Insiemi numerici

5^C PNI

2013-2014

Liceo Scientifico "G. Marconi"

Indice

Gli appunti che seguono hanno un carattere piuttosto eterogeneo. A parte il legame, piuttosto esile, di essere riferiti agli insiemi numerici di maggiore interesse per i matematici (in particolare quelli dei numeri naturali, razionali e reali), il motivo principale per cui li ho raccolti è che si tratta di argomenti che, specialmente negli ultimi anni, sono stati argomento di quesiti dell'esame di stato, ma che è difficile ritrovare nel libro di testo, in quanto alcuni di essi non vi compaiono, altri sono solo accennati o dispersi nei diversi volumi, altri ancora vengono trattati al biennio, e quindi con un linguaggio e degli strumenti matematici non adeguati al livello richiesto all'esame.

1. Gli insiemi $\mathbb{N}$, $\mathbb{Z}$, $\mathbb{Q}$

Il primo insieme numerico che abbiamo introdotto è stato quello dei *numeri naturali*, indicato con $\mathbb{N}$. In termini intuitivi, si tratta dei numeri interi assoluti (ovvero, considerati senza segno), compreso lo zero: $\{0, 1, 2, 3, ...\}$.

Precisiamo che, per quanto si tratti dell'insieme numerico più "elementare", non è assolutamente semplice definirlo in maniera rigorosa. Per farlo, potremmo introdurre una relazione *R* tra insiemi definita nel modo seguente: due insiemi A e B sono in relazione, ovvero $A R B$, se e solo se gli elementi di A si possono porre in corrispondenza biunivoca con gli elementi di B (ci verrebbe spontaneo dire "se gli insiemi A e B hanno lo stesso numero di elementi", ma il problema è che stiamo proprio cercando di definire il concetto di "numero di elementi").

La relazione *R* gode delle proprietà riflessiva, simmetrica e transitiva, ed è quindi una *relazione di equivalenza*. Potremmo pertanto considerare una sua classe di equivalenza (ovvero l'insieme di tutti gli insiemi in corrispondenza biunivoca tra loro) ed associare a questa classe un numero naturale, che esprime ciò che è comune a tutti gli insiemi in corrispondenza biunivoca tra loro. In questa ottica, l'insieme dei numeri naturali risulta essere l'*insieme quoziente*, ovvero l'insieme delle classi di equivalenza generate dalla relazione *R*.

Le operazioni di addizione, moltiplicazione ed elevamento a potenza tra numeri naturali ammettono sempre un risultato, che è ancora un numero naturale. Questo fatto viene espresso dicendo che l'insieme $\mathbb{N}$ è *chiuso* rispetto a tali operazioni, ovvero che addizione, moltiplicazione ed elevamento a potenza sono *leggi di composizione interna* nell'insieme dei numeri naturali.

Tra i motivi per cui non ci siamo limitati a operare sull'insieme dei numeri naturali, ricordiamo:

- la necessità di considerare grandezze che variano in due versi opposti (un bilancio in attivo o in passivo, temperature superiori o inferiori allo zero, altezze sopra o sotto il livello del mare);
- il fatto che l'insieme $\mathbb{N}$ non è chiuso rispetto alla sottrazione, ovvero che la sottrazione non è una legge di composizione interna nell'insieme dei numeri naturali.

  Ad esempio, l'operazione $3-5$ non ammette un risultato nell'insieme $\mathbb{N}$, in quanto non esiste alcun numero naturale che sommato a 5 dia per risultato 3.

Abbiamo quindi introdotto l'insieme dei *numeri interi relativi*, ovvero dotati di segno, indicato con

$\mathbb{Z}\ :\ \{\ldots,-3,-2,-1,0,+1,+2,+3\ldots\}$.

Questo insieme permette di rappresentare grandezze che variano in versi opposti, ed è chiuso rispetto all'operazione di sottrazione. Ad esempio: $3-5=-2\in\mathbb{Z}$, in quanto: $-2+5=3$.

Anche in questo caso, non ci occupiamo della definizione rigorosa dei numeri interi relativi, che richiederebbe di introdurre una opportuna relazione di equivalenza sull'insieme delle coppie ordinate di numeri naturali.

Di solito diremo che l'insieme $\mathbb{Z}$ costituisce un ampliamento o una estensione di $\mathbb{N}$, ovvero che $\mathbb{N}$ è un sottoinsieme di $\mathbb{Z}$.

In realtà, sarebbe più corretto affermare che l'insieme $\mathbb{Z}$ contiene un sottoinsieme, quello dei numeri interi positivi o nulli, i cui elementi possono essere posti in corrispondenza biunivoca con i numeri naturali, e quindi, in un certo senso, possono essere "identificati" con essi.

Digressione (non del tutto banale). Ogni volta che allarghiamo l'insieme numerico a cui facciamo riferimento, dobbiamo assicurarci che i nuovi numeri che introduciamo si comportino come i vecchi, e in particolare che, operando su di essi, continuino a valere le proprietà formali delle operazioni (commutativa, associativa, distributiva, eccetera).
E' proprio per questo motivo che abbiamo definito la moltiplicazione tra due numeri relativi in modo che il prodotto tra due numeri negativi fosse positivo, e non negativo.

La scelta di porre $'meno'\times'meno'='più'$ è necessaria perché sia valida la proprietà distributiva del prodotto rispetto alla somma.

Cerchiamo di chiarirci con un esempio: $-1\cdot(-1+1)=-1\cdot 0=0$.

Se, invece, applichiamo la proprietà distributiva: $-1\cdot(-1+1)=(-1)\cdot(-1)+(-1)\cdot(+1)=(-1)\cdot(-1)-1$.

Per ottenere come risultato zero, cioè il risultato del metodo precedente, dobbiamo imporre: $(-1)\cdot(-1)=+1$.

Anche lavorando sull'insieme dei numeri interi relativi, restano però dei problemi aperti:

- l'insieme $\mathbb{Z}$ non è *chiuso* rispetto alla divisione, ovvero la divisione non è una *legge di composizione interna* nell'insieme dei numeri interi relativi.

  Ad esempio, l'operazione $3:5$ non ammette un risultato nell'insieme $\mathbb{Z}$, in quanto non esiste nessun numero intero che moltiplicato per 5 dia per risultato 3.
- l'insieme $\mathbb{Z}$ non ci permette in generale di esprimere la *misura* di una grandezza, ovvero il rapporto tra due grandezze omogenee, una delle quali sia stata scelta come unità di misura.

Per questi motivi, dobbiamo introdurre l'insieme $\mathbb{Q}$ dei *numeri razionali*, ovvero, per esprimerci in maniera intuitiva, dei numeri che possono essere espressi sotto forma di frazione, o di rapporto tra numeri interi.

Anche in questo caso, non cerchiamo di fornire una definizione rigorosa dei numeri interi relativi, che, come in precedenza, richiederebbe di introdurre una relazione di equivalenza sull'insieme delle coppie ordinate di numeri interi.

L'insieme dei numeri relativi risulta chiuso rispetto all'operazione di divisione.

Ad esempio: $3:5=\frac{3}{5}$, in quanto $\frac{3}{5}\cdot 5=3$.

Ripetiamo che non sarebbe corretto dire che l'insieme $\mathbb{Q}$ costituisce un'estensione di $\mathbb{Z}$, oppure che $\mathbb{Z}$ è un sottoinsieme di $\mathbb{Q}$. Per essere rigorosi, dovremmo affermare che l'insieme $\mathbb{Q}$ contiene un sottoinsieme, ovvero quello delle frazioni con denominatore uguale ad uno, i cui elementi possono essere posti in corrispondenza biunivoca con i numeri interi, e quindi, in un certo senso, possono essere "identificati" con essi.

2. Frazioni e numeri decimali

Sappiamo che uno stesso numero razionale può essere rappresentato sia sotto forma di frazione (in infiniti modi tra loro equivalenti) che sotto forma di numero decimale. Precisiamo meglio il tipo di corrispondenza che esiste tra frazioni e numeri decimali.

Sappiamo che, per trasformare una frazione in un numero decimale dobbiamo dividerne il numeratore per il denominatore.

- Se il numeratore è multiplo del denominatore, la frazione è equivalente ad un numero intero.

Esempio: $\frac{42}{6}=7$. Alle scuole medie, frazioni del genere sono chiamate *apparenti*.

Osserviamo che un numero intero può essere visto come un numero decimale la cui parte decimale è uguale a zero: $7=7{,}0=7{,}00=7{,}000...$

Una frazione viene detta *frazione decimale* se ha per denominatore una potenza di 10.

Ad esempio, sono frazioni decimali: $\frac{3}{10},\ \frac{62}{100},\ \frac{36}{1000},\ \frac{54}{10}$.

- Ogni frazione decimale genera un *numero decimale limitato*, ovvero con un numero finito di cifre decimali (dopo la virgola).

Per ottenerlo, basta scrivere il numeratore come numero intero e, se il numeratore è uguale a 10^n , spostare la virgola verso sinistra di *n* posti (in altri termini, di tanti posti quanti sono gli zeri a denominatore).

Esempi: $\frac{3}{10}=0{,}3\,;\ \frac{62}{100}=0{,}62\,;\ \frac{36}{1000}=0{,}036\,;\ \frac{54}{10}=5{,}4\,;\ \frac{3382}{100}=33{,}82\,;\ \frac{49}{1000}=0{,}049$.

Anche una frazione che non è decimale, ma che sia equivalente ad una frazione decimale, può essere trasformata in un numero decimale limitato.

Esempi: $\frac{7}{5}=\frac{14}{10}=1{,}4\,;\ \frac{3}{4}=\frac{74}{100}=0{,}74\,;\ \frac{113}{50}=\frac{226}{100}=2{,}26\,;\ \frac{7}{200}=\frac{35}{1000}=0{,}035$.

- Una frazione è equivalente ad una frazione decimale se e soltanto se, ridotta ai minimi termini, il suo denominatore contiene come fattori primi soltanto il 2 o il 5, o entrambi.

Infatti, il denominatore di una frazione decimale è una potenza di 10, e $10=2\cdot 5$.

Esempio: $\frac{3}{2^2\cdot 5^5}=\frac{3\cdot 2^3}{2^5\cdot 5^5}=\frac{24}{10^5}=0{,}00024$.

Viceversa, ogni numero decimale limitato si può trasformare in una frazione decimale che ha:

- a numeratore, il numero dato scritto senza la virgola
- a denominatore, la cifra "uno" seguita da tanti zeri quante sono le cifre decimali (cioè dopo la virgola) del numero dato.

Esempi: $15{,}7=\frac{157}{10}\,;\ 2{,}314=\frac{2134}{1000}\,;\ 0{,}157=\frac{157}{1000}\,;\ 21{,}7=\frac{217}{10}\,;\ 0{,}0003=\frac{3}{10000}$.

Naturalmente, tali frazioni vanno poi ridotte ai minimi termini.

Un numero decimale è *illimitato* se ha infinite cifre decimali.
Un numero decimale illimitato si dice *periodico* se possiede una o più cifre decimali che si ripetono indefinitamente. Il gruppo di cifre che si ripetono formano il *periodo*.
Un numero periodico viene detto *semplice* se il periodo comincia subito dopo la virgola.

Esempi: $2,\overline{3}=2{,}33333...$ è un numero periodico semplice in cui il periodo è 3;

$0,\overline{14}=0{,}141414...$ è un numero periodico semplice in cui il periodo è 14.

Un numero periodico viene invece detto *misto* se, tra la virgola e il periodo, vi sono una o più cifre che non si ripetono. Tali cifre che non si ripetono formano l'*antiperiodo*.

Esempio: $2{,}74\overline{3}=2{,}74333...$ è un numero periodico misto con antiperiodo 74 e periodo 3.

- Una frazione che non è decimale, né equivalente ad una frazione decimale, genera sempre un numero decimale periodico.

In tali frazioni, la scomposizione in fattori primi del denominatore contiene anche o esclusivamente dei fattori diversi da 2 e da 5. Più esattamente:

- se la scomposizione in fattori primi del denominatore non contiene né il 2, né il 5, allora la frazione genera un numero decimale periodico semplice;

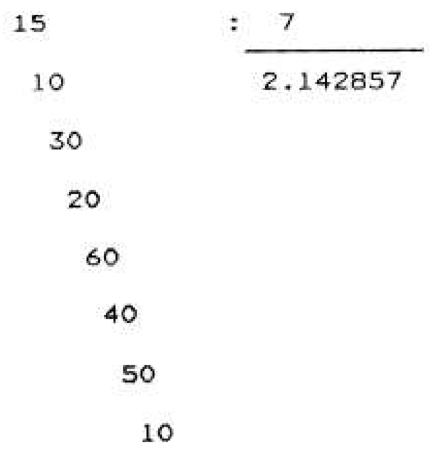
- se la scomposizione in fattori primi del denominatore contiene, oltre ad altri fattori, anche il 2 e/o il 5, allora la frazione genera un numero decimale periodico misto.

