Trasformazioni geometriche

Esercizi esame di stato

4^C PNI

2012 - 2013

Liceo Scientifico "G. Marconi"

Quesito n° 3 PNI 2010

Sia G il grafico di una funzione $x \to f(x)$ con $x \in \mathbb{R}$. Illustra in che modo è possibile stabilire se G è simmetrico rispetto alla retta di equazione $x = k$.

Svolgimento

Le equazioni della simmetria sono: $\begin{cases} x' = 2k - x \\ y' = y \end{cases}$. Perché G sia simmetrico, esse devono lasciare invariata l'equazione della funzione. Quindi deve essere: $f(x) = f(2k - x)$.

Ad esempio, il grafico della funzione $y = \dfrac{1}{x^2 - 2x + 2}$ è simmetrico rispetto alla retta $x = 1$, in quanto la trasformazione $x' = 2 - x$ lascia invariata l'equazione della funzione.

Quesito n° 10 PNI 2008

Qual è l'equazione della curva simmetrica di $y = e^{-2x}$ rispetto all'origine?

Qual è quella della curva simmetrica rispetto alla bisettrice del primo e del terzo quadrante?

Svolgimento

La simmetria rispetto all'origine manda $\begin{cases} x \to -x \\ y \to -y \end{cases}$. La curva simmetrica ha quindi equazione: $-y = e^{2x} \Rightarrow y = -e^{2x}$. La simmetria rispetto alla bisettrice del primo e del terzo quadrante manda $x \leftrightarrow y$. L'equazione della simmetrica è: $x = e^{-2y} \Rightarrow y = -\dfrac{1}{2} ln\, x = ln \dfrac{1}{\sqrt{x}}$.

Quesito n° 3 PNI 2007

Dimostra che l'insieme delle omotetie di centro O fissato è un gruppo.

Svolgimento

Per semplicità, risolviamo il quesito con metodo sintetico. Ponendo l'origine degli assi nel punto O, le equazioni della omotetia ω di centro O e rapporto *k* sono: $\begin{cases} x' = kx \\ y' = ky \end{cases}$.

- la composizione è un'operazione interna nell'insieme delle omotetie di centro O, ovvero l'insieme di tali omotetie è chiuso rispetto all'operazione di composizione. Infatti, la composizione, in qualunque ordine, di due omotetie di centro O è ancora una omotetia con lo stesso centro O e rapporto uguale al prodotto dei due rapporti:

se $\begin{cases} x'=k_1 x \\ y'=k_1 y \end{cases}$ e $\begin{cases} x''=k_2 x' \\ y''=k_2 y' \end{cases}$, allora: $\begin{cases} x''=(k_1 k_2) x \\ y''=(k_1 k_2) y \end{cases}$.

- l'operazione è associativa.

  Se, infatti: $\omega_1 : \begin{cases} x'=k_1 x \\ y'=k_1 y \end{cases}$, $\omega_2 : \begin{cases} x'=k_2 x \\ y'=k_2 y \end{cases}$; $\omega_3 : \begin{cases} x'=k_3 x \\ y'=k_3 y \end{cases}$, allora:

  $\omega_3 \circ (\omega_2 \circ \omega_1) : \begin{cases} x'=k_3 (k_2 k_1) x = k_1 k_2 k_3 x \\ y'=k_3 (k_2 k_1) y = k_1 k_2 k_3 y \end{cases}$; $(\omega_3 \circ \omega_2) \circ \omega_1 : \begin{cases} x'=(k_3 k_2) k_1 x = k_1 k_2 k_3 x \\ y'=(k_3 k_2) k_1 y = k_1 k_2 k_3 y \end{cases}$

  e quindi: $\omega_3 \circ (\omega_2 \circ \omega_1) = (\omega_3 \circ \omega_2) \circ \omega_1$.

- l'operazione ammette elemento neutro, che è l'identità, ovvero l'omotetia di centro O e rapporto unitario: $e : \begin{cases} x'=1 x \\ y'=1 y \end{cases}$. Infatti: $\omega \circ e = e \circ \omega = \omega : \begin{cases} x'=kx \\ y'=ky \end{cases}$.

- ogni omotetia di centro O e rapporto k ammette l'omotetia inversa, che è quella di centro O e rapporto $1/k$: $\omega^{-1} : \begin{cases} x'=x/k \\ y'=y/k \end{cases}$. Infatti: $\omega \circ \omega^{-1} = \omega^{-1} \circ \omega = e : \begin{cases} x'=1 x \\ y'=1 y \end{cases}$.

Notiamo che, incidentalmente, abbiamo anche dimostrato che si tratta di un gruppo abeliano.

Quesito n°6 PNI 2007 straordinaria

Verifica che la curva di equazione $y=\frac{x-1}{x-2}$ è simmetrica rispetto al punto di intersezione dei suoi asintoti.

Svolgimento

Si tratta di una funzione omografica di asintoti $x=2$ e $y=1$, e quindi centro $C(2,1)$.

La simmetria rispetto al punto C ha equazioni $\begin{cases} x'=4-x \\ y'=2-y \end{cases}$.

Sostituendole nell'equazione della curva, otteniamo:

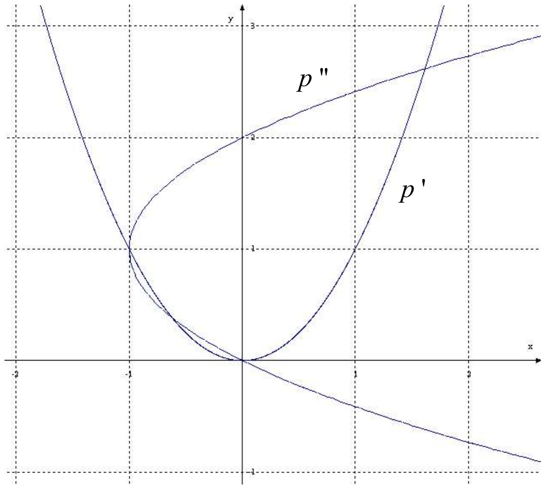
$$y=\frac{x-1}{x-2} \rightarrow 2-y=\frac{4-x-1}{4-x-2} \Rightarrow y=2-\frac{3-x}{2-x}=\frac{1-x}{2-x}=\frac{x-1}{x-2} \quad \text{c.v.d.}$$

Problema n°1 PNI 2006 - suppletiva

d) Dimostra che le parabole *p*' e *p*'', di equazioni rispettivamente $y=x^2$ e $x=y^2-2y$, sono congruenti, trovando le equazioni di una isometria che trasforma una di esse nell'altra.

e) Stabilisci se l'isometria trovata ammette elementi uniti.

Svolgimento



Intuitivamente, le due parabole devono essere congruenti perché hanno lo stesso valore del parametro *a*, che regola la "apertura" della curva.

Dopo averle disegnate, possiamo intuire che una possibile isometria che porta *p*' su *p*'' è la composizione della simmetria rispetto alla bisettrice del primo e del terzo quadrante, che fa in modo che i due assi di simmetria diventino paralleli, e della traslazione di vettore $\vec{v} \equiv (-1, 1)$, che porta il primo vertice a sovrapporsi al secondo.

Quindi: $\begin{cases} x' = y \\ y' = x \end{cases}$; $\begin{cases} x'' = x' - 1 \\ y'' = y' + 1 \end{cases}$, da cui: $\begin{cases} x'' = y - 1 \\ y'' = x + 1 \end{cases}$

che sono le equazioni dell'isometria richiesta.

Sicuramente, tale isometria non è unica, in quanto potremmo ancora eseguire una simmetria rispetto alla retta di equazione $y = 1$, asse di simmetria di *p*''.

Verifichiamo se il risultato ottenuto è corretto. Invertiamo le equazioni della trasformazione:

$\begin{cases} x = y'' - 1 \\ y = x'' + 1 \end{cases}$ e sostituiamole nell'equazione di *p*':

$y = x^2 \rightarrow x + 1 = (y - 1)^2 \Rightarrow x = y^2 - 2y$, che è l'equazione di *p*''.

Ponendo $\begin{cases} x'' = x \\ y'' = y \end{cases}$, ricavo: $y = x + 1$, per cui tutti i punti della retta che ha tale equazione sono uniti, e la retta stessa è puntualmente unita (infatti, è semplice verificare che l'isometria trovata non è altro che la simmetria assiale rispetto a tale retta).

Cerchiamo le rette unite. Una retta *r* di equazione $y = mx + q$ viene mandata in *r* ' di equazione:

$x + 1 = m(y - 1) + q \Rightarrow y = \frac{1}{m}x - \frac{q}{m} + \frac{1}{m} + 1$. Si ha $r \equiv r' \Leftrightarrow m = m' \wedge q = q'$.

Impongo $m \equiv m' \Rightarrow m = \frac{1}{m} \Rightarrow m = \pm 1$.

Per $m = 1$, impongo: $q \equiv q' \Rightarrow q = -q + 1 + 1 \Rightarrow q = 1$, da cui otteniamo di nuovo l'asse di simmetria di equazione $y = x + 1$.

Per $m = -1$, impongo: $q \equiv q' \Rightarrow q = q - 1 + 1$, che è un'identità, per cui tutte le rette del fascio improprio di equazione $y = -x + q$ sono globalmente unite. D'altra parte, questo fatto era evidente per motivi geometrici, trattandosi delle rette perpendicolari all'asse di simmetria.

E' immediato verificare che non vi sono rette unite tra quelle di equazione $x = k$.

Quesito n°9 PNI 2006 - straordinaria

Determina per quali valori del parametro *a* le equazioni $\begin{cases} x'=ax-(a-1)y+1 \\ y'=2ax+(a-1)y+2 \end{cases}$ rappresentano:

- una affinità;
- una affinità equivalente.

