campo gravitazionale "apparente" $\vec{g}_{app}=-\vec{a}$, e che la gravità risultante è $\vec{g}_{ris}=\vec{g}+\vec{g}_{app}$.



Di conseguenza, il filo appeso al soffitto è "verticale" nella direzione della gravità risultante, e quindi, come abbiamo visto in precedenza, forma un angolo $\alpha=tg^{-1}(a/g)$ con la normale al soffitto.

Approfittiamo dell'occasione per ricordare che, poiché la legge $\vec{P}=m\vec{g}$ è l'analoga di $\vec{F}=q\vec{E}$ con la quale abbiamo definito il campo elettrico, allora la grandezza $\vec{g}$, oltre che come accelerazione gravitazionale, può essere considerata anche come *campo gravitazionale*.

Riferimenti in caduta libera

Come sappiamo, Galileo aveva osservato che tutti i corpi cadono con la stessa accelerazione.

Riportiamo a questo proposito uno dei brani in cui egli descrive i suoi esperimenti.

"E finalmente ho preso due palle, una di piombo ed una di sughero, quella ben più di cento volte più grave di questa, e ciascheduna di loro ho attaccata a due sottili spaghetti eguali, lunghi quattro o cinque braccia, legati ad alto; allontanata poi l'una e l'altra palla dallo stato perpendicolare, gli ho dato l'andare nell'istesso momento, ed esse, scendendo per le circonferenze de' cerchi descritti da gli spaghi eguali, lor semidiametri, passate oltre al perpendicolo, son poi per le medesime strade ritornate indietro; e reiterando ben cento volte per lor medesime le andate e le tornate, hanno sensatamente mostrato come la grave va talmente sotto il passo della leggiera, che né in ben cento vibrazioni, né in mille, anticipa il tempo d'un minimo momento, ma camminano con passo egualissimo. Scorgesi anche l'operazione del mezzo, il quale, arrecando qualche impedimento al moto, assai più diminuisce le vibrazioni del sughero che quelle del piombo, ma non però che le renda più o meno frequenti; anzi quando gli archi passati dal sughero non fusser più che di cinque o sei gradi, e quei del piombo di cinquanta o sessanta, son eglin passati sotto i medesimi tempi."

In seguito, Newton aveva ipotizzato l'esistenza di una forza universale attrattiva agente tra due corpi generici, detta gravità. Per rispettare le osservazioni di Galileo, la forza di gravità doveva essere direttamente proporzionale alla massa del corpo su cui agisce: $P=mg$.

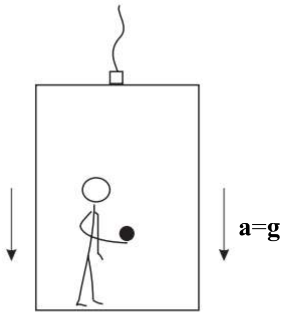
Ne segue il cosiddetto *Principio di equivalenza* (PE) "*debole*":
in un campo gravitazionale tutti i corpi si muovono allo stesso modo.

In altri termini, dalle leggi di Newton segue che il moto di un corpo in un campo gravitazionale non dipende dalla natura del corpo, dalla sua massa, dalla sua composizione, o da qualunque altra delle sue proprietà caratteristiche.

Nei "*Principia*", Newton afferma infatti di avere eseguito una serie di esperimenti con pendoli di uguale lunghezza, le cui masse erano diverse per grandezza e costituzione, e di aver verificato, entro una precisione di 10^{-3}, che il periodo del pendolo dipende solo dalla sua lunghezza, e non da altre caratteristiche.

Una importante conseguenza del PE è il fatto che *la forza di gravità si cancella in un riferimento in caduta libera*.

Come esempio di riferimento in caduta libera prendiamo un ascensore (che, per motivi che vedremo in seguito, chiameremo *ascensore di Einstein*) a cui sia stato tagliato il cavo.



Su ogni corpo presente all'interno dell'ascensore agiscono la forza di gravità $\vec{F}_g = m\vec{g}$ e la forza apparente $F_I = -m\vec{a}$.

Ma, dal momento che l'ascensore è in caduta libera, la sua accelerazione vale $\vec{a} = \vec{g}$, per cui le due forze hanno uguale modulo e versi opposti:

$\vec{F}_{ris} = \vec{F}_g + \vec{F}_I = 0$.

In maniera sintetica, potremmo quindi dire che in un riferimento in caduta libera gli oggetti sono "privi di peso".

Ricordiamo che, quando parliamo di *riferimento in caduta libera*, non intendiamo dire che esso si muova necessariamente verso il basso, né che il suo moto debba essere verticale.
In generale, intendiamo che il *riferimento si muove sotto l'azione della sola forza di gravità.*

Il suo moto può quindi essere anche parabolico, circolare, ellittico... , purché esso non sia soggetto a forze diverse da quelle gravitazionali. Per questo motivo, autori come Taylor e Wheeler preferiscono parlare di riferimenti "in volo libero".

Vediamo qualche esempio di riferimenti in caduta libera.

- Se prendiamo una bottiglia di plastica, la riempiamo di acqua, la stappiamo e facciamo dei forellini sulla parete, vicino al fondo, vediamo che l'acqua zampilla dai forellini.
  Infatti, la pressione dell'acqua sovrastante, dovuta alla gravità, spinge fuori l'acqua.
  Se però lasciamo cadere la bottiglia, o la lanciamo in aria (senza farla ruotare), constatiamo che durante il volo l'acqua non esce.
  Dunque, nel riferimento della bottiglia in volo, ovvero in caduta libera,la gravità non è presente.
- Consideriamo un satellite artificiale, o la stazione spaziale in orbita attorno alla Terra, purché

abbiano i motori spenti.

All'interno del satellite si sperimenta la cosiddetta “assenza di peso”.

Sottolineiamo che questo fenomeno non è dovuto al fatto che il satellite si trovi al di fuori del campo gravitazionale terrestre, o che tale campo sia estremamente debole nella posizione del satellite. Infatti, il campo gravitazionale decresce secondo la legge dell'inverso del quadrato della distanza, e molti satelliti artificiali distano solo qualche centinaio di *km* dalla superficie della Terra, ossia una distanza piccola rispetto al raggio della Terra: $R_T \approx 6380\, km$.

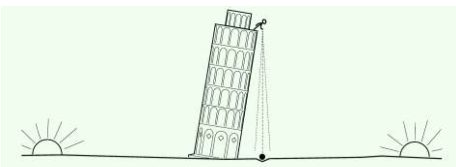
- La Terra è in caduta libera nel campo gravitazionale del Sole, e per questo motivo sulla Terra la forza di gravità del Sole “non si sente”.

  In altri termini, a causa del suo moto intorno al Sole la Terra è un riferimento accelerato con accelerazione $a_T \simeq 6 \cdot 10^{-3}\, m/s^2$, ma la forza apparente dovuta a tale accelerazione è compensata dalla forza di gravità del Sole, e la Terra può, da questo punto di vista, essere trattata come un RI (se si trascurano gli effetti di marea, a cui accenneremo in seguito).
- Nei “*Principia*”, Newton osserva che i satelliti di Giove si muovono attorno al pianeta “come se il Sole non ci fosse”.

  In termini moderni, nel riferimento di Giove, la forza di attrazione del Sole sui satelliti è compensata dalla forza apparente del RNI. Oppure, nel riferimento di Giove, che è in caduta libera attorno al Sole, il campo gravitazionale del Sole si cancella.

Quesito. Se la forza di attrazione del Sole influenzasse la caduta dei gravi, di quanto si sposterebbe il punto di caduta di un sasso lasciato dalla Torre Pendente di Pisa, di altezza $h = 52\, m$, tra la mattina e la sera?

Risposta. Stiamo supponendo che sul sasso che cade agisca, oltre al campo gravitazionale della Terra, anche quello del Sole; ma che invece non agisca la forza apparente centrifuga dovuta al moto orbitale della Terra.



Il campo gravitazionale della Terra è diretto in verticale e vale $g_T \simeq 9{,}8\, N/kg$. Quello del Sole vale $g_S \simeq 6 \times 10^{-3}\, N/kg$ e cambia direzione nel corso del giorno, ma all'alba ed al tramonto è orizzontale.

Se utilizziamo l'approssimazione per i piccoli angoli $tg\,\alpha \simeq \alpha$ (ovvero lo sviluppo di Taylor al primo ordine), l'angolo di deviazione formato dal campo risultante rispetto alla verticale è

$$\alpha = \frac{g_S}{g_T} \simeq \frac{6 \cdot 10^{-3}\, m/s^2}{9{,}8\, m/s^2} \simeq 6 \cdot 10^{-4}\, rad \quad .$$

La traiettoria di caduta sarebbe ancora rettilinea, ma formerebbe l'angolo α con la verticale, ed il punto di caduta subirebbe uno spostamento: $x \simeq h\,\alpha \simeq 52\, m \cdot 6 \cdot 10^{-4}\, rad \simeq 3{,}2\, cm$, verso est la mattina, e verso ovest la sera.

Poiché si tratterebbe di uno spostamento facilmente osservabile, la sua assenza è una conferma del PE.

Insistiamo sul fatto che il PE “debole” non è una scoperta di Einstein, ma era ben noto anche nella meccanica newtoniana, anche se non veniva enunciato in tale forma.

Esso afferma che, per quanto riguarda il *moto di un corpo in un campo gravitazionale*, la sua costituzione, la massa e le altre proprietà caratteristiche del corpo, non hanno nessuna influenza.

Il motivo per cui lo abbiamo chiamato Principio di Equivalenza è che, *per quanto riguarda gli effetti meccanici, la forza apparente che compare in un riferimento accelerato è equivalente alla forza di gravità*.

