TRASFORMAZIONI GEOMETRICHE

4^C PNI

2012 - 2013

Liceo Scientifico "G. Marconi"

Indice

1. Introduzione

Definizione: una **trasformazione geometrica** è una corrispondenza biunivoca definita sull'insieme dei punti del piano.

In altri termini, in una trasformazione geometrica:

- ogni punto P del piano π ha un unico corrispondente P';
- ogni punto P' del piano π è il corrispondente di un unico punto P.

Diremo che:

- P' è *l'immagine* (o il trasformato, o il corrispondente) di P;
- P è la *controimmagine* (o antitrasformato) di P'.

Una trasformazione geometrica può essere definita in termini puramente sintetici.

Esempio: data una retta r e dato un fascio improprio avente direzione diversa da quella di r, possiamo associare ad ogni punto P del piano il punto P' che si ottiene con il seguente procedimento:

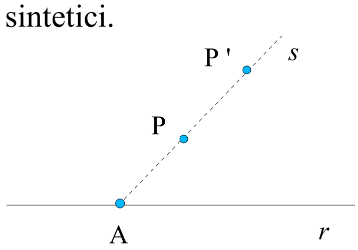

Fig. 1

- traccia la retta s del fascio passante per P;
- indica con A il punto in cui la retta s interseca r;
- indica con P' il punto di s posto dalla stessa parte di P rispetto ad r e tale che $AP'=2AP$.

La corrispondenza che manda P in P' è una trasformazione geometrica, detta *omologia affine* (che, a scanso di equivoci, non incontreremo più in seguito).

Se hai seguito l'esempio precedente, avrai intuito che, generalmente, è più semplice definire le trasformazioni geometriche in termini analitici. Introduciamo nel piano su cui agisce la trasformazione un sistema di coordinate cartesiane ortogonali e scriviamo le equazioni che legano le coordinate (x', y') del punto "di arrivo" P' a quelle (x, y) del punto "di partenza" P.

Esempio: le equazioni $\begin{cases} x'=2x-y+1 \\ y'=4x+2y-1 \end{cases}$ definiscono una trasformazione geometrica (che chiameremo *affinità*). E' evidente che ogni punto del piano ammette uno ed un solo corrispondente. Per essere certi che tale corrispondenza sia biunivoca, la cosa più semplice è controllare che sia invertibile. Considerando (x', y') come "termini noti" e (x, y) come "incognite", possiamo risolvere il precedente sistema, ad esempio con il metodo di sostituzione:

$$\begin{cases} y=2x-x'+1 \\ y'=4x+4x-2x'+2-1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y=\dots \\ x=\frac{1}{4}x'+\frac{1}{8}y'-\frac{1}{8} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x=\frac{1}{4}x'+\frac{1}{8}y'-\frac{1}{8} \\ y=-\frac{1}{2}x'+\frac{1}{4}y'+\frac{3}{4} \end{cases} .$$

Vediamo che la corrispondenza è invertibile, e quindi biunivoca.

Controesempi: consideriamo alcune corrispondenze tra punti del piano che, per vari motivi, non sono delle trasformazioni geometriche.

- Data una retta *r*, la corrispondenza che associa ad ogni punto P del piano la sua proiezione ortogonale H su *r* non è una trasformazione geometrica. Infatti, i punti come P_1 e P_2 che si trovano su una stessa retta perpendicolare ad *r* ammettono la stessa proiezione su *r*. La corrispondenza, pertanto, non è iniettiva e, quindi, non è invertibile.

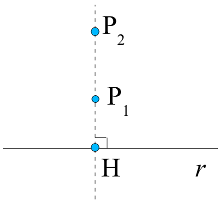

Fig. 2

- La corrispondenza definita dalle equazioni $\begin{cases} x'=x \\ y'=y^2 \end{cases}$ non è una trasformazione geometrica, in quanto punti aventi stessa ascissa e ordinate opposte hanno lo stesso corrispondente. Di conseguenza, la corrispondenza non è iniettiva, e, pertanto, non è invertibile. In altri termini, provando ad invertire la seconda equazione, otterremmo $y=\pm\sqrt{y'}$, che non è una funzione.
- La corrispondenza definita dalle equazioni $\begin{cases} x'=1/x \\ y'=1/y \end{cases}$ non è a rigor di termini una trasformazione geometrica, in quanto esiste un punto (ovvero l'origine degli assi) che non ammette un corrispondente, e non è il corrispondente di nessun punto del piano.

  In realtà, i matematici, introducendo dei “punti all'infinito”, detti *punti impropri*, considerano una corrispondenza del genere come una trasformazione geometrica, ma, in ogni caso, essa non rientra nella tipologia che studieremo, che è quella delle *affinità*.
- Le equazioni $\begin{cases} x'=2x+y \\ y'=4x+2y-3 \end{cases}$, nonostante l'apparenza abbastanza innocua, non definiscono una trasformazione geometrica. Infatti, risolvendole in termini di (x, y) , ad esempio con il metodo di sostituzione, otteniamo: $\begin{cases} y=x'-2x \\ y'=4x+2x'-4x-3 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y=... \\ y'=2x'-3 \end{cases}$.

  Il fatto che l'incognita *x* “sparisca” dalla seconda equazione ci fa capire che la corrispondenza non è invertibile, e quindi non è una trasformazione geometrica.

  Dalla seconda equazione comprendiamo anche come agisce la corrispondenza: qualunque punto P del piano ha un'immagine P' che si trova sulla retta di equazione $y=2x-3$, quindi vi sono infiniti punti che hanno lo stesso corrispondente. Ad esempio, tutti i punti della retta di equazione $y=-2x$ hanno come immagine il punto $P'(0,3)$.

  Impareremo nella prossima sezione come capire quando delle equazioni lineari definiscono una trasformazione geometrica, che chiameremo *affinità*, e quando, come nel caso attuale, la corrispondenza non è biunivoca, e quindi non è una trasformazione geometrica.

◆ L'immagine di un punto e quella di una curva

Per determinare l'immagine di un punto, è sufficiente sostituirne le coordinate nelle equazioni che definiscono la trasformazione.