Svolgimento

Controlliamo intanto che le equazioni della trasformazione siano lineari nelle variabili *x* e *y*.

La trasformazione è una affinità se il determinante della matrice associata è diverso da zero:

$$det\,A=\begin{vmatrix} a & -(a-1) \\ 2a & a-1 \end{vmatrix}=a(a-1)+2a(a-1)\neq 0 \;\Rightarrow\; 3a(a-1)\neq 0 \;\Rightarrow\; a\neq 0 \;\wedge\; a\neq 1 \quad .$$

E' poi una affinità equivalente se il rapporto di affinità, ovvero il valore assoluto del determinante della matrice associata, è uguale ad 1:

$$|det\,A|=|3a(a-1)|=1 \;\Rightarrow\; 3a^2-3a=\pm 1 \quad .$$

Se $3a^2-3a-1=0 \;\Rightarrow\; a=\frac{3\pm\sqrt{21}}{6}$, che sono i valori di *a* per cui si ha una equivalenza.

Invece, se $3a^2-3a+1=0$, non ho soluzioni.

Quesito n°8 PNI 2006 - suppletiva

Dimostra che ogni similitudine trasforma una parabola in una parabola.

Svolgimento

In questo caso è decisamente più semplice la dimostrazione sintetica.

Ricordiamo che la parabola è il luogo dei punti P del piano aventi uguali distanze da un punto fisso, detto fuoco, e da una retta fissa, detta direttrice: $\overline{PF}=\overline{Pd}$.

Poiché la similitudine conserva il rapporto tra le distanze, avremo:

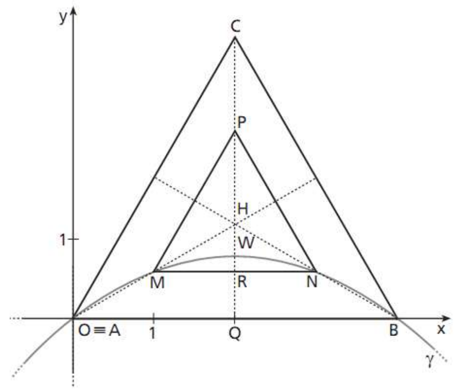
$\frac{\overline{P'F'}}{\overline{P'd'}}=\frac{\overline{PF}}{\overline{Pd}}=1 \;\Rightarrow\; \overline{P'F'}=\overline{P'd'}$, per cui anche la curva trasformata è una parabola.

Per una spiegazione più rigorosa, vedi la soluzione della Zanichelli.

Problema n°1 PNI 2005 - suppletiva

B4) Dati i punti $A(0,0)$, $B(4,0)$, $C(2,2\sqrt{3})$, $M(1,\frac{\sqrt{3}}{3})$, $N(3,\frac{\sqrt{3}}{3})$, $P(2,\frac{4}{3}\sqrt{3})$, spiega perché la trasformazione che muta il triangolo ABC nel triangolo MNP è una similitudine e trovane le equazioni.

Svolgimento



Il metodo più rapido consiste nell'osservare che i triangoli ABC ed MNP sono equilateri, quindi sono simili per uno qualunque dei tre criteri, ed il loro rapporto di similitudine è:

$$k=\frac{MN}{AB}=\frac{1}{2} \quad .$$

Inoltre, essi hanno i lati a due a due paralleli, per cui la trasformazione che manda ABC in MNP è una omotetia di rapporto $k=1/2$ e centro il punto $H(2,2\sqrt{3}/3)$, che è il centro comune dei due triangoli.

Il modo più semplice di calcolare le coordinate di H è quello di vederlo come baricentro, e di ricordare che il baricentro divide ciascuna mediana in due parti, di cui quella che contiene il vertice è doppia dell'altra.

Le equazioni richieste sono quindi: $\begin{cases} x'=k(x-x_C)+x_C=\frac{1}{2}(x-2)+2=\frac{1}{2}x+1 \\ y'=k(y-y_C)+y_C=\frac{1}{2}(y-\frac{2}{3}\sqrt{3})+\frac{\sqrt{3}}{3}=\frac{1}{2}y+\frac{\sqrt{3}}{3} \end{cases}$.

Metodo alternativo: consideriamo la generica affinità di equazioni $\begin{cases} x'=ax+by+p \\ y'=cx+dy+q \end{cases}$ e imponiamo che essa mandi i punti A, B, C in M, N, P rispettivamente. Otteniamo il sistema:

$$\begin{cases} p=1 \\ q=\sqrt{3}/3 \\ 4a+p=3 \\ 4c+q=\sqrt{3}/3 \\ 2a+2\sqrt{3}b=2 \\ 2c+2\sqrt{3}d+q=4\sqrt{3}/3 \end{cases}$$

che, risolto, fornisce i coefficienti della trasformazione. Possiamo quindi verificare che si tratta di una similitudine.

Quesito n°10 PNI 2005 - suppletiva

Data la trasformazione geometrica di equazioni $\begin{cases} x'=2x+my-1 \\ y'=mx-2y-2 \end{cases}$, dove *m* è un parametro reale, determina l'equazione del luogo geometrico dei suoi punti uniti.

Svolgimento

Ponendo $\begin{cases} x'=x \\ y'=y \end{cases}$, ricaviamo: $\begin{cases} x+my-1=0 \\ mx-3y-2=0 \end{cases} \Rightarrow m=\frac{1-x}{y} \Rightarrow x^2+3y^2-x+2y=0$.

Applicando il metodo di completamento del quadrato (oppure, operando una traslazione), scriviamo l'equazione nella forma: $(x-\frac{1}{2})^2+2(y+\frac{1}{3})^2=\frac{1}{4}+\frac{1}{3}=\frac{7}{12} \Rightarrow \frac{(x-1/2)^2}{7/12}+\frac{(y+1/3)^2}{7/36}=1$.

Vediamo quindi che il luogo cercato è una ellisse di centro $(\frac{1}{2},-\frac{1}{3})$, assi di simmetria paralleli agli assi cartesiani, semiassi $a=\sqrt{\frac{7}{12}}$, $b=\frac{\sqrt{7}}{6}$, fuochi sulla retta di equazione $y=-\frac{1}{3}$.

Osserviamo che il procedimento seguito perde significato per il valore $y=0$, a cui corrispondono i punti dell'ellisse di coordinate $(0,0)$ ed $(1,0)$.

Sostituendo i valori $\begin{cases} x=0 \\ y=0 \end{cases}$ nel sistema di partenza, otteniamo: $\begin{cases} -1=0 \\ -2=0 \end{cases}$, che non ha soluzioni, quindi il punto di coordinate $(0,0)$ non appartiene al luogo cercato.

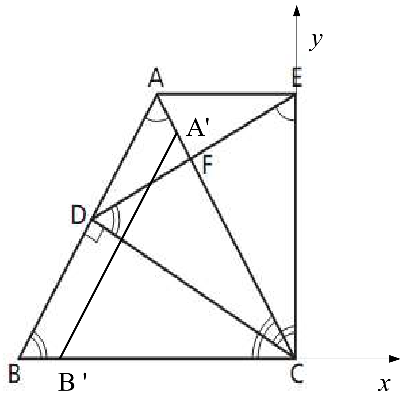
Invece, sostituendo $\begin{cases} x=1 \\ y=0 \end{cases}$, otteniamo: $\begin{cases} 1-1=0 \\ m-2=0 \end{cases} \Rightarrow m=2$, quindi il punto di coordinate $(1,0)$ appartiene al luogo cercato.

Problema n°1 PNI 2005 - straordinaria

Dato un triangolo ABC, acutangolo e isoscele sulla base BC, chiama D il piede della sua altezza condotta per C e costruisci, dalla stessa parte di A rispetto a BC, il punto E in modo che il triangolo ECD sia simile ad ABC.

B2) Posti $BC=6$ e $CD=24/5$ e riferito il piano ad un conveniente sistema di assi cartesiani, determina le equazioni della similitudine che trasforma il triangolo ABC nel triangolo ECD.

Svolgimento



Nei punti precedenti, si dimostra che BC ed AE sono perpendicolari ad EC. Inoltre, ponendo $\gamma=B\hat{C}D$, si calcolano:

$$cos\,\gamma=\frac{CD}{BC}=\frac{24/5}{6}=\frac{4}{5} \quad \text{e} \quad sen\,\gamma=\sqrt{1-cos^2\gamma}=\frac{3}{5} \quad .$$

Il rapporto di similitudine tra i triangoli ECD e ABC è:

$$k=\frac{CD}{BC}=\frac{24/5}{6}=\frac{4}{5} \quad .$$

La similitudine richiesta può essere vista come la composizione tra due trasformazioni:

- una omotetia di centro C (coincidente con l'origine degli assi) e rapporto *k*, che manda il triangolo ABC in un triangolo A'B'C congruente ad EBC;
- una rotazione di centro C ed angolo $-\gamma$ (in quanto la rotazione è in senso orario) che manda A'B'C in EBC.

Scriviamo di seguito le equazioni delle due trasformazioni componenti e della loro composizione:

$$\begin{cases} x'=\frac{4}{5}x \\ y'=\frac{4}{5}y \end{cases} \wedge \begin{cases} x''=\frac{4}{5}x'+\frac{3}{5}y' \\ y''=-\frac{3}{5}x'+\frac{4}{5}y' \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x''=\frac{16}{25}x+\frac{12}{25}y \\ y''=-\frac{12}{25}x+\frac{16}{25}y \end{cases} .$$

Verifichiamo che si tratta di una similitudine diretta, in quanto i termini della diagonale principale sono uguali e quelli della diagonale secondaria opposti (e, quindi, il determinante della matrice associata è positivo).