In altri termini, *un riferimento in quiete in un campo gravitazionale* $\vec{g}$ *è indistinguibile, per quanto riguarda gli effetti meccanici, da un riferimento che subisce un'accelerazione* $\vec{a}=-\vec{g}$.

Ascensore di Einstein

Supponiamo di avere due riferimenti: un ascensore in moto rettilineo uniforme nello spazio vuoto, lontano da qualunque sorgente di attrazione gravitazionale, ed un ascensore in caduta libera vicino alla superficie terrestre.

Abbiamo affermato che un fisico <u>non</u> può distinguere i due riferimenti attraverso delle esperienze di meccanica (PE).

Leggiamo la descrizione che lo stesso Einstein ci ha lasciato di questi esperimenti ideali nel suo testo divulgativo "*L'evoluzione della fisica*", scritto con Leopold Infeld.

"Immaginiamo un immenso ascensore, all'ultimo piano di un grattacielo molto, ma molto più alto di quelli che esistono realmente. Di colpo si spezza il cavo che sostiene la cabina e questa comincia a cadere liberamente. Degli osservatori che si trovano nel suo interno effettuano durante la caduta alcuni esperimenti. [...]

Uno degli osservatori lascia cadere un fazzoletto e un orologio. Che cosa accadrà a questi due corpi? Per un osservatore all'esterno, che guarda attraverso la finestra della cabina, fazzoletto e orologio cadono entrambi esattamente allo stesso modo, con la stessa accelerazione. [...]

Ma altrettanto avviene con la cabina (pareti, pavimento, soffitto). Pertanto la distanza fra i due corpi e il pavimento non varierà. Per l'osservatore interno entrambi i corpi resteranno esattamente allo stesso posto che occupavano quando li lasciò liberi. Egli infatti può ignorare il campo gravitazionale, perché la causa di questo risiede al di fuori del suo riferimento. Egli constata che, nell'interno dell'ascensore, nessuna forza agisce sui due corpi, i quali restano in riposo come se si trovassero in un riferimento inerziale. Se l'osservatore dà una spinta a un corpo in una direzione qualsiasi, ad esempio verso l'alto o verso il basso, il corpo continuerà a muoversi uniformemente fin quando urterà il soffitto o il pavimento. In breve, le leggi della meccanica classica sono valide per l'osservatore nell'interno dell'ascensore; tutti i corpi vi si comportano conformemente alle leggi d'inerzia. [...]

Vediamo ora in quale maniera i due osservatori, l'uno nell'interno e l'altro all'esterno, giudicano ciò che avviene nella cabina in caduta libera.

Il moto di questa cabina, e di tutti i corpi nel suo interno, si verifica per l'osservatore esterno in conformità alla legge di gravità di Newton. Il moto che egli osserva non è uniforme, bensì accelerato, per effetto del campo gravitazionale della Terra.

Ma dei fisici nati ed educati nella cabina ragionerebbero in modo del tutto diverso. Essi riterrebbero di disporre di un sistema inerziale e riferirebbero tutte le leggi della natura al loro ascensore, giustificando tale procedimento con il fatto che nel loro riferimento tali leggi rivestono forma particolarmente semplice. Sarebbe perfettamente naturale per loro supporre che il loro ascensore è a riposo e che esso è un riferimento inerziale.

È impossibile pronunciarsi sulle divergenze fra i punti di vista dell'osservatore esterno e di quello interno. Ognuno di essi potrebbe rivendicare il diritto di riferire tutti gli eventi al proprio riferimento e le due descrizioni degli eventi potrebbero essere ugualmente coerenti. [...]

Il campo gravitazionale esiste per l'osservatore esterno; non esiste per l'osservatore interno. Il moto accelerato dell'ascensore soggetto al campo gravitazionale esiste per l'osservatore esterno, mentre l'osservatore interno non nota che riposo e assenza di campo gravitazionale."

Confrontiamo altri due riferimenti: un ascensore fermo (ad esempio appoggiato al suolo) nel campo gravitazionale terrestre, ed un ascensore in moto uniformemente accelerato con accelerazione $\vec{a} = -\vec{g}$ orientata verso il proprio soffitto e lontano da qualunque sorgente gravitazionale.

Anche in questo caso, un fisico <u>non</u> può distinguere i due riferimenti attraverso delle esperienze di meccanica (PE). Leggiamo cosa afferma a questo proposito Einstein.

"Immaginiamo un ascensore tirato con forza costante verso l'alto da qualcuno situato all'esterno che abbia attaccato una corda al soffitto. [...] Sentiamo ora le spiegazioni che l'osservatore esterno e quello interno danno dei fenomeni che si producono nella cabina.

Osservatore esterno. Il mio riferimento è inerziale. Vedo l'ascensore muoversi con accelerazione costante, causa la forza costante che agisce su di esso. Le persone nell'interno si trovano in moto assoluto. Per loro le leggi della meccanica non valgono. Per loro non è vero che i corpi sui quali non si esercita nessuna forza si trovano a riposo. Un corpo lasciato cadere dentro la cabina urta presto il pavimento, poiché questo si muove verso l'alto e gli viene incontro. Ciò si produce esattamente nello stesso modo per un orologio e per un fazzoletto. Per quanto ciò possa sembrare strano, le persone nell'interno non sono in grado di lasciare il pavimento, perché se spiccano un salto il pavimento che è in moto verso l'alto le raggiunge subito.

Osservatore interno. Non vedo nessuna ragione per ritenere che il mio ascensore sia in moto assoluto. Voglio ammettere che il mio riferimento rigidamente collegato all'ascensore non sia realmente inerziale, ma non credo che ciò abbia nessun rapporto con il moto assoluto. Il mio orologio, il mio fazzoletto e tutti gli altri corpi cadono perché l'ascensore si trova in un campo gravitazionale. Riscontro esattamente lo stesso genere di movimenti che l'uomo nota sulla Terra. Egli li spiega molto semplicemente mediante un campo gravitazionale e ciò è vero anche per me.

Entrambe le descrizioni, tanto quella dell'osservatore esterno come quella dell'osservatore interno, sono del tutto logiche, e non c'è modo di decidere quale di esse sia la vera. Possiamo indifferentemente ammettere l'una o l'altra come spiegazione dei fenomeni che si producono nell'ascensore: e cioè tanto il moto non uniforme e l'assenza di un campo di gravitazione secondo l'osservatore esterno, quanto il riposo e la presenza di un campo di gravitazione secondo l'osservatore interno.

Si noti però che sebbene l'osservatore esterno abbia motivi di supporre che l'ascensore si trova in moto non uniforme «assoluto», non può considerarsi come tale un moto la cui eliminazione è possibile sostituendogli l'azione di un campo gravitazionale."

Principio di Equivalenza

Ricordiamo ancora che il PE “debole”, di cui abbiamo parlato fino a questo momento, afferma soltanto che *per quanto riguarda il moto di un corpo in un campo gravitazionale*, non hanno importanza la sua massa, la sua natura e le altre sue proprietà, e come conseguenza, la forza apparente in un riferimento accelerato è equivalente alla forza di gravità.

In un suo lavoro del 1907, Einstein ha generalizzato questo enunciato, sostenendo che l’equivalenza di cui stiamo parlando non è valida solo per quanto riguarda gli effetti meccanici, ma per tutti gli effetti fisici.

Definiamo quindi **Principio di Equivalenza** (alcuni specificano “*forte*”) l'enunciato per cui: *“La forza apparente che compare in un riferimento accelerato è equivalente a tutti gli effetti fisici alla forza di gravità”.*

In termini più formali: *un riferimento in quiete in un campo gravitazionale* $\vec{g}$ *è indistinguibile, per tutti gli effetti fisici, da un riferimento che subisce un'accelerazione* $\vec{a}=-\vec{g}$.

In particolare, se $\vec{g}=\vec{a}=0$, vediamo che *un riferimento in caduta libera è equivalente per tutti gli effetti fisici ad un RI nello spazio vuoto.*

L'ultima affermazione è di particolare importanza per capire il capovolgimento operato da Einstein sul punto di vista corrente: finora abbiamo detto che le forze apparenti sono analoghe ad una “forza di gravità storta”, mentre egli afferma che *la forza di gravità <u>è</u> una forza apparente*.

Attenzione! Precisiamo che l'equivalenza di cui stiamo parlando ammette un'importante limitazione (*forze di marea*), che vedremo in seguito.

Osserviamo il parallelismo tra l'atteggiamento di Einstein riguardo il PR nel costruire la Relatività Speciale e quello verso il PE nella costruzione della Relatività Generale.

- Nella meccanica newtoniana è valido il PR, in quanto si sostiene che tutti i RI sono equivalenti per quanto riguarda le leggi della meccanica. L’idea di Einstein è che questa equivalenza non sia valida solo agli effetti della meccanica, ma, in generale, per tutti gli effetti fisici.
- Con il PE accade la stessa cosa. Già Newton aveva osservato che in un riferimento in caduta libera la gravità si cancella, per quanto riguarda le leggi del moto. La novità introdotta da Einstein è che questa cancellazione non avviene solo agli effetti del moto, ma per qualunque fenomeno fisico.

In conclusione, nel caso del PR si afferma che sono completamente equivalenti due generici RI, mentre nel caso del PE si afferma che un riferimento in caduta libera è completamente equivalente ad un RI.

Il PE di Einstein ci conduce quindi ad una nuova definizione di RI.