Esempio: l'immagine del punto $A(4,-1)$ nella trasformazione di equazioni $\begin{cases} x'=2x-y+3 \\ y'=-x+y+1 \end{cases}$ ha coordinate $\begin{cases} x'=8+1+3=12 \\ y'=-4-1+1=-4 \end{cases}$, e quindi: $A'(12,-4)$.

Per determinare l'immagine di una curva, invece, è necessario invertire le equazioni che definiscono la trasformazione, in modo da ricavare le "vecchie" coordinate (x, y) in funzione delle "nuove", e quindi sostituirle nell'equazione della curva.

Esempio: vogliamo determinare l'immagine della retta r di equazione $y=-2x+3$ nella trasformazione definita dalle equazioni $\begin{cases} x'=2x-y+3 \\ y'=-x+y+1 \end{cases}$. Con il metodo di sostituzione, o un altro dei metodi studiati al biennio, invertiamo le equazioni della trasformazione:

$$\begin{cases} y=2x-x'+3 \\ y'=-x+2x-x'+3+1=x-x'+4 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y=\ldots \\ x=x'+y'-4 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x=x'+y'-4 \\ y=x'+2y'-5 \end{cases} .$$

Sostituiamo le equazioni della trasformazione inversa nell'equazione della retta:

$$y=-2x+3 \ \rightarrow \ x'+2y'-5=-2(x'+y'-4)+3 \ \rightarrow \ y=-\frac{3}{4}x+4 \ .$$

Quindi la retta *r* viene trasformata nella retta r' di equazione $y=-\frac{3}{4}x+4$.

Osservazioni:

- Appena eseguita la trasformazione, possiamo "lasciar cadere" gli apici dall'equazione della curva trasformata.
- Il fatto che l'immagine di una retta sia anch'essa una retta non è casuale, ma dipende dal fatto che le equazioni della trasformazione data (e, quindi, quelle della sua inversa) siano lineari (ovvero di primo grado). Ripetiamo che le trasformazioni di questo genere vengono chiamate *affinità*, e costituiscono l'oggetto del nostro studio.

L'uso delle equazioni "dirette" della trasformazione, invece, ci permette di determinare l'equazione della controimmagine di una curva.

Esempio: vogliamo determinare quale curva λ viene mandata nella retta r' di equazione $y=2x+1$ dalla trasformazione di equazioni $\begin{cases} x'=2x-y+3 \\ y'=-x+y+1 \end{cases}$ considerata in precedenza.

Dal momento che la retta è la "figura di arrivo" della trasformazione, facciamo finta che le variabili che compaiono nella sua equazione contengano degli apici: $y'=2x'+1$, e vi sostituiamo le equazioni della trasformazione: $-x+y+1=2(2x-y+3)+1 \Rightarrow y=\frac{5}{3}x+2$.

Scopriamo così, con scarsa sorpresa, che anche la "curva" λ è in realtà una retta.

- **Punti e figure unite**

Definizione: un punto P del piano viene detto **punto unito** di una trasformazione geometrica se coincide con la sua immagine: $P \equiv P'$.
In maniera analoga, almeno in apparenza, una figura F (ovvero un insieme di punti del piano) viene detta **figura unita** se coincide con la sua immagine: $F \equiv F'$, ovvero se ogni punto $P \in F$ ha come corrispondente un punto $P' \in F$.

L'analogia è solo apparente, perché, in realtà, una figura può risultare unita in due modi distinti.

Esempio: consideriamo la trasformazione geometrica (detta *simmetria assiale*) che associa a ogni punto P del piano il suo simmetrico rispetto ad una data retta *a*. Dimostreremo che tale trasformazione manda rette in rette. Ad esempio, l'immagine della retta *r* in figura è r' , che è distinta da *r*.

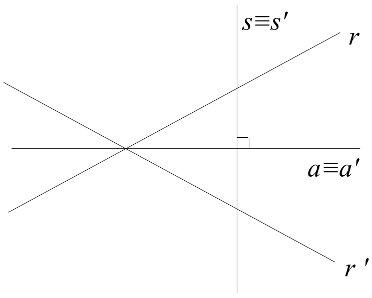

Fig. 3

Se, però, *s* è una retta del piano perpendicolare ad *r*, allora la sua trasformata è *s* stessa, in quanto ogni punto della retta *s* viene mandato in un altro punto di *s;* quindi *s* è una **retta unita** della trasformazione.

Inoltre, anche l'asse di simmetria *a* viene lasciato invariato dalla trasformazione, per cui anche *a* è una retta unita. Notiamo, però, che, mentre ogni punto dell'asse di simmetria *a* è punto unito, i punti di *s*, generalmente, non sono uniti.

Per distinguere queste due situazioni, possiamo dire che:

- se una figura è unita, e tutti i suoi punti sono uniti, allora tale figura è **puntualmente unita**, o **fissa**, o **luogo di punti uniti**;
- se, invece, una figura è unita ma, in generale, non è composta da punti uniti, allora tale figura è **globalmente unita**.

Per determinare i punti uniti di una trasformazione geometrica, è sufficiente imporre $\begin{cases} x'=x \\ y'=y \end{cases}$ nelle equazioni che definiscono la trasformazione.

Esempi:

- $\begin{cases} x'=-x+y \\ y'=2y-1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x=-x+y \\ y=2y-1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x=1/2 \\ y=1 \end{cases}$. Il sistema è determinato, per cui la trasformazione ammette un unico punto unito: $A(1/2,1)$.

- $\begin{cases} x'=x-2 \\ y'=y+1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x=x-2 \\ y=y-1 \end{cases} \Rightarrow \emptyset$. Il sistema è impossibile, per cui la trasformazione (come era prevedibile, trattandosi di una traslazione) non ammette punti uniti.
- $\begin{cases} x'=2y-1 \\ y'=\frac{1}{2}x+\frac{1}{2} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x=2y-1 \\ y=\frac{1}{2}x+\frac{1}{2} \end{cases} \Rightarrow y=\frac{1}{2}x+\frac{1}{2}$. Il sistema è indeterminato, in quanto composto da due equazioni equivalenti. La trasformazione ha quindi infiniti punti uniti, che sono tutti quelli della retta di equazione $y=\frac{1}{2}x+\frac{1}{2}$. Tale retta è pertanto puntualmente unita.