Inoltre, possiamo verificare che il rapporto di similitudine è: $k=\sqrt{m^2+n^2}=\sqrt{(\frac{16}{25})^2+(\frac{12}{25})^2}=\frac{4}{5}$,

come richiesto.

In alternativa, possiamo determinare le coordinate dei punti D ed E, determinare le equazioni dell'affinità che manda i punti A, B, C in E, D, C rispettivamente, e verificare che tale affinità p una similitudine.

Quesito n°3 PNI 2005

Determina le equazioni di due simmetrie assiali σ e ϕ la cui composizione $\sigma \circ \phi$ dia luogo alla traslazione di equazioni $\begin{cases} x'=x+\sqrt{5} \\ y'=y-\sqrt{5} \end{cases}$. Determina poi le equazioni della trasformazione $\phi \circ \sigma$ che si ottiene componendo le simmetrie assiali in ordine inverso.

Svolgimento

Sappiamo che ogni traslazione può essere vista come la composizione di due simmetrie assiali aventi gli assi paralleli tra loro, perpendicolari al vettore della traslazione e distanti $|\vec{v}|/2$.

Nel nostro caso $\vec{v}\equiv(\sqrt{5},-\sqrt{5})$, per cui $|\vec{v}|=\sqrt{10}$.

Le rette perpendicolari a $\vec{v}$ sono quelle del fascio improprio di equazione $y=x+q$.

Per semplicità, consideriamo la bisettrice del primo e del terzo quadrante, di equazione $y=x$ e la retta di equazione $y=x-\sqrt{5}$, la cui distanza dalla prima è $\sqrt{10}/2$.

Le simmetrie richieste hanno equazioni: $\phi: \begin{cases} x'=y \\ y'=x \end{cases}$; $\sigma: \begin{cases} x''=y'+\sqrt{5} \\ y''=x'-\sqrt{5} \end{cases}$.

Ricorda che per determinare le equazioni della simmetria σ dobbiamo imporre che il punto medio M del segmento PP' appartenga all'asse di simmetria e che la retta PP' sia perpendicolare all'asse.

La composizione delle due simmetrie è, come richiesto: $\sigma \circ \phi: \begin{cases} x'=x+\sqrt{5} \\ y'=y-\sqrt{5} \end{cases}$.

E' evidente per motivi geometrici, ed è immediato ricavare analiticamente, che la trasformazione $\phi \circ \sigma$ è la traslazione di vettore opposto $-\vec{v}$: $\phi \circ \sigma: \begin{cases} x'=x-\sqrt{5} \\ y'=y+\sqrt{5} \end{cases}$.

Quesito n°6 PNI 2005

Determina l'omotetia σ di centro l'origine che fa corrispondere alla retta *r* di equazione $y=2x+1$ la retta *s* di equazione $y=2x-4$.

Svolgimento

Le equazioni di una generica omotetia di centro l'origine sono: $\begin{cases} x'=kx \\ y'=ky \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x=x'/k \\ y=y'/k \end{cases}$.

Sostituendole nell'equazione di *r*, otteniamo: $\frac{y}{k}=2\frac{x}{k}+1 \Rightarrow y=2x+k$, che coincide con l'equazione di *s* per $k=-4$.

Quesito n°7 PNI 2004 suppletiva

Descrivi tutte le isometrie dirette che mutano un tetraedro regolare in sè.

Non lo risolviamo, perché richiede una certa conoscenza della geometria dello spazio.

Quesito n°8 PNI 2004 suppletiva

Tra le affinità di equazioni $\begin{cases} X=ax+by \\ Y=\frac{1}{2}bx-2 \end{cases}$, determina quella che trasforma il punto $(1,0)$ nel punto $(1,-1)$ e stabilisci se ammette rette unite.

Svolgimento

Sostituendo le coordinate dei punti nelle equazioni della trasformazione, otteniamo:

$\begin{cases} a=1 \\ b/2-2=-1 \Rightarrow b=2 \end{cases}$, per cui l'affinità richiesta ha equazioni: $\begin{cases} X=x+2y \\ Y=x-2 \end{cases}$.

Per cercare le eventuali rette unite, consideriamo la retta *r*' di equazione $Y=mX+q$ e determiniamo l'equazione della sua controimmagine *r*:

$x-2=m(x+2y)+q \Rightarrow y=\frac{1-m}{2m}-\frac{2+q}{2m}$. Imponiamo che $r'\equiv r$:

$m=\frac{1-m}{2m} \Rightarrow 2m^2+m-1=0 \Rightarrow m_1=-1 \vee m_2=\frac{1}{2}$.

Per $m_1=-1$, ricaviamo: $q=\frac{2+q}{2} \Rightarrow q_1=2$, da cui si ottiene la retta unita $y=-x+2$.

Per $m_2=\frac{1}{2}$, ricaviamo: $q=-2-q \Rightarrow q_2=-1$, da cui si ottiene la retta unita $y=\frac{1}{2}x-1$.

Possiamo verificare che entrambe le rette sono globalmente unite.

Applicando lo stesso ragionamento alla retta $X=k$, vediamo che la sua controimmagine ha equazione $x+2y=k$, e pertanto non può mai coincidere con la retta di partenza.

Quesito n°10 PNI 2004 straordinaria

Determina il luogo geometrico dei punti uniti dell'affinità di equazioni $\begin{cases} X=mx+2y-m \\ Y=-x-y+m \end{cases}$ al variare del parametro reale *m*.

Svolgimento

Osserviamo intanto che le equazioni date definiscono una affinità se il determinante della matrice associata è diverso da zero: $det\,A=\begin{vmatrix} m & 2 \\ -1 & -1 \end{vmatrix}=-m+2\neq 0 \;\Rightarrow\; m\neq 2$.

Imponendo la condizione per avere punti uniti: $\begin{cases} X=x \\ Y=y \end{cases}$, ricaviamo: $\begin{cases} (m-1)x+2y-m=0 \\ x+2y-m=0 \end{cases}$.

Eliminiamo il parametro *m* dal sistema ricavandolo dalla seconda equazione e sostituendo il risultato nella prima: $m=x+2y \;\Rightarrow\; x^2+2xy-2x=0 \;\Rightarrow\; x(x+2y-2)=0$.

Una soluzione è $x=0$, ovvero l'asse *y*, con la condizione $m\neq 2$, e quindi $y\neq 1$. Sono quindi punti uniti quelli dell'asse *y*, escluso il punto $(0,1)$.

La seconda soluzione sarebbe $x+2y=2$ ma, poiché abbiamo $m=x+2y$, essa ci darebbe $m=2$, in contrasto con la condizione precedente, per cui non abbiamo altri punti uniti.

Quesito n°3 PNI 2004

Un solido viene trasformato mediante una similitudine di rapporto $k=3$. Come varia il suo volume? Come varia l'area della sua superficie?

Svolgimento

Sappiamo che, in una similitudine di rapporto *k*, il rapporto tra segmenti (o archi di curva) corrispondenti è uguale a *k*, il rapporto tra le aree di superfici corrispondenti è k^2 , il rapporto tra volumi di solidi corrispondenti è k^3 .

In questo caso, quindi, il nuovo volume è $V'=27V$ e la nuova area è $S'=9S$.

Quesito n°10 PNI 2004

Studia la trasformazione geometrica definita dalle leggi: $\begin{cases} x \to x\sqrt{3} - y \\ y \to x + y\sqrt{3} \end{cases}$.

Svolgimento

Si tratta di una affinità diretta, in quanto le equazioni che la definiscono sono lineari ed il determinante della matrice associata è $det\,A = 3+1 = 4 \neq 0$.

Inoltre, si tratta di una similitudine, in quanto gli elementi della diagonale principale sono uguali, e quelli della diagonale secondaria sono opposti. Il rapporto di similitudine è $k = \sqrt{|det\,A|} = 2$.

La mancanza dei termini noti ci informa che esiste un unico punto fisso, che è l'origine degli assi.

Scriviamo le equazioni nella forma: $\begin{cases} x' = 2\left(\frac{\sqrt{3}}{2}x - \frac{1}{2}y\right) \\ y' = 2\left(\frac{1}{2}x + \frac{\sqrt{3}}{2}y\right) \end{cases}$.

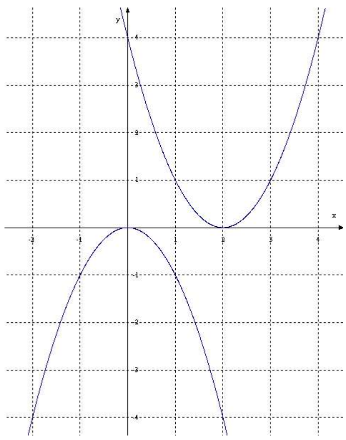
Vediamo quindi che la similitudine è la composizione di una rotazione di centro l'origine e ampiezza $\alpha = \pi/6$ e di una omotetia avente ancora centro nell'origine e rapporto $k = 2$.

E' evidente che non possono esservi rette unite.

Problema n°1 PNI 2003 suppletiva

c) Stabilisci se le parabole di equazione $y = -x^2$ e $y = x^2 - 4x + 4$ sono congruenti, fornendo una esauriente spiegazione della risposta.

Svolgimento



A livello intuitivo, possiamo affermare che le parabole sono congruenti in quanto le loro equazioni hanno lo stesso valore del parametro *a*, che ne determina la "apertura".

Più precisamente, dobbiamo determinare una isometria che mandi la prima parabola nella seconda. Aiutandoci con il grafico, possiamo intuire che una risposta possibile è fornita dalla simmetria centrale rispetto al punto $(1, 0)$, che è il punto medio del segmento che congiunge i vertici delle parabole.

Le equazioni della simmetria sono: $\begin{cases} x' = 2 - x \\ y' = -y \end{cases}$ che, applicate all'equazione della parabola, danno:

$y = -x^2 \;\to\; -y = -(2-x)^2 \;\Rightarrow\; y = x^2 - 4x + 4$ c.v.d.

