Esercizi su successioni, progressioni e principio di induzione

1. Considera le successioni di termini generali $a_n=\sum_{i,k=1}^{n} ik$, $b_n=\sum_{j=1}^{n} j^2$, $c_n=\sum_{i,k=1;\ k\geq i}^{n} ik$.
   a. Dimostra che risulta:
   $$a_n=\frac{1}{4}n^2(n+1)^2 \quad , \quad b_n=\frac{1}{6}n(n+1)(2n+1) \quad , \quad c_n=\frac{1}{24}n(n+1)(n+2)(3n+1) \quad .$$
   b. Calcola il più grande valore di n per cui a_n non supera 100.000.
   c. Definisci per ricorsione la successione di termine generale c_n.
   d. Utilizza la precedente definizione per scrivere un algoritmo che fornisca i primi 20 termini della successione e li comunichi sotto forma di matrice di 5 righe e 4 colonne. [*PNI 2004 str.*]
2. Determina il più grande valore di n per cui l'espressione $\sum_{k=5}^{n} k$ non supera 10.000. [*PNI 2004 sup.*]
3. Enuncia il principio di induzione matematica e applicalo per dimostrare la seguente relazione:
   $\sum_{i=1}^{n} i^3=\left(\sum_{i=1}^{n} i\right)^2$, conosciuta come teorema di Nicomaco. [*PNI 2005 str.*]
4. Si narra che l'inventore del gioco degli scacchi chiedesse di essere compensato con chicchi di grano: un chicco sulla prima casella, due sulla seconda, quattro sulla terza e così via, sempre raddoppiando il numero dei chicchi, fino alla 64^a casella. Assumendo che 1000 chicchi pesino circa 38 g, calcola il peso in tonnellate della quantità di grano pretesa dall'inventore. [*PNI 2006*]
5. Considerati i primi n numeri naturali a partire da 1, moltiplicali combinandoli tra loro in tutti i modi possibili. La somma dei prodotti ottenuti risulta uguale a:
   A) $\frac{1}{4}n^2(n+1)^2$; B) $\frac{1}{3}n(n^2-1)$; C) $\frac{1}{24}n(n+1)(n+2)(3n+1)$; D) $\frac{1}{24}n(n^2-1)(3n+2)$.
   Individua la risposta corretta e fornisci una esauriente spiegazione della scelta operata. [*ord 2003*]
6. Calcola il valore della seguente somma: $1^2+2^2+3^2+...+100^2$. [*ord 2004 str.*]
7. Determina il più grande valore dell'intero n per cui l'espressione $\sum_{k=0}^{n} 3^k$ non supera 10.000.
   [*ord 2005 str.*]
8. Calcola $\lim_{n\to\infty} \frac{3^n}{n!}$. [*PNI 2002*]
9. Data la successione definita per ricorrenza: $a_1=1$, $a_{n+1}=a_n+3n-1$, $n\in\mathbb{N}$, dimostra che è crescente e che $a_n\geq n^2$ $\forall n\in\mathbb{N}$.

10.Data la successione di termine generale $a_n = \frac{1}{6} n(n+1)(2n+1)$, scrivila in forma ricorsiva.

[*PNI 2003 str.*]

11.Data la successione di termine generale $a_n = \begin{cases} 2 & se\, n=1 \\ a_{n-1}/3 & se\, n>1 \end{cases}$, calcola $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$. [*PNI 2003 str.*]

12.Da due paesi, collegati da una strada rettilinea lunga 10 *km*, partono contemporaneamente, l'uno verso l'altro, due carri, trainati ciascuno da un bue, che procedono alla velocità di 5 *km/h*. Al momento della partenza una mosca, che era posata sulla fronte del primo bue, parte volando in linea retta, con la velocità di 15 *km/h*, e va a posarsi sulla fronte del secondo bue; subito riparte e torna sulla fronte del primo bue; e così via fino a quando i buoi si incontrano e la mosca resta schiacciata tra di loro. Quanti *km* ha percorso la mosca? $[15\, km]$

(*E' decisamente preferibile la risoluzione elementare del problema, ma può essere interessante controllare che anche il risultato ottenuto con la somma degli infiniti termini della successione sia ugualmente corretto*).

13.Calcola i lati di un triangolo rettangolo sapendo che sono in progressione aritmetica e che l'area del triangolo misura $24\, cm^2$.