La richiesta di determinare le figure unite di una trasformazione è in generale molto più laboriosa. Nel seguito, ci limiteremo alle rette unite; la generalizzazione dovrebbe essere immediata.
Osserviamo che il procedimento che risulta più spontaneo, ovvero quello di partire dalla generica retta *r*, determinarne l'immagine r' , e imporre che $r\equiv r'$, è in realtà lievemente più laborioso, in quanto richiede di invertire le equazioni della trasformazione.

Se non abbiamo le equazioni della trasformazione inversa, conviene, quindi, partire dalla generica immagine r' , determinare la sua *controimmagine r* (ovvero la retta che viene mandata in r' dalla trasformazione), e imporre che $r\equiv r'$.

Esempio: consideriamo la trasformazione di equazioni $\begin{cases} x'=-x+y \\ y'=2y-1 \end{cases}$.

Consideriamo una retta r' di equazione $y'=mx'+q$. Otteniamo l'equazione della sua controimmagine *r* sostituendo nell'equazione di r' le equazioni della trasformazione:

$$2y-1=m(-x+y)+q \Rightarrow y=\frac{m}{m-2}x+\frac{q+1}{2-m} .$$

In realtà, il calcolo eseguito è corretto solo per $m\neq 2$. Questa non è una limitazione, in quanto per $m=2$ "sparisce" il termine in *y*, quindi la retta *r* è verticale, e non può coincidere con r' , che è obliqua.

L'equazione di *r* coincide con quella di r' se $\frac{m}{m-2}=m \wedge \frac{q+1}{2-m}=q$.

Dalla prima condizione, otteniamo: $m^2-3m=0 \Rightarrow m_1=0;\ m_2=3$.

Sostituendo tali valori nella seconda condizione, otteniamo: $q_1=1;\ q_2=-1/2$.

Vi sono pertanto due rette globalmente unite della forma $y=mx+q$, ed hanno equazioni:

$$r_1:\ y=1 \ ;\ r_2:\ y=3x-\frac{1}{2} .$$

Rimangono da esaminare le rette parallele all'asse *y*, che hanno equazione $x'=k$.

La loro generica controimmagine ha equazione $-x+y=k$. E' evidente che, per la presenza del termine in *y*, le due equazioni non possono coincidere per nessun valore di *k*. Di conseguenza, non esistono rette unite parallele all'asse *y*.

Se lo preferisci, puoi evitare di studiare due casi distinti (equazioni della forma $y=mx+q$ e della forma $x=k$), prendendo in considerazione l'equazione della retta in forma implicita.

Consideriamo quindi una retta r' di equazione $ax'+by'+c=0$.

La sua controimmagine *r* ha equazione $a(-x+y)+b(2y-1)+c=0 \Rightarrow -ax+(a+2b)y-b+c=0$.

Le rette r ed r' coincidono se le rispettive equazioni hanno coefficienti proporzionali:

$\frac{-a}{a}=\frac{a+2b}{b}=\frac{-b+c}{c}$. Risolvendo tali condizioni, ricaviamo: $\begin{cases} a=-6c \\ b=2c \end{cases}$ da cui, ponendo per semplicità $c=1$,

ritroviamo una retta unita: $-6x+2y+1=0 \Rightarrow y=3x-1/2$.

Osserviamo che la precedente condizione di proporzionalità perde significato quando $a=0$.

In questo caso, però, otteniamo: $\frac{2b}{b}=\frac{-b+c}{c} \Rightarrow b=-c$.

Così, assegnando $c=1$, ritroviamo anche l'altra retta unita: $y=1$.

◆ Composizione di trasformazioni

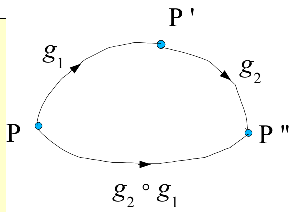

Fig. 4

Definizione: se abbiamo una trasformazione geometrica g_1 che manda il generico punto $P(x,y)$ in $P'(x',y')$ ed una seconda trasformazione geometrica g_2 che manda $P'(x',y')$ in $P''(x'',y'')$, diciamo che la **composizione** di g_1 e g_2 è la trasformazione $g_2 \circ g_1$ che manda $P(x,y)$ in $P''(x'',y'')$. In parole più semplici, $g_2 \circ g_1$ è la trasformazione ottenuta applicando in successione le trasformazioni g_1 e g_2 (in questo ordine).

No, non mi sto confondendo: se scrivo $g_2 \circ g_1$, significa proprio che applico prima g_1 e poi g_2!

Il motivo della "inversione" dell'ordine delle trasformazioni sta nel fatto che in questo modo risulta più semplice descriverne l'effetto quando vengono applicate ad una figura F: $(g_2 \circ g_1)F=g_2(g_1 F)=g_2 F'=F''$.

Osserva che una trasformazione può anche essere composta con se stessa, ovvero applicata due volte di seguito.

Esempio: consideriamo le trasformazioni g_1: $\begin{cases} x'=2x+1 \\ y'=3y-1 \end{cases}$; g_2: $\begin{cases} x'=x-3 \\ y'=y+2 \end{cases}$.

A partire da esse possiamo ricavare le quattro trasformazioni composte:

- $g_2 \circ g_1$: $\begin{cases} x''=x'-3=(2x+1)-3=2x-2 \\ y''=y'+2=(3y-1)+2=3y+1 \end{cases}$;
- $g_1 \circ g_2$: $\begin{cases} x''=2x'+1=2(x-3)+1=2x-5 \\ y''=3y'-1=3(y+2)-1=3y+5 \end{cases}$;

- $g_1 \circ g_1 : \begin{cases} x''=2x'+1=2(2x+1)+1=4x+3 \\ y''=3y'-1=3(3y-1)-1=9y-4 \end{cases}$;
- $g_2 \circ g_2 : \begin{cases} x''=x'-3=(x-3)-3=x-6 \\ y''=y'+2=(y+2)+2=y+4 \end{cases}$.

Osserviamo in particolare che $g_2 \circ g_1 \neq g_1 \circ g_2$, quindi l'operazione di composizione definita sull'insieme delle trasformazioni geometriche in generale non gode della proprietà commutativa.