Abbiamo sempre detto che i RI sono quelli in cui valgono le leggi della fisica, senza che sia necessario aggiungere forze apparenti.
Ma, dal momento che in Relatività Generale (RG) la forza di gravità è a tutti gli effetti assimilata ad una forza apparente, dobbiamo concludere che *i "veri" RI sono quelli in cui non agisce la gravità*.
Abbiamo quindi due possibilità per realizzare un RI:

- *prendere un riferimento in moto rettilineo uniforme lontano da sorgenti di campo gravitazionale*;
- *prendere un riferimento in caduta libera (che non si trovi in rotazione).*

Il primo caso si verifica, ad esempio, per una astronave che viaggia a motori spenti lontano dal Sole, dai pianeti, dalle altre stelle. Il secondo caso può realizzarsi , ad esempio,per un ascensore in caduta libera.

Osserviamo che ora <u>non</u> *possiamo più considerare come inerziali quei riferimenti che si trovano in un campo gravitazionale e che sono in quiete, in moto rettilineo uniforme, o che comunque non si trovano in caduta libera*.

Vediamo alcuni esempi di riferimenti che <u>non</u> possiamo più considerare come RI.

- Se ci troviamo su una astronave nelle vicinanze del Sole, e regoliamo i razzi in modo che la loro spinta compensi l'attrazione solare, l'astronave rimane ferma rispetto al Sole, ma non costituisce un RI (appunto perché i motori sono accesi).
- Un'astronave che viaggia a velocità costante dentro un'atmosfera che la frena, non è un RI (per la presenza delle forze di attrito con l'atmosfera).
- Un laboratorio fermo sulla superficie terrestre (anche l'aula nella quale ci troviamo) non può più essere considerato un RI, non solo a causa dei moti di rotazione e rivoluzione terrestre, ma, soprattutto, per la presenza, al suo interno, della forza di gravità.

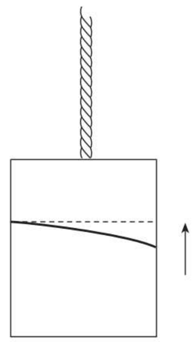
- Riportiamo un altro esempio del prof. Fabri che spiega meglio il motivo per cui un riferimento che non si trovi in caduta libera non può essere considerato come un RI.

"In questo nuovo paradigma la forza di gravità diventa una forza apparente; quando noi diciamo che c'è la forza di gravità, è solo perché non ci siamo messi nel riferimento giusto, che è quello in caduta libera. Nel riferimento in caduta libera la gravità sparisce.
Vediamo due esempi, che vi mostreranno l'analogia completa fra due situazioni. La prima è quella che ci è familiare. Mi metto su una giostra che gira, e mi accorgo che c'è la forza centrifuga. Materialmente me ne accorgo perché, se ho in mano un oggetto, questo tende a sfuggire verso l'esterno. Per impedirgli di sfuggire lo devo trattenere, cioè gli devo applicare una forza verso l'interno. Poiché vedo che debbo applicare una forza per tenerlo fermo, sono costretto a dire che ci deve essere un'altra forza, che va compensata.
Voi sapete benissimo che, se mi metto nel RI "vecchia maniera" non dico così. Dico invece: si capisce che ci vuole una forza; quell'oggetto che tengo in mano descrive un moto circolare uniforme, che è accelerato, e quindi richiede una forza; la mia mano applica appunto la forza che ci vuole. La forza centrifuga c'è nel riferimento rotante, ma non c'è nel

RI.
Secondo esempio: mi metto in un riferimento solidale alla Terra. In questo riferimento scopro che, se voglio impedire alle cose di cadere, le devo trattenere: devo applicare una forza verso l'alto. Ne deduco che c'è una forza (apparente) verso il basso.
Ho scritto apparente, perché è proprio la stessa cosa della forza centrifuga: è una forza in più che non so da dove viene. E, come nell'altro caso, potrei farla sparire: basterebbe che mi mettessi nel riferimento in caduta libera.
Dunque in entrambi i casi la risposta è una sola: la forza nasce perché non ci troviamo in un RI. Con la nuova definizione di RI le due situazioni sono perfettamente parallele: la giostra non è un RI, ma anche quello in cui ci troviamo in questo momento non è un RI. Tutti noi stiamo fermi perché il pavimento ci sostiene: se non ci fosse, sprofonderemmo.

Deflessione della luce

Finora abbiamo ammesso che il PE "forte" fosse corretto, ed abbiamo discusso le sue conseguenze, ma non ci siamo ancora chiesti se esso possa superare le verifiche sperimentali.
Lo stesso Einstein, nel discutere se è possibile stabilire se l'ascensore dell'esempio precedente è fermo nel campo gravitazionale terrestre o se accelera verso l'alto, propone un'obiezione molto forte alla validità del PE.



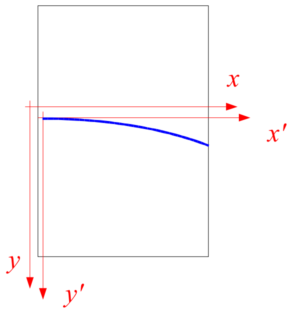
"C'è forse un mezzo di uscire dall'ambiguità delle due differenti spiegazioni e di decidere in favore dell'una o dell'altra. Supponiamo che un raggio luminoso penetri orizzontalmente nell'ascensore attraverso un'apertura laterale, colpendo, dopo un brevissimo intervallo di tempo, la parete opposta e sentiamo quali siano le previsioni dei due osservatori circa la traiettoria del raggio luminoso.
L'osservatore esterno, il quale crede che l'ascensore effettui un moto accelerato, argomenterà come segue: il raggio luminoso penetra orizzontalmente attraverso l'apertura e si muove in linea retta, con velocità costante, verso la parete opposta. Ma la cabina è in moto verso l'alto e cambia di posizione mentre il raggio si muove verso la parete. Pertanto il raggio colpirà un punto che non è esattamente opposto al punto d'entrata, bensì un poco al di sotto. La differenza sarà lievissima, ma ciò nondimeno sussisterà, cosicché la propagazione della luce relativamente all'ascensore non sarà rettilinea, bensì leggermente curva. La differenza è dovuta alla distanza percorsa dalla cabina nel tempo in cui il raggio ne attraversa l'interno.
L'osservatore interno, il quale crede nel campo gravitazionale agente su tutti gli oggetti del suo ascensore, direbbe: Non è che l'ascensore si trovi in moto accelerato; esso è sotto l'azione di un campo gravitazionale. Un raggio luminoso non ha peso e perciò non può venire influenzato dal campo gravitazionale. Se il raggio è lanciato in direzione orizzontale, esso colpirà la parete in un punto esattamente opposto a quello della sua entrata.
Da questa discussione sembra scaturire la possibilità di pronunciarsi fra i due punti di vista opposti, in quanto il fenomeno sarebbe diverso per i due osservatori. Sempre che le spiegazioni riportate non contengano nulla d'incoerente, l'intera nostra argomentazione fuori e dentro l'ascensore precedente non avrebbe più valore, giacché non saremmo più in grado di descrivere tutti i fenomeni in due modi ugualmente coerenti con e senza campo gravitazionale."

Einstein, però, è convinto della validità del principio da lui proposto, ed è pertanto in grado di prevedere un risultato della teoria che sta cercando di costruire: nella RG, un raggio di luce (o, in generale, un'onda elettromagnetica), dovrà venire deflesso da un campo gravitazionale esattamente come una particella lanciata con velocità uguale a quella della luce stessa.

Se questa previsione è corretta, i due osservatori giungeranno anche in questo caso alle stesse conclusioni, ed il PE vedrà confermata la sua validità.

Naturalmente, la deviazione della luce è assai più piccola di quella di un proiettile, a causa della maggiore velocità, per cui nel campo gravitazionale terrestre non è possibile evidenziare questo effetto.

- *Esempio*. L'ascensore in caduta libera è un RI; perciò, se spariamo un proiettile con velocità iniziale orizzontale, esso si muove in linea retta in tale riferimento.



Se, però, lo guardiamo da terra, vediamo una traiettoria curva (non a causa della forza di gravità, ma perché l'ascensore si muove verso il basso di moto accelerato e percorre spazi verticali proporzionali ai quadrati dei tempi, mentre il proiettile percorre spazi orizzontali direttamente proporzionali ai tempi).

Perciò la traiettoria del proiettile, vista da terra, è una parabola.

Per la luce la situazione è analoga, solo che la deviazione della luce è assai più piccola di quella di un proiettile, a causa della maggiore velocità.

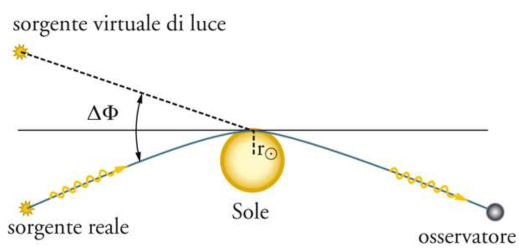
Nel RI dell'ascensore, le leggi orarie del lampo luminoso sono: $\begin{cases} x'=ct \\ y'=0 \end{cases}$.

Le leggi che esprimono il moto dell'ascensore rispetto alla Terra sono: $\begin{cases} x=0 \\ y=1/2\,g\,t^2 \end{cases}$.

Componendo i due moti, otteniamo: $\begin{cases} x=ct \\ y=1/2\,g\,t^2 \end{cases} \Rightarrow y=\dfrac{g}{2c^2}x^2$.

Se poniamo $x=10\,m$, ricaviamo $y\simeq 5\cdot 10^{-5}\,m$ con una deflessione angolare: $\dfrac{dy}{dx}=\dfrac{g}{c^2}x\simeq 10^{-14}\,rad$.

Come previsto, i valori trovati sono troppo piccoli per potere verificare sperimentalmente questo effetto.



Einstein comprese però che, quando la luce si muove vicino al Sole, con una forza di gravità molto più grande e che agisce su un percorso molto più lungo, la deviazione può diventare misurabile.