14. Stabilisci se la successione $a_n = \frac{n!}{5^n}$ è convergente o divergente.

15.Stabilisci se le seguenti successioni risultano monotone:

a) $a_n = n^2 + n$ b) $a_n = \frac{2n+1}{n}$ c) $a_n = \left(-\frac{1}{n}\right)^n$

16.Data la successione $a_n = e^{-n+1};\ n>0$ determina $\lim_{n\to\infty} a_n$ e $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$.

Soluzioni

1.

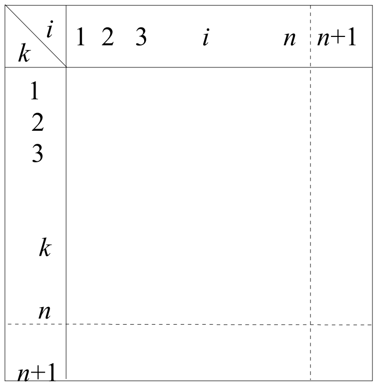
a. Dimostriamo tramite il principio di induzione matematica che $a_n=\sum_{i,k=1}^{n} ik=\frac{1}{4}n^2(n+1)^2$.

In termini discorsivi, la relazione riguarda la somma dei prodotti tra i primi n numeri naturali.

Verifichiamo $P(1)$. Per $n=1$ abbiamo: $1\cdot 1=\frac{1}{4}\cdot 1\cdot 4$, per cui $P(1)$ è vera.

Dimostriamo che $P(n) \Rightarrow P(n+1)$, ovvero: $a_{n+1}=\sum_{i,k=1}^{n+1} ik=\frac{1}{4}(n+1)^2(n+2)^2$.

Abbiamo: $\sum_{i,k=1}^{n+1} ik=\sum_{i,k=1}^{n} ik+\sum_{i=1}^{n} i(n+1)+\sum_{k=1}^{n}(n+1)k+(n+1)^2$.



Per capire la relazione precedente, puoi immaginare di sistemare i prodotti tra i numeri naturali i e k in un quadrato di lato n+1 come in figura: il primo termine del secondo membro corrisponde al quadrato interno di lato n, il secondo ed il terzo ai due rettangoli ed il quarto al quadratino in basso a destra.

Calcoliamo separatamente i vari termini.

Se vale $P(n)$, allora: $\sum_{i,k=1}^{n} ik=\frac{1}{4}n^2(n+1)^2$.

Abbiamo poi: $\sum_{i=1}^{n} i(n+1)=(n+1)\sum_{i=1}^{n} i=(n+1)\cdot\frac{n(n+1)}{2}=\frac{1}{2}n(n+1)^2$

per la somma dei primi n termini di una progressione aritmetica; lo stesso vale per $\sum_{k=1}^{n}(n+1)k$.

In conclusione: $\sum_{i,k=1}^{n+1} ik=\sum_{i,k=1}^{n} ik+\sum_{i=1}^{n} i(n+1)+\sum_{k=1}^{n}(n+1)k+(n+1)^2=$

$\frac{1}{4}n^2(n+1)^2+n(n+1)^2+(n+1)^2=\frac{1}{4}(n+1)^2(n^2+4n+4)=\frac{1}{4}(n+1)^2(n+2)^2$ c.v.d.

Dimostriamo tramite il principio di induzione matematica che $b_n=\sum_{j=1}^{n} j^2=\frac{1}{6}n(n+1)(2n+1)$.

In termini discorsivi, la relazione riguarda la somma dei quadrati dei primi n numeri naturali.

Verifichiamo $P(1)$. Per $n=1$ abbiamo: $1^2=\frac{1}{6}\cdot 1\cdot 2\cdot 3$, per cui $P(1)$ è vera.

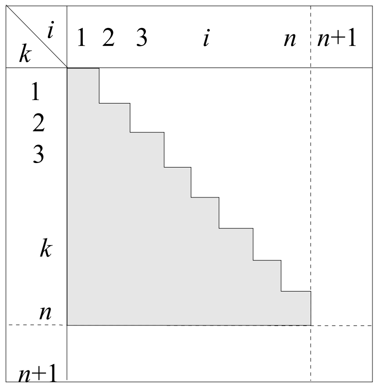
Dimostriamo che $P(n) \Rightarrow P(n+1)$, ovvero: $b_{n+1}=\sum_{j=1}^{n+1} j^2=\frac{1}{6}(n+1)(n+2)(2n+3)$.

Abbiamo: $\sum_{j=1}^{n+1} j^2 = \sum_{j=1}^{n} j^2 + (n+1)^2$. Se vale $P(n)$, allora: $\sum_{j=1}^{n} j^2 = \frac{1}{6} n(n+1)(2n+1)$.