Definizione: se la trasformazione geometrica *g* manda il generico punto $P(x, y)$ in $P'(x', y')$, allora la sua **trasformazione inversa** g^{-1} manda $P'(x', y')$ in $P(x, y)$.
Dalla definizione è evidente che la composizione tra una trasformazione geometrica e la sua trasformazione inversa è l'*identità* (ovvero la trasformazione che associa ad ogni punto del piano se stesso: $g \circ g^{-1} = g^{-1} \circ g = I$.

Definizione: una trasformazione geometrica viene detta **involutoria** se, componendola con se stessa, si ottiene l'identità: $g \circ g = g^2 = I$.
Anche in questo caso, dalla definizione è evidente che una trasformazione involutoria ha come inversa se stessa: $g \circ g = g^2 = I \Rightarrow g = g^{-1}$.

Esempio: consideriamo la trasformazione geometrica $g : \begin{cases} x'=-y+1 \\ y'=-x+1 \end{cases}$ e componiamola con se stessa: $g^2 = g \circ g : \begin{cases} x''=-y'+1=-(-x+1)+1=x \\ y''=-x'+1=-(-y+1)+1=y \end{cases}$.

Il risultato è l'identità, quindi *g* è una trasformazione involutoria (riesci a intuirne il motivo?).

Nota: Il contenuto di questo paragrafo corrisponde (con varie modifiche) alle pagine J1 2 - 6 del tuo libro di testo.

2. Trasformazioni lineari e matrici

Nel seguito non prenderemo più in considerazione delle generiche trasformazioni geometriche, ma ci limiteremo a quelle descritte da equazioni lineari, della forma $\begin{cases} x'=ax+by+p \\ y'=cx+dy+q \end{cases}$.

Tali trasformazioni, come abbiamo già accennato, vengono dette *affinità*.

Risulta spesso più pratico scrivere le precedenti equazioni in una forma diversa:

$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}+\begin{pmatrix} p \\ q \end{pmatrix}$, dove le quantità $\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} p \\ q \end{pmatrix}$ sono dei *vettori* a due componenti, mentre la tabella $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ viene chiamata **matrice** *quadrata di ordine due*.

E' evidente che, per ritrovare le equazioni di partenza, il prodotto tra una matrice ed un vettore deve dare come risultato un vettore definito nel modo seguente: $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} ax+by \\ cx+dy \end{pmatrix}$.

In pratica, per ottenere la prima componente del vettore prodotto, moltiplico la prima riga della matrice per il vettore e sommo i risultati ottenuti; quindi faccio lo stesso per ottenere la seconda componente del prodotto.

Definizione: chiamiamo **determinante** di una matrice quadrata A di ordine due la quantità:

$$\boldsymbol{det\ A=\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix}=ad-bc} \quad .$$

Esempi:

- la matrice $B=\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 4 & 2 \end{pmatrix}$ ha determinante $det\ B=\begin{vmatrix} 2 & -1 \\ 4 & 2 \end{vmatrix}=4+4=8$;
- la matrice $C=\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 4 & 2 \end{pmatrix}$ ha determinante $det\ C=\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 4 & 2 \end{vmatrix}=4-4=0$.

Teorema: la corrispondenza definita dalle equazioni $\begin{cases} x'=ax+by+p \\ y'=cx+dy+q \end{cases}$ è invertibile, e quindi è una trasformazione geometrica (più precisamente una *affinità*) se e soltanto se il determinante della matrice associata A è diverso da zero: $det\ A=ad-bc\neq 0$.

Dimostrazione: consideriamo le equazioni che definiscono la corrispondenza come un sistema nelle incognite x, y: $\begin{cases} ax+by=x'-p \\ cx+dy=y'-q \end{cases}$. Risolvendolo con il metodo di Leibniz – Cramer, otteniamo:

$$x=\frac{|A_x|}{|A|}=\frac{\begin{vmatrix} x'-p & b \\ y'-q & d \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix}} \quad ; \quad y=\frac{|A_y|}{|A|}=\frac{\begin{vmatrix} a & x'-p \\ c & y'-q \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix}} \quad .$$

Di conseguenza, il sistema risulta determinato, e la corrispondenza è invertibile, se e soltanto se il determinante della matrice dei coefficienti è diverso da zero.

Osservazione: come hai visto anche al biennio, l'annullarsi del determinante si può esprimere:

$$ad-bc=0 \;\Rightarrow\; ad=bc \;\Rightarrow\; \frac{a}{c}=\frac{b}{d} \quad \text{, oppure} \quad \frac{a}{b}=\frac{c}{d} \quad .$$

Quindi il determinante di una matrice quadrata è uguale a zero se e soltanto se le sue righe, e quindi le sue colonne, sono direttamente proporzionali o, in termini più tecnici, sono *linearmente indipendenti*.

Esempi:

- la corrispondenza definita dalle equazioni $\begin{cases} x'=2x-y+1 \\ y'=4x+2y-1 \end{cases}$ è una affinità, in quanto, come abbiamo appena visto: $det\, B=\begin{vmatrix} 2 & -1 \\ 4 & 2 \end{vmatrix}=4+4=8\neq 0$;
- la corrispondenza definita dalle equazioni $\begin{cases} x'=2x+y \\ y'=4x+2y-3 \end{cases}$ non è una affinità, in quanto, come abbiamo appena visto: $det\, C=\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 4 & 2 \end{vmatrix}=4-4=0$.

Osserva che si tratta delle stesse corrispondenze che avevamo studiato nella sezione precedente con metodo diverso, ma, ovviamente, giungendo alle stesse conclusioni.

◆ Affinità inversa

Definizione: il prodotto tra due matrici quadrate di ordine due $A=\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ e $B=\begin{pmatrix} e & f \\ g & h \end{pmatrix}$ si svolge nel modo seguente: $A\cdot B=\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} e & f \\ g & h \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} ae+bg & af+bh \\ ce+dg & cf+dh \end{pmatrix}$.

In pratica, moltiplichiamo ogni riga della prima matrice per ogni colonna della seconda e sommiamo i termini ottenuti.