Osserviamo che, trattandosi di una trasformazione involutoria, non abbiamo avuto bisogno di distinguere le equazioni "dirette" della trasformazione dalle loro inverse.

Problema n°2 PNI 2003 suppletiva

E' dato il trapezio rettangolo ABCD di vertici $A(0,0)$, $B(6,0)$, $C(3,4)$, $D(0,4)$.

c) Tra le centro-affinità di equazioni $\begin{cases} x'=ax+by \\ y'=cx+dy \end{cases}$, determina quella che trasforma i vertici B e C del trapezio nei vertici C e D rispettivamente.

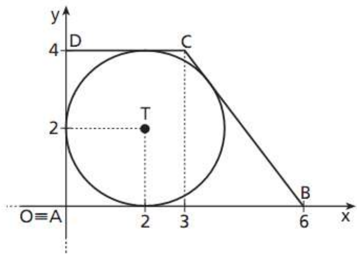
d) Stabilisci se la centro-affinità trovata presenta rette unite.

e) Calcola l'area della figura trasformata del cerchio inscritto nel trapezio secondo la centro-affinità determinata in precedenza.

Svolgimento

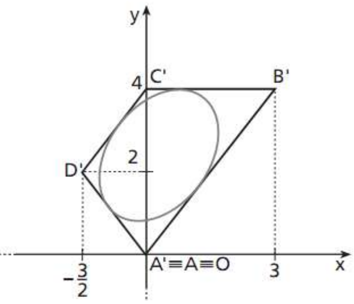
Una *centro-affinità* è una affinità che possiede un unico punto unito, detto *centro* dell'affinità, che può quindi essere preso come origine del sistema di riferimento. Dal punto di vista analitico, questo corrisponde al fatto che le equazioni dell'affinità non contengono termini noti.

Imponendo le condizioni richieste, otteniamo il sistema:



$$\begin{cases} 6a=3 \\ 6c=4 \\ 3a+4b=0 \\ 3c+4d=4 \end{cases} \Rightarrow a=\frac{1}{2},\ b=-\frac{3}{8},\ c=\frac{2}{3},\ d=\frac{1}{2} \ .$$

Le equazioni dell'affinità richiesta sono quindi: $\begin{cases} x'=\frac{1}{2}x-\frac{3}{8}y \\ y'=\frac{2}{3}x+\frac{1}{2}y \end{cases}$.



Se determiniamo anche il punto $D'(-3/2,2)$, corrispondente di D, possiamo osservare che il quadrilatero A'B'C'D' è ancora un trapezio, in quanto le affinità conservano il parallelismo, ma non è più rettangolo, in quanto le affinità, in generale, non conservano la perpendicolarità.

Per cercare le eventuali rette unite, consideriamo la retta *r*' di equazione $y'=mx'+q$ e determiniamo l'equazione della sua controimmagine *r*:

$$\frac{2}{3}x+\frac{1}{2}y=m\left(\frac{1}{2}x-\frac{3}{8}y\right)+q \Rightarrow y=\frac{12-16m}{12+9m}x+\frac{24q}{12+9m} \ .$$

Imponiamo che $r'\equiv r$: $m=\frac{12-16m}{12+9m} \Rightarrow 9m^2+16=0 \Rightarrow \emptyset$.

Applicando lo stesso ragionamento alla retta $x'=k$, vediamo che la sua controimmagine ha equazione $\frac{1}{2}x-\frac{3}{8}y=k$, e pertanto non può mai coincidere con la retta di partenza.

Di conseguenza, la trasformazione non ammette rette unite.

Il rapporto tra le aree di due figure corrispondenti in una affinità è uguale al rapporto di affinità, ovvero al valore assoluto del determinante della matrice associata.

Nel nostro caso $det\, A=\begin{vmatrix} 1/2 & -3/8 \\ 2/3 & 1/2 \end{vmatrix}=\frac{1}{2}$, quindi l'affinità trasforma il cerchio inscritto nel trapezio in un'ellisse di area uguale a metà dell'area del cerchio: $A_{ellisse}=k\,\pi\, r^2=2\pi$.

Quesito n°7 PNI 2003 suppletiva

Enuncia e dimostra la formula che fornisce l'area della regione piana racchiusa da una ellisse di semiassi noti.

Svolgimento

Scegliendo in maniera opportuna il sistema di coordinate, l'equazione della generica ellisse può essere scritta nella forma $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$.

Essa può essere vista come la trasformata della circonferenza di equazione $x^2+y^2=1$, di raggio $r=1$ ed area $A_{cerchio}=\pi$, sottoposta alla dilatazione $\begin{cases} x'=ax \\ y'=by \end{cases}$ con $a>0 \wedge b>0$.

Poiché il rapporto di affinità di tale trasformazione è $k=|det\, A|=ab$, l'area dell'ellisse risulta: $A_{ellisse}=k\, A_{cerchio}=\pi\, ab$.

Quesito n°8 PNI 2003 suppletiva

Dimostra che tra le affinità di equazioni $\begin{cases} x'=(a+1)x-by+a \\ y'=(a-1)x+2by-1 \end{cases}$ vi è una similitudine diretta, e trovane il punto unito.

Svolgimento

Perché un'affinità sia una similitudine diretta, gli elementi della diagonale principale devono essere uguali, e quelli della diagonale secondaria opposti: $\begin{cases} a+1=2b \\ a-1=b \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a=3 \\ b=2 \end{cases}$.

Le equazioni della trasformazione sono quindi: $\begin{cases} x'=4x-2y+3 \\ y'=2x+4y-1 \end{cases}$.

Imponendo $\begin{cases} x'=x \\ y'=y \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 3x-2y=-3 \\ 2x+3y=1 \end{cases}$, ricaviamo il punto unito $(-\frac{7}{13},\frac{9}{13})$.

Quesito n°8 PNI 2002 straordinaria

Determina le coordinate del baricentro G' del triangolo in cui l'omotetia di centro $O(1,2)$ e caratteristica $k=1/4$ trasforma il triangolo di vertici $A(4,0)$, $B(-4,4)$, $C(0,8)$.

Svolgimento

Il baricentro G del triangolo ABC ha coordinate: $x_G=\frac{x_A+x_B+x_C}{3}=0$, $y_G=\frac{y_A+y_B+y_C}{3}=4$.

L'omotetia assegnata ha equazioni: $\begin{cases} x'=k(x-x_O)+x_O=\frac{1}{4}x+\frac{3}{4} \\ y'=k(y-y_O)+y_O=\frac{1}{4}y+\frac{3}{2} \end{cases}$.

L'omotetia (in realtà, qualunque affinità) gode della proprietà di trasformare il baricentro di un triangolo nel baricentro del triangolo trasformato: $x_{G'}=\frac{1}{4}x_G+\frac{3}{4}=\frac{3}{4}$; $y_{G'}=\frac{1}{4}y_G+\frac{3}{2}=\frac{5}{2}$.

Quesito n°9 PNI 2002 straordinaria

Tra le affinità di equazioni $\begin{cases} X=ax+by \\ Y=cx+dy \end{cases}$, determina quella che trasforma i punti $A(3,\sqrt{2})$, $B(3\frac{\sqrt{2}}{2},0)$ ordinatamente nei punti $A'(\frac{1}{3},\frac{7}{3}\sqrt{2})$, $B'(-\frac{\sqrt{2}}{2},2)$.

Svolgimento

Sostituendo le coordinate dei punti nelle equazioni, ricaviamo:

$$\begin{cases} 3a+\sqrt{2}b=1/3 \\ 3c+\sqrt{2}d=7\sqrt{2}/3 \\ 3\sqrt{2}/2a=-\sqrt{2}/2 \\ 3\sqrt{2}/2c=2 \end{cases} \Rightarrow a=-\frac{1}{3},\ b=\frac{2}{3}\sqrt{2},\ c=\frac{2}{3}\sqrt{2},\ d=\frac{1}{3}$$

per cui l'affinità richiesta ha equazioni: $\begin{cases} X=-\frac{1}{3}x+\frac{2}{3}\sqrt{2}y \\ Y=\frac{2}{3}\sqrt{2}x+\frac{1}{3}y \end{cases}$.

Quesito n°10 PNI 2002

Spiega, con esempi appropriati, la differenza tra omotetia e similitudine nel piano.

Vedi appunti di teoria.

Problema n°2 PNI 2001

d) Data la funzione $y=x^2-4\ln(x+1)$, indica con Γ il suo grafico. Determina l'equazione della curva Γ' simmetrica di Γ rispetto alla retta di equazione $y=y(1)$.

Svolgimento

Calcoliamo $y(1)=1-4\ln 2$. La simmetria richiesta ha quindi equazioni $\begin{cases} x'=x \\ y'=2-8\ln 2-y \end{cases}$.

Sostituendole nell'equazione della funzione, ricaviamo:

$$2-8\ln 2-y=x^2-4\ln(x+1) \Rightarrow y=2-8\ln 2-x^2+4\ln(x+1)\ .$$

Problema n°2 PNI 2000

Considera i punti $O(0,0)$, $A(0,2)$, $B(1,1)$, $C(1,0)$.

a) Determina l'equazione della circonferenza γ inscritta nel triangolo OAB.