Quindi: $\sum_{j=1}^{n+1} j^2 = \sum_{j=1}^{n} j^2 + (n+1)^2 = \frac{1}{6} n(n+1)(2n+1) + (n+1)^2 =$

$\frac{1}{6}(n+1)(2n^2+n+6n+6) = \frac{1}{6}(n+1)(n+2)(2n+3)$ c.v.d.

Se la scomposizione in fattori non fosse immediata, potremmo anche svolgere entrambi i membri della relazione: $\frac{1}{6} n(n+1)(2n+1) + (n+1)^2 = \frac{1}{6}(n+1)(n+2)(2n+3)$ e verificare che si tratta di un'identità.



Dimostriamo che $c_n = \sum_{i,k=1;\ k \geq i}^{n} ik = \frac{1}{24} n(n+1)(n+2)(3n+1)$.

In termini discorsivi, la relazione riguarda la somma dei prodotti tra i primi *n* numeri naturali in cui il secondo fattore sia maggiore o uguale del primo.

Potremmo utilizzare il principio di induzione matematica, ma è più semplice osservare che: $c_n = \frac{1}{2} a_n + \frac{1}{2} b_n$.

Intuitivamente, puoi giustificare la relazione precedente osservando che la quantità c_n è data dalla somma delle caselle evidenziate in figura, che sono la metà di tutte le caselle (a_n), sommata alla metà delle caselle che si trovano lungo la diagonale (b_n).

Quindi: $c_n = \frac{1}{2} a_n + \frac{1}{2} b_n = \frac{1}{8} n^2 (n+1)^2 + \frac{1}{12} n(n+1)(2n+1) = \frac{1}{24} n(n+1)[3n(n+1) + 2(2n+1)] =$

$\frac{1}{24} n(n+1)(3n^2+7n+2) = \frac{1}{24} n(n+1)(n+2)(3n+1)$ c.v.d.

b. Imponiamo: $a_n = \frac{1}{4} n^2 (n+1)^2 \leq 100.000 \Rightarrow n(n+1) \leq \sqrt{400.000} \Rightarrow n^2 + n - 200\sqrt{10} \leq 0 \Rightarrow$

$1 \leq n \leq \frac{-1+\sqrt{1+800\sqrt{10}}}{2} \simeq 24{,}7$. Quindi $n_{max} = 24$.

c. Osserviamo che $c_{n+1} = \frac{1}{24}(n+1)(n+2)(n+3)(3n+4)$, quindi:

$c_{n+1} - c_n = \frac{1}{24}(n+1)(n+2)[(n+3)(3n+4) - n(3n+1)] = \frac{1}{24}(n+1)(n+2)(12n+12) = \frac{1}{2}(n+1)^2(n+2)$

La definizione ricorsiva della successione $\{c_n\}$ è quindi: $\begin{cases} c_1 = 1 \\ c_{n+1} = (n+1)^2 (n+2)/2 \end{cases}$.

2. Consideriamo la somma dei termini di una progressione aritmetica: $\sum_{k=5}^{n} k = \frac{(n+5)(n-4)}{2}$.

Imponiamo: $\frac{(n+5)(n-4)}{2}\le 10.000 \ \Rightarrow\ n^2+n-20.020\le 0 \ \Rightarrow\ 1\le n\le\frac{-1+\sqrt{80.081}}{2}\simeq 140{,}99$.

Quindi $n_{max}=140$.

3. $P(1)$ è vera, in quanto diventa: $1=1$. Verifichiamo che $P(n)\ \Rightarrow\ P(n+1)$.

$P(n+1)$ afferma che: $\sum_{i=1}^{n+1} i^3=(\sum_{i=1}^{n+1} i)^2$.

Applicando $P(n)$ possiamo scrivere: $\sum_{i=1}^{n+1} i^3=\sum_{i=1}^{n} i^3+(n+1)^3=(\sum_{i=1}^{n} i)^2+(n+1)^3$.

Utilizziamo la somma dei termini di una progressione aritmetica:

$$\sum_{i=1}^{n+1} i^3=(\frac{n(n+1)}{2})^2+(n+1)^3=(n+1)^2(\frac{n^2}{4}+n+1)=(\frac{(n+1)(n+2)}{2})^2=(\sum_{i=1}^{n+1} i)^2 \quad \text{c.v.d.}$$

4. Il numero di chicchi di grano è dato da: $S_{64}=\sum_{i=1}^{64} 2^{n-1}=a_1\frac{q^{64}-1}{q-1}\simeq 2^{64}\simeq 1{,}84\cdot 10^{19}$.