  In tale caso, il numero di cifre dell'antiperiodo è uguale al più grande tra gli esponenti del 2 e del 5 nella scomposizione del denominatore.

Esempi: $\frac{3}{11}=3:11=0,\overline{27}$; $\frac{2}{3}=2:3=0,\overline{6}$; $\frac{311}{15}=20,7\overline{3}$; $\frac{15}{7}=2,\overline{142857}$.

Omettiamo la dimostrazione (non banale) di queste ultime proposizioni.

Come possiamo essere sicuri che l'affermazione precedente sia corretta? Chi ci dice che dividendo numeratore e denominatore otterremo un gruppo di cifre che si ripete indefinitamente?
Prendiamo l'ultimo esempio precedente: nello svolgere la divisione $15:7$ otteniamo via via una serie di quozienti, che formano le cifre decimali del risultato, ed una serie di resti (nel nostro caso 1, 3, 2, 6, 4, 5, ...). Quando spunta fuori uno dei resti già ottenuti in precedenza (nel nostro esempio è 1), deduciamo che da quel punto in poi la divisione si ripete all'infinito, e capiamo di avere ottenuto un numero periodico.



E' stato un caso quello di ritrovare uno dei resti che si erano presentati in precedenza?
No, perché nella divisione il resto deve essere sempre minore del divisore; quindi, dividendo un numero per 7, possiamo ottenere come resti solo i numeri da 1 a 6 (non zero, perché in quel caso il numero decimale sarebbe limitato e la frazione sarebbe decimale o equivalente ad essa).
Quindi, eravamo sicuri che, al massimo al settimo passaggio, avremmo riottenuto uno dei resti già incontrati.

Ricordiamo la regola che ci permette di trasformare un numero decimale periodico in una frazione, che viene detta frazione generatrice del numero decimale:

- il numeratore della frazione è la differenza tra il numero dato (scritto senza virgola e senza periodo) e il numero composto da tutte le cifre che precedono il periodo (senza virgola)
- il denominatore della frazione è il numero composto da tanti "nove" quante sono le cifre del periodo e tanti "zeri" quante sono le cifre dell'antiperiodo.

Esempi: $2,\overline{3}=\frac{23-2}{9}=\frac{21}{9}=\frac{7}{3}$; $13,\overline{6}=\frac{136-13}{9}=\frac{123}{9}=\frac{41}{3}$; $0,1\overline{2}=\frac{12-1}{90}=\frac{11}{90}$;

$$15{,}6\overline{21}=\frac{15621-156}{990}=\frac{15465}{990}=\frac{1031}{66} \quad .$$

Forniamo una giustificazione elementare della regola precedente.

Poniamo $x=2{,}\overline{3}$, dove *x* è la frazione generatrice che cerchiamo.

Moltiplichiamo per 10 entrambi i membri della precedente uguaglianza: $10\,x=10\cdot 2{,}\overline{3}=23{,}\overline{3}$.

Sottraiamo membro a membro le uguaglianze precedenti:

$$10\,x-x=23{,}\overline{3}-2{,}\overline{3} \;\Rightarrow\; 9\,x=21 \;\Rightarrow\; x=\frac{21}{9} \quad .$$

La spiegazione è più laboriosa in presenza di un antiperiodo.

Ad esempio, poniamo $x=0{,}1\overline{2}$, dove *x* è la frazione generatrice.

Moltiplichiamo entrambi i membri dell'uguaglianza prima per 10 e poi per 100:

$$10\,x=10\cdot 0{,}1\overline{2}=1{,}\overline{2} \quad \text{e} \quad 100\,x=100\cdot 0{,}1\overline{2}=12{,}\overline{2} \quad .$$

Sottraiamo membro a membro le ultime due uguaglianze:

$$100\,x-10\,x=12{,}\overline{2}-1{,}\overline{2} \;\Rightarrow\; 90\,x=11 \;\Rightarrow\; x=\frac{11}{90} \quad .$$

Ricordiamo che la spiegazione "avanzata" della regola per costruire la frazione generatrice di un numero periodico utilizza il limite della somma dei termini di una progressione geometrica.

Infatti, sappiamo che $\sum_{n=1}^{\infty} a_1 q^n = \lim_{k\to\infty} \sum_{n=1}^{k} a_1 q^n = \frac{a_1}{1-q}$. Quindi:

- $2{,}\overline{3}=2+0{,}3+0{,}03+0{,}003+\ldots=2+\frac{0{,}3}{1-1/10}=2+\frac{3}{9}=\frac{21}{9}$;
- $0{,}1\overline{2}=0{,}1+0{,}02+0{,}002+0.0002+\ldots=0{,}1+\frac{0{,}02}{1-1/10}=\frac{1}{10}+\frac{2}{90}=\frac{11}{90}$.

Attenzione: osserva che, utilizzando la regola precedente, un numero decimale con periodo 9 viene uguagliato all'unità successiva!

Ad esempio: $0{,}\overline{9}=\frac{9}{9}=1$; $2{,}\overline{9}=\frac{29-2}{9}=3$; $0{,}1\overline{9}=\frac{19-1}{90}=\frac{2}{10}=0{,}2$.

Anche come progressione geometrica: $0{,}\overline{9}=0{,}9+0{,}09+0{,}009+\ldots=\frac{0{,}9}{1-1/10}=1$.

Osservazione: il fatto che un numero decimale sia limitato o illimitato periodico non è una proprietà intrinseca del numero stesso, ma dipende dalla base scelta per il sistema di numerazione.

Ricordiamo, infatti, che la scrittura di un numero in forma decimale come 0,275 è solo un'abbreviazione per la forma polinomiale: $2 \cdot 10^{-1} + 7 \cdot 10^{-2} + 5 \cdot 10^{-3}$.

Se, al posto della base dieci, usassimo una generica base *n*, dovremmo scrivere:

$(0, abc)_n = a \cdot n^{-1} + b \cdot n^{-2} + c \cdot n^{-3}$.

Quindi, un numero razionale come $1/3$, che in base dieci equivale al numero periodico $0,\overline{3}$, scritto in base tre assume la forma $(0,1)_3 = 1 \cdot 3^{-1}$, che è limitata.

Pertanto, non esiste una differenza "sostanziale" tra numeri decimali limitati e periodici, ma questa distinzione dipende esclusivamente dalla base scelta per il sistema di numerazione.

Riepilogando, abbiamo ricordato che da una *frazione* possiamo ottenere:

- un *numero intero* (se la frazione è apparente)
- un *numero decimale limitato* (se la frazione è decimale o equivalente ad una frazione decimale)
- un *numero decimale illimitato periodico* (in tutti gli altri casi).

Osserviamo quindi che dalle frazioni non è possibile ottenere dei *numeri decimali illimitati non periodici*, cioè aventi infinite cifre decimali, che però non si ripetono indefinitamente.

Ma, poiché i numeri razionali sono tutti e soli quelli che possono essere scritti sotto forma di frazione, abbiamo scoperto che dovranno esistere dei numeri non razionali, che sono appunto i numeri decimali illimitati non periodici.

3. Numeri irrazionali e numeri reali

Poiché l'insieme dei numeri razionali è chiuso rispetto alle quattro operazioni elementari (addizione, sottrazione, moltiplicazione, divisione), oltre che rispetto all'elevamento a potenza, potremmo chiederci quali sono le operazioni che ci portano al di fuori dell'insieme $\mathbb{Q}$.

L'esempio più semplice, ma assolutamente non l'unico, è dato dall'estrazione di radice. Ripetiamo il ragionamento che conosci dal secondo anno:

L'operazione $\sqrt{2}$ non ammette risultato nell'insieme $\mathbb{Q}$ dei numeri razionali.

Dimostrazione. E' immediato vedere che il risultato non può essere un numero intero, in quanto non esiste alcun numero intero *z* tale che $z^2 = 2$.

Supponiamo per assurdo che il risultato sia una frazione, e che quindi possiamo scrivere $\sqrt{2} = \frac{a}{b}$, dove, per semplicità, la frazione a/b può essere considerata ridotta ai minimi termini.

Elevando al quadrato, avremo allora: $\sqrt{2}=\frac{a}{b}\in\mathbb{Q} \Rightarrow 2=\frac{a^2}{b^2}$.

Siamo arrivati ad un assurdo. Infatti:

- Se la frazione a/b è ridotta ai minimi termini, allora *a* e *b* non hanno nessun fattore primo in comune;
- La scomposizione in fattori primi di a^2 contiene tutti e soli i fattori primi presenti nella scomposizione di *a*, ma con esponente moltiplicato per 2, e lo stesso avviene per b^2 e *b*.
  Infatti, se $a=p_1^{n_1}\cdot p_2^{n_2}\cdot\ldots\cdot p_k^{n_k}$, allora: $a^2=(p_1^{n_1}\cdot p_2^{n_2}\cdot\ldots\cdot p_k^{n_k})^2=p_1^{2n_1}\cdot p_2^{2n_2}\cdot\ldots\cdot p_k^{2n_k}$.
- Quindi, se *a* e *b* non avevano fattori primi in comune, lo stesso avverrà per a^2 e b^2 ; pertanto il loro rapporto non può essere uguale ad un numero intero.

La contraddizione deriva dall'avere ammesso che il risultato dell'operazione $\sqrt{2}$ fosse un numero razionale. Dobbiamo quindi concludere che esso sia un numero irrazionale, ovvero un numero decimale illimitato non periodico.

Riportiamo anche una variante leggermente più elaborata della precedente dimostrazione.

Supponiamo ancora per assurdo che $\sqrt{2}=\frac{a}{b} \Rightarrow 2=\frac{a^2}{b^2} \Rightarrow a^2=2b^2$

con la frazione a/b ridotta ai minimi termini.

Poiché a^2 è un multiplo di 2, allora deve essere un numero pari.

E' immediato dimostrare che il quadrato di un numero pari è pari ed il quadrato di un numero dispari è dispari. Pertanto, se a^2 è pari, anche *a* deve essere un numero pari.

Possiamo quindi porre: $a=2k$ con $k\in\mathbb{N}$. Sostituiamo nell'uguaglianza precedente:

$4k^2=2b^2 \Rightarrow b^2=2k^2$. Quindi b^2 è un multiplo di 2 e, pertanto è un numero pari.

Di conseguenza, anche *b* dovrà essere un numero pari.

A questo punto abbiamo ottenuto una contraddizione, in quanto eravamo partiti dall'ipotesi che *a* e *b* fossero primi tra di loro, mentre siamo giunti alla conclusione che entrambi siano numeri pari.

Potremmo pensare che non sia necessario introdurre un nuovo insieme numerico, e che dovremmo semplicemente accettare il fatto che l'operazione $\sqrt{2}$ non ammette risultato.

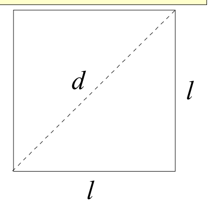
Una posizione del genere, già poco soddisfacente per motivi algebrici, diventa insostenibile se ne esaminiamo il contenuto geometrico, in quanto non ci permetterebbe di risolvere il problema della misura a cui abbiamo accennato in precedenza.

Definizione: due segmenti si dicono *commensurabili* quando il loro rapporto è un numero razionale; in caso contrario, essi si dicono *incommensurabili*.

Proprietà: due segmenti sono commensurabili se e solo se possiedono un sottomultiplo comune.

Proposizione: la diagonale ed il lato di un quadrato sono segmenti incommensurabili.

Dimostrazione. Per il teorema di Pitagora, abbiamo: $d=\sqrt{l^2+l^2}=l\sqrt{2}$.



Quindi: $\dfrac{d}{l}=\sqrt{2}\notin\mathbb{Q}$ per il ragionamento precedente.

Quindi, se sosteniamo che l'operazione $\sqrt{2}$ non ammetta risultato, dobbiamo anche affermare che non esiste un numero che esprima la misura della diagonale del quadrato dato rispetto al segmento scelto come unità di misura, il che è difficile da immaginare.

Nota storica. La scoperta dell'incommensurabilità della diagonale del quadrato con il suo lato provocò una drammatica crisi all'interno della scuola pitagorica. Si trattava di una setta mistico-religiosa che si sviluppò in Grecia ed in Italia (Crotone), tra il 570 ed il 500 a.C., attorno ad un mitico personaggio chiamato Pitagora. Aristotele, nella *Metafisica*, racconta che: “I Pitagorici pensarono che gli elementi dei numeri fossero gli elementi di tutte le cose, e che l'universo intero fosse armonia e numero”, dove per “numero” si intende “numero intero positivo”. Un Pitagorico, Filolao, afferma: “Tutte le cose che si conoscono hanno numero: senza il numero non sarebbe possibile pensare né conoscere alcunché”. Avendo posto il numero naturale alla base dell'universo fisico, i Pitagorici ritenevano che ogni segmento fosse costituito da un numero estremamente grande, ma finito, di punti, che venivano intesi come veri e propri corpi con una determinata grandezza. Di conseguenza, il rapporto tra due segmenti sarebbe sempre espresso da un numero razionale (ovvero, il rapporto tra il numero dei punti che costituiscono i due segmenti). La scoperta che questo fatto non era sempre possibile metteva in discussione la stessa possibilità che l'uomo riuscisse a pervenire alla conoscenza. Possiamo capire come questa scoperta fosse sconvolgente per i Greci da un passo del filosofo Proclo:
“E' fama che colui il quale per primo rese di pubblico dominio la teoria degli irrazionali sia perito in un naufragio, e ciò perché l'inesprimibile e l'inimmaginabile sarebbero dovuti rimanere sempre celati. Perciò il colpevole, che fortuitamente toccò e rivelò questo aspetto delle cose viventi, fu trasportato al suo luogo di origine e là viene in perpetuo flagellato dalle onde”.