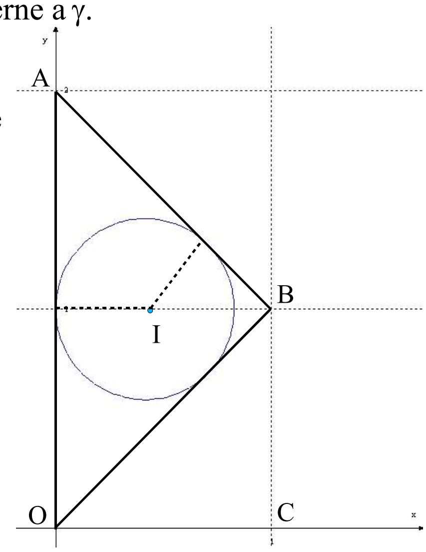
b) Determina l'equazione dell'affinità α che ha come punti uniti i punti O e C e trasforma il punto B nel punto A.

c) Calcola l'area del triangolo CAA', dove A' è il punto trasformato di A nell'affinità α.

d) Stabilisci se l'affinità α ha altri punti uniti, oltre O e C, e determina le sue rette unite.

e) Stabilisci quali, tra le rette unite trovate, risultano tangenti o esterne a γ.

Svolgimento



a) Il triangolo OAB è rettangolo isoscele; il suo incentro deve avere coordinate $I(r,1)$, dove $0<r<1$ è il raggio di γ. Imponiamo che la distanza di I dalla retta OB sia uguale ad *r*:

$$\frac{|r-1|}{\sqrt{2}}=r \Rightarrow r-1=\pm r\sqrt{2} \Rightarrow r=\frac{1}{\sqrt{2}+1}=\sqrt{2}-1$$

(l'altra soluzione non è accettabile, in quanto negativa).

L'equazione della circonferenza γ è quindi:

$$(x-(\sqrt{2}-1))^2+(y-1)^2=(\sqrt{2}-1)^2 \Rightarrow$$
$$x^2+y^2-2(\sqrt{2}-1)x-2y+1=0\ .$$

b) Poiché O è un punto unito, possiamo prendere le equazioni dell'affinità prive di termini noti, ovvero nella forma $\begin{cases} x'=ax+by \\ y'=cx+dy \end{cases}$.

Imponiamo le altre condizioni: $\begin{cases} a=1 \\ c=0 \\ a+b=0 \;\Rightarrow\; b=-1 \\ c+d=2 \;\Rightarrow\; d=2 \end{cases} \;\Rightarrow\; \begin{cases} x'=x-y \\ y'=2y \end{cases}$.

Si tratta di una affinità diretta, di rapporto $k=|det\,A|=2$.

c) Il metodo più elegante consiste nell'osservare che il triangolo CAA' è il trasformato del triangolo CBA nell'affinità, quindi: $Area_{CAA'}=k\,Area_{CBA}=2\cdot 1=2$.

Ovviamente, per calcolare l'area di CBA, conviene considerare BC come base.

d) Sappiamo già dalla teoria che, poiché l'affinità α ammette i due punti uniti O e C, allora devono essere punti uniti tutti quelli della retta OC. Infatti, imponendo $\begin{cases} x'=x \\ y'=y \end{cases}$, otteniamo: $y=0$, per cui l'asse delle ascisse è una retta puntualmente unita.

Consideriamo la retta *r*' di equazione $y'=mx'+q$ e determiniamo l'equazione della sua controimmagine *r*: $2y=m(x-y)+q \;\Rightarrow\; y=\dfrac{m}{m+2}x+\dfrac{q}{m+2}$.

Imponiamo che $r'\equiv r$: $m=\dfrac{m}{m+2} \;\Rightarrow\; m^2+m=0 \;\Rightarrow\; m_1=0 \;\vee\; m_2=-1$.

Per $m_1=0$, ricaviamo: $q=\dfrac{q}{2} \;\Rightarrow\; q_1=0$, da cui ritroviamo l'asse *x*.

Per $m_2=-1$, ricaviamo l'identità $q=q$, per cui tutte le rette del fascio improprio di equazione $y=-x+q$ sono globalmente unite.

Applicando lo stesso ragionamento alla retta $x'=k$, vediamo che la sua controimmagine ha equazione $x-y=k$, e pertanto non può mai coincidere con la retta di partenza.

e) Tralasciando l'asse *x*, che è esterno a γ, dobbiamo imporre che la distanza della retta generica del fascio dal centro della circonferenza sia maggiore o uguale al raggio:

$$\frac{|\sqrt{2}-1+1-q|}{\sqrt{2}}\geq\sqrt{2}-1 \;\Rightarrow\; \sqrt{2}-q\geq 2-\sqrt{2} \;\vee\; \sqrt{2}-q\leq\sqrt{2}-2 \;\Rightarrow\; q\leq 2\sqrt{2}-2 \;\vee\; q\geq 2 \;.$$

Problema n°3 PNI 1999

Sono dati i punti $P(x,y)$, $A(x',y')$, $B(x'',y'')$, $P'(X,Y)$, le cui coordinate sono legate dalle seguenti relazioni: $\begin{cases} x'=2x \\ y'=2y \end{cases}$, $\begin{cases} x''=-y' \\ y''=x' \end{cases}$, $\begin{cases} X=x''+2 \\ Y=y''-1 \end{cases}$.

a) Descrivi le trasformazioni T_1, T_2, T_3 rappresentate dalle precedenti equazioni.

b) Determina la trasformazione T che fa passare da P a P'.

c) Studia la trasformazione T enunciandone le proprietà e determinandone, in particolare, gli eventuali elementi uniti.

d) Dati i punti $C(3,0)$, $D(0,\sqrt{3})$, $E(0,-\sqrt{3})$, detta γ la circonferenza passante per tali punti, *a* la retta CD, γ' ed *a*' i trasformati di γ e di *a* mediante T, determina l'area delle regioni finite di piano delimitate da γ' e *a*'.

e) Determina il perimetro delle stesse regioni.

Svolgimento

a) T_1 è una omotetia di centro l'origine degli assi e rapporto $k=2$; T_2 una rotazione di centro l'origine e ampiezza $\alpha=-\pi/2$; T_3 una traslazione di vettore $\vec{v}\equiv(2,-1)$.

b) Componendo le tre trasformazioni, otteniamo $T: \begin{cases} X=-2y+2 \\ Y=2x-1 \end{cases}$.

c) T è una affinità diretta di rapporto $k_{aff}=|det\, A|=4$.

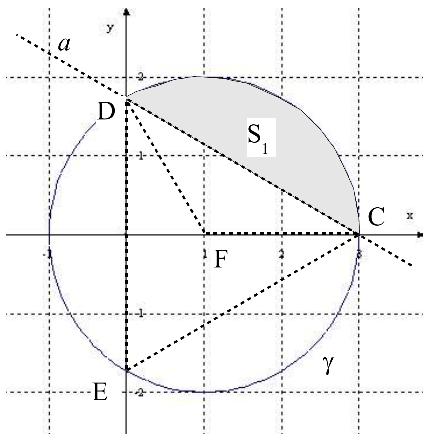
In particolare, è una similitudine diretta di rapporto $k_{sim}=2$, in quanto gli elementi della diagonale principale sono uguali e quelli della diagonale secondaria sono opposti, ovvero perché è la composizione di una omotetia con due isometrie.

Per determinare i punti uniti, imposto il sistema: $\begin{cases} x=-2y+2 \\ y=2x-1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x=4/5 \\ y=3/5 \end{cases}$.

Consideriamo la retta *r*' di equazione $Y=mX+q$ e determiniamo l'equazione della sua controimmagine *r*: $2x-1=m(-2y+2)+q \Rightarrow y=-\frac{1}{m}x+\frac{2m+q+1}{2m}$.

Imponiamo che $r'\equiv r$: $m=-\frac{1}{m} \Rightarrow m^2+1=0 \Rightarrow \emptyset$. Non esistono rette unite.

d) E' utile osservare che $CD=DE=CE=2\sqrt{3}$, quindi il triangolo CDE è equilatero.



La circonferenza circoscritta ha centro $F(1,0)$, in quanto il baricentro divide ciascuna mediana in due parti, di cui quella contenente il vertice è doppia dell'altra, e raggio $r=2$.

La retta *a* divide il cerchio delimitato dalla circonferenza γ in due segmenti circolari di aree S_1 (la minore) ed S_2.

L'area S_1 si ottiene come differenza tra quella del settore circolare DFC e quella del triangolo DFC:

$$S_1=A_{sett\,DFC}-A_{tr\,DFC}=\frac{1}{3}A_{cerchio}-\frac{1}{3}A_{tr\,CDE}=\frac{1}{3}(\pi r^2-\frac{\sqrt{3}}{4}l^2)=\frac{4}{3}\pi-\sqrt{3}$$.

$S_2 = A_{cerchio} - S_1 = \frac{8}{3}\pi + \sqrt{3}$. Le aree delle regioni trasformate mediante T sono:

$S_1' = k_{aff} S_1 = \frac{16}{3}\pi - 4\sqrt{3}$, $S_2' = k_{aff} S_2 = \frac{32}{3}\pi + 4\sqrt{3}$.

e) Il perimetro della regione S_1 è la somma della corda CD con l'arco CD, che è un terzo della circonferenza: $2p_1 = \overline{CD} + \frac{1}{3} l_{circ} = 2\sqrt{3} + \frac{4}{3}\pi$; $2p_2 = \overline{CD} + \frac{2}{3} l_{circ} = 2\sqrt{3} + \frac{8}{3}\pi$.

In generale, le affinità non conservano i rapporti tra le lunghezze. In questo caso, però, T è anche una similitudine, per cui i perimetri delle regioni trasformate sono:

$2p_1' = k_{sim} 2p_1 = 4\sqrt{3} + \frac{8}{3}\pi$; $2p_2' = k_{sim} 2p_2 = 4\sqrt{3} + \frac{16}{3}\pi$.