Il loro peso è: $m\simeq\frac{1{,}84\cdot 10^{19}}{10^3}\cdot 38\,g\simeq 6{,}99\cdot 10^{17}\,g\simeq 6{,}99\cdot 10^{11}\,ton$.

5. Facendo riferimento al problema 1, vediamo che la quantità cercata è: $d_n=\sum_{i,k=1;\ i\ne k}^{n} ik=\frac{1}{2}(a_n-b_n)$.

Facendo riferimento alla figura del problema 1, possiamo giustificare la relazione precedente osservando che la quantità d_n è data dalla somma di tutte le caselle (a_n), escluse quelle che si trovano lungo la diagonale (b_n); il tutto deve essere diviso per 2 in modo da evitare di contare due volte le stesse coppie di fattori (esempio: $4\cdot 5$ e $5\cdot 4$).

Quindi: $d_n=\frac{1}{2}[\frac{1}{4}n^2(n+1)^2-\frac{1}{6}n(n+1)(2n+1)]=\frac{1}{24}n(n+1)[3n(n+1)-2(2n+1)]=$

$\frac{1}{24}n(n+1)(3n^2-n-2)=\frac{1}{24}n(n^2-1)(3n+2)$, che corrisponde alla risposta D.

6. Come abbiamo dimostrato nel problema 1, la somma cercata vale:

$$\sum_{j=1}^{100} j^2=\frac{1}{6}\cdot 100\cdot 101\cdot 201=338.350 \ .$$

7. Si tratta della somma dei primi $n+1$ termini di una progressione geometrica:

$$\sum_{k=0}^{n} 3^k=1\,\frac{3^{n+1}-1}{3-1}\le 10.000 \ \Rightarrow\ 3^{n+1}\le 20.001 \ \Rightarrow\ \frac{\log 20.001}{\log 3}\simeq 9{,}01 \ \Rightarrow\ n_{max}=8 \ .$$

8. Possiamo scrivere il termine *n*-simo della successione $a_n=\frac{3^n}{n!}$ come:

$$\frac{3^n}{n!}=\frac{\overbrace{3\cdot 3\cdot 3\cdot\ldots\cdot 3}^{n\ fattori}}{1\cdot 2\cdot 3\cdot\ldots\cdot(n-1)\cdot n}=\frac{3}{1}\cdot\frac{3}{2}\cdot\frac{3}{3}\cdot\frac{3}{4}\cdot\ldots\cdot\frac{3}{n-1}\cdot\frac{3}{n} \ .$$

Vediamo che tutti i termini dal terzo al penultimo sono minori o uguali di 1: $0 \le \frac{3^n}{n!} \le \frac{9}{2} \cdot 1 \cdot \frac{3}{n}$.

Poiché $\lim_{n\to\infty} \frac{3}{n} = 0$, allora anche $\lim_{n\to\infty} \frac{3^n}{n!} = 0$ per il teorema del confronto.

9. La successione è crescente perché $a_{n+1} - a_n = 3n - 1 > 0 \quad \forall n \ge 1$.

   Dimostriamo per induzione che $a_n \ge n^2 \quad \forall n \in \mathbb{N}$. $P(1)$ è vera, in quanto: $1 \ge 1$.

   $P(n+1)$ afferma che: $a_{n+1} \ge (n+1)^2 \Rightarrow a_n + 3n - 1 \ge (n+1)^2$. Utilizzando $P(n)$:

   $a_n + 3n - 1 \ge n^2 + 3n - 1 = n^2 + 2n + 1 + n - 2 = (n+1)^2 + n - 2 \ge (n+1)^2 \quad \forall n \ge 2$ c.v.d.

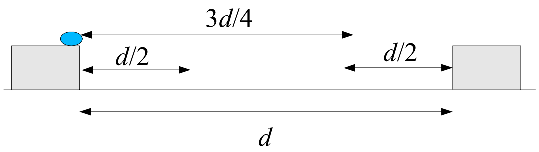
10. Come abbiamo visto nell'esercizio 1: $a_n = \sum_{j=1}^{n} j^2 = \frac{1}{6} n(n+1)(2n+1)$, per cui:

$$a_n = \begin{cases} 0 & se \quad n = 0 \\ a_n + n^2 & se \quad n > 0 \end{cases} .$$

11. Si tratta di una progressione geometrica di termine iniziale $a_1 = 2$ e ragione $q = 1/3$.

    Quindi: $\sum_{n=1}^{\infty} a_n = \frac{a_1}{1-q} = \frac{2}{1-1/3} = 3$.