E' ovvio che, nelle argomentazioni precedenti, non era essenziale il fatto che il radicando fosse uguale a 2. Potremmo ripetere il ragionamento precedente per mostrare che sono irrazionali i risultati delle operazioni $\sqrt{3}$, $\sqrt{5}$, $\sqrt{6}$, e così via.

In generale, il risultato dell'operazione $\sqrt{a}$ con $a\in\mathbb{N}$ è un numero razionale se e solo se *a* è un quadrato perfetto.

In maniera analoga, non era essenziale il fatto che l'indice del radicale fosse uguale a 2.

Potremmo ripetere il ragionamento precedente per mostrare che sono irrazionali le quantità $\sqrt[3]{2}$, $\sqrt[3]{3}$, $\sqrt[4]{2}$, e così via.

In generale, il risultato dell'operazione $\sqrt[n]{a}$ con $a\in\mathbb{N}$ è un numero razionale se e solo se *a* è una potenza n-sima perfetta.

A questo punto, potremmo pensare di avere caratterizzato l'insieme dei numeri irrazionali come l'insieme delle radici di numeri razionali che non siano potenze perfette. Chiariamo subito che questa idea non è corretta. Infatti, il procedimento che ci permette di giungere ai numeri irrazionali tramite l'estrazione di radice è soltanto il più semplice dal punto di vista didattico, ma non è assolutamente l'unico che si può seguire (anzi, vedremo in seguito che le radici costituiscono "un'eccezione" tra i numeri irrazionali).

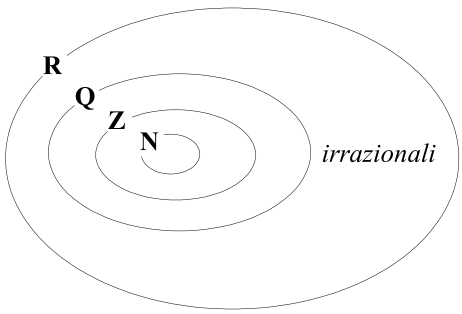
Ad esempio, se $a \in \mathbb{Q}$, sono irrazionali i numeri $sen\, a$, $cos\, a$, $ln\, a$ e, in generale, tutti quelli che possiamo ottenere da a tramite le funzioni trascendenti.
Inoltre, sono irrazionali il numero di Nepero (o Napier) $e \simeq 2{,}718$ e il numero $\pi \simeq 3{,}142$ che esprime il rapporto tra la lunghezza di una circonferenza ed il suo diametro.

L'irrazionalità di π è stata dimostrata dal matematico tedesco Lambert solo nel 1768, mentre quella di e è un sottoprodotto della dimostrazione della sua trascendenza, ottenuta, come vedremo, dal francese Hermite nel 1873. Entrambe le dimostrazioni sono difficilmente proponibili a livello di scuola superiore.

Siamo quindi giunti alla seguente situazione:

- l'insieme $\mathbb{Q}$ dei *numeri razionali* è costituito (in maniera intuitiva) dai numeri che possono essere scritti sotto forma di frazione;
- esistono *numeri irrazionali*, che (sempre in forma estremamente intuitiva) non possono essere scritti sotto forma di frazione;
- definiamo insieme dei *numeri reali*, che indichiamo con $\mathbb{R}$, l'insieme formato dall'unione dei numeri razionali e di quelli irrazionali.

Ripetiamo le solite avvertenze.



- La definizione precedente è puramente intuitiva. Come dovresti ricordare dal secondo anno, una definizione rigorosa di numero reale è quella di elemento separatore di due classi contigue di numeri razionali.
- Non sarebbe corretto dire che l'insieme $\mathbb{R}$ è una estensione di $\mathbb{Q}$ o che $\mathbb{Q} \subset \mathbb{R}$. Bisognerebbe invece dire che, nell'insieme dei numeri reali, esiste un sottoinsieme che può essere posto in corrispondenza biunivoca con quello dei numeri razionali e i cui elementi "si comportano" come gli elementi di $\mathbb{Q}$.
- L'ampliamento da $\mathbb{Q}$ a $\mathbb{R}$ è utile in quanto ci permette di conservare le stesse operazioni definite nell'insieme dei numeri razionali, e tali operazioni mantengono le loro proprietà formali.
- Osserva che l'insieme dei numeri irrazionali non ha un proprio simbolo identificativo, in quanto, a differenza degli altri insiemi numerici, non ha delle leggi di composizione interna. In altri termini, non esistono delle operazioni tra

numeri irrazionali che diano sempre come risultato un numero irrazionale.

A questo punto, potremmo anche chiederci se questo processo di progressiva estensione dell'insieme numerico di riferimento ha un termine, o se prosegue indefinitamente. Come hai visto durante il secondo anno, in un certo senso questo processo termina con l'introduzione dei numeri reali, che pertanto costituiscono l'insieme numerico “standard” sul quale studiare la matematica.

Infatti, esiste una corrispondenza biunivoca tra l'insieme $\mathbb{R}$ dei numeri reali e l'insieme dei punti della retta. In altre parole, fissando sulla retta un sistema di riferimento:

- ogni punto della retta ha come ascissa un numero reale;
- ogni numero reale è l'ascissa di un punto della retta.

In termini intuitivi, questo significa che l'insieme dei numeri reali “riempie” la retta, che, in questo modo, risulta “priva di buchi”, ovvero continua.

Ci sarebbero, invece, dei motivi per il quale questo allargamento deve procedere. Infatti, l'insieme dei numeri reali non è chiuso rispetto all'operazione di estrazione di radice. Ad esempio, l'operazione $\sqrt{-1}$ non ammette risultato nell'insieme $\mathbb{R}$. Per risolvere questo problema, vengono definiti dei *numeri immaginari*, tali che il loro quadrato sia negativo, e dei *numeri complessi*, che sono la somma tra un numero reale ed un numero immaginario. Tale estensione, però, non può avvenire nella retta, che è già “completata” dai numeri reali.
Capisco che questo procedimento possa sembrare una delle solite astrusità tipiche dei matematici, ma i numeri complessi hanno moltissime applicazioni pratiche, e, probabilmente, vengono usati molto di più da ingegneri e fisici che dai matematici “puri”.

4. Insiemi discreti, densi, continui

Intuitivamente, è chiaro che gli insiemi numerici definiti in precedenza hanno tutti un numero infinito di elementi. Potremmo chiederci se ha un senso confrontare questi numeri, e così stabilire che un certo infinito è maggiore o minore di un altro o se, invece, è necessario attribuire a tutti questi insiemi lo stesso “numero” (infinito) di elementi.
Prima di fornire una risposta a queste domande, cominciamo a chiederci come sono “distribuiti” sulla retta gli elementi degli insiemi numerici che abbiamo considerato.

Definizione. Un insieme viene detto *discreto* se, tra due suoi elementi generici, è sempre compreso un numero finito (eventualmente nullo) di elementi appartenenti all'insieme.
Proprietà. Gli insiemi $\mathbb{N}$ e $\mathbb{Z}$ dei numeri naturali e dei numeri interi relativi sono discreti.

Infatti, dati due numeri $a, b \in \mathbb{N}$ con $a < b$, dovrebbe essere ovvio che tra *a* e *b* siano compresi esattamente $b - a - 1$ numeri naturali (sono $b - a + 1$ se consideriamo anche gli estremi).

Se $a, b \in \mathbb{Z}$, il ragionamento è analogo, ma bisogna tenere conto dei segni di a e b.

Definizione. Un insieme viene detto *denso* se, tra due suoi elementi generici, è sempre compreso almeno un altro elemento appartenente all'insieme.

Proprietà. Se un insieme è denso, allora tra due suoi elementi generici sono sempre compresi infiniti elementi appartenenti all'insieme.

Infatti, se a e b sono due elementi generici dell'insieme, allora, per ipotesi, dovrà esistere un elemento x_1 compreso tra a e b. Ma, allora, esisteranno anche un elemento x_2 compreso tra a e x_1, un elemento x_3 compreso tra a e x_2, e così via.

Proprietà. L'insieme $\mathbb{Q}$ dei numeri razionali è denso.

Infatti, tra due numeri razionali a e b, esiste sempre almeno un altro numero razionale, che, per esempio, può essere la loro media aritmetica $m=\frac{a+b}{2}$ (e, quindi, ne esistono infiniti).

Osservazione. In un insieme denso, non esiste un elemento *precedente* o *successivo* ad un elemento dato dell'insieme.

Per capire questo fatto, prova a chiederti qual è il numero razionale che precede o che segue lo zero.

Definizione. Chiamiamo *continuo* un insieme i cui elementi possono essere posti in corrispondenza biunivoca con i punti della retta.

Quindi, per quanto abbiamo detto in precedenza, l'insieme $\mathbb{R}$ dei numeri reali è continuo.

In realtà, questa definizione significa poco o nulla.

Una definizione più corretta potrebbe essere la seguente: "un insieme viene detto continuo se l'elemento separatore di due classi contigue di elementi dell'insieme appartiene all'insieme stesso".

Ad esempio, ricordiamo che una successione di numeri razionali può tendere ad un numero irrazionale, ed è stata proprio questa osservazione che ci ha permesso di passare dall'insieme dei numeri razionali a quello dei numeri reali, quindi l'insieme dei numeri razionali non è continuo.

Se, invece, proviamo a ripetere questo procedimento con delle successioni di numeri reali, ci accorgiamo che esse non ci permettono di scoprire un nuovo genere di numeri, ma tendono in ogni caso ad un numero reale.

Le definizioni e le affermazioni precedenti sembrano fornire una risposta alla nostra domanda iniziale: passando dai numeri interi ai razionali, e da questi ai reali, gli elementi dell'insieme considerato sono distribuiti sulla retta in maniera sempre più "fitta".

Sembra quindi evidente che al numero di elementi di questi insiemi debbano essere fatti corrispondere degli infiniti di ordine sempre più alto (qualunque cosa ciò voglia dire).

In realtà, però, le cose non sono così semplici.

Ricordiamo intanto che una relazione (o corrispondenza) tra gli elementi di due insiemi viene detta *relazione d'ordine* se essa gode delle proprietà *antisimmetrica* e *transitiva*.
Può, inoltre, essere valida la proprietà *riflessiva* o quella *antiriflessiva*.
In questi casi parliamo rispettivamente di relazione d'ordine *largo o stretto*.

Quando, nelle precedenti definizioni di insieme discreto, denso e continuo abbiamo considerato gli elementi dell'insieme come ordinati, abbiamo dato per scontato che si trattasse della relazione d'ordine "naturale", per la quale un numero *a* *precede* un numero *b* se $a<b$. Avremmo, però, potuto considerare degli ordinamenti differenti.

Esempio. Consideriamo l'insieme $\mathbb{N}$ dei numeri naturali sul quale è definita la relazione d'ordine alfabetico.
In pratica, non vogliamo disporre i numeri dal più piccolo al più grande, ma nell'ordine in cui verrebbero elencati sulle pagine di un vocabolario (ad esempio, nella lingua italiana). E' evidente che l'insieme $\mathbb{N}$ così ordinato ammette un primo elemento, che è "cento", ma, al contrario dell'ordinamento "naturale", ammette anche un ultimo elemento, che è "zero". Ora possiamo chiederci: nell'ordinamento alfabetico, quali sono i numeri naturali compresi tra "cinque" e "zero"? Tutti i numeri naturali, che sono infiniti.
Di conseguenza, l'insieme dei numeri naturali, sul quale è definita la relazione d'ordine alfabetico, non è più un insieme discreto. E' evidente, pertanto, che la proprietà di essere discreto non è una proprietà intrinseca dell'insieme, ovvero non dipende soltanto dall'insieme, ma anche dal particolare ordinamento considerato.

Esempio. Consideriamo l'insieme $\mathbb{Q}_a$ dei numeri razionali assoluti, e su di esso definiamo il seguente ordinamento:

- la frazione $\frac{a}{b}$ precede la frazione $\frac{c}{d}$ se $a+b<c+d$, oppure se $a+b=c+d \ \wedge \ a<c$.

In altri termini, stiamo ordinando le frazioni in senso crescente rispetto al valore della somma tra numeratore e denominatore e, a parità di tale somma, secondo il numeratore crescente.

In questo modo, otteniamo il seguente ordinamento: $\frac{1}{1};\ \frac{1}{2};\ \frac{2}{1};\ \frac{1}{3};\ \frac{2}{2};\ \frac{3}{1};\ \frac{1}{4};\ \frac{2}{3};\ldots$ e così via.