Osserviamo che: $B\cdot A=\begin{pmatrix} e & f \\ g & h \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} ae+cf & be+df \\ ag+ch & bg+dh \end{pmatrix}\neq A\cdot B$, per cui il prodotto tra matrici non gode della proprietà commutativa. D'altra parte, potevamo aspettarcelo, visto che una delle innumerevoli applicazioni delle matrici è quella di rappresentare le affinità, la cui composizione non è commutativa.

Definizione: data una matrice quadrata A, che per semplicità prendiamo di ordine due, chiamiamo **matrice inversa** di A, se esiste, la matrice quadrata A^{-1} , sempre di ordine due, che, moltiplicata per A, dà come risultato la *matrice unità*: $A\cdot A^{-1}=A^{-1}\cdot A=I$ con $I=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}$.

Teorema: se $A=\begin{pmatrix}a & b\\ c & d\end{pmatrix}$ è una matrice quadrata di ordine due con $det\,A=ad-bc\neq 0$, allora la matrice A è invertibile, e la sua inversa è: $A^{-1}=\begin{pmatrix}\frac{d}{|A|} & -\frac{b}{|A|}\\ -\frac{c}{|A|} & \frac{a}{|A|}\end{pmatrix}$.

In pratica, per ottenere la matrice inversa di A:

- scambia tra loro gli elementi della diagonale principale;
- cambia di segno gli elementi della diagonale secondaria;
- dividi tutti gli elementi per il determinante di A (che deve essere diverso da zero).

Dimostrazione: data la matrice $A=\begin{pmatrix}a & b\\ c & d\end{pmatrix}$, cerchiamo una matrice $A^{-1}=\begin{pmatrix}e & f\\ g & h\end{pmatrix}$ in modo che: $A\cdot A^{-1}=I$.

Deve essere: $A\cdot A^{-1}=\begin{pmatrix}a & b\\ c & d\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}e & f\\ g & h\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}ae+bg & af+bh\\ ce+dg & cf+dh\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}$.

La precedente uguaglianza tra matrici equivale al sistema: $\begin{cases}ae+bg=1\\ af+bh=0\\ ce+dg=0\\ cf+dh=1\end{cases}$ che, risolto nelle incognite *e*, *f*, *g*, *h*, fornisce la soluzione precedente.

Esempi:

- se $B=\begin{pmatrix}2 & -1\\ 4 & 2\end{pmatrix}$, con $det\,B=\begin{vmatrix}2 & -1\\ 4 & 2\end{vmatrix}=4+4=8$, allora $B^{-1}=\begin{pmatrix}1/4 & 1/8\\ -1/2 & 1/4\end{pmatrix}$;
- se $C=\begin{pmatrix}2 & 1\\ 4 & 2\end{pmatrix}$, con $det\,C=\begin{vmatrix}2 & 1\\ 4 & 2\end{vmatrix}=4-4=0$, allora la matrice C non ammette inversa.

Proprietà: data la affinità definita dall'equazione (in forma matriciale) $\vec{x}\,'=A\vec{x}+\vec{v}$ con $det\,A\neq 0$, allora l'equazione della affinità inversa si ottiene applicando a ciascun termine dell'equazione la matrice inversa A^{-1}: $A^{-1}\vec{x}\,'=A^{-1}A\vec{x}+A^{-1}\vec{v} \Rightarrow A^{-1}\vec{x}\,'=I\vec{x}+A^{-1}\vec{v}$ e, quindi: $\boldsymbol{\vec{x}=A^{-1}\vec{x}\,'-A^{-1}\vec{v}}$.

Esempio: Riprendiamo la affinità definita dalle equazioni $\begin{cases}x'=2x-y+1\\ y'=4x+2y-1\end{cases}$.

Scriviamo l'equazione in forma matriciale: $\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 4 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$.

Applichiamo ad entrambi i membri la matrice inversa $\begin{pmatrix} 1/4 & 1/8 \\ -1/2 & 1/4 \end{pmatrix}$ calcolata nell'esempio precedente: $\begin{pmatrix} 1/4 & 1/8 \\ -1/2 & 1/4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1/4 & 1/8 \\ -1/2 & 1/4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 4 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1/4 & 1/8 \\ -1/2 & 1/4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} \Rightarrow$

$$\begin{pmatrix} 1/4 & 1/8 \\ -1/2 & 1/4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1/4-1/8 \\ -1/2-1/4 \end{pmatrix} \Rightarrow$$

$$\begin{pmatrix} 1/4 & 1/8 \\ -1/2 & 1/4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1/8 \\ -3/4 \end{pmatrix} \Rightarrow \quad \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1/4 & 1/8 \\ -1/2 & 1/4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -1/8 \\ +3/4 \end{pmatrix} .$$

Le equazioni della affinità inversa sono quindi: $\begin{cases} x = \frac{1}{4}x' + \frac{1}{8}y' - \frac{1}{8} \\ y = -\frac{1}{2}x' + \frac{1}{4}y' + \frac{3}{4} \end{cases}$.

Puoi verificare che questo risultato coincide con quello ottenuto nel paragrafo precedente risolvendo il sistema delle equazioni date rispetto alle incognite x, y.

◆ Composizione di affinità

Proprietà: date le affinità g ed h rispettivamente definite dalle equazioni (in forma matriciale) $g:\ \vec{x}' = A\vec{x} + \vec{v}$ e $h:\ \vec{x}' = B\vec{x} + \vec{w}$ con $\det A \neq 0$ e $\det B \neq 0$, allora l'equazione della affinità composta $h \circ g$ si ottiene applicando prima l'equazione di g e poi quella di h:
$h \circ g:\ \vec{x}'' = B\vec{x}' + \vec{w} = B(A\vec{x} + \vec{v}) + \vec{w} = B \cdot A\vec{x} + B\vec{v} + \vec{w}$.

Osservazione: in maniera analoga, si ottiene: $g \circ h:\ \vec{x}'' = A\vec{x}' + \vec{v} = A(B\vec{x} + \vec{w}) + \vec{v} = A \cdot B\vec{x} + A\vec{w} + \vec{v} \neq h \circ g$
da cui vediamo ancora una volta che l'operazione di composizione, definita sull'insieme delle trasformazioni geometriche, non è commutativa.

Esempio: date le affinità $g: \begin{cases} x' = 2x + 6 \\ y' = 2y \end{cases}$, $h: \begin{cases} x' = -y + 3 \\ y' = x - 4 \end{cases}$, scriviamo le loro equazioni in forma matriciale: $g: \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 6 \\ 0 \end{pmatrix}$, $h: \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 3 \\ -4 \end{pmatrix}$.