Egli sostenne quindi che il Sole potesse deflettere in maniera sensibile i raggi di luce che sfiorano la sua superficie, in modo da formare un'immagine della sorgente (ad esempio una stella) in una posizione diversa rispetto a quella reale.

La sua teoria prevedeva una deflessione di 1,75" per luce radente al Sole (angolo $\Delta\Phi$ in figura, in cui l'effetto è notevolmente esagerato).

Per potere osservare questo effetto, bisognava però superare il problema della forte luminosità del

Sole, che rende praticamente invisibili le stelle che gli sono vicine.

La prima verifica sperimentale della previsione di Einstein fu quindi ottenuta durante una eclisse totale di Sole dall'astrofisico inglese Eddington, che nel 1919 aveva organizzato una spedizione sull'isola di Principe, in Africa occidentale.

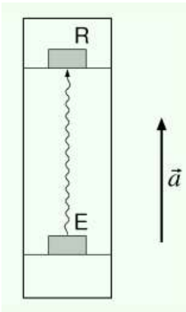
- In realtà, i risultati di Eddington furono contestati per diversi motivi, per cui oggi possiamo dire che la prova del 1919 non fu decisiva per confermare la deflessione gravitazionale della luce, ma fu solo una forte indicazione a favore.

L'esperimento però è stato ripetuto numerose volte, con strumenti sempre più raffinati e precisione sempre maggiore.

In seguito, si è aggiunta la possibilità di utilizzare le quasar, che sono radiosorgenti praticamente puntiformi (in quanto estremamente distanti), con forte emissione a lunghezze d'onda molto più lunghe del visibile.

Questo significa che non occorre più aspettare un'eclisse di Sole, in quanto le misure possono essere eseguite in qualunque momento e in qualunque luogo; inoltre, non è più necessario che il cielo sia sereno, poiché le nuvole non influenzano la propagazione delle onde radio.

Redshift gravitazionale



Supponiamo di trovarci nello spazio, lontano da ogni sorgente gravitazionale, su un'astronave di lunghezza $h=30\,m$, i cui motori sono accesi e producono un'accelerazione $a=g\simeq 10\,m/s^2$.

Un trasmettitore E posto nella coda dell'astronave emette verso prua delle onde elettromagnetiche aventi una certa frequenza f_0 .

Vogliamo dimostrare che, quando le onde raggiungono un ricevitore R posto a prua, hanno una frequenza f_h minore di f_0 , e quindi una lunghezza maggiore di quella all'emissione; in altri termini si è avuto uno *spostamento verso il rosso* dovuto all'accelerazione dell'astronave.

Infatti, nel tempo che la radiazione impiega per andare da E ad R, la velocità dell'astronave è aumentata, quindi è come se R si muovesse rispetto a E, allontanandosi. Ma sappiamo dall'anno scorso che, se un ricevitore si allontana, la frequenza che riceve è minore (*effetto Doppler*).

Osserviamo che, fino a questo punto, la relatività non gioca alcun ruolo. Se questa idea fosse venuta in mente a qualcuno, il risultato sarebbe stato prevedibile anche prima di Einstein, per quanto non particolarmente interessante.

Nello svolgimento, supponiamo per semplicità che, mentre il segnale attraversa l'astronave, lo spostamento del ricevitore sia molto minore della lunghezza dell'astronave (puoi controllare che, con i dati forniti, questa condizione risulta verificata).

In questo caso, il tempo di transito è $t\simeq h/c$ e la velocità del ricevitore quando viene raggiunto dalla radiazione è $v=at\simeq ah/c$, in allontanamento dalla sorgente.

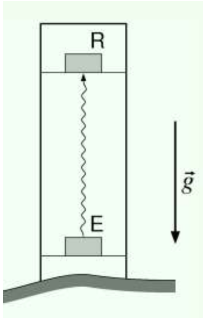
Puoi verificare che $v\ll c$, per cui possiamo applicare le stesse formule dell'effetto Doppler che abbiamo discusso l'anno scorso (in caso contrario, ci sarebbero delle correzioni relativistiche); per ricavare l'ordine di grandezza del risultato, possiamo fermarci ai termini di primo ordine nel rapporto $\beta=v/c$.

Se consideriamo l'osservatore in moto, ricaviamo la variazione relativa della frequenza:

$$f_h=f_0\frac{v-c}{v} \Rightarrow \frac{f_h}{f_0}=1-\beta \Rightarrow \frac{\delta f}{f}\simeq-\beta\simeq-\frac{ah}{c^2}\simeq-3\cdot10^{-15}$$

quindi l'effetto previsto è sulla quindicesima cifra decimale!

Anche considerando la sorgente in moto: $f_h=f_0\frac{v}{v+c} \Rightarrow \frac{f_h}{f_0}=\frac{1}{1+\beta}\simeq1-\beta$.



Chiediamoci ora cosa avviene se svolgiamo lo stesso esperimento in un riferimento in quiete sulla superficie della Terra, inviando un'onda elettromagnetica verso l'alto.

Grazie al PE, possiamo prevedere che, sostituendo ad un riferimento in moto nello spazio vuoto con accelerazione $\vec{a}=-\vec{g}$, un riferimento in quiete in un campo gravitazionale $\vec{g}$, dovremo ottenere lo stesso risultato:

$$\frac{\delta f}{f}\simeq-\frac{gh}{c^2} \quad .$$

Quindi, una radiazione che si propaga verso l'alto in un campo gravitazionale diminuisce di frequenza mentre sale.

Questo effetto viene chiamato *redshift gravitazionale* (da non confondere con lo *spostamento verso il rosso cosmologico*, di cui sentiamo parlare più spesso, che è dovuto all'espansione dell'universo), ed è stato prima osservato nel 1925 da Adams, con misure astronomiche su una classe di stelle nota come nane bianche, e quindi definitivamente verificato nel 1959, con l'*esperimento di Pound e Rebka*, (poi ripetuto, con una maggiore precisione, da Rebka e Snider nel 1964) che, con misure estremamente accurate, riuscirono a rilevare lo spostamento relativo verso il rosso di due sorgenti identiche, situate in cima e alla base di una torre di altezza $h\simeq22{,}5\,m$ situata ad Harvard.

Nel 1911 Einstein fornì una seconda dimostrazione dell'esistenza del redshift gravitazionale, applicando l'inerzia dell'energia al seguente esperimento ideale:

- prendiamo un corpo di massa m e solleviamolo di un'altezza h, compiendo così un lavoro $L_1=mgh$;
- facciamo assorbire al corpo un impulso di radiazione elettromagnetica di energia E, che fa quindi aumentare la sua massa di una quantità $\Delta m=E/c^2$;
- riportiamo il corpo in basso, ricavandone un lavoro $L_2=(m+\Delta m)gh$, maggiore del lavoro L_1 che abbiamo compiuto su di esso;

- facciamo emettere al corpo un impulso di radiazione di energia E identico a quello assorbito inizialmente.

In apparenza, abbiamo riportato il sistema nella situazione di partenza, ricavando complessivamente un lavoro $L_2 - L_1 = \Delta m\, gh$. Sembrerebbe quindi che, se ripetessimo indefinitamente questo ciclo, potremmo creare una quantità arbitraria di energia dal nulla, in modo da avere un moto perpetuo di prima specie.

Ci stiamo però dimenticando che la radiazione elettromagnetica è stata assorbita ad altezza h, ma è stata riemessa ad altezza nulla. Per ritornare alla situazione di partenza, dobbiamo quindi riportare tale impulso ad altezza h, e imporre la conservazione dell'energia del sistema:

$$E_0 - E_h = \Delta m\, gh = \frac{E_h}{c^2} gh \ \Rightarrow \ \frac{E_h}{E_0} = \frac{1}{1 + gh/c^2} \simeq 1 - \frac{gh}{c^2} \ \Rightarrow \ \frac{\delta f}{f} \simeq -\frac{gh}{c^2} \quad .$$

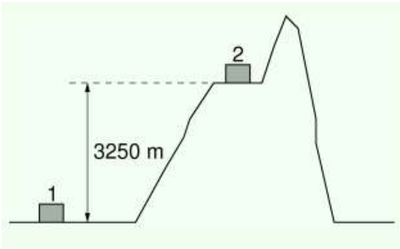
Nell'ultimo passaggio, abbiamo applicato la nota proprietà per cui l'energia della radiazione elettromagnetica è direttamente proporzionale alla sua frequenza.

11. Gravità e geometria dello spazio-tempo

Dal momento che la gravità agisce sui diversi corpi in maniera indipendente dalla loro massa e dalla loro natura, secondo Einstein era ragionevole vederla non come una proprietà dei corpi stessi, né come una forza che agisce a distanza tra due corpi separati, ma come una proprietà dello spazio-tempo in cui essi si muovono.
Cerchiamo di giustificare, in maniera non rigorosa, l'intuizione di Einstein.

Esperimento di Briatore e Leschiutta

Esiste una categoria di esperimenti legata a quelli sul redshift gravitazionale, ma in cui, invece di misurare la differenza tra la frequenza della radiazione emessa e quella della radiazione ricevuta, si misura direttamente il tempo. Questi esperimenti sono molto semplici dal punto di vista concettuale, ma richiedono un'estrema precisione, e sono stati ripetuti più volte, con leggere varianti.