Problema n°1 PNI 1997

Data la parabola γ di equazione $y = x^2$, sia P un suo punto di ascissa $t \neq 0$ ed *r* la parallela per P all'asse *y*. Siano γ_1 e γ_2 le parabole che hanno per asse la retta *r*, vertice in P e stessa distanza focale di γ. (*Ricorda che, per la parabola di equazione* $y = ax^2 + bx + c$ *, la distanza tra fuoco e direttrice è* $1/(2|a|)$. *Chiama* γ_1 *quella delle due parabole che incontra* γ *solo in P*).

a) Scrivi le equazioni di γ_1 e γ_2 in funzione di *t*.
b) Scrivi le equazioni delle trasformazioni T_1 e T_2 che mandano γ in γ_1 e γ in γ_2.
c) Descrivi le trasformazioni ottenute e trovane gli elementi uniti.
d) Posto $t = 1$ e dette Q, Q_1, Q_2 le rispettive intersezioni di γ, γ_1 e γ_2 con la retta di equazione $x = h$, scrivi l'equazione della funzione $z(h) = \frac{\overline{QQ_1} + \overline{Q_1Q_2}}{\overline{QQ_2}}$ e tracciane il grafico.

Svolgimento

a) Le equazioni di γ_1 e γ_2 sono del tipo $y = ax^2 + bx + c$.

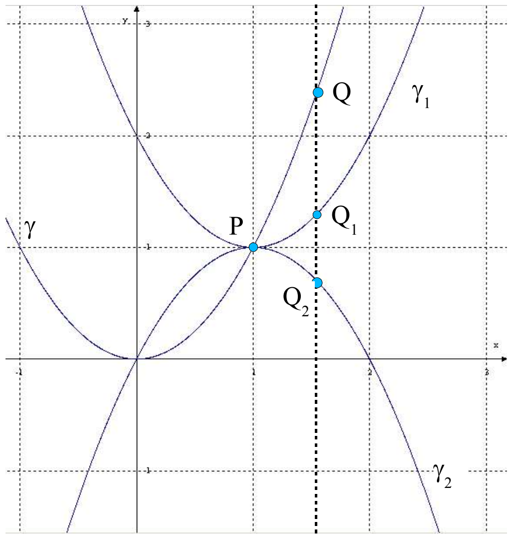
Imposto il sistema: $\begin{cases} -b/(2a) = t \Rightarrow b = -2at \\ 1/(2|a|) = 1/2 \Rightarrow a = \pm 1 \\ at^2 + bt + c = t^2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a_1 = 1 \\ b_1 = -2t \\ c_1 = 2t^2 \end{cases} \vee \begin{cases} a_2 = -1 \\ b_2 = 2t \\ c_2 = 0 \end{cases}$.

Le equazioni richieste sono quindi: $y = x^2 - 2tx + 2t^2$ e $y = -x^2 + 2tx$.

b) T_1 è la traslazione che manda l'origine nel vertice di γ_1 $V(t, t^2)$: $T_1 : \begin{cases} x' = x + t \\ y' = y + t^2 \end{cases}$.

T_2 può essere la composizione della simmetria rispetto all'asse *x*: $y' = -y$ e della traslazione precedente:

$$T_2: \begin{cases} x' = x + t \\ y' = -y + t^2 \end{cases} .$$



c) T_1 è un'isometria diretta, non involutoria, priva di punti uniti, in cui sono unite le rette di coefficiente angolare $m = t$, parallele al vettore della traslazione.

T_2 è un'isometria inversa, non involutoria, priva di punti uniti (ricorda che $t \neq 0$).

La retta di equazione $y = mx + q$ si trasforma in:

$$-y + t^2 = m(x - t) + q \Rightarrow y = -mx + mt + t^2 - q$$

ed è unita se: $\begin{cases} m = -m \\ q = mt + t^2 - q \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} m = 0 \\ q = t^2/2 \end{cases}$. E' unita la retta di equazione: $y = \dfrac{t^2}{2}$.

d) Per $t = 1$, le equazioni di γ_1 e γ_2 sono: $y = x^2 - 2x + 2$ e $y = -x^2 + 2x$, quindi:

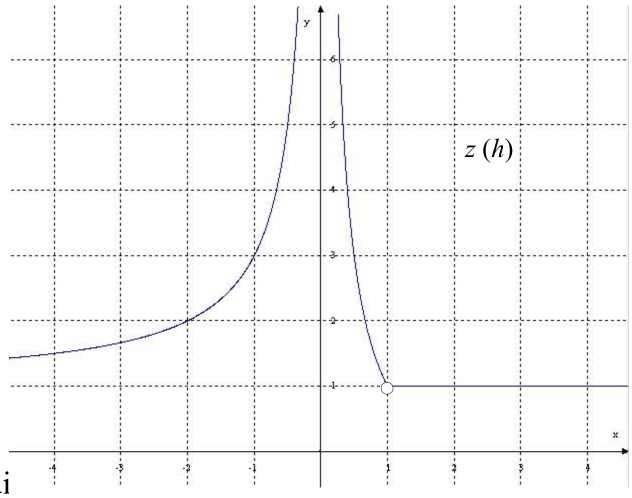
$Q(h, h^2)$, $Q_1(h, h^2 - 2h + 2)$, $Q_2(h, -h^2 + 2h)$, $\overline{QQ_1} = |2h - 2|$,

$\overline{Q_1Q_2} = |2h^2 - 4h + 2|$, $\overline{QQ_2} = |2h^2 - 2h|$.

$$z(h) = \frac{2|h-1| + 2(h-1)^2}{2|h| \cdot |h-1|} = \frac{1 + |h-1|}{|h|}$$

per $h \neq 0 \wedge h \neq 1$, ovvero:

$$z(h) = \begin{cases} \dfrac{h-2}{h} & per \quad h < 0 \\ \dfrac{2-h}{h} & per \quad 0 < h < 1 \\ 1 & per \quad h > 1 \end{cases} .$$



Il grafico è quindi l'unione di due archi di funzione omografica e di una semiretta, ed è privato del punto $(1, 1)$.

Problema n°2 ordinario 1996 suppletiva

e) Verifica che le curve k_1 e k_2 di equazioni $y = x^3 - 2x^2$ e $y = x^3 - 4x^2 + 4x$ si trasformano l'una nell'altra tramite la sostituzione $\begin{cases} x = 2 - x' \\ y = -y' \end{cases}$, ed esprimi questa proprietà in termini geometrici.

Svolgimento

Sostituiamo le equazioni della trasformazione nell'equazione di k_1:

$-y=(2-x)^3-2(2-x)^2 \Rightarrow y=x^3-6x^2+12x-8+2(x^2-4x+4)=x^3-4x^2+4x$ c.v.d.

Si tratta di una simmetria centrale rispetto al punto $C(1,0)$.

Problema n°2 PNI 1994 suppletiva

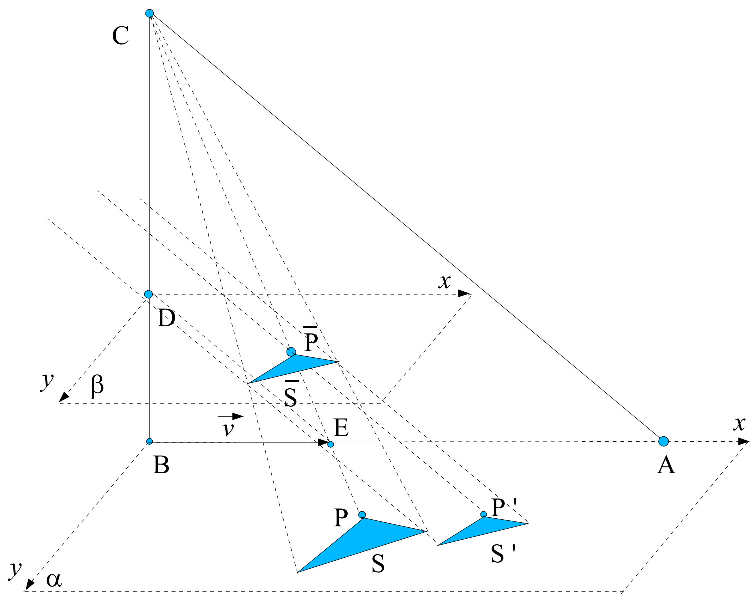
Dato il triangolo ABC, rettangolo in B, tale che $AB=4$ e $BC=3$, sia D il punto di BC per cui $BD=1$. Indica con α il piano per B perpendicolare alla retta BC, e con β il piano per D parallelo ad α. Sia $\overline{P}$ un punto del piano β, P la proiezione di $\overline{P}$ da C sul piano α e P' il punto di intersezione di α con la parallela per $\overline{P}$ alla retta AC.

a) Se $\overline{P}$ descrive un triangolo di area $\overline{S}$ su β, P e P' descrivono due triangoli di aree S, S' su α. Determina la relazione tra S ed S'.

b) Considera sul piano α un sistema monometrico di assi cartesiani ortogonali avente l'origine in B, semiasse positivo delle ascisse la semiretta BA di origine B e tale che $x_A=4$, e sul piano β il sistema monometrico di assi cartesiani ortogonali avente l'origine in D, i semiassi paralleli ed equiversi al sistema di riferimento del piano α e la stessa unità di misura di quest'ultimo. Determina le relazioni tra le coordinate di $\overline{P}$, P, P'.

c) Scrivi le equazioni della trasformazione T che porta P in P', studiala e determinane gli elementi uniti. Quale relazione esiste tra le aree δ e δ' di due generiche parti di piano descritte da P e P'?

Svolgimento



Il problema, di una facilità sconcertante dal punto di vista analitico, può creare difficoltà perché, contrariamente alle nostre abitudini, non tratta di una corrispondenza del piano in se stesso, ma tra i punti di due piani distinti, e quindi richiede una certa capacità di visualizzare le tre dimensioni dello spazio.

a) Poiché i piani α e β sono paralleli, i triangoli descritti da $\overline{P}$ e P sono simili (più precisamente, omotetici), con rapporto $k=\frac{CD}{CB}=\frac{2}{3}$. Le relazione tra le loro aree è: $\overline{S}=k^2 S=\frac{4}{9}S$.