Determiniamo le equazioni delle possibili affinità composte:

- $g \circ h: \begin{pmatrix} x'' \\ y'' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 6 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 \\ -4 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 6 \\ 0 \end{pmatrix} =$

$$= \begin{pmatrix} 0 & -2 \\ 2 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 6 \\ -8 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 6 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -2 \\ 2 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 12 \\ -8 \end{pmatrix} \text{ , ovvero } \begin{cases} x' = -2y + 12 \\ y' = 2x - 8 \end{cases} ;$$

- $h \circ g: \begin{pmatrix} x'' \\ y'' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 3 \\ -4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 6 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 3 \\ -4 \end{pmatrix} =$

$$= \begin{pmatrix} 0 & -2 \\ 2 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 6 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 3 \\ -4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -2 \\ 2 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix} \text{ , ovvero } \begin{cases} x' = -2y + 3 \\ y' = 2x + 2 \end{cases} .$$

Abbiamo nuovamente verificato che, in generale, le trasformazioni geometriche non commutano e, quindi, l'ordine con il quale vengono applicate è importante.

Anche la circostanza che le due affinità composte abbiano la stessa matrice associata è un caso particolare, legato al fatto che una delle due è multipla della matrice identità.

Nota: Il contenuto di questo paragrafo corrisponde (con varie modifiche) alle pagine J_1 37 - 39 del tuo libro di testo.

3. Isometria

◆ Definizioni introduttive

Definizione: chiamiamo **isometria** una corrispondenza biunivoca tra punti del piano π (ovvero, una trasformazione geometrica) che lascia invariata la distanza tra due punti: $\forall A, B \in \pi \rightarrow d(A,B) = d(A', B')$.

Teorema: una isometria conserva l'allineamento dei punti, ovvero trasforma rette in rette.

Dimostrazione: Prendiamo tre punti allineati (ovvero, che appartengono alla stessa retta) A, B, C, con B compreso tra A e C. Avremo ovviamente: $AB+BC=AC$. Poiché l'isometria conserva le distanze, i loro corrispondenti A', B', C' saranno tali che $A'B'+B'C'=A'C'$. Ma questa uguaglianza può essere valida soltanto se anche A', B', C' sono allineati, con B' compreso tra A' e C'. (Infatti, se i tre punti non fossero allineati, sarebbe valida la disuguaglianza triangolare: $A'B'+B'C'>A'C'$).

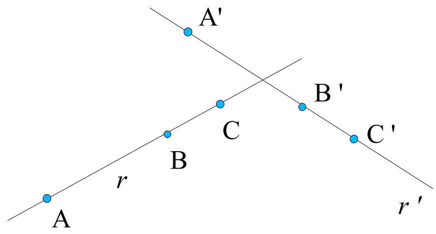

Fig. 5

Teorema: una isometria conserva il parallelismo, ovvero trasforma due rette r ed s parallele tra loro in due rette r' ed s' parallele tra loro: $r \| s \Rightarrow r' \| s'$.

Dimostrazione: supponiamo per assurdo che r' ed s' abbiano un punto di intersezione P'. Allora, la controimmagine P di P' dovrebbe appartenere sia ad r che ad s, che pertanto non sarebbero parallele, il che va contro l'ipotesi.

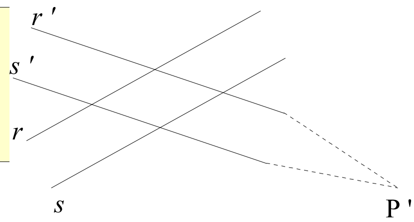

Fig. 6

Teorema: in una isometria, le misure degli angoli sono invarianti, ovvero un angolo α viene mandato in un angolo $\alpha' = \alpha$.

Dimostrazione: se i punti A, B, C vengono trasformati in A', B', C' in modo che le distanze si conservino, allora i triangoli ABC e A'B'C' sono congruenti per il terzo criterio, e quindi hanno gli angoli ordinatamente uguali.

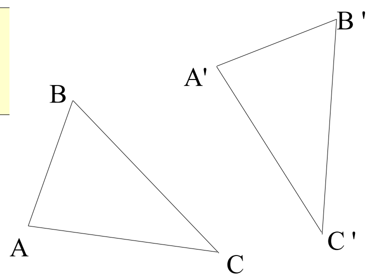

Fig. 7

Corollario: una isometria conserva la perpendicolarità, ovvero trasforma due rette r ed s perpendicolari tra loro in due rette r' ed s' perpendicolari tra loro: $r \perp s \Rightarrow r' \perp s'$.

Definizione: dato un insieme A, chiamiamo **legge di composizione interna**, o semplicemente **operazione** in A una funzione che ad ogni coppia ordinata di elementi dell'insieme di A associa un terzo elemento, sempre appartenente all'insieme A: $\forall a,b \in A \xrightarrow{f} c \in A$.

Esempi (un po' scemi):

- l'addizione e la moltiplicazione sono leggi di composizione interna nell'insieme $\mathbb{N}$ dei numeri naturali, perché associano a due qualunque numeri naturali un terzo numero naturale, ovvero la loro somma e il loro prodotto rispettivamente;
- la sottrazione non è una legge di composizione interna nell'insieme $\mathbb{N}$ dei numeri naturali, perché una operazione come $2-5$ non ammette risultato in $\mathbb{N}$; invece, essa è una legge di composizione interna nell'insieme $\mathbb{Z}$ dei numeri interi relativi, perché associa a due qualunque numeri interi un terzo numero intero, ovvero la loro differenza;
- la divisione non è una legge di composizione interna nell'insieme $\mathbb{N}$ dei numeri naturali, perché una operazione come $2:5$ non ammette risultato in $\mathbb{N}$; invece, essa è una legge di composizione interna nell'insieme $\mathbb{Q}_0$ dei numeri razionali privati dello zero, perché associa a due qualunque numeri razionali diversi da zero un terzo numero razionale, ovvero il loro quoziente.