(In realtà, dovremmo "saltare" le frazioni equivalenti che sono già comparse nell'elenco).
Osserviamo che l'insieme delle frazioni, con l'ordinamento che gli abbiamo conferito, ha acquisito la proprietà che tra due suoi elementi generici esiste sempre un numero finito di elementi dell'insieme. In altre parole, l'insieme $\mathbb{Q}$, con l'ordinamento definito in precedenza non è più denso, ma è diventato un insieme discreto.
Di conseguenza, anche la proprietà di essere denso non è una proprietà intrinseca dell'insieme, ovvero non dipende soltanto dall'insieme, ma anche dal particolare ordinamento considerato.

Gli esempi precedenti dovrebbero averci messo in testa qualche dubbio sulla domanda da cui siamo partiti, ovvero se l'infinito dei numeri naturali sia in qualche modo "minore" di quello dei numeri razionali. Esaminiamo ora la questione in maniera più sistematica.

5. Potenza del numerabile e potenza del continuo

Praticamente tutti i contenuti di questo paragrafo, e molti altri che non siamo in grado di affrontare, sono dovuti al matematico tedesco Georg Cantor (nato a San Pietroburgo nel 1845, morto ad Halle nel 1918), considerato il fondatore della teoria moderna degli insiemi. I suoi primi articoli su questo argomento cominciarono ad uscire nel 1874; dal 1884 fu soggetto a lunghi periodi di depressione, che si aggravarono progressivamente, fino a costringerlo al ricovero in una clinica psichiatrica, dove incontrò la morte.

Le idee di Cantor furono così sconvolgenti per i suoi contemporanei che il matematico francese Henri Poincaré le condannò come una “malattia” da cui un giorno la matematica sarebbe stata curata. Ma, in particolare, Cantor ebbe una serie di scontri violenti con il matematico tedesco Leopold Kronecker, che lo attaccò sul piano personale, definendolo un “ciarlatano, rinnegato e corruttore della gioventù”, e fece tutto quanto era in suo potere per bloccare la carriera accademica di Cantor.

In pratica, Cantor ammise nel campo della matematica l'idea di *infinito attuale* che, dai Greci fino a Gauss, era sempre stata respinta come nociva o quantomeno inutile.

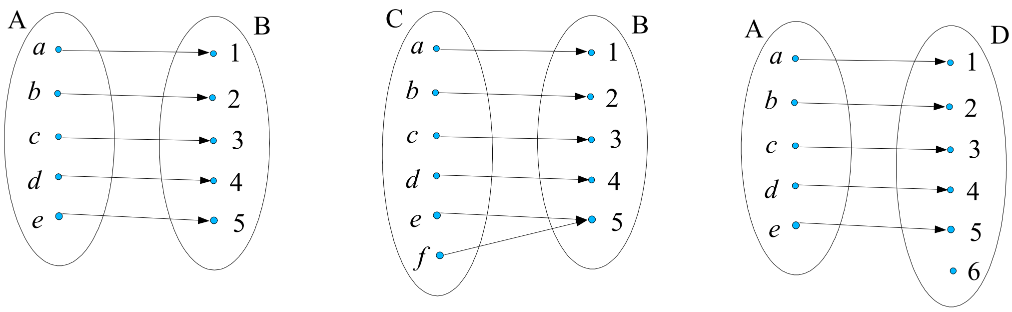
Definizione (provvisoria). Diciamo che un insieme è *infinito* se, comunque scegliamo un determinato numero di elementi dell'insieme, esiste sempre almeno un altro elemento dell'insieme distinto da quelli considerati. In caso contrario, diremo che l'insieme è *finito*.

Osserva che, contrariamente all'intuizione comune, in matematica è preferibile fornire una definizione per gli insiemi infiniti, e quindi chiamare finiti, per esclusione, tutti gli insiemi che non rientrano nella definizione precedente.

Definizione. Chiamiamo *potenza* o *cardinalità* di un insieme finito il numero dei suoi elementi.

Proposizione. Due insiemi finiti hanno la stessa *potenza* se e solo se è possibile stabilire una corrispondenza biunivoca tra i loro elementi.

Esempi.



Potenza A=potenza B; potenza C>potenza B; potenza A<potenza D.

- Gli insiemi $A=\{a,b,c,d,e\}$, $B=\{1,2,3,4,5\}$ hanno la stessa potenza (o numero di elementi), e tra loro è semplice definire una corrispondenza biunivoca.
- L'insieme $C=\{a,b,c,d,e,f\}$ ha potenza maggiore dell'insieme B, e tra essi non è possibile definire una corrispondenza biunivoca, in quanto viene meno il requisito dell'iniettività.
- L'insieme A ha potenza minore dell'insieme $D=\{1,2,3,4,5,6\}$, e tra essi non è possibile definire una corrispondenza biunivoca, in quanto viene meno il requisito della suriettività.

Dagli esempi precedenti concludiamo che, dati due insiemi finiti X e Y:

- se non c'è nessuna funzione iniettiva da X in Y, la potenza di X è maggiore di quella di Y;
- se non c'è nessuna funzione suriettiva da X in Y, la potenza di X è minore di quella di Y;
- se $X \subset Y$, ovvero X è un sottoinsieme proprio di Y, allora la potenza di X è minore di quella di Y. Questo fatto esprime in termini rigorosi l'idea intuitiva che "il tutto è sempre maggiore di una sua parte".

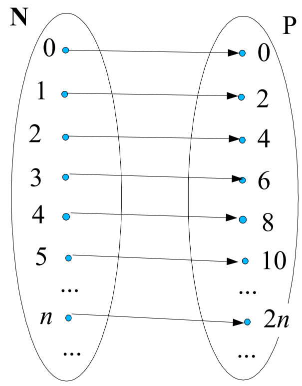
Cantor voleva trovare il modo di confrontare due insiemi infiniti per stabilire quale di loro avesse un "numero maggiore" di elementi rispetto all'altro.
A questo scopo, egli generalizzò il concetto di potenza di un insieme.

Definizione. Diciamo che due insiemi (finiti o infiniti) hanno la stessa *potenza* o *cardinalità* se è possibile stabilire una corrispondenza biunivoca tra i loro elementi.

Questa definizione, in apparenza innocua, conduce subito ad un risultato sorprendente.

Proposizione. Esistono dei sottoinsiemi propri di un insieme infinito che hanno la stessa potenza dell'insieme stesso.

Esempio. Consideriamo l'insieme $\mathbb{N}$ dei numeri naturali e l'insieme $P=\{2n \mid n\in\mathbb{N}\}$ dei numeri pari.



Nonostante P sia un sottoinsieme proprio di $\mathbb{N}$, e quindi, intuitivamente, debba avere un "numero minore" di elementi, la funzione $f(n)=2n$ che fa corrispondere ad ogni numero naturale il suo doppio è invertibile, e quindi biunivoca. Pertanto, gli insiemi dei numeri naturali e dei numeri pari hanno la stessa potenza. In un certo senso, quindi, tra insiemi infiniti non risulta più vero che "il tutto è maggiore di una sua parte".

Per scrupolo, dimostriamo che la precedente corrispondenza è biunivoca:

- se $f(n_1)=f(n_2) \Rightarrow 2n_1=2n_2 \Rightarrow n_1=n_2$, quindi *f* è iniettiva;
- se *p* è un numero pari, allora $\exists n\in\mathbb{N} \mid p=2n$, quindi *f* è suriettiva.

Decidiamo di adottare la precedente proprietà come definizione degli insiemi infiniti.

Definizione (definitiva). Un insieme viene detto *infinito* se può essere posto in corrispondenza biunivoca con un suo sottoinsieme proprio. In caso contrario, diremo che l'insieme è *finito*.

Avendo scelto il concetto di "potenza" di un insieme infinito per generalizzare quello di "numero di elementi" di un insieme finito, dobbiamo cominciare a stabilire quale sia il "valore" della potenza, detto *numero transfinito*, di alcuni insiemi.

Definizione. Diciamo che un insieme ha la *potenza del numerabile* se può essere posto in corrispondenza biunivoca con l'insieme $\mathbb{N}$ dei numeri naturali.

Indichiamo con $\aleph_0$ (leggi "alef con zero") la potenza del numerabile.

Il termine "alef" indica la prima lettera dell'alfabeto ebraico, che corrisponde alla "alfa" dell'alfabeto greco.

L'aggettivo "numerabile" deriva dal fatto che costruire una corrispondenza biunivoca tra un insieme A e $\mathbb{N}$, equivale a "enumerare", ovvero contare gli elementi dell'insieme A, associandoli uno ad uno ai naturali.

Oltre a $\mathbb{N}$ stesso, è evidente che hanno la potenza del numerabile:

- l'insieme dei numeri pari (per l'esempio precedente)
- l'insieme dei numeri dispari (considera la corrispondenza $f(n)=2n+1$);
- l'insieme dei multipli di 3 $\{3n \mid n \in \mathbb{N}\}$ (o di qualunque altro numero naturale);
- l'insieme delle potenze di 2 $\{2^n \mid n \in \mathbb{N}\}$ (o di qualunque altro numero naturale);
- l'insieme dei valori assunti da una progressione aritmetica o geometrica;
- l'insieme dei valori assunti da una qualunque successione (che non è altro che una funzione avente come dominio l'insieme $\mathbb{N}$ dei numeri naturali).

Proposizione. Qualunque sottoinsieme infinito di $\mathbb{N}$ ha la potenza del numerabile $\aleph_0$, che è la più piccola tra le potenze degli insiemi infiniti.

Esempio. In una delle sue opere G. Galilei fa porre da Salviati, uno dei personaggi, la seguente questione riguardante l'insieme $\mathbb{N}$ dei numeri naturali ("i numeri tutti"). Dice Salviati: «Se io dirò, i numeri tutti, comprendendo i quadrati e i non quadrati, esser più che i quadrati soli, dirò proposizione verissima: non è così?». Come si può rispondere all'interrogativo posto e con quali argomentazioni? (*quesito n° 5 esame PNI 2011*)

Il brano citato dal quesito d'esame è del 1638 e si trova in "*Discorsi e dimostrazioni matematiche intorno a due nuove scienze*". Esso prosegue nel modo seguente (non riportato dal quesito):

Salviati - Se io dirò, i numeri tutti, comprendendo i quadrati e i non quadrati, esser più che i quadrati soli, dirò proposizione verissima: non è così?

Simplicio - Non si può dir altrimenti.

Salviati - Interrogando io di poi, quanti siano i numeri quadrati, si può con verità rispondere, loro esser tanti quante sono le proprie radici, avvenga che ogni quadrato ha la sua radice, ogni radice il suo quadrato, né quadrato alcuno ha più d'una sola radice, né radice alcuna più d'un quadrato solo.

Simplicio - Così sta.

Salviati - Ma se io domanderò, quante siano le radici, non si può negare che elle non siano quante tutti i numeri.

Con linguaggio moderno, Galileo osserva che:

- L'insieme Q_p dei quadrati perfetti è un sottoinsieme proprio dell'insieme $\mathbb{N}$ dei numeri naturali, per cui, intuitivamente, i numeri naturali devono essere in numero maggiore rispetto ai quadrati perfetti;
- Gli insiemi Q_p ed $\mathbb{N}$ possono essere posti in corrispondenza biunivoca attraverso la relazione invertibile $q=n^2$ che associa ad ogni numero naturale il suo quadrato, per cui, da un altro punto di vista, i numeri naturali sono tanti quanti i quadrati perfetti.

La scelta di Galileo per sfuggire al paradosso è quella di evitare il problema, sostenendo che non ha senso confrontare il numero degli elementi di due insiemi infiniti, e che la comprensione dell'infinito è al di fuori delle capacità umane.

Egli, infatti, afferma: "non vedo che ad altra decisione si possa venire che a dire infiniti essere tutti i numeri, infiniti i quadrati, infinite le loro radici, ne' la moltitudine dei quadrati essere minore di quella di tutti i numeri, ne' questa maggiore di quella, ed in ultima conclusione, che gli attributi di eguale, maggiore e minore non aver luogo negli infiniti, ma solo nelle quantità terminate. E però quando il Sig. Simplicio mi propone più linee diseguali, e mi domanda come possa essere che nelle maggiori non siano più punti che nelle minori, io gli rispondo che non ve ne sono né più né manco né altrettanti, ma in ciascheduna infiniti". E ancora: "gli infiniti e gli indivisibili sono incomprensibili dal nostro intelletto finito, quelli per la loro grandezza, e questi per la loro piccolezza".

Oggi, invece, affermiamo che gli insiemi dei numeri naturali e dei quadrati perfetti hanno entrambi la potenza del numerabile $\aleph_0$.

Proposizione. L'insieme $\mathbb{Z}$ dei numeri interi relativi ha la potenza del numerabile.