Quello che discutiamo in particolare è stato realizzato da Briatore e Leschiutta nel 1975, fra Torino ed un laboratorio in montagna, sul gruppo del Cervino.
Due orologi atomici identici sono stati posti uno a Torino, nel laboratorio dell'Istituto "Galileo Ferraris", ed uno sul Plateau Rosà, a quota 3250 *m* rispetto a Torino.
Ad un certo momento, l'orologio di Torino emetteva un segnale di sincronismo iniziale, che veniva ricevuto dall'orologio posto in montagna; dopo 68 giorni (la durata scelta per l'esperimento), il primo orologio emetteva un segnale di sincronismo finale, che veniva ugualmente ricevuto dal secondo orologio.
Il risultato ottenuto è che l'orologio di Torino era rimasto indietro di 2.4 μs rispetto all'altro, con una variazione relativa $\Delta t/t \simeq 3\cdot 10^{-13}$.

Utilizzando il PE, possiamo quindi prevedere che, su una grande astronave che sta accelerando in assenza di campo gravitazionale, un orologio posto a poppa resterebbe indietro rispetto ad uno posto a prua.

Come abbiamo fatto per la "dilatazione dei tempi" o la "contrazione delle lunghezze", raccomandiamo di prendere con le molle le spiegazioni semplicistiche, ma frequenti nella divulgazione, del tipo "gli orologi rallentano in un campo gravitazionale più intenso", o addirittura "il tempo scorre più lentamente in un campo gravitazionale".

In realtà, non possiamo parlare di un "effetto del campo gravitazionale sugli orologi" in quanto:

- le nostre conoscenze sul funzionamento degli orologi non ci permettono di spiegare un tale effetto;
- i due orologi si trovano in un campo gravitazionale che ha praticamente la stessa intensità;

- come abbiamo visto a proposito del redshift gravitazionale, la variazione relativa della marcia dei due orologi è gh/c^2, che dipende dal campo gravitazionale, e non dalla sua variazione.

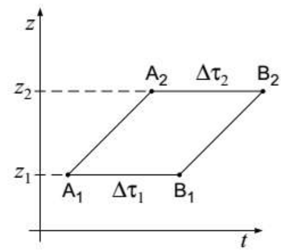
Nelle prossime pagine cercheremo quindi di giungere ad una spiegazione differente.

Il risultato ottenuto da Briatore e Leschiutta è in accordo con quello ottenuto per il redshift gravitazionale, e poteva essere previsto da quest'ultimo.

Infatti, se $\Delta\tau_1$ è il periodo della radiazione emessa nell'esperimento di Pound e Rebka, e $\Delta\tau_2$ quello della radiazione ricevuta, dato che la frequenza diminuisce, il periodo dovrà aumentare.

In formula, se $f_2=\frac{f_1}{1+gh/c^2}$, allora: $\Delta\tau_2=\Delta\tau_1(1+\frac{gh}{c^2})$.

Vogliamo però discutere un altro aspetto della questione e, per fare questo, tracciamo un diagramma spazio-tempo dell'esperimento. Osserviamo che ciascun orologio rimane fermo ad una certa quota, per cui le loro linee orarie sono rette orizzontali.



Quando inizia l'esperimento, il primo orologio emette il segnale di partenza (evento A_1) che viaggia alla velocità della luce, e quando giunge alla quota z_2 fa partire il secondo orologio (evento A_2).

Dopo un certo tempo $\Delta\tau_1$ (di circa 68 giorni; non in scala nel grafico), il primo orologio manda il segnale di fine esperimento (evento B_1); questo giunge all'altro orologio (evento B_2), che termina la misura segnando il tempo $\Delta\tau_2$.

Poiché i segnali di inizio e fine esperimento hanno viaggiato a velocità uguali (non ha neanche importanza che tale velocità sia proprio quella della luce; è sufficiente che sia la stessa), possiamo affermare che le linee orarie dei segnali A_1A_2 e B_1B_2 sono rette parallele.

Quindi la figura ottenuta è un parallelogramma per definizione, in quanto ha i lati opposti paralleli, e sappiamo dal primo anno che i lati opposti di un parallelogramma sono uguali.

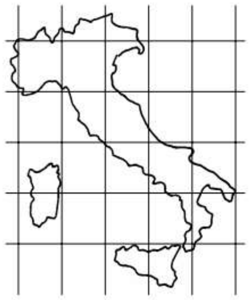
Queste considerazioni geometriche ci porterebbero a dire che $\Delta\tau_1=\Delta\tau_2$, mentre l'esperimento ci informa che $\Delta\tau_1<\Delta\tau_2$. Quale conclusione possiamo trarre da questo risultato?

Osserviamo che un diagramma spazio-tempo non coincide con lo spazio-tempo stesso, ma ne rappresenta semplicemente una rappresentazione, o mappa.

Dovremmo quindi chiederci se la nostra mappa è *fedele*, nel senso che *il rapporto tra una distanza misurata sulla mappa ed una misurata nella realtà è costante* (tale costante viene chiamata la *scala* della carta).

Ricordiamo ad esempio che le carte geografiche che rappresentano la Terra non sono mai fedeli, perché la Terra è approssimativamente sferica e *non esiste alcun modo di rappresentare in maniera* *fedele una superficie sferica su un piano.*

Le carte geografiche che utilizziamo sono sempre approssimate, in maniera migliore quanto più ci limitiamo ad una piccola porzione della sfera, ma non sono mai rigorosamente fedeli.



Ad esempio, se utilizziamo una mappa in cui l'Italia è rappresentata con paralleli e meridiani equidistanti ed ortogonali tra loro, vediamo che la distanza tra due meridiani sulla mappa appare sempre la stessa, mentre nella realtà i meridiani si avvicinano se ci spostiamo verso il polo.

In maniera analoga, il fatto che l'esperimento di Briatore e Leschiutta abbia fornito $\Delta\tau_1 < \Delta\tau_2$ ci informa che il diagramma che abbiamo tracciato non è una mappa fedele dello spazio-tempo.

Riassumendo:

- l'esperimento di Briatore e Leschiutta ci porta a dire che la nostra mappa dello spazio-tempo non è fedele, ed il motivo è la presenza della gravità;
- anche le carte geografiche della Terra non possono mai essere fedeli, ed il motivo è la curvatura della superficie della Terra.

Senza alcuna pretesa di rigore, possiamo quindi per analogia concludere che:

la presenza del campo gravitazionale modifica la geometria dello spazio-tempo; in particolare la gravità provoca una curvatura dello spazio-tempo.

Validità locale del PE

La conclusione a cui siamo giunti potrebbe ammettere una obiezione.

Infatti, l'esperimento ci insegna che in presenza della gravità si ottiene una mappa non fedele; perciò, se non ci fosse la gravità, si potrebbe creare una mappa fedele.

Allora la soluzione sembra semplice: basta che ci poniamo in un RI, in caduta libera, e quindi, mancando la gravità, avremo una mappa fedele dello spazio-tempo.

Ricordiamo però che, quando con il PE abbiamo affermato l'equivalenza tra un riferimento in un campo gravitazionale ed uno uniformemente accelerato nello spazio vuoto, abbiamo precisato che tale equivalenza ammette un'importante limitazione.

Sappiamo che, per risolvere un problema di dinamica in un riferimento accelerato, dobbiamo introdurre una forza apparente "di inerzia" $\vec{F}_I = -m\vec{a}$, che può essere considerata equivalente ad una forza gravitazionale $\vec{F}_G = m\vec{g}$ con $\vec{a} = -\vec{g}$.

Questa *equivalenza*, però, *è esatta solo se il campo gravitazionale* $\vec{g}$ *può essere considerato costante in tutto il nostro riferimento*.

In caso contrario, la forza gravitazionale e la forza "di inerzia" non si compensano esattamente in tutto il riferimento, ma lasciano dei “residui”, che sono detti *forze di marea*.

Ad esempio, abbiamo detto che in un ascensore in caduta libera la forza di gravità si cancella.

In realtà, sul pavimento dell’ascensore, che si trova più vicino alla Terra, la forza di gravità è un po' più grande di quella al centro, mentre sul soffitto è un po’ più piccola, ma, dato che l’ascensore è piccolo, questa variazione è di solito trascurabile.

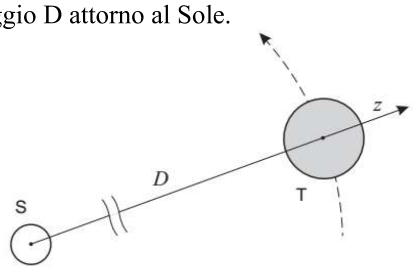
In generale, a seconda della precisione richiesta per il nostro esperimento, dobbiamo prendere in considerazione una regione spazio-temporale abbastanza piccola perché la forza di gravità si cancelli entro i limiti sperimentali.

Questo fatto si esprime dicendo che il *PE è valido **localmente**, ovvero se ci limitiamo ad una regione di spazio e ad un intervallo di tempo abbastanza piccoli perché al loro interno il campo gravitazionale non cambi in maniera apprezzabile.*

Forze di marea

Forniamo un accenno molto semplificato della maniera in cui agiscono le forze di marea e del modo in cui esse causano le maree.

La figura seguente (non in scala) rappresenta la Terra in orbita circolare di raggio D attorno al Sole.



Poiché la Terra è in caduta libera nel campo gravitazionale del Sole, ci poniamo in questo riferimento in caduta libera (che consideriamo solo in moto traslatorio, e non rotatorio).

Rispetto al Sole, tale riferimento possiede una accelerazione:

$$a=G\frac{M_S}{D^2}$$

che è uguale al campo gravitazionale del Sole nel centro della Terra.

Il campo gravitazionale del Sole negli altri punti della Terra sarà però diverso, e dipenderà dalla distanza del punto considerato dal Sole.