Invece, i triangoli descritti da $\overline{P}$ e P' si corrispondono in una isometria (ed esattamente, una traslazione), per cui le loro aree sono uguali: $S'=\overline{S}=\frac{4}{9}S$.

b) Poiché $\overline{P}$ e P si corrispondono in una omotetia di rapporto $k=2/3$: $\begin{cases}\overline{x}=2/3\,x\\ \overline{y}=2/3\,y\end{cases}$.

Poiché $\overline{P}$ e P' si corrispondono in una traslazione di vettore $\vec{v}\equiv(\frac{4}{3},0)$: $\begin{cases}x'=\overline{x}+4/3\\ y'=\overline{y}\end{cases}$.

Per visualizzare il vettore della traslazione, traccia la retta passante per D e parallela ad AC: essa interseca il piano α in un punto E posto sull'asse x e tale che: $\frac{BE}{BD}=\frac{AB}{BC} \Rightarrow BE=\frac{4}{3}$.

c) La trasformazione T, essendo composizione di una omotetia e di una traslazione, è una similitudine di equazioni: $\begin{cases}x'=2/3\,x+4/3\\ y'=2/3\,y\end{cases}$.

Essa è ancora una omotetia di rapporto $k=2/3$ e centro il punto unito:
$\begin{cases}x=2/3\,x+4/3\\ y=2/3\,y\end{cases} \Rightarrow C(4,0)$.

Sappiamo, senza svolgere calcoli, che sono rette globalmente unite tutte e sole quelle del fascio proprio di centro C. Sappiamo anche che in una similitudine $\delta'=k^2\delta=\frac{4}{9}\delta$.

Problema n°2 PNI 1994

Considera l'affinità T che manda i punti $A(1,0)$, $B(0,1)$, $C(-1,0)$ rispettivamente nei punti $A'(0,1)$, $B'(2,-1)$, $C'(0,-1)$.

a) Studia la trasformazione T, trovandone in particolare gli elementi uniti e il rapporto tra le aree dei triangoli corrispondenti ABC e A'B'C'.
b) Detta K la circonferenza passante per i punti A, B, C, e detta P la parabola di equazione $y=-2x^2+1$, verifica che i loro punti comuni sono i vertici di un triangolo equilatero.
c) Detto Q il quadrato circoscritto a K e con i lati paralleli agli assi, determina la natura delle figure K', P', Q', ottenute da K, P, Q tramite l'affinità T.
d) Determina le coordinate dei punti in cui Q' è tangente a K'.
e) Determina le coordinate dei punti di intersezione tra K' e P'.

f) Calcola l'area delle tre regioni di piano delimitate da K' e da P'.

Svolgimento

a) Scriviamo le equazioni di T nella forma $\begin{cases} x'=ax+by+p \\ y'=cx+dy+q \end{cases}$.

Imponiamo che A, B, C vadano in A', B', C':

$$\begin{cases} a+p=0 \\ c+q=1 \\ b+p=2 \\ d+q=-1 \\ -a+p=0 \\ -c+q=-1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a=0 \\ b=2 \\ c=1 \\ d=-1 \\ p=0 \\ q=0 \end{cases} \Rightarrow \quad T: \begin{cases} x'=2y \\ y'=x-y \end{cases} \Rightarrow \quad T^{-1}: \begin{cases} x=\frac{1}{2}x'+y' \\ y=\frac{1}{2}x' \end{cases} .$$

E' un'affinità indiretta, in quanto $det\, A=-2$.

I punti uniti sono tutti e soli quelli della retta $x=2y$, che quindi risulta puntualmente unita.

La generica retta di equazione $y=mx+q$ si trasforma in:

$y=\frac{1-m}{2m}x-\frac{q}{m}$, ed è unita se: $m=\frac{1-m}{m} \wedge q=-\frac{q}{m}$, da cui ricaviamo:

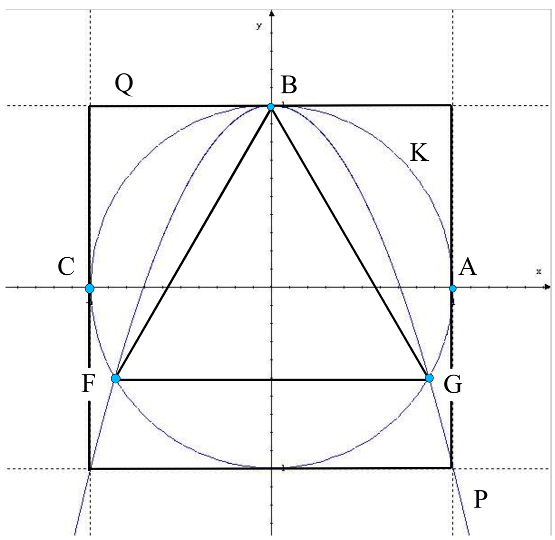
$m=-1;\ \forall q\in\mathbb{R}$ oppure $m=1/2;\ q=0$. Sono quindi unite tutte le rette del fascio improprio parallelo alla bisettrice del secondo e del quarto quadrante, di equazione $y=-x+q$, e la retta $y=x/2$, che, come abbiamo visto, è una retta di punti uniti.

$$\frac{Area_{A'B'C'}}{Area_{ABC}}=k_{aff}=|det\, A|=2 .$$

b) K è la circonferenza di equazione $x^2+y^2=1$. Intersezioni tra K e P:

$$\begin{cases} x^2+y^2=1 \\ y=-2x^2+1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x^2=1-y^2 \\ 2y^2-y-1=0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x=0 \\ y=1 \end{cases} \vee \begin{cases} x=\pm\sqrt{3}/2 \\ y=-1/2 \end{cases} .$$

Le distanze tra i tre punti di intersezione sono tutte uguali a $\sqrt{3}$ c.v.d.



c) K viene mandata in K' di equazione:

$x^2+2xy+2y^2-2=0$, che è un'ellisse, in quanto un'affinità manda coniche in coniche della stessa specie. P viene mandata in P' di equazione:

$x^2+4xy+4y^2+x-2=0$, che è una parabola per lo stesso motivo. Q' è un parallelogramma, in quanto le affinità conservano il parallelismo.

Infatti, i lati di Q si trovano sulle rette di equazioni $x=\pm1$, $y=\pm1$, che vengono mandate in $x/2+y=\pm1$ e $x/2=\pm1$.

d) Poiché le affinità conservano l'incidenza, i punti in cui Q' è tangente a K' sono i trasformati dei punti $(\pm 1, 0)$, $(0, \pm 1)$ in cui Q è tangente a K. Tre di essi sono A', B', C' dati dal testo, mentre $(0, -1)$ va in $D'(-2, 1)$.

e) Anche i punti di intersezione tra K' e P' sono i trasformati dei punti di intersezione tra K e P. Uno di essi è B' dato dal testo, mentre $(\pm\frac{\sqrt{3}}{2}, -\frac{1}{2})$ vanno in $(-1, \frac{\pm\sqrt{3}+1}{2})$.

f) Per il teorema di Archimede, l'area del segmento parabolico di base FG è: $A_{sp}=\frac{2}{3}\cdot\sqrt{3}\cdot\frac{3}{2}=\sqrt{3}$.

L'area del minore dei segmenti circolari di base FG è un terzo della differenza tra l'area del cerchio e l'area del triangolo equilatero: $A_{sc}=\frac{1}{3}(\pi r^2-\frac{\sqrt{3}}{4}l^2)=\frac{\pi}{3}-\frac{\sqrt{3}}{4}$.

La più grande delle regioni comprese tra parabola e circonferenza è: $A_1=A_{sp}+A_{sc}=\frac{\pi}{3}+\frac{3}{4}\sqrt{3}$.

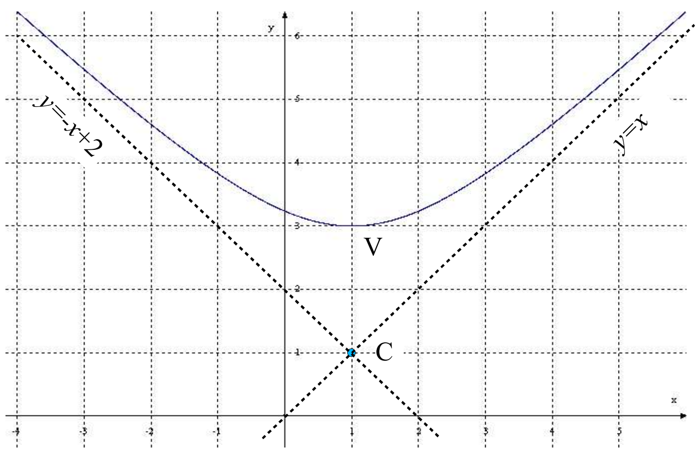
Le altre due regioni hanno aree uguali: $A_2=A_3=\frac{1}{2}(A_{cerchio}-A_1)=\frac{\pi}{3}-\frac{3}{8}\sqrt{3}$.

Poiché $k_{aff}=2$, le regioni trasformate hanno aree: $A_1'=2A_1$, $A_2'=A_3'=2A_2$.

Problema n°1 PNI 1993

a) Verifica che il grafico della funzione $y=1+\sqrt{x^2-2x+5}$ è simmetrico rispetto alla retta di equazione $x=1$.