Per dimostrare che l'insieme $\mathbb{Z}$ può essere posto in corrispondenza biunivoca con l'insieme dei numeri naturali, è sufficiente trovare un criterio per disporne gli elementi in successione, che può essere il seguente:

- dati due numeri interi relativi distinti *a* e *b*, diremo che *a* precede *b* se $|a|<|b|$ oppure $|a|=|b| \wedge a>0$.

In pratica, ordiniamo i numeri interi relativi secondo il valore assoluto crescente e, a parità di valore assoluto, stabiliamo che il numero positivo preceda quello negativo.

Otteniamo in tal modo la successione $\{0,+1,-1,+2,-2,+3,-3...\}$, nella quale l'insieme $\mathbb{Z}$ possiede un elemento iniziale (lo zero), che non avrebbe nel suo ordinamento naturale.

E' quindi immediato considerare la corrispondenza biunivoca che associa all'*n*-simo numero naturale l'*n*-simo elemento della successione.

Puoi verificare che l'espressione analitica di tale corrispondenza è: $f(n)=\begin{cases}(n+1)/2 & se\, n\, è\, dispari \\ -n/2 & se\, n\, è\, pari\end{cases}$.

La dimostrazione che la corrispondenza sia biunivoca è un po' laboriosa

Proposizione. Qualunque sottoinsieme infinito di $\mathbb{Z}$ ha la potenza del numerabile $\aleph_0$.

Se il risultato precedente poteva essere in qualche modo prevedibile, in quanto gli insiemi $\mathbb{N}$ e $\mathbb{Z}$ sono entrambi discreti, il successivo, sempre dovuto a Cantor, è decisamente più sorprendente.

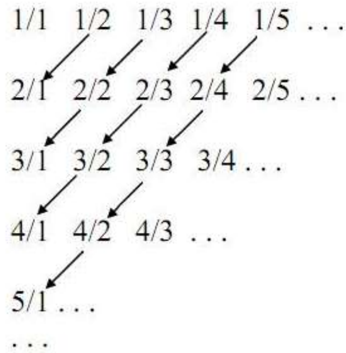
Proposizione. L'insieme $\mathbb{Q}$ dei numeri razionali ha la potenza del numerabile.

Dimostrazione. Per semplicità, limitiamoci all'insieme dei numeri razionali positivi.
Per disporne gli elementi in successione, riprendiamo l'ordinamento che avevamo introdotto nel paragrafo precedente:

- la frazione $\frac{a}{b}$ precede la frazione $\frac{c}{d}$ se $a+b<c+d$, oppure se $a+b=c+d \land a<c$.

Ordiniamo pertanto le frazioni in maniera crescente rispetto alla somma tra numeratore e denominatore e, a parità di tale somma, secondo il numeratore crescente:

$\frac{1}{1};\ \frac{1}{2};\ \frac{2}{1};\ \frac{1}{3};\ \frac{2}{2};\ \frac{3}{1};\ \frac{1}{4};\ \frac{2}{3};\ldots$ e così via.



Il criterio precedente può essere visualizzato disponendo le frazioni in una tabella, in modo che numeratore e denominatore della frazione forniscano il numero della riga e della colonna del posto occupato. Per ottenere una corrispondenza biunivoca, leggiamo gli elementi della matrice secondo le diagonali e "saltiamo" le frazioni equivalenti a quelle già incontrate.

In questo modo, non solo abbiamo dotato $\mathbb{Q}$ di un elemento iniziale, ma anche della proprietà che ogni elemento ammetta un successivo. E' evidente che la corrispondenza che associa all'*n*-simo numero naturale l'*n*-simo elemento della precedente successione è biunivoca, c.v.d.
Per considerare l'intero insieme dei numeri razionali, possiamo prendere come primo elemento lo zero e alternare, come per $\mathbb{Z}$, numeri positivi e negativi aventi lo stesso valore assoluto.
Spero che sia evidente il motivo per cui Cantor ha proceduto "per diagonali" (o, come nel racconto del paragrafo successivo, per quadrati), e non per linee orizzontali o verticali.

A questo punto, avendo dimostrato che anche l'insieme dei numeri razionali ha la potenza del numerabile, siamo portati a pensare che ogni insieme infinito abbia la potenza del numerabile.
Come in ogni thriller che si rispetti, abbiamo invece un ulteriore colpo di scena.

Proposizione. L'insieme $\mathbb{R}$ dei numeri reali non ha la potenza del numerabile.

Dimostrazione. Per semplicità, limitiamoci all'insieme dei numeri reali compresi tra zero ed uno:

$I=\{x | x\in\mathbb{R},\ 0\le x\le 1\}$.

Supponiamo, per assurdo, che l'insieme I abbia la potenza del numerabile.
In questo caso sarebbe possibile disporre, secondo una qualche regola misteriosa, tutti gli elementi

dell'insieme I in una successione di lunghezza infinita.

Immaginiamo che la parte iniziale di tale successione sia la seguente:

1. 0,4682038013...
2. 0,1963528264...
3. 0,1373927722...
4. 0,3754193098...
5. 0,0972536489...
6. 0,7203561136...
7. 0,1395083729...
8. 0,0264048109...
9. 0,4601328592...

e così via.

A questo punto è semplicissimo (soprattutto dopo che uno l'ha già visto una volta) costruire un numero x che appartiene all'insieme I ma non è contenuto nella successione precedente.

Il nostro numero avrà:

- la cifra delle unità uguale a zero: $x=0,...$;
- la prima cifra decimale diversa (ad esempio, aumentata di 1) dalla prima cifra decimale del primo numero della successione: $x=0,5...$;
- la seconda cifra decimale diversa (ad esempio, aumentata di 1) dalla seconda cifra decimale del secondo numero della successione: $x=0,50...$;
- la terza cifra decimale diversa (ad esempio, aumentata di 1) dalla terza cifra decimale del terzo numero della successione: $x=0,508...$;

e così via. Otteniamo quindi: $x=0,508567420...$.

Ora affermiamo che il nostro numero x non può far parte del precedente elenco. Infatti:

- non è il primo numero, perché differisce da esso almeno per la prima cifra;
- non è il secondo numero, perché differisce da esso almeno per la seconda cifra;
- non è il terzo numero, perché differisce da esso almeno per la terza cifra;
- non è l'n-simo numero, perché differisce da esso almeno per l'n-sima cifra.

Siamo quindi giunti ad una contraddizione rispetto alla nostra affermazione iniziale di avere realizzato una successione che contenesse tutti gli elementi dell'insieme I. Pertanto, tale affermazione deve essere falsa, e quindi non può esistere nessuna successione che contenga tutti i numeri reali (neanche solo quelli compresi tra zero ed uno).

Ne segue che l'insieme dei numeri reali non può essere posto in corrispondenza biunivoca con quello dei numeri naturali, e, quindi, non può avere la potenza del numerabile.

Osservazioni.

- Forse ti è venuto in mente di invalidare la dimostrazione precedente semplicemente aggiungendo il numero x alla successione. Se è così, mi congratulo per l'idea ingegnosa, che però è sbagliata.
  Infatti, per rendersi conto che la dimostrazione resta valida, è sufficiente applicare il metodo precedente per trovare un numero reale x_1 "mancante" dal nuovo elenco. In termini intuitivi, il problema non è che alla successione manchi un numero reale, ma che ne manchino infiniti, ed anzi, di un'infinità "maggiore" di quella del numerabile.
- Molti studenti restano perplessi ed increduli di fronte alla dimostrazione che abbiamo appena analizzato, che sembra loro una "presa di giro" (per esprimersi con educazione). Sotto l'aspetto "tecnico" questo è strano, perché la dimostrazione è di una semplicità imbarazzante, non coinvolge calcoli di alcun genere e non fa appello a teoremi astrusi. Dal punto di vista psicologico, invece, posso capire che si sommino le difficoltà tipiche delle dimostrazioni per assurdo con quelle legate all'idea di infinito e al risultato inatteso, al limite del paradossale.
  In ogni caso, a chi mi obietta che, in realtà, il numero x di cui abbiamo parlato deve essere in qualche modo "nascosto" dentro la successione, io chiedo: "secondo te, quale posto è occupato da x"? Se la risposta fosse "x occupa il posto N, che per ora non sono in grado di determinare", potrei controbattere: "no, perché, per come è stato costruito, il numero x differisce da N almeno per l'N-sima cifra".
- Se continuerai i tuoi studi in matematica, informatica o logica, ti accorgerai di come la tecnica utilizzata in questa dimostrazione, detta *metodo diagonale di Cantor* sia stata utilizzata in seguito in una miriade di teoremi di grande importanza, che hanno tutti in comune l'affermazione che sia impossibile fare o conoscere qualcosa.
  Il più famoso, se non il più importante di essi, è il teorema di incompletezza di Gödel, il quale afferma, che, come tutti gli studenti hanno sempre saputo, c'è qualcosa che non funziona nella matematica... ☺

Definizione. Diciamo che l'insieme dei numeri reali, e tutti gli insiemi che possono essere posti in corrispondenza biunivoca con $\mathbb{R}$, hanno la *potenza del continuo*, che indichiamo con $\mathcal{C}$.
La potenza del continuo è, per utilizzare il linguaggio di Cantor, un *numero transfinito* maggiore rispetto alla potenza del numerabile.

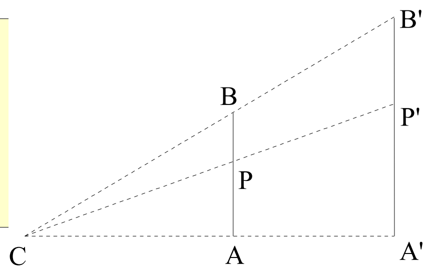
In termini intuitivi, i numeri irrazionali sono "infinitamente più numerosi" di quelli razionali, per cui, scegliendo un numero reale "a caso", la probabilità che esso sia razionale è uguale a zero, e quella che sia irrazionale è uguale ad uno.

Esempi.

- L'insieme dei punti della retta ha la potenza del continuo.

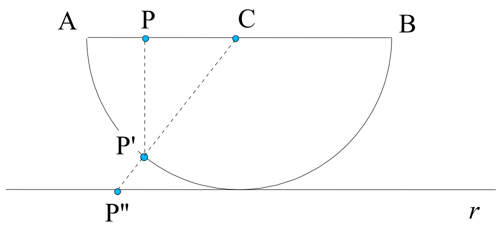
  Infatti, come abbiamo affermato in precedenza, esiste una corrispondenza biunivoca tra l'insieme dei punti della retta e quello dei numeri reali.

- L'insieme dei punti di un segmento ha la stessa potenza dell'insieme dei punti di un segmento di lunghezza differente. In termini più intuitivi, ma poco rigorosi: "due segmenti di lunghezza diversa hanno lo stesso numero di punti".



  Infatti, i due segmenti si possono fare corrispondere in una corrispondenza biunivoca, utilizzando, come in figura, la proiezione (omotetia) di centro C che fa corrispondere tra di loro in maniera biunivoca i punti generici P, appartenente al segmento AB, e P', appartenente al segmento A'B'.

- L'insieme dei punti di un segmento ha la potenza del continuo.



In termini intuitivi, un segmento possiede tanti punti quanti ne possiede una retta.
Ad esempio, possiamo fare corrispondere in maniera biunivoca al punto generico P appartenente al segmento AB (che, per precisione, andrebbe considerato privo degli estremi) il punto generico P' della semicirconferenza AB (anch'essa priva degli estremi) tramite una proiezione con raggi paralleli, e, in seguito, a P' il punto generico P'' della retta *r* tramite una proiezione avente come centro il centro C della semicirconferenza.

- In generale, qualunque intervallo contenuto in $\mathbb{R}$ ha la potenza del continuo.

Esempi:

- la funzione $y = ln\,x$ stabilisce una corrispondenza biunivoca tra $\mathbb{R}^+$ e $\mathbb{R}$;
- la funzione $y = arc\,tg\,x$ stabilisce una corrispondenza biunivoca tra $(-\pi/2, \pi/2)$ e $\mathbb{R}$.

Solo un accenno ad alcune questioni che non siamo in grado di approfondire:

- La potenza del numerabile $\aleph_0$ è il più piccolo dei numeri transfiniti.
  In altre parole, ogni insieme infinito contiene un sottoinsieme numerabile.
- L'insieme dei numeri transfiniti è a sua volta infinito, nel senso che, dato un insieme infinito, è sempre possibile costruire un secondo insieme avente potenza maggiore di quella del primo.
- L'insieme dei punti del piano, o dello spazio euclideo, o di uno spazio ad n dimensioni ha sempre la potenza del continuo, come quello dei punti della retta (o di un segmento).
  In tono semiserio, ci sono tanti punti in un segmento piccolo a piacere quanti in tutto lo spazio.
- Non è possibile decidere se ci sono delle potenze intermedie tra quella del numerabile e quella del continuo.
  Questa proprietà è indipendente dagli altri assiomi della teoria degli insiemi.