Se indichiamo tale campo gravitazionale con il simbolo g e scegliamo, come in figura, un asse z orientato dal Sole verso la Terra, con l’origine nel centro della Terra, vediamo che il campo gravitazionale in un punto dell’asse z è:

$$g(z)=-G\frac{M_S}{(D+z)^2} \quad .$$

Poiché nei punti della Terra abbiamo $z \ll D$, possiamo sviluppare in serie di Taylor:

$$g(z)=-G\frac{M_S}{D^2(1+z/D)^2}\simeq -G\frac{M_S}{D^2}(1-2\frac{z}{D})\simeq -\frac{GM_S}{D^2}+\frac{2GM_S z}{D^3} \quad .$$

Il termine di ordine zero è il campo gravitazionale nel centro della Terra, che nel riferimento in caduta libera viene cancellato dalla forza apparente $F_I=-ma$.

Questa cancellazione non ha però luogo per il termine di primo ordine. A rigore, quindi, non possiamo dire che nel riferimento in caduta libera la gravità sia stata completamente cancellata, in quanto rimane un campo gravitazionale “di marea” che, sull'asse z, vale:

$$g_{marea}(z) \simeq \frac{2GM_S}{D^3} z \quad .$$

Osserviamo che tale campo:

- è direttamente proporzionale a z, per cui è nullo al centro della Terra ed aumenta se ci allontaniamo da tale centro;
- ha lo stesso segno di z; quindi, se $z>0$ è diretto in direzione opposta al Sole, se $z<0$ è diretto verso il Sole; in entrambi i casi è però diretto verso l'esterno della Terra;
- è inversamente proporzionale al cubo della distanza della Terra dal Sole, e non al quadrato, come farebbe il campo gravitazionale di una massa sferica; quindi, esso decresce più rapidamente quando ci allontaniamo dal Sole.

Se ci poniamo sulla superficie della Terra, abbiamo $z=\pm R_T$, per cui (in valore assoluto):

$$g_{marea\,Sole}(R) \simeq \frac{2GM_S R_T}{D^3} \quad .$$

In questi punti agisce quindi una forza addizionale che è sempre diretta verso l'esterno della superficie terrestre, e ha l'effetto di ridurre il peso di un corpo che vi si trova.

Di conseguenza, l'acqua degli oceani tende a sollevarsi nei punti della Terra più vicini e più lontani dal Sole, e ad abbassarsi nella fascia intermedia.

A questo punto, potresti essere perplesso per il fatto che finora abbiamo parlato dell'azione del Sole sulla Terra, mentre è noto che le maree sono dovute principalmente all'azione della Luna sulla Terra.

In realtà, per la Luna il procedimento è analogo, anche se forse meno intuitivo da comprendere.

Infatti, *la Terra è in caduta libera anche nel campo gravitazionale della Luna*, o meglio, *sia la Terra che la Luna sono in caduta libera nel loro moto di rotazione attorno al centro di massa comune*.

Anche nel caso della Luna potremmo quindi ripetere i calcoli precedenti e determinare un campo gravitazionale residuo:

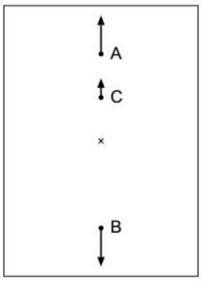
$$g_{marea\,Luna}(z) \simeq \frac{2Gm_L z}{d_L^3} \quad .$$

Ora, la massa del Sole è molto più grande di quella della Luna, ma anche la distanza della Terra dal Sole è molto maggiore di quella dalla Luna. Svolgendo i calcoli, ricaviamo che, per puro caso, l'ordine di grandezza delle due forze di marea risulta lo stesso e, più precisamente, la forza di marea dovuta alla Luna è poco più del doppio di quella dovuta al Sole.

Ripetiamo che questo risultato è dovuto al fatto che la forza di marea è un effetto differenziale, ed è inversamente proporzionale al cubo della distanza.

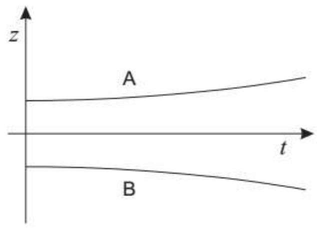
Se invece consideriamo l'attrazione gravitazionale espressa dalla legge di Newton, che è inversamente proporzionale al quadrato della distanza, allora, ovviamente, l'azione del Sole sulla Terra risulta molto più importante di quella della Luna.

Maree e curvatura dello spazio-tempo



Da quanto abbiamo detto, risulta che nell'ascensore di Einstein in caduta libera la forza gravitazionale non si cancella completamente, ma rimangono le forze di marea.

Quindi, se lasciamo dei corpi (inizialmente fermi) liberi di muoversi nell'ascensore, quelli che si trovano sopra il centro di massa (come A e C) si muovono verso l'alto, mentre quelli che si trovano sotto il centro di massa (come B) si muovono verso il basso. Inoltre, la loro accelerazione è direttamente proporzionale alla loro distanza dal centro di massa dell'ascensore, perciò $a_A > a_C$.



Se rappresentiamo il moto dei corpi A e B in un diagramma spazio-tempo, vediamo che i due grafici partono con tangente orizzontale, ma poi divergono, per cui il moto relativo, in prima approssimazione, è uniformemente accelerato, e la distanza tra A e B cresce come il quadrato del tempo.

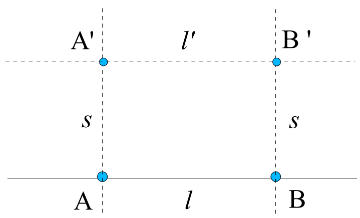
La nostra analisi dell'ascensore di Einstein mostra ancora una volta che la presenza di forze gravitazionali provoca una curvatura dello spazio-tempo.

Per comprendere questa affermazione, però, dobbiamo prima definire la curvatura dello spazio-tempo, che risulta certamente più difficile da visualizzare rispetto alla curvatura della superficie terrestre.

Infatti, la superficie della Terra ha due dimensioni, ma è immersa in uno spazio in tre dimensioni, per cui possiamo pensare di uscire dalla Terra, o di guardare al di fuori di essa, mentre non possiamo fare la stessa cosa per lo spazio-tempo.

D'altra parte, anche se fossimo degli esseri bidimensionali, vincolati a muoverci esclusivamente sulla superficie terrestre, potremmo ugualmente (e in vari modi) determinare la curvatura di tale superficie.

Tra i diversi metodi a nostra disposizione, esponiamo quello che può forse essere più facilmente generalizzato al caso dello spazio-tempo.



Prendiamo due punti A e B posti su un piano, ad una distanza l.

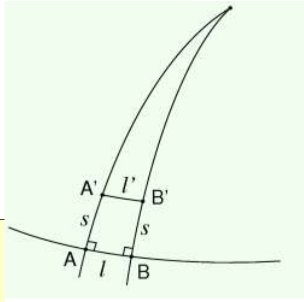
Partendo da tali punti, possiamo spostarci nella stessa direzione lungo due rette perpendicolari alla retta AB e passanti rispettivamente per A e per B. Percorrendo lungo le due rette una stessa distanza s, arriveremo in due punti A' e B'.

Misurando la distanza l' tra questi due punti, troveremo che $l'=l$.

Diremo allora che il *piano è una superficie con curvatura nulla*.

Spostiamoci ora sulla sfera e, per semplicità, prendiamo due punti A e B posti sull'equatore, sempre ad una distanza *l*.

Nel ripetere la costruzione precedente incontriamo una difficoltà, in quanto sulla superficie sferica non esistono rette su cui spostarsi.



Osserviamo però che la *proprietà fondamentale che caratterizza le rette è quella di essere le curve più brevi che congiungono due punti dati.*

Nel nostro esempio, potremo quindi sostituire le rette con i meridiani che hanno origine da A e da B e sono diretti verso uno dei poli (ad esempio il Polo Nord).

Percorrendo lungo i due meridiani uno stesso tratto *s*, arriveremo in due punti A' e B'.

Se misuriamo la distanza l' tra questi due punti, troveremo che $l'<l$.

Diremo allora che la *superficie sferica possiede una curvatura, che definiamo positiva.*

In maniera analoga, se al posto della sfera abbiamo una superficie generica, dovremo spostarci sulle *geodetiche* di quella superficie, ovvero le *curve che giacciono sulla superficie e rappresentano il percorso più breve tra due punti dati*.

Il procedimento sarà quindi il seguente:

- scegliamo un punto A sulla superficie;
- tracciamo una geodetica passante per A;
- ci spostiamo di un piccolo tratto *l* in direzione perpendicolare alla geodetica tracciata fino a raggiungere un punto B;
- dal punto B così ottenuto facciamo partire una seconda geodetica.

- *Se le due geodetiche si avvicinano*, come nel caso della sfera, *diciamo che nel punto A la superficie ha curvatura positiva*;
- *se, invece, le due geodetiche si allontanano, allora diciamo che nel punto A la superficie ha curvatura negativa.*

Proviamo a tradurre in un linguaggio fisico il precedente ragionamento geometrico.

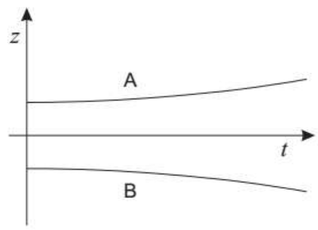
Nella meccanica newtoniana, il PI affermava che “Un corpo non soggetto a forze in un RI si muove di moto rettilineo uniforme”.

Avendo stabilito che in presenza di un campo gravitazionale non uniforme lo spazio-tempo è curvo, non potremo parlare di rette, ma solo di geodetiche.

In RG il PI andrà perciò generalizzato nella maniera seguente:

"Un corpo non soggetto ad altre forze in un campo gravitazionale si muove seguendo una geodetica dello spazio-tempo" (*Principio della geodetica*).