Svolgimento



Possiamo, come di consueto, sostituire $x \to 2-x$ nell'equazione della funzione, e verificare che essa rimane invariata. E' però più interessante riscrivere l'equazione nella forma:

$$y-1=\sqrt{x^2-2x+5} \Rightarrow \begin{cases} (y-1)^2=x^2-2x+5 \Rightarrow \dfrac{(x-1)^2}{4}-\dfrac{(y-1)^2}{4}=-1 \\ y-1\geq 0 \Rightarrow y\geq 1 \end{cases} .$$

Si tratta di un ramo di iperbole equilatera di centro $C(1,1)$, asintoti di equazione $y=x$ e $y=-x+2$, asse trasverso di equazione $x=1$, vertice $V(1,3)$.

Problema n°2 PNI 1992

a) Tra le trasformazioni di equazioni $\begin{cases} X=ax+by \\ Y=cx+dy \end{cases}$, determina quella in cui ai punti $A(1,1)$, $B(1,0)$ corrispondono i punti $A'(0,2)$, $B'(1,0)$.

b) Studia la trasformazione ottenuta, determinando in particolare gli elementi uniti.

c) Detto α l'angolo acuto formato dalla retta *r* di equazione $y=mx$ e dalla sua trasformata r' , esprimi la tangente goniometrica di α in funzione di *m* e studia la funzione ottenuta.

Svolgimento

a) Imponiamo le condizioni fornite dal testo: $\begin{cases} a+b=0 \Rightarrow b=-1 \\ c+d=2 \Rightarrow d=2 \\ a=1 \\ c=0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} X=x-y \\ Y=2y \end{cases}$.

b) Si tratta di una affinità diretta, in quanto $det\,A=2$.

Sono punti uniti quelli per cui $y=0$, per cui l'asse *x* è una retta puntualmente unita.

La retta *r*' di equazione $Y=mX+q$ ha controimmagine *r*: $y=\dfrac{m}{m+2}+\dfrac{q}{m+2}$.

Imponiamo che $r'\equiv r$: $m=\dfrac{m}{m+2} \Rightarrow m^2+m=0 \Rightarrow m_1=-1 \vee m_2=0$.

Per $m_1=-1$, otteniamo l'identità $q=q$, per cui tutte le rette del fascio improprio di equazione $y=-x+q$ sono globalmente unite.

Per $m_2=0$, ricaviamo: $q=\dfrac{-q}{2} \Rightarrow q_2=0$, da cui ritroviamo l'asse *x*.

Applicando lo stesso ragionamento alla retta $X=k$, vediamo che la sua controimmagine ha equazione $x-y=k$, e pertanto non può mai coincidere con la retta di partenza.

c) Le equazioni della trasformazione inversa sono: $\begin{cases} x=X+Y/2 \\ y=Y/2 \end{cases}$.

La retta r di equazione $y=mx$ viene trasformata in $Y=\frac{2m}{1-m}X$ per $m\neq 1$, mentre, per $m=1$, la trasformata è la retta di equazione $X=0$.

La tangente dell'angolo tra due rette è: $tg\,\alpha=\left|\frac{m'-m}{1+m'm}\right|=\left|\frac{\frac{2m}{1-m}-m}{1+\frac{2m}{1-m}\cdot m}\right|=\left|\frac{m^2+m}{2m^2-m+1}\right|$.

Tralasciamo la parte rimanente del problema, che riguarda il programma del quinto anno.

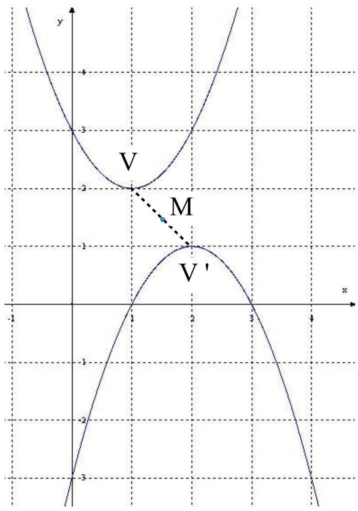
Problema n°1 ordinario 1987

b) Dimostra che le parabole di equazione $y=x^2-2x-3$ e $y=-x^2+4x-3$ sono congruenti.

Svolgimento

Le parabole si corrispondono nella trasformazione di equazioni:

$\begin{cases} x'=3-x \\ y'=-3-y \end{cases}$, ovvero nella simmetria centrale rispetto al punto $M(3/2,-3/2)$, punto medio del segmento che congiunge i vertici delle due parabole.



Problema n°4 ordinario 1987

Data la retta r di equazione $y=mx$, sia r' la sua simmetrica rispetto alla bisettrice del primo e del terzo quadrante.

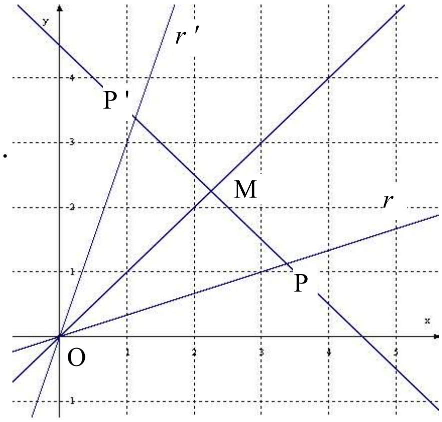
Individua la particolare coppia di rette r ed r' tali che il triangolo isoscele formato da esse e da una generica retta perpendicolare alla bisettrice considerata abbia l'altezza uguale alla base.

Risoluzione analitica

Il punto generico della retta *r* ha coordinate $P(t, mt)$.

Il simmetrico di P rispetto alla bisettrice del primo e del terzo quadrante è $P'(mt, t)$.

Il punto medio del segmento PP' ha coordinate $M(t\frac{(m+1)}{2}, t\frac{(m+1)}{2})$.



La base del triangolo OPP' è $PP'=|x_P-x_{P'}|\sqrt{2}=|(1-m)t|\sqrt{2}$.

L'altezza dello stesso triangolo è: $OM=|x_M-x_O|\sqrt{2}=\frac{|(m+1)t|}{\sqrt{2}}$.

Il testo richiede che $PP'=OM \Rightarrow |(1-m)t|\sqrt{2}=\frac{|(m+1)t|}{\sqrt{2}}$.

Dividiamo per *t* ed eleviamo al quadrato:

$$2(m-1)^2=\frac{(m+1)^2}{2} \Rightarrow 3m^2-10m+3=0 \Rightarrow m_1=\frac{1}{3},\ m_2=3 .$$

Le rette *r* ed r' hanno quindi equazioni $y=\frac{1}{3}x$ e $y=3x$ (o viceversa).

Risoluzione goniometrica

La condizione del testo equivale ad imporre che $tg\,\alpha=\frac{PM}{OM}=\frac{1}{2}$.

D'altra parte, per la formula dell'angolo tra due rette: $tg\,\alpha=\frac{1-m}{1+m}$ (ponendo $m<1$).

Di conseguenza: $\frac{1-m}{1+m}=\frac{1}{2} \Rightarrow m=\frac{1}{3}$, come nel caso precedente.

Problema n°1 ordinario 1985

a) Data la parabola p_1 di equazione $y=3x-x^2$, scrivi l'equazione della parabola p_2 ad essa simmetrica rispetto all'asse delle ordinate e quelle delle parabole p_3 e p_4 ad esse simmetriche rispetto alla retta congiungente i loro vertici.

b) Calcola l'area della regione finita di piano delimitata dalle quattro parabole.

Svolgimento

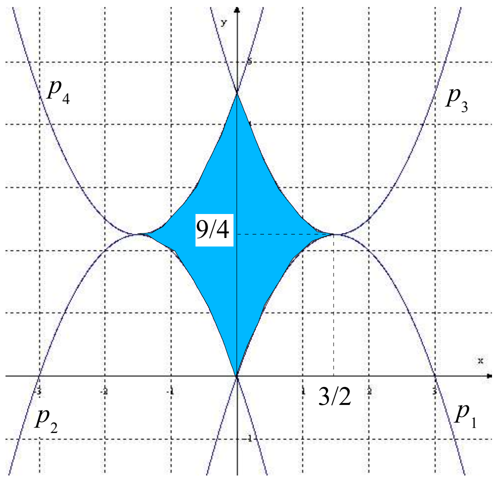
a) Ricaviamo l'equazione di p_2 tramite la sostituzione $x \to -x$: p_2: $y = -3x - x^2$.

La retta dei vertici di p_1 e p_2 ha equazione $y = 9/4$.

La simmetria rispetto a tale retta ha equazioni: $\begin{cases} x' = x \\ y' = 9/2 - y \end{cases}$.

Ricaviamo quindi: p_3: $y = x^2 - 3x + 9/2$, p_4: $y = x^2 + 3x + 9/2$.

b) Per il teorema di Archimede, l'area richiesta misura: $A = 4 \cdot \frac{1}{3} \cdot \frac{3}{2} \cdot \frac{9}{4} = \frac{9}{2}$.



Problema n°1 ordinario 1984

b) Individua la traslazione che rende la curva di equazione $y = 2x^3 - 3x^2 + 1$ simmetrica rispetto all'origine degli assi.

Svolgimento

La generica traslazione $\begin{cases} x' = x + p \\ y' = y + q \end{cases}$ trasforma l'equazione della curva in:

$$y - q = 2(x-p)^3 - 3(x-p)^2 + 1 \Rightarrow y = 2x^3 + (-6p-3)x^2 + (3p^2+6p)x - 2p^3 - 3p^2 + 1 + q \ .$$

Osserviamo che una funzione del tipo $y = P(x)$, dove $P(x)$ è un polinomio, è simmetrica rispetto all'origine se contiene solo termini di grado dispari in *x*.

Imponiamo quindi: $\begin{cases} -6\,p-3=0 \\ -2\,p^3-3\,p^2+1+q \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} p=-1/2 \\ q=-1/2 \end{cases}$.

Le equazioni della traslazione richiesta sono quindi: $\begin{cases} x'=x-1/2 \\ y'=y-1/2 \end{cases}$.