Nel prossimo paragrafo, riportiamo un raccontino di fantascienza, che riprende in chiave divulgativa l'argomento del confronto tra insiemi infiniti ipotizzando l'esistenza di un albergo con infinite stanze, noto tra i matematici come albergo di Hilbert (dal nome del matematico tedesco David Hilbert). Nei vari punti del racconto, dovresti riconoscere i risultati ottenuti da Cantor.

6. L’hotel straordinario

Arrivai a casa piuttosto tardi - l’incontro al club Nebulosa di Andromeda si era trascinato ben oltre l’una. Fui tormentato tutta notte dagli incubi. Sognai di aver inghiottito un enorme Kurdl; poi sognai di essere tornato sul pianeta Durditov e di non riuscire a sfuggire a una di quelle terribili macchine che trasformano le persone in esagoni; poi... Di solito la gente sconsiglia di mischiare l’età e l’idromele. Una telefonata inattesa mi riportò alla realtà. Era il professor Tarantog, mio vecchio amico e compagno di viaggi interstellari.

- Un problema urgente, mio caro Ion, - gli sentii dire. - Gli astronomi hanno scoperto uno strano oggetto nel cosmo: una misteriosa linea nera che unisce due galassie. Nessuno sa cosa stia succedendo. Persino i migliori telescopi e radiotelescopi piazzati sui razzi non bastano a dissipare il mistero. Tu sei la nostra ultima speranza. Vola subito verso la nebulosa ACD-1587.

Il giorno dopo ritirai dal carrozziere il mio vecchio razzo fotonico e ci installai l’acceleratore temporale e il robot elettronico che conosce tutte le lingue del cosmo e tutte le storie sul viaggio interstellare (è garantito per intrattenermi per almeno cinque anni di viaggio). Quindi partii per occuparmi del caso in questione.

Proprio quando il robot aveva esaurito la sua intera scorta di storie e aveva cominciato a ripetersi (non c’è niente di peggio di un robot elettronico che ripete una vecchia storia per la decima volta), la meta del mio viaggio apparve in lontananza. Le galassie che coprivano la linea misteriosa erano ora alle mie spalle, e davanti a me stava... l’hotel Cosmos. Qualche tempo prima avevo costruito un piccolo pianeta per alcuni esuli interstellari vagabondi, ma quelli lo avevano fatto a pezzi e si erano ritrovati di nuovo senza un rifugio. Allora avevano deciso di smettere di vagare per galassie sconosciute e avevano messo su un edificio grandioso: un hotel per tutti i viaggiatori del cosmo. Questo hotel si estendeva attraverso quasi tutte le galassie. Dico “quasi tutte” perché gli esuli smantellarono alcune galassie disabitate e rubarono qualche costellazione fuori mano da ognuna delle rimanenti.

Comunque, costruendo l’hotel avevano fatto un lavoro meraviglioso. In ogni stanza c’erano rubinetti da cui scorreva plasma caldo o freddo. Se lo desideravi, potevi essere smembrato in atomi per la notte, e la mattina dopo il portiere ti avrebbe rimesso insieme.

Cosa più importante, nell’hotel c’era un numero infinito di stanze. Gli esuli speravano che da quel momento in poi nessuno avrebbe più dovuto sentire la famosa frasetta irritante che li aveva afflitti nei loro vagabondaggi: «Non c’è più posto».

Nonostante ciò, non ebbi fortuna. La prima cosa che attrasse la mia attenzione entrando nella hall fu un cartello: «I delegati del congresso di zoologia cosmica sono pregati di registrarsi al 127° piano».

Siccome gli zoologi cosmici venivano da tutte le galassie, e di galassie ne esiste un numero infinito, saltò fuori che tutte le stanze erano occupate da partecipanti del congresso. Non c’era posto per me. Il conciérge tentò, è vero, di convincere qualche delegato a stringersi un po’, in modo che potessi dividere la stanza con uno di loro. Ma quando scoprii che uno dei potenziali compagni di stanza respirava fluorina e che un altro considerava normale una temperatura ambientale sugli 860°, rifiutai cortesemente questi “piacevoli” coinquilini.

Per fortuna il direttore dell’hotel era stato un esule e ricordava il buon servigio che avevo reso a lui e ai suoi compagni. Avrebbe cercato personalmente una stanza per me. In fondo, passando la notte nello spazio interstellare uno poteva prendersi una polmonite. Dopo aver meditato un po’, il direttore si rivolse al conciérge e gli disse:

- Mettilo nella stanza 1.

- E dove metterò l’ospite della 1?

- Mettilo nella 2. Sposta l’ospite della 2 nella 3, quello della nella 4 e così via.

Fu solo in quel momento che cominciai ad apprezzare le qualità insolite dell’hotel. Se ci fosse stato solo un numero finito di stanze, l'ospite dell'ultima si sarebbe dovuto trasferire nello spazio interstellare. Ma siccome l'hotel aveva un numero infinito di stanze, c'era spazio per tutti, e io potei prendere possesso di una stanza senza privare alcun zoologo cosmico della sua.

Il mattino dopo, non fui stupito di scoprire che mi si domandava di spostarmi nella stanza numero 1.000.000. Semplicemente, alcuni zoologi cosmici erano arrivati in ritardo dalla galassia VSK-3472, e si dovette trovare una stanza per altri 999.999 ospiti. Ma il terzo giorno del mio soggiorno nell'hotel, mentre stavo andando dal conciérge per pagare la mia stanza, vidi con disappunto che dal suo banco si estendeva una fila la cui fine scompariva da qualche parte nei pressi delle Nubi di Magellano. In quell'istante sentii una voce:

- Scambio due francobolli della nebulosa di Andromeda per uno di Sirio.

- Chi ha il francobollo erpeano della cinquantasettesima era cosmica?

Confuso, mi rivolsi al conciérge:

- Chi sono queste persone?

- Questo è il congresso interstellare dei filatelici.

- E ce ne sono molti?

- Un insieme infinito: un rappresentante per ogni galassia.

- Ma come farete a trovar loro una stanza? Dopotutto, gli zoologi cosmici non se ne vanno fino a domani...

- Non lo so. Sto giusto andando a parlarne un momento con il direttore.

Ad ogni modo, il problema questa volta si rivelò molto più difficile, e un momento si trasformò in un'ora. Alla fine il conciérge lasciò l'ufficio del direttore e cominciò a dare le sue disposizioni. Anzitutto chiese all'ospite della stanza 1 di spostarsi nella 2. Questo mi sembrò strano, perché sapevo per esperienza personale che uno spostamento del genere avrebbe liberato una sola stanza, mentre dovevamo trovare posto per nientemeno che un insieme infinito di filatelici. Ma il conciérge continuò a dare ordini:

- Mettete l'ospite della 2 nella 4, quello della 4 nella 6, e in generale mettete l'ospite della stanza n nella stanza $2n$.

Ora il suo piano diventava chiaro: con questo sistema avrebbe liberato l'insieme infinito delle stanze dispari e sarebbe stato in grado di sistemarvi i filatelici. Così, alla fine i numeri pari si trovarono ad essere occupati dagli zoologi cosmici e i numeri dispari dai filatelici. (Non ho detto di me: dopo tre giorni di frequentazione ero in così buoni rapporti con gli zoologi cosmici che ero stato scelto come rappresentante onorario al loro congresso; perciò dovetti abbandonare la mia stanza insieme a tutti loro e spostarmi dal numero 1.000.000 al numero 2.000.000). Invece un mio amico filatelico che era 574esimo nella coda ottenne la stanza 1.147. In generale, il filatelico n-simo nella coda ottenne il numero di stanza $2n-1$.

Il giorno dopo la situazione delle stanze si semplificò: il congresso degli zoologici cosmici terminò e loro se ne tornarono a casa. Io mi trasferii dal direttore, che aveva una stanza vuota nel suo appartamento. Ma ciò che è bene per gli ospiti non sempre fa piacere alla direzione. Dopo alcuni giorni il mio generoso anfitrione si rattristò.

- Qual è il problema? - gli chiesi.

- Metà delle stanze sono vuote. Non raggiungeremo il preventivo di bilancio.

Sinceramente, non ero proprio sicuro di quale preventivo intendesse; dopotutto, gli stavano pagando un numero infinito di stanze, ma lo stesso gli diedi questo consiglio:

- Be', perché non avvicina gli ospiti tra loro? Li sposti e riempirà tutte le stanze.

Questo si rivelò facile da fare. I filatelici occupavano solo le stanze dispari: 1, 3, 5, 7, 9 eccetera. Lasciammo stare l'ospite della 1, spostammo quello della 3 nella 2, quello della 5 nella 3, quello della 7 nella 4, eccetera. Alla fine le stanze erano di nuove tutte piene, e non era arrivato nemmeno un nuovo ospite.

Ma questo non pose fine all'infelicità del direttore. Mi spiegarono che gli esuli non si erano accontentati di creare l'hotel Cosmos. Gli instancabili costruttori erano andati avanti e avevano fondato un insieme infinito di hotel, ognuno dei quali aveva infinite stanze. Per far ciò avevano smantellato così tante galassie che l'equilibrio intergalattico ne era stato sconvolto, cosa che poteva comportare serie conseguenze. Era stato quindi chiesto loro di chiudere tutti gli hotel eccetto il nostro, e di rimettere al suo posto il materiale usato. Ma era difficile eseguire quest'ordine, dal momento che tutti gli hotel (incluso il nostro) erano pieni. Al direttore era stato chiesto di spostare tutti gli ospiti da un numero infinito di hotel – ognuno dei quali con infiniti ospiti – a un unico hotel, che era già pieno!

- Non ne posso più! - urlò il direttore. - Prima sistemo un ospite in un hotel al completo, poi altri 999.999 ospiti, poi un insieme infinito; e ora vogliono che nello stesso hotel trovi spazio per un ulteriore insieme infinito di insiemi infiniti di ospiti. No, l'hotel non è fatto di gomma; che li mettano dove gli pare.

Ma un ordine è un ordine, e all'hotel avevano cinque giorni per prepararsi all'arrivo dei nuovi ospiti. Nessuno lavorò, in quei cinque giorni: tutti pensavano a come risolvere il problema. Fu bandita una gara: il premio era un tour di una delle galassie. Ma tutte le soluzioni avanzate vennero ritenute inattuabili. Poi un apprendista cuoco fece questa proposta: lasciare l'ospite della stanza 1 nel suo alloggio attuale, spostare l'ospite della 2 nella 1.001, quello della 3 nella 2.001 eccetera. Fatto ciò, mettere gli ospiti del secondo hotel nelle stanze 2, 1.002, 2.002 eccetera del nostro hotel, gli ospiti del terzo hotel nelle stanze 3, 1.003, 2.003, eccetera. Il progetto venne respinto, perché non era chiaro dove si dovessero alloggiare gli ospiti del milleunesimo hotel; dopotutto, quelli dei primi 1.000 hotel avrebbero già occupato tutte le stanze. Ci ricordammo in questa occasione che quando il Senato di Roma, nel suo servilismo, si era offerto di rinominare il mese di settembre "Tiberio" in onore dell'imperatore (ai mesi precedenti erano già stati dati i nomi di Giulio Cesare e Augusto), Tiberio aveva risposto causticamente: «E cosa offrirete al tredicesimo Cesare?»

Il contabile dell'hotel propose una variante eccellente. Ci suggerì di fare uso delle proprietà della progressione geometrica per risistemare gli ospiti in questo modo: mettere quelli del primo hotel nelle stanze 2, 4, 8, 16, 32 eccetera (questi numeri formano una progressione geometrica in base 2). Gli ospiti del secondo hotel andavano messi nelle stanze 3, 9, 27, 81 eccetera (questi sono i membri della progressione geometrica in base 3). La sua proposta era di risistemare gli ospiti degli altri hotel in una maniera simile. Ma il direttore gli domandò:

- E dovremmo usare la progressione in base 4 per il terzo hotel?

- Naturalmente, - rispose il contabile.

- Allora non otteniamo nulla: in fondo, nella stanza 4 abbiamo già un ospite del primo hotel. Dove metteremo la gente del terzo hotel?

Venne il mio turno di parlare; all'Accademia Stellare non facevano studiare cinque anni di matematica per niente.

- Usate i numeri primi. Mettete gli ospiti del primo hotel ai numeri 2, 4, 8, 16 ... quelli del secondo hotel nei numeri 3, 9, 27, 81 .... quelli del terzo nei numeri 5, 25, 125, 625 ... quelli del quarto nei numeri 7, 49, 343...

- E non succederà anche in questo caso che qualche stanza abbia due ospiti? - chiese il direttore.

- No. In effetti, se si prendono due numeri primi, nessuna delle potenze intere positive di uno può equivalere a quelle dell'altro. Se p e q sono numeri primi, con $p \neq q$ e m e n sono numeri naturali, allora $p^m \neq q^n$.

Il direttore diede ragione al mio metodo e trovò immediatamente una miglioria grazie alla quale bastavano solo i numeri primi 2 e 3. Propose cioè di mettere gli ospiti della stanza m-sima dell'hotel n-simo nella stanza $2^m 3^n$. Questo funziona perché se $m \neq p$ e $n \neq q$, allora $2^m 3^n \neq 2^p 3^q$. Quindi nessuna stanza avrebbe avuto due occupanti.