Ritorniamo quindi all'ascensore di Einstein ed al grafico che descrive come la distanza tra i corpi di prova A e B varia nel tempo.



In un RI, in assenza di gravità il moto naturale (in assenza di forze) dovrebbe essere rettilineo uniforme, ed il grafico della curva oraria nello spazio-tempo sarebbe rettilineo.

In particolare, se le palline sono inizialmente ferme, restano ferme, le loro posizioni restano costanti e i grafici sono due rette parallele.

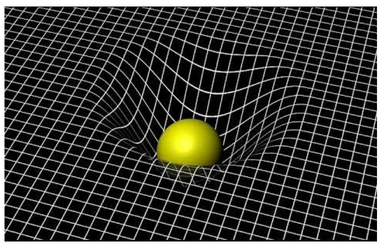
La presenza della forza di marea, invece, fa in modo che nello spazio-tempo non sia possibile avere moti naturali a distanza costante; nell'ascensore in caduta libera, le particelle lasciate libere non restano ferme ed i loro diagrammi orari non sono rette parallele.

Questo significa che lo spazio-tempo nell'ascensore è curvo, e precisamente ha curvatura negativa, perché le geodetiche si stanno allontanando.

Quindi, se parliamo di *forza di marea* o di *curvatura dello spazio-tempo*, stiamo utilizzando due linguaggi diversi, uno dinamico ed uno geometrico, per indicare lo stesso concetto.

- Dal punto di vista newtoniano, diciamo che le particelle cominciano a muoversi, e quindi che le loro curve orarie divergono, perché su di esse agisce la forza di marea.
- Dal punto di vista di Einstein, invece, diciamo che non è possibile tracciare due grafici di moti naturali che siano due rette parallele, perché in uno spazio-tempo curvo non esistono rette parallele.

Attenzione! Ripetiamo ancora che *un campo gravitazionale uniforme (in modulo e direzione)* *non* *comporta una curvatura dello spazio-tempo.* Infatti, è sufficiente porsi in un riferimento in caduta libera, nel quale il campo gravitazionale "sparisce", per renderlo equivalente ad un RI in assenza di gravità.



- Nella maggior parte dei testi divulgativi o didattici sulla relatività, per comprendere intuitivamente il concetto di spazio-tempo curvo, si inserisce una figura simile a quella a fianco, in cui lo spazio è rappresentato come una specie di "lenzuolo" o di superficie elastica con un avvallamento al centro; spesso poi nell'avvallamento viene inserita una sfera, che dovrebbe rappresentare un corpo dotato di massa (ad esempio il Sole) che incurva lo spazio ad esso circostante.

Per quanto si tratti di un tentativo apprezzabile per affrontare un argomento sicuramente non semplice, segnaliamo però le osservazioni del prof. Fabri su tale genere di immagini.

- Intanto, il "lenzuolo" può al massimo rappresentare lo spazio, e inoltre in due sole dimensioni, mentre il tempo resta del tutto al di fuori del discorso; sappiamo, invece, che la curvatura riguarda l'intero spazio-tempo, e non la sua sola componente spaziale.

- Inoltre, se rappresentiamo lo spazio come un “lenzuolo” bidimensionale infossato, significa che lo stiamo pensando immerso nell'ordinario spazio tridimensionale. La curvatura dello spazio-tempo, però, è “intrinseca”, per cui non è necessario immaginare lo spazio tridimensionale immerso in un ipotetico spazio a quattro dimensioni (da non confondere con lo spazio-tempo, le cui 4 dimensioni sono 3 di tipo spaziale e 1 di tipo temporale).
- La “sfera” (Sole o Terra che sia) che deforma lo spazio-tempo viene rappresentata al di fuori del “lenzuolo”, mentre essa deve appartenere allo stesso spazio-tempo che viene incurvato.
- Per qualche osservatore particolarmente ingenuo, l'immagine potrebbe suggerire che la “sfera” incurva lo spazio-tempo perché è pesante, e quindi perché viene attratta da un altro corpo.

  In realtà, l'intento della figura è quello di rappresentare l'effetto di deformazione dello spazio-tempo prodotto dalla “sfera” stessa, senza alcun intervento esterno.

12. Verifiche sperimentali della RG

Riepilogo

Seguendo le indicazioni del prof. Fabri, proviamo a riassumere in poche righe i concetti fondamentali che abbiamo cercato di affrontare.

- Lo spazio assoluto non esiste.
- Tutti i riferimenti inerziali sono equivalenti (PR).
- Il tempo assoluto non esiste; il tempo proprio è la lunghezza delle curve nello spazio-tempo.
- L'energia si conserva.
- L'energia di un oggetto in quiete è $E_0 = mc^2$; quella di un oggetto in moto è $E = \gamma mc^2$.
- La gravità non esiste come forza reale; è un effetto apparente per un corpo che venga forzato a deviare dal suo moto "naturale" (caduta libera).
- I veri RI sono quelli in caduta libera nel campo gravitazionale.
- Gli effetti della gravità sono uguali a quelli dell'accelerazione (PE).
- ➢ Lo spazio-tempo è curvo.
- ➢ La curvatura dello spazio-tempo è determinata dalla materia.
- ➢ La "distanza" nello spazio-tempo non è quella di Minkowski, ma deve tenere conto del campo gravitazionale.
- ➢ I corpi non soggetti a forze (in moto naturale o caduta libera) descrivono delle geodetiche dello spazio-tempo.
- ➢ Lungo tali geodetiche il tempo proprio è massimo.

Il fisico americano Wheeler sintetizza gli ultimi concetti con l'affermazione: "Lo spazio-tempo dice alla materia come muoversi, la materia dice allo spazio-tempo come incurvarsi."

A questo punto, in teoria, dovremmo affrontare lo studio delle *equazioni di Einstein*, che descrivono il modo in cui lo spazio-tempo viene curvato dalla presenza della materia.
Si tratta, però, di un argomento assolutamente improponibile per il nostro livello, in quanto richiederebbe delle conoscenze matematiche molto più avanzate rispetto a quelle in nostro possesso; infatti, questo problema ha tenuto impegnato Einstein in tutto il periodo compreso tra il 1907 ed il 1915. Pertanto, ci fermiamo a questo punto, senza entrare nel merito della vera e propria teoria della Relatività Generale.

■ Limitiamoci ad elencare alcuni eventi che descrivono la tumultuosa nascita della teoria di Einstein tra la fine del 1915 e l'inizio del 1916.

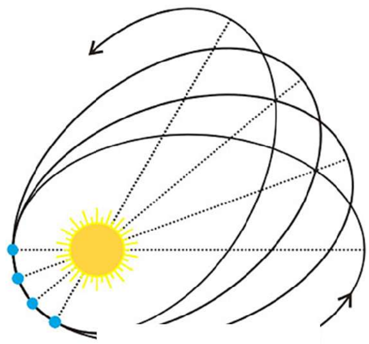
- Il 18 novembre del 1915, Einstein presenta una versione non ancora corretta delle sue equazioni (valida solo nel vuoto), che lo porta però a calcolare il valore corretto della deflessione gravitazionale della luce e della precessione del perielio di Mercurio (di cui parliamo subito dopo).

- Il 25 novembre, Einstein ha finalmente trovato la forma finale delle equazioni, valida in generale, che nel vuoto coincide con la versione precedente. Negli stessi giorni anche Hilbert lavora allo stesso problema (dal punto di vista matematico), ed arriva alle stesse equazioni, senza però comprenderne completamente il significato fisico e senza preoccuparsi di cercare possibili verifiche sperimentali.
- Il 16 gennaio del 1916, Einstein riceve una prima comunicazione del giovane fisico tedesco Schwarzschild, che fornisce la soluzione esatta delle sue equazioni per il caso di una massa con simmetria sferica. Questo fatto suscita la meraviglia di Einstein, che non pensava potesse esistere una soluzione così semplice.
- Il 24 febbraio, arriva una seconda comunicazione di Schwarzschild, che risolve le equazioni in un caso più ampio.
- Il 19 giugno del 1916, Einstein commemora Schwarzschild, morto di malattia sul fronte russo.
  (Ricordiamo che dal luglio 1914 è in corso la prima guerra mondiale).

Terminiamo quindi con qualche informazione sulle verifiche sperimentali della RG, non perché possiamo realmente comprenderle, ma per valutare le conferme che la teoria ha fatto registrare. Ricordiamo intanto quelle che abbiamo già discusso:

- *deflessione gravitazionale della luce*;
- *redshift gravitazionale*;
- *esperimento di Briatore e Leschiutta*.

Precessione del perielio di Mercurio



Secondo la meccanica newtoniana, in un sistema formato da un unico pianeta in orbita attorno ad una stella, il pianeta descrive come orbita un'ellisse di cui la stella occupa uno dei due fuochi.
In particolare, il punto di massimo avvicinamento del pianeta alla stella, che per il nostro sistema viene chiamato *perielio*, dovrebbe rimanere fisso.
In realtà, nel nostro sistema solare vi sono diversi fattori, soprattutto l'attrazione gravitazionale degli altri pianeti e lo schiacciamento polare del Sole, che provocano una rotazione dell'asse maggiore dell'ellisse descritta dai vari pianeti, detta *precessione del perielio*.
Mentre le precessioni del perielio degli altri pianeti erano spiegate correttamente dalla teoria newtoniana, nel 1859 il fisico francese Le Verrier (che con i suoi calcoli aveva già portato a scoprire il pianeta Nettuno) si era accorto che, per quanto riguardava Mercurio, i fattori noti fino a quel momento non spiegavano completamente la precessione del suo perielio, ma lasciavano una discrepanza con i dati sperimentali di circa 43 secondi per secolo.
Ci furono diversi tentativi di spiegare questo risultato, quali la presenza di un altro pianeta più

vicino al Sole o delle modifiche alla legge di gravitazione, ma senza risultato.