Definizione: un insieme A sul quale è definita l'operazione $\square$ assume la *struttura algebrica* di **gruppo** se l'operazione gode delle seguenti proprietà:

a. è *associativa*, ovvero: $(a \square b) \square c = a \square (b \square c) \quad \forall a,b,c \in A$;

b. esiste l'*elemento neutro*: $\exists e \in A: \ a \square e = e \square a = a \quad \forall a \in A$;

c. ogni elemento dell'insieme ha un *elemento inverso*: $\forall a \in A \quad \exists a^{-1} \in A: \quad a \square a^{-1} = a^{-1} \square a = e$.

Se, inoltre, l'operazione $\square$ è anche *commutativa*, ovvero: $a \square b = b \square a \quad \forall a,b \in A$, allora il gruppo viene detto **abeliano** o **commutativo**.

Esempi:

- l'insieme $\mathbb{Z}$ dei numeri interi relativi forma un gruppo abeliano rispetto all'operazione di addizione, in cui l'elemento neutro è lo zero e l'inverso di un elemento è il suo opposto;
- l'insieme $\mathbb{Q}_0$ dei numeri razionali privati dello zero forma un gruppo abeliano rispetto all'operazione di moltiplicazione, in cui l'elemento neutro è l'unità e l'inverso di un elemento è il suo reciproco.

Teorema: l'insieme delle isometrie, sul quale definiamo l'operazione di composizione, assume la struttura di gruppo (non abeliano).

Possiamo infatti osservare che:

- la composizione di due isometrie è ancora una isometria;
- l'operazione di composizione gode della proprietà associativa;
- esiste (ed appartiene all'insieme delle isometrie), l'elemento neutro dell'operazione di composizione, che è dato dall'identità $\mathbb{I}$ (la trasformazione che associa ad ogni punto del piano il punto stesso);
- ogni isometria ammette una isometria inversa (quella che associa al “punto di arrivo” P' il “punto di partenza” P).

Nota: Il contenuto di questo paragrafo corrisponde (con modifiche) alle pagine J_1 8, J_2 3 e J_2 10-11 del tuo libro di testo.

◆ Simmetria assiale

Definizione: chiamiamo **simmetria assiale** rispetto alla retta r la trasformazione geometrica che ad ogni punto P del piano fa corrispondere il punto P' che si trova nel semipiano opposto a P rispetto ad r e tale che r è asse del segmento PP', ovvero:

- il punto medio M del segmento PP' appartiene ad r;
- PP' è perpendicolare ad r.

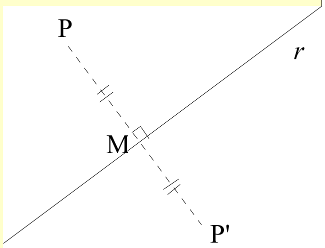

Fig. 8

Teorema: una simmetria assiale è una isometria.

Dimostrazione: se il segmento AB viene trasformato nel segmento A'B' dalla simmetria di asse r, allora i triangoli AHK e A'HK sono congruenti per il primo criterio. Ne segue che $AK=A'K$ e $A\hat{K}B=A'\hat{K}B'$ (in quanto complementari di angoli uguali). Quindi i triangoli AKB e A'KB' sono congruenti per il primo criterio, da cui $AB=A'B'$ c.v.d.

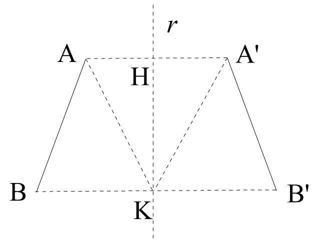

Fig. 9

Proprietà: la simmetria assiale è una trasformazione involutoria.

Risulta infatti evidente che, applicandola due volte di seguito (ovvero componendola con se stessa) si ottiene la trasformazione identica. In altri termini, la simmetria assiale coincide con la sua inversa.

Osservazione: l'insieme delle simmetrie assiali (anche limitandoci a quelle rispetto allo stesso asse) non forma un gruppo, in quanto la composizione di due simmetrie assiali non è una simmetria assiale (è l'identità, nel caso in cui le due simmetrie abbiano lo stesso asse; altrimenti, come vedremo, è una traslazione o una rotazione).

Proprietà: le equazioni della simmetria rispetto ad una retta di equazione $x=a$, parallela all'asse y, sono: $\begin{cases} \boldsymbol{x'=2a-x} \\ \boldsymbol{y'=y} \end{cases}$. In forma matriciale: $\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}+\begin{pmatrix} 2a \\ 0 \end{pmatrix}$.

In particolare, le equazioni della simmetria rispetto all'asse y sono: $\begin{cases} \boldsymbol{x'=-x} \\ \boldsymbol{y'=y} \end{cases}$.

Dimostrazione: un generico punto $P(x,y)$ viene mandato in un punto avente la stessa ordinata: $P'(x',y)$. Imponiamo che il punto medio M del segmento PP' appartenga all'asse di simmetria:

$$a=\frac{x+x'}{2} \Rightarrow x'=2a-x \text{ c.v.d.}$$

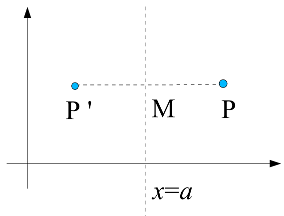

Fig. 10

Proprietà: le equazioni della simmetria rispetto ad una retta di equazione $y=b$, parallela all'asse *x*, sono: $\begin{cases} \boldsymbol{x'=x} \\ \boldsymbol{y'=2b-y} \end{cases}$. In forma matriciale: $\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 2b \end{pmatrix}$.

In particolare, le equazioni della simmetria rispetto all'asse *x* sono: $\begin{cases} \boldsymbol{x'=x} \\ \boldsymbol{y'=-y} \end{cases}$.

La dimostrazione è analoga alla precedente.

Proprietà: per determinare le equazioni della simmetria rispetto ad una generica retta di equazione $y=mx+q$, dobbiamo imporre che:

- il punto medio $M\left(\frac{x+x'}{2}, \frac{y+y'}{2}\right)$ del segmento PP' appartenga alla retta *r*;
- la retta PP' sia perpendicolare alla retta *r*.