Questa proposta deliziò tutti. Era una soluzione al problema che avevamo supposto insolubile. Ma né il direttore né io vincemmo il premio; troppe stanze sarebbero rimaste vuote, se avessimo adottato la nostra soluzione (con la mia, le stanze come la 6, la 10, la 12 e più in generale tutte le stanze che non era potenze di primi; con quella del direttore, tutte le stanze i cui numeri non potevano essere scritti nella forma $2^m 3^n$). La soluzione migliore fu proposta da uno dei filatelici, il presidente dell'Accademia di Matematica della galassia del Cigno, che suggerì di procedere a una tabulazione nelle cui righe comparisse il numero dell'hotel, e nelle colonne i numeri delle stanze. Per esempio, all'intersezione della riga 4 con la colonna 6 sarebbe comparsa la sesta stanza del quarto hotel. Ecco la tabella (in realtà, solo la parte superiore, perché scriverla per intero richiederebbe l'impiego di infinite righe e colonne).

(1, 1)	(1, 2)	(1, 3)	(1, 4)	(1, 5)	...	(1, *n*)	...
(2, 1)	(2, 2)	(2, 3)	(2, 4)	(2, 5)	...	(2, *n*)	...
(3, 1)	(3, 2)	(3, 3)	(3, 4)	(3, 5)	...	(3, *n*)	...
(4, 1)	(4, 2)	(4, 3)	(4, 4)	(4, 5)	...	(4, *n*)	...
(5, 1)	(5, 2)	(5, 3)	(5, 4)	(5, 5)	...	(5, *n*)	...
...	...	...	...	...	...	...	...

- E ora sistemate gli ospiti secondo i quadrati, - disse il matematico-filatelico.

- Cosa? - Il direttore non capiva.

- Secondo i quadrati. Nella stanza 1 mettete l'ospite di (1,1), cioè della prima stanza del primo hotel; nella 2 mettete l'ospite di (1,2), cioè della seconda stanza del primo hotel; nella 3 mettete l'ospite di (2,2), la seconda stanza del secondo hotel, e nella 4... l'ospite di (2,1), la prima stanza del secondo hotel. In questo modo avremo sistemato gli ospiti del quadrato in alto a sinistra con lato 2. Dopo di che mettete l'ospite di (1,3) nella stanza 5, di (2,3) nella stanza 6, di (3,3) nella 7, di (3,2) nella 8, di (3,1) nella 9. (Queste stanze riempiono il quadrato di lato 3). E continuiamo in questo modo.

- Ci sarà davvero spazio per tutti? - Il direttore era dubbioso.

- Naturale. Dopotutto, secondo questo schema sistemiamo gli ospiti delle prime n stanze dei primi n hotel nelle prime n^2 stanze. Quindi, prima o poi ogni ospite riceverà una stanza. Per esempio, se consideriamo l'ospite della stanza 136 dell'hotel numero 217, troviamo che lui riceverà una stanza al duecentodiciassettesimo passaggio. Possiamo anche calcolare facilmente quale stanza sarà: la numero 216^2+136 . Più in generale, se l'ospite occupa la stanza n nell'hotel m, allora se $n \geq m$ occuperà la stanza numero $(n-1)^2+m$, e se $n<m$, la numero m^2-n+1 .

Il progetto avanzato fu riconosciuto come il migliore: tutti gli ospiti di tutti gli hotel avrebbero trovato posto nel nostro e nemmeno una stanza sarebbe rimasta vuota. Il matematico-filatelico ricevette il premio, un tour della galassia LCR-287.

In onore del suo successo, il direttore organizzò un ricevimento al quale invitò tutti gli ospiti. Anche il ricevimento ebbe i suoi problemi. Gli occupanti delle stanze pari arrivarono in ritardo di mezz'ora, e quando comparvero si scoprì che tutte le sedie erano occupate, nonostante il nostro gentile anfitrione avesse organizzato le cose in modo che ci fosse una sedia per ogni ospite. Si dovette attendere che tutti si spostassero in nuovi posti per liberare la quantità necessaria di sedie (naturalmente, nella sala non venne portata nessuna sedia in più). Più tardi, quando iniziarono a servire il gelato agli ospiti, si scoprì che ogni ospite aveva due porzioni, nonostante il cuoco avesse di fatto preparato solo una porzione a testa. Spero che a questo punto il lettore sia in grado di immaginare da solo come questo possa essere successo.

Alla fine del ricevimento salii nel mio razzo fotonico e partii per la Terra. Dovevo informare i cosmonauti terrestri del nuovo rifugio cosmico. Inoltre, volevo consultare alcuni importanti matematici e il mio amico professor Tarantog sulle proprietà degli insiemi infiniti.

di Stanislaw Lem

7. Numeri costruibili, algebrici e trascendenti

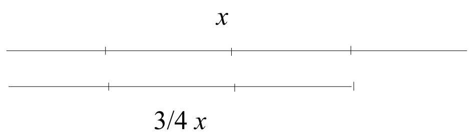
La scoperta dell'esistenza di segmenti incommensurabili,come il lato e la diagonale di un quadrato, aveva rivelato che i numeri razionali non sono sufficienti per definire le grandezze geometriche. La matematica moderna ha risolto questo problema ampliando il concetto di numero, ovvero introducendo i numeri irrazionali e reali e utilizzandoli per costruire la geometria analitica.

I Greci, invece, scelsero una strada diversa, decidendo che la geometria non fosse riconducibile all'algebra. Probabilmente, nel loro atteggiamento ha influito il fatto che, per introdurre i numeri reali, è necessario accettare e utilizzare il concetto di *infinito attuale*, che i Greci hanno sempre rifiutato. Ad esempio, Aristotele afferma: "Il numero è infinito in potenza, ma non in atto. Gli stessi matematici non sentono il bisogno dell'infinito (e in realtà non se ne servono), ma soltanto di una quantità grande quanto essi vogliono, ma pur sempre finita". E ancora: "L'infinito è tale che si può prendere sempre qualcosa di nuovo (in esso), e ciò che si prende è sempre finito ma sempre diverso".

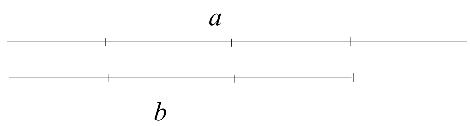
Inoltre, i Greci avevano la ferma convinzione che gli unici numeri realmente esistenti fossero i numeri naturali, cioè gli interi positivi. Quelli che noi chiamiamo numeri razionali non erano considerati come "veri" numeri, ma come operatori o come relazioni tra grandezze.

Ad esempio, quello che per noi è il numero 3/4 poteva essere considerato:

- un modo abbreviato per dire "prendi una grandezza, dividila in 4 parti, e prendine 3" (numero razionale come operatore).



- una relazione tra due grandezze omogenee a e b, che stanno tra loro nella proporzione $a:b=3:4$ (numero razionale come relazione tra grandezze).



Questo rifiuto dei numeri razionali si traduceva nell'impossibilità di effettuare le usuali operazioni di addizione e moltiplicazione tra frazioni. Infatti, sembrava difficile giustificare l' addizione o la moltiplicazione di due operazioni o di due relazioni.

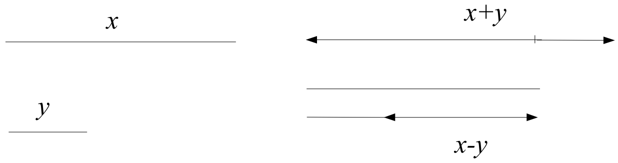
A maggior ragione, per i Greci non avevano alcun significato le operazioni tra numeri irrazionali. D'altra parte, però, essi conoscevano la teoria delle grandezze omogenee, che permette di elaborare un "calcolo geometrico" utilizzando i segmenti, che, in un certo senso, è l'analogo della nostra teoria dei numeri reali.

In realtà, gli esempi successivi non sono tratti da matematici greci, ma dal testo di Cartesio "*La Geometria*", che è una delle appendici del "*Discorso sul Metodo*" del 1637.

Supponiamo di considerare un numero reale come la lunghezza di un segmento.

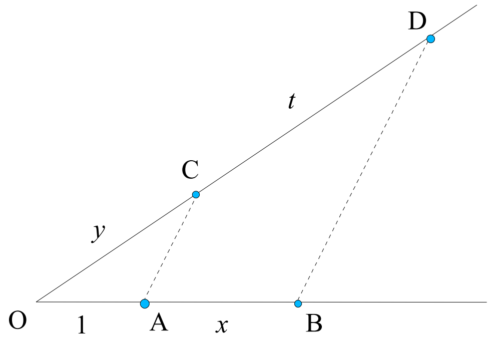
Quindi, svolgere un'operazione tra numeri reali significa costruire un segmento la cui lunghezza è uguale al risultato dell'operazione che vogliamo svolgere.

- Per l'addizione e la sottrazione, il procedimento è elementare (vedi figura).



- Per svolgere una moltiplicazione o una divisione, è sufficiente utilizzare una similitudine.

  Ad esempio, per svolgere la moltiplicazione $x \cdot y$, prendiamo sulla semiretta *r* due segmenti di lunghezza $\overline{OA}=1$ e $\overline{OB}=x$ e sulla semiretta *s* un segmento di lunghezza $\overline{OC}=y$. Tracciamo quindi la parallela alla retta AC passante per B, che interseca la semiretta *s* in D, e poniamo $\overline{OD}=t$. Poiché i triangoli OAC e OBD sono simili per il primo criterio, avremo:

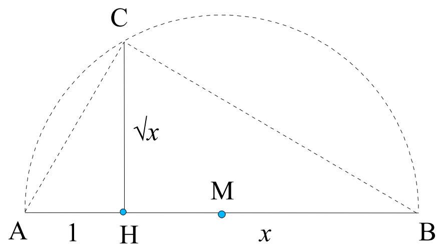


  $$\frac{OD}{OB}=\frac{OC}{OA} \;\Rightarrow\; \frac{t}{x}=\frac{y}{1} \;\Rightarrow\; t=xy$$

  quindi il risultato della moltiplicazione $x \cdot y$ sarà espresso dalla lunghezza del segmento OD.

- In maniera analoga, se sono noti *x* e *t*, e vogliamo svolgere la divisione $t:x$, è sufficiente tracciare la retta AC parallela a BD, e ricavare $y=t:x$.

- Per estrarre la radice quadrata $\sqrt{x}$, tracciamo i segmenti adiacenti $\overline{AH}=1$ e $\overline{HB}=x$, determiniamo il punto medio M del segmento AB, tracciamo una semicirconferenza di diametro AB e conduciamo la perpendicolare ad AB passante per H che interseca la semicirconferenza in C. Il triangolo ABC è rettangolo, in quanto insiste su una semicirconferenza.



  Quindi, per il secondo teorema di Euclide: $CH^2=AH \cdot BH=1 \cdot x \;\Rightarrow\; CH=\sqrt{x}$.

Prima di chiederci se questo “calcolo geometrico” può permetterci di svolgere altre operazioni, oltre a quelle definite in precedenza, dobbiamo porci il problema degli strumenti che siamo autorizzati ad utilizzare nelle costruzioni geometriche.

Euclide, come tutti i matematici del suo tempo, divideva le proposizioni matematiche in due categorie: i *teoremi* (dimostrazioni di proposizioni del tipo: “ogni oggetto che verifica certe ipotesi deve avere determinate proprietà”) e i *problemi* (costruzioni di oggetti che devono verificare determinate proprietà).

Infatti, l’esistenza degli oggetti definiti matematicamente doveva essere provata mediante costruzioni geometriche. Come abbiamo accennato, un motivo di questa necessità è dovuto probabilmente alla scoperta delle grandezze incommensurabili e dei numeri irrazionali, che misero in crisi l’aritmetica greca e spinsero i matematici del tempo a costruire gli enti geometrici che intervenivano nei loro ragionamenti per garantirne l’esistenza.

Sebbene nella matematica greca fossero presenti molti metodi e strumenti di costruzione (che essi chiamavano *costruzioni meccaniche*), certamente gli strumenti privilegiati furono *riga* e *compasso*. La riga ed il compasso per i Greci erano semplicemente strumenti per tracciare segmenti e circonferenze. La riga, in particolare, non doveva essere graduata, e quindi non poteva servire per misurare delle lunghezze o prendere delle distanze. Inoltre, il numero di passaggi da eseguire con riga e compasso doveva essere finito.

In pratica, in una costruzione con riga e compasso sono ammessi solo i seguenti passaggi:

- tracciare la retta che congiunge due punti;
- determinare il punto di intersezione di due rette;
- tracciare una circonferenza di dati centro e raggio;
- determinare i punti di intersezione tra una retta ed una circonferenza;
- determinare i punti di intersezione tra due circonferenze.

Oltre al desiderio, tipico della matematica greca, della massima precisione e dell'assoluta perfezione, sembra che Platone si opponesse all'uso di strumenti meccanici diversi da riga e compasso, in quanto essi apparterrebbero al mondo dei sensi e non a quello delle idee. Inoltre, nell'opera di Euclide tutti i problemi sono risolubili mediante costruzioni basate sui primi tre postulati e quindi mediante il solo uso di riga e compasso.