12. *Soluzione formale*. Supponiamo che ad un certo istante la mosca si trovi sulla fronte del primo bue, ed i due buoi siano separati da una distanza *d*. Poiché $v_{mosca} = 3 v_{bue}$, allora la mosca percorrerà una distanza $3d/4$ per portarsi sulla fronte del secondo bue, mentre ciascuno dei due buoi percorrerà una distanza $d/4$. Di conseguenza, la distanza tra i due buoi quando la mosca si posa sulla fronte del secondo bue sarà diventata $d/2$.



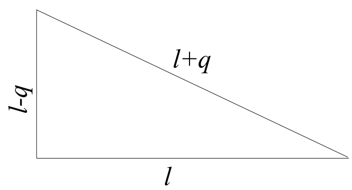
    Gli spostamenti della mosca formano una successione geometrica di termine iniziale:

    $a_1 = \frac{3}{4} \cdot 10\,km = 7{,}5\,km$ e ragione $q = \frac{1}{2}$.

    La somma degli infiniti spostamenti è quindi: $S_\infty = \frac{7{,}5\,km}{1 - 1/2} = 15\,km$.

    Soluzione elementare. Poiché ciascun bue si muove alla velocità di $5\,km/h$, essi percorrono la distanza di 10 *km* nel tempo di 1 ora. In tale intervallo di tempo, la mosca, che si muove alla velocità di $15\,km/h$, percorre 15 *km*.

13. Indicando con *l* la misura in *cm* del cateto maggiore, gli altri due lati misurano rispettivamente $l - q$ ed $l + q$, dove q è la ragione della progressione aritmetica.



    Imponiamo che il triangolo sia rettangolo attraverso il teorema di Pitagora:

$l^2+(l-q)^2=(l+q)^2 \;\Rightarrow\; l^2-4lq=0 \;\Rightarrow\; l=4q$ (scartando la soluzione $l=0$).

Imponiamo la condizione sull'area: $\frac{1}{2}l(l-q)=24 \;\Rightarrow\; l^2-lq-48=0 \;\Rightarrow\; 12q^2=48 \;\Rightarrow\; q=2$.

I lati misurano quindi 6, 8 e 10 *cm*.

14.Scriviamo: $a_n=\frac{n!}{5^n}=\frac{1\cdot 2\cdot 3\cdot\ldots\cdot(n-1)\cdot n}{\underbrace{5\cdot 5\cdot 5\cdot\ldots\cdot 5}_{n\ fattori}}=\frac{1}{5}\cdot\frac{2}{5}\cdot\frac{3}{5}\cdot\frac{4}{5}\cdot\frac{5}{5}\cdot\frac{6}{5}\cdot\ldots\cdot\frac{n-1}{5}\cdot\frac{n}{5}$.

I termini dal quinto al penultimo sono maggiori o uguali di 1: $\frac{n!}{5^n}\geq\frac{24}{5^5}\cdot 1\cdot\frac{n}{5}$.

Poiché $\lim_{n\to\infty}\frac{n}{5}=\infty$, allora $\lim_{n\to\infty}\frac{n!}{5^n}=\infty$ per il teorema del confronto, e quindi a_n è divergente.

15.

a. $a_{n+1}\geq a_n \;\Rightarrow\; (n+1)^2+n+1\geq n^2+n \;\Rightarrow\; 2n+2\geq 0 \;\Rightarrow\; \forall n\in\mathbb{N}$, quindi $\{a_n\}$ è crescente.

b. $a_{n+1}\geq a_n \;\Rightarrow\; \frac{2n+3}{n+1}\geq\frac{2n+1}{n} \;\Rightarrow\; 2n^2+3n\geq 2n^2+3n+1 \;\Rightarrow\; \emptyset$, quindi $\{a_n\}$ è decrescente.

c. La successione non è monotona, in quanto i termini di indice dispari hanno segno negativo (e formano una sottosuccessione crescente), mentre quelli di indice pari hanno segno positivo (e formano una sottosuccessione decrescente).

16.Scrivendo $a_n=\frac{1}{e^{n-1}}$, vediamo che si tratta di una progressione geometrica di termine iniziale:

$a_1=1$ e ragione $q=1/e$. Quindi: $\lim_{n\to\infty}\frac{1}{e^{n-1}}=0$ e $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{e^{n-1}}=\frac{1}{1-1/e}=\frac{e}{e-1}$.