Mentre preparava il suo articolo del 1915, Einstein comprese che tale comportamento anomalo di Mercurio poteva essere legato al fatto che era il pianeta più vicino al Sole, e quindi quello che risentiva maggiormente della curvatura dello spazio-tempo dovuta al campo gravitazionale della nostra stella. Svolgendo i calcoli, egli verificò che la RG spiegava esattamente il risultato della precessione di Mercurio.

Anche in questo caso, le idee di Einstein erano state anticipate da Poincaré, ne "*La mécanique nouvelle*" del 1909: "Ritornando ora alla legge di attrazione (del Sole sui pianeti), vediamo facilmente che la differenza fra le due meccaniche (Newtoniana e relativistica) sarà tanto più grande quanto più sarà grande la velocità dei pianeti. Se vi fosse una differenza apprezzabile, la maggiore varrebbe per Mercurio, dato che questo pianeta è il più veloce. È infatti vero che Mercurio presenta un'anomalia non ancora chiarita; il movimento del suo perielio è più rapido di quanto dovrebbe essere. La sua velocità angolare è 38 gradi più grande di quanto dovrebbe essere. Le Verrier attribuì questa anomalia a un pianeta non ancora scoperto e un astronomo credette di osservarne il passaggio sul Sole, ma da allora nessuna persona lo ha più visto".

Onde gravitazionali

Nel 1916 Einstein predisse l'esistenza delle onde gravitazionali, ovvero di oscillazioni della curvatura dello spazio-tempo che si propagano alla velocità della luce, provocate dal movimento violento o periodico di grandi masse e, per alcuni aspetti, analoghe alle onde elettromagnetiche.

Infatti, Einstein previde che, come una carica elettrica in moto accelerato emette un'onda elettromagnetica che si propaga trasportando energia, lo stesso dovesse accadere nel caso gravitazionale, e calcolò inoltre quale sarebbe stata l'energia emessa.

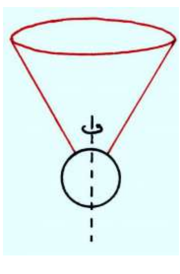
In condizioni ordinarie, tale energia emessa è assolutamente trascurabile; per esempio, l'emissione di onde gravitazionali provoca una "caduta" a spirale della Terra verso il Sole, ma solo al ritmo di 2 *mm* in un miliardo di anni.

L'esistenza delle onde gravitazionali è stata rilevata in maniera indiretta nel 1974 da Hulse e Taylor.

Nel 1974 essi scoprirono un sistema formato da due stelle di neutroni, una delle quali è una pulsar, con un periodo orbitale di circa 8 ore.

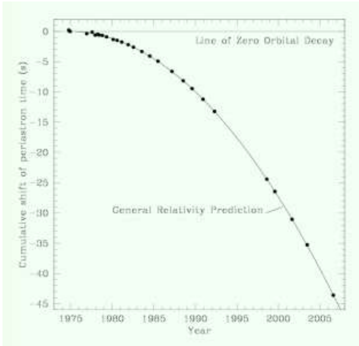
Una *stella di neutroni* è uno dei possibili stadi finali dell'evoluzione stellare.

Si tratta di stelle di massa non molto maggiore del Sole, formate quasi esclusivamente di neutroni (a parte uno strato superficiale) e con dimensioni ridottissime (tipicamente $10 \div 20\,km$ di raggio). Le stelle di neutroni in genere ruotano su se stesse molto rapidamente, con periodi anche dell'ordine del centesimo di secondo.



Una *pulsar* ("*pulsating radio star*") è una stella di neutroni da cui riceviamo lampi periodici di radiazione. Le stelle di neutroni possiedono infatti un intenso campo magnetico, e come per la Terra, i poli magnetici generalmente non si trovano sull'asse di rotazione. La rapida rotazione causa l'emissione di radiazione lungo l'asse magnetico, e la radiazione spazza quindi lo spazio in un cono, come un faro. Se la Terra si trova su tale cono, ad ogni giro riceve un impulso di radiazione, e noi vediamo una pulsar.

Nel caso del sistema scoperto da Hulse e Taylor, una sola delle due stelle è una pulsar, e la frequenza dei suoi lampi varia periodicamente, il che ci permette di capire che si tratta di una sorgente in moto orbitale.



I due astrofisici misurarono il periodo orbitale con altissima precisione, e si accorsero che esso decresceva di circa $76{,}5\,\mu s$ per anno. Se il periodo decresce, significa che le due stelle si avvicinano, e quindi che l'energia del sistema diminuisce. Hulse e Taylor non trovarono altra spiegazione per la perdita di energia che l'emissione di onde gravitazionali. Di conseguenza, essi seguirono l'evoluzione della binaria per circa dieci anni, confrontando la variazione di periodo osservata con quella prevista dalla formula di Einstein. Il risultato, in netto accordo con l'ipotesi di Einstein, è mostrato nel grafico.

Nel 1993 a Hulse e Taylor fu assegnato il Nobel per la fisica per tale scoperta.

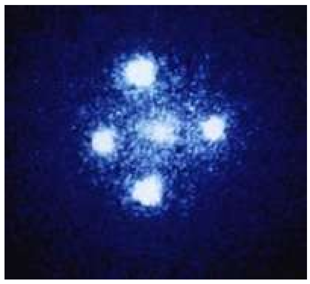
Nel 2016 si è avuto infine l'annuncio della prima osservazione diretta di onde gravitazionali, probabilmente emesse nel corso della “fusione” di due buchi neri, da parte della collaborazione LIGO (*Laser Interferometer Gravitational-wave Observatory*).

Anche per tale scoperta è stato assegnato nel 2017 un Nobel per la fisica agli astrofisici statunitensi Weiss, Barish e Thorne (forse quest'ultimo è più conosciuto dal grande pubblico per essere stato il consulente scientifico del film “*Interstellar*”, oltre che per alcune apparizioni nella serie televisiva “*The Big Bang Theory*”).

Alla prima osservazione diretta di onde gravitazionali ha poi fornito il proprio contributo la collaborazione VIRGO, che gestisce un grande interferometro situato a Cascina, in provincia di Pisa.

Altre verifiche

- *Lenti gravitazionali.* Si tratta di una conseguenza del fenomeno di deflessione gravitazionale della luce. Quando un oggetto di massa considerevole è situato tra l'osservatore e l'oggetto celeste che viene osservato, l'astronomo può osservare una serie di immagini multiple dell'oggetto.

  A seconda della configurazione geometrica e della distribuzione delle masse, possono esserci due o più immagini (come in figura), un arco o un intero anello. Il primo esempio è stato scoperto nel 1979 e, da allora, ne sono stati osservati più di cento.
- *Funzionamento del GPS.* Abbiamo già accennato al fatto che il Global Positioning System si basa sull’invarianza della velocità delle onde elettromagnetiche, e quindi sul PR.

  Oltre a questo fatto, dobbiamo tenere conto del fatto che i satelliti si muovono con una certa velocità rispetto ai ricevitori (effetto di “dilatazione del tempo”), e che si trovano ad una certa altezza, per cui il segnale da essi inviato verso la Terra subisce un “blueshift gravitazionale”.

  Per il corretto funzionamento del sistema, è necessario prendere in considerazione questi fattori, per cui l'esattezza dei risultati forniti dal GPS costituisce indirettamente una verifica della RS e della RG.
- *Ritardo di Shapiro o ritardo temporale gravitazionale.* E' il fenomeno per cui, a causa della curvatura dello spazio-

tempo, i segnali luminosi impiegano più tempo a propagarsi all'interno di un campo gravitazionale rispetto a quello impiegato in assenza di tale campo.

Fu previsto nel 1964 da Shapiro, che propose di misurare il ritardo nel tempo di viaggio di andata e ritorno per i segnali radar riflessi da altri pianeti, quando essi passavano radenti al Sole. Oggi si utilizzano a questo scopo delle sonde spaziali che passano "vicino" al Sole.

- *Precessione geodetica*. Il giroscopio è uno strumento che viene comunemente utilizzato per mantenere inalterata una determinata direzione anche in caso di moto dell'osservatore.

  In uno spazio-tempo curvo, tuttavia, la RG prevede un cambiamento nella direzione degli assi di un giroscopio in caduta libera analogo alla precessione del perielio di Mercurio.

  Questo effetto è stato misurato prima per il sistema Terra-Luna, con l'aiuto di alcuni riflettori per raggi laser che sono stati posti sulla superficie lunare nel corso delle missioni spaziali, e, nel 2007, dal satellite Gravity Probe B.
- *Effetto di trascinamento* (o *gravitomagnetico*, o *di Lense-Thirring,* o di "*frame-dragging"*).

  I fisici austriaci Thirring e Lense nel 1918 scoprirono che un corpo in rotazione dotato di una notevole massa avrebbe provocato un effetto di "trascinamento" su un riferimento inerziale posto nelle sue vicinanze.

  Come conseguenza di questo fatto, un oggetto vicino al corpo si sarebbe dovuto mettere in rotazione.

  Delle verifiche parziali eseguite sui satelliti LAGEOS e Gravity Probe B a partire dal 2004 hanno confermato le predizioni relativistiche.
- *Verifiche cosmologiche*. Pur non trattandosi di evidenze sperimentali dirette, la RG ha permesso di affrontare ed ha fornito un inquadramento per tutte le scoperte nel campo dell'astrofisica e della cosmologia effettuate nel corso dell'ultimo secolo, quali, ad esempio, l'espansione dell'universo, i buchi neri, la nucleosintesi primordiale, la radiazione cosmica di fondo.