Alcuni problemi di costruzione, però, pur essendo stati risolti in parecchi modi con altri metodi e strumenti, si dimostrarono non facilmente riconducibili alla riga e compasso.
I più celebri tra essi erano:

- *Duplicazione del cubo*: costruire un cubo di volume doppio di quello di un cubo dato.
- *Trisezione dell'angolo*: dividere un angolo generico in tre parti uguali.
- *Quadratura del cerchio*: costruire un quadrato di area uguale a quella di un cerchio dato.
- *Ciclotomia*: suddividere una circonferenza in n archi uguali.

Quello della *duplicazione del cubo* era noto anche come problema di Delo. Eratostene, nella sua opera *Platonica*, narra che gli abitanti di Delo, colpiti da una grave epidemia, si erano rivolti all'oracolo di Delfi, il quale aveva suggerito loro, per placare le ire del dio Apollo, di costruire un altare di volume doppio di quello esistente. I sacerdoti si misero immediatamente al lavoro e raddoppiarono la lunghezza degli spigoli del monumento. Inaspettatamente l'epidemia, anziché estinguersi, raggiunse i vertici della sua gravità. Gli abitanti si rivolsero allora per una soluzione a Platone, il quale sostenne che Apollo avesse voluto punire i sacerdoti per la loro ignoranza della geometria.

Osserviamo che il problema della *trisezione dell'angolo* riguarda un angolo *generico*. Infatti, per alcuni angoli particolari, come quello retto, è ben nota una costruzione con riga e compasso.

Il problema della *quadratura del cerchio* è citato da Dante nell'ultimo canto della *Divina Commedia*. Alla vista dei tre cerchi che simboleggiano il Padre, il Figlio e lo Spirito Santo, egli paragona l'impossibilità di spiegare l'armoniosa presenza di natura umana e divina alla difficoltà di risolvere il problema della quadratura del cerchio:

Qual è 'l geometra che tutto s'affige
per misurar lo cerchio, e non ritrova,
pensando, quel principio ond'elli indige,

tal era io a quella vista nova:

veder voleva come si convenne

l'imago al cerchio e come vi s'indova;

ma non eran da ciò le proprie penne:

se non che la mia mente fu percossa

da un fulgore in che sua voglia venne.

In generale, l'espressione "trovare la quadratura del cerchio" è diventata sinonimo di "affrontare un compito impossibile".

Anche il problema della *ciclotomia* riguarda la suddivisione della circonferenza in un numero *generico* di archi uguali, in quanto per alcuni valori di n (3, 4, 5 ...) il problema è facilmente risolubile con riga e compasso. Ovviamente, dalla costruzione di una suddivisione di una circonferenza in n archi di uguale lunghezza, se ne deduce immediatamente una in $2n$ archi, semplicemente bisecando gli angoli al centro. Tale problema è ovviamente equivalente alla costruzione di poligoni regolari di n lati (inscritti in una circonferenza). A soli 19 anni, Gauss riuscì a risolvere il problema per il caso $n=17$; dopo la morte, gli fu eretta una statua la cui base era un poligono regolare di 17 lati.

Ai matematici greci mancavano gli strumenti teorici sia per caratterizzare le costruzioni eseguibili con l'uso di riga e compasso, quindi per dimostrare l'impossibilità delle costruzioni con riga e compasso dei tre problemi classici, che per caratterizzare i poligoni regolari costruibili con riga e compasso. La risposta completa ad entrambe le questioni è, infatti, strettamente connessa alla nascita dell'algebra moderna.

Definizione. Diremo che un numero reale è *costruibile* (o *euclideo*) se esso esprime la lunghezza di un segmento che può essere costruito con riga e compasso a partire dal segmento scelto come unità di misura, ovvero di lunghezza unitaria.

Le costruzioni geometriche precedenti dimostrano che:

- tutti i numeri razionali sono costruibili;
- la radice quadrata di un numero costruibile è costruibile.

Potremmo chiederci se esistono altre costruzioni, che non abbiamo preso in considerazione, che ci permettano di ampliare l'insieme dei numeri costruibili con riga e compasso. La risposta è sostanzialmente negativa.

Nel 1837, il matematico francese Pierre Wantzel, a soli 23 anni, dimostrò, riprendendo delle idee di Cartesio, che i numeri costruibili con riga e compasso sono tutti e soli gli zeri dei polinomi aventi per grado una potenza di due e per coefficienti dei numeri interi, ovvero le radici delle equazioni razionali intere che hanno come coefficienti dei numeri interi relativi, del tipo:

$$a_1 x^n + a_2 x_{n-1} + \ldots + a_{n-1} x + a_n = 0 \quad \text{con} \quad n = 2^k \mid k \in \mathbb{N} \; .$$

In altri termini, i numeri costruibili sono tutti e soli i seguenti:

- i razionali;

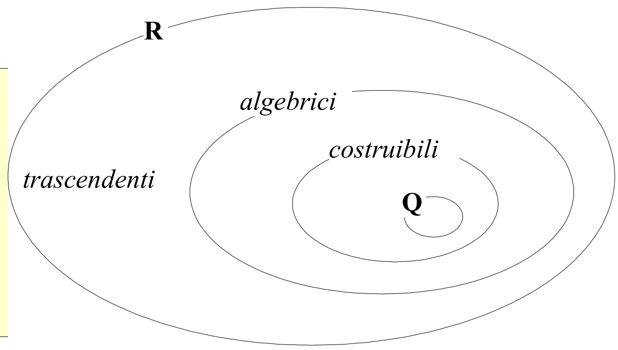
- i numeri dell'insieme $K_0=\{a_0+\sqrt{b_0}\ |a_0\in\mathbb{Q},\ b_0\in\mathbb{Q}\}$;
- i numeri dell'insieme $K_1=\{a_1+\sqrt{b_1}\ |a_1\in\mathbb{Q},\ b_1\in K_0\}$;
- i numeri dell'insieme $K_2=\{a_2+\sqrt{b_2}\ |a_2\in\mathbb{Q},\ b_2\in K_1\}$;

e così via.

Definizione. Un numero reale viene detto *algebrico* se è uno zero di un polinomio a coefficienti interi, ovvero se è una radice di un'equazione razionale intera che ha come coefficienti dei numeri interi relativi, del tipo: $a_1 x^n+a_2 x_{n-1}+...+a_{n-1}x+a_n=0$.
In caso contrario, il numero reale viene detto *trascendente*.

Sono ad esempio numeri algebrici:

- i numeri razionali a/b , perché soluzioni dell'equazione $bx-a=0$;
- i radicali quadratici, come $\pm\sqrt{5}$, perché soluzioni dell'equazione $x^2-5=0$;
- le somme tra un numero razionale ed un radicale quadratico, come $1\pm\sqrt{2}$, perché soluzioni dell'equazione $x^2-2x-1=0$;
- le somme di più radicali, anche con indici diversi, come $\sqrt{3}+\sqrt[3]{2}$;
- i radicali doppi o multipli, come $\sqrt{1+\sqrt{2}}$.



Inoltre, tutti i numeri costruibili sono algebrici, per definizione.
Sono, invece, trascendenti il numero di Nepero *e* (come fu dimostrato da Hermite nel 1873) e π (la dimostrazione si deve a Lindemann nel 1882).

Entrambe le dimostrazioni eccedono di gran lunga le mie capacità.

Proposizione. L'insieme dei numeri costruibili ha la potenza del numerabile.
L'insieme dei numeri algebrici ha la potenza del numerabile.

La dimostrazione, dovuta sempre a Cantor, è basata sul disporre in una successione tutti i polinomi a coefficienti interi, ordinandoli in base al loro grado ed alla somma dei loro coefficienti.

Proposizione. L'insieme dei numeri trascendenti ha la potenza del continuo.

Infatti, l'insieme dei numeri reali è l'unione dell'insieme dei numeri algebrici e di quello dei numeri trascendenti, ed il primo ha "solo" la potenza del numerabile.

In termini intuitivi, i numeri trascendenti sono "infinitamente più numerosi" di quelli algebrici, per cui, scegliendo un numero reale "a caso", la probabilità che esso sia algebrico è uguale a 0, e quella che sia trascendente è uguale ad 1.

Nonostante questo fatto, è estremamente difficile dimostrare che un numero è trascendente.

Esempi di numeri trascendenti, oltre a π ed e, sono:

- i numeri della forma a^b , dove a è un numero algebrico diverso da zero e da uno e b è un numero irrazionale:
  $2^{\sqrt{2}}$, $(3/7)^{\sqrt{5}}$, $\sqrt{6}^{\sqrt{7}}$;
- i numeri della forma: 0,10100100010000...

A questo punto, siamo in grado di capire perché i problemi classici dell'antichità, pur potendo essere risolti con diversi procedimenti e utilizzando altri strumenti, non sono risolubili con riga e compasso.

Duplicazione del cubo. Dato un cubo di lato l, il suo volume misura $V=l^3$.
Duplicare il cubo significa costruire un segmento x tale che il cubo di lato x abbia volume doppio rispetto al cubo dato. Dovrà quindi essere: $V'=2V \Rightarrow x^3=2l^3 \Rightarrow x=l\sqrt[3]{2}$.
Ma il teorema di Wantzel afferma che, partendo da un segmento di lunghezza l, non è possibile costruire con riga e compasso un segmento di lunghezza x, in quanto nella sua espressione compare una radice cubica, e 3 non è una potenza di 2.

Trisezione dell'angolo. Dato un angolo di ampiezza 3α , vogliamo costruire a partire da esso un angolo di ampiezza α. Costruire l'angolo equivale a costruire una sua funzione goniometrica, ad esempio il coseno. Dalla goniometria, possiamo ricavare:

$$\cos 3\alpha=\cos(2\alpha+\alpha)=\cos 2\alpha\cos\alpha-\operatorname{sen}2\alpha\operatorname{sen}\alpha=(2\cos^2\alpha-1)\cos\alpha-2\operatorname{sen}^2\alpha\cos\alpha=$$
$$2\cos^3\alpha-\cos\alpha-2(1-\cos^2\alpha)\cos\alpha=4\cos^3\alpha-3\cos\alpha \quad .$$

Poiché l'angolo di ampiezza 3α è dato, mentre quello di ampiezza α è incognito, poniamo:
$\cos\alpha=x$, $\cos 3\alpha=a$, ottenendo l'equazione: $4x^3-3x-a=0$.
Trattandosi di un'equazione di terzo grado, in generale essa richiederà per ricavarne le soluzioni l'estrazione di una radice cubica.

Potremmo infatti dimostrare che, come l'equazione generica di secondo grado richiede, per determinarne le radici, l'estrazione di una radice quadrata, in maniera analoga le equazioni generiche di terzo e di quarto grado richiedono l'estrazione di radici cubiche e quarte.
L'analogia termina qui perché, come è stato dimostrato, tra gli altri, da Ruffini, Abel e Galois, l'equazione generica di grado maggiore rispetto al quarto non ammette formule risolutive che utilizzano radicali.

Pertanto, come nel caso precedente, il teorema di Wantzel stabilisce che, partendo da un segmento di lunghezza a, non è possibile costruire con riga e compasso un segmento di lunghezza x.

Osserva che se, invece, il parametro a assume valori tali che il polinomio a primo membro sia scomponibile, ad esempio con il teorema di Ruffini, allora quei corrispondenti angoli saranno trisecabili mediante riga e compasso.

Quadratura del cerchio. Dato un cerchio di raggio *r*, la sua area misura $A=\pi r^2$.

Quadrare il cerchio significa costruire un segmento *x* tale che il quadrato di lato *x* abbia area uguale a quella del cerchio dato. Dovrà quindi essere: $A'=A \Rightarrow x^2=\pi r^2 \Rightarrow x=r\sqrt{\pi}$.

Ma, nel 1882, il matematico tedesco Lindemann ha dimostrato che π è un numero trascendente, ovvero non algebrico, e quindi non costruibile. Pertanto, non è possibile, partendo da un segmento di lunghezza *r*, costruire con riga e compasso un segmento di lunghezza *x*.

Per lo stesso motivo, non è risolubile con riga e compasso il problema della *rettificazione della circonferenza*, ossia quello di costruire un segmento che abbia la stessa lunghezza della circonferenza.

Ciclotomia. La risposta è molto più complessa di quella dei casi precedenti ma, ancora una volta, in generale negativa. Infatti, Gauss stabilì nel 1801 che sono costruibili con riga e compasso soltanto i poligoni regolari il cui numero *n* di lati ammette una scomposizione in fattori primi della forma $n=2^k p_1 \dots p_j$ dove $k \in \mathbb{N}$ e $p_1 \dots p_j$ sono numeri primi che possono essere scritti come $p=2^{2^i}+1 \mid i \in \mathbb{N}$. Ad esempio, non sono costruibili con riga e compasso i poligoni regolari con 7 o con 9 lati.