Imponendo tali condizioni, otteniamo il sistema: $\begin{cases} \dfrac{y+y'}{2} = m\dfrac{x+x'}{2} + q \\ \dfrac{y'-y}{x'-x} = -\dfrac{1}{m} \end{cases}$

che, risolto rispetto alle incognite x' e y' , fornisce le equazioni richieste:

$$\begin{cases} x' = \dfrac{1-m^2}{1+m^2}x + \dfrac{2m}{1+m^2}y - \dfrac{2mq}{1+m^2} \\ y' = \dfrac{2m}{1+m^2}x - \dfrac{1-m^2}{1+m^2}y + \dfrac{2q}{1+m^2} \end{cases} .$$

Le precedenti equazioni <u>non</u> vanno imparate a memoria, ma devi essere in grado di ricavarle se ti viene richiesto. Tieni presente che, se la memoria non mi inganna, in sede di esame di stato sono stati assegnati solo esercizi in cui l'asse di simmetria era parallelo ad una delle bisettrici dei quadranti.

Esempio: determiniamo le equazioni della simmetria rispetto alla retta *r* di equazione $y=2x+1$.

Imponiamo che il punto medio del segmento PP' appartenga ad *r*: $\dfrac{y+y'}{2} = 2\cdot\dfrac{x+x'}{2} + 1$.

Imponiamo che la retta PP' sia perpendicolare ad *r*: $\dfrac{y'-y}{x'-x} = -\dfrac{1}{2}$.

Mettiamo a sistema le due condizioni precedenti e ricaviamo le incognite *x*', *y*':

$$\begin{cases} 2x'-y'=-2x+y-2 \\ x'+2y'=x+2y \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x' = -\dfrac{3}{5}x + \dfrac{4}{5}y - \dfrac{4}{5} \\ y' = \dfrac{4}{5}x + \dfrac{3}{5}y + \dfrac{2}{5} \end{cases} \Rightarrow \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3/5 & 4/5 \\ 4/5 & 3/5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -4/5 \\ 2/5 \end{pmatrix} .$$

Ovviamente, si tratta dello stesso risultato che avremmo ottenuto sostituendo $m=2$ e $q=1$ nelle formule generali.

In particolare, applicando il ragionamento precedente, puoi ricavare:

- equazione della simmetria rispetto alla bisettrice del primo e del terzo quadrante:

$$\begin{cases} \boldsymbol{x'=y} \\ \boldsymbol{y'=x} \end{cases} \Rightarrow \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \quad ;$$

- equazione della simmetria rispetto alla bisettrice del primo e del terzo quadrante:

$$\begin{cases} \boldsymbol{x'=-y} \\ \boldsymbol{y'=-x} \end{cases} \Rightarrow \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \quad .$$

Esercizio: considera la simmetria σ rispetto alla retta *r* di equazione $y=x+4$.

i. determina le equazioni della trasformazione. $\begin{cases} x'=y-4 \\ y'=x+4 \end{cases} \Rightarrow \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -4 \\ 4 \end{pmatrix}$

ii. determina le equazioni della trasformazione inversa.

Coincidono con quelle della trasformazione data. Questo significa che la trasformazione è involutoria.

iii. determina le equazioni della trasformazione composta $\sigma^2=\sigma\circ\sigma$.

$\begin{cases} x''=y'-4=x+4-4=x \\ y''=x'+4=y-4+4=y \end{cases}$. Componendo la simmetria con se stessa, si ottiene l'identità. Questo ci conferma che si tratta di una trasformazione involutoria.

iv. verifica che si tratta di una isometria.

Se i punti $A(x_A, y_A)$, $B(x_B, y_B)$ vengono mandati in $A'(x_{A'}, y_{A'})$, $B'(x_{B'}, y_{B'})$ allora:

$$A'B'=\sqrt{(x_{B'}-x_{A'})^2+(y_{B'}-y_{A'})^2}=\sqrt{(y_B-4-(y_A-4))^2+(x_B+4-(x_A+4))^2}=\sqrt{(y_B-y_A)^2+(x_B-x_A)^2}=AB \quad .$$

v. verifica che manda rette in rette.

La generica retta di equazione $ax+by+c=0$ viene mandata in:

$$a(y'-4)+b(x'+4)+c=0 \Rightarrow bx+ay+4b-4a+c=0 \quad .$$

L'equazione della trasformata è lineare, per cui rappresenta ancora una retta.

vi. verifica che manda rette parallele in rette parallele.

In realtà, l'abbiamo già verificato. Infatti, abbiamo appena visto che la retta di coefficiente angolare $m=-a/b$ viene mandata nella retta di coefficiente angolare $m'=-b/a=1/m$ che dipende solo da *m*, e non da *q*.

Di conseguenza, se sono uguali i coefficienti angolari delle rette date, lo sono anche quelli delle loro corrispondenti.

Se non sei convinto, prova a fare un ragionamento analogo distinguendo i casi $y=mx+q$ e $x=k$.

vii. verifica che manda rette perpendicolari in rette perpendicolari.

Per semplicità, limitiamoci a equazioni della forma $y=mx+q$. Se due rette r_1 ed r_2 sono perpendicolari, hanno coefficienti angolari tali che: $m_1\cdot m_2=-1$. Le loro corrispondenti avranno coefficienti angolari tali che:

$$m_1'\cdot m_2'=\frac{1}{m_1}\cdot\frac{1}{m_2}=-1 \quad \text{c.v.d.}$$

viii. determina i punti uniti della trasformazione.

Imponendo $\begin{cases} x'=x \\ y'=y \end{cases}$, ricaviamo: $y=x+4$. Quindi sono punti uniti tutti quelli dell'asse di simmetria.

ix. determina le rette unite della trasformazione.

Utilizzando i calcoli precedenti, vediamo che una retta coincide con la sua trasformata se: $\frac{b}{a}=\frac{a}{b}=\frac{4b-4a+c}{c}$.

Dalla prima condizione ricavo: $a^2=b^2 \Rightarrow a=\pm b$.

Se $a=b$, la seconda condizione diventa un'identità, quindi tutte le rette con $a=b$ sono unite. La loro equazione può essere scritta $ax+ay+c=0 \Rightarrow y=-x+q$. Vediamo quindi che si tratta del fascio di rette perpendicolari all'asse di simmetria. Esse sono rette globalmente unite.

Se $a=-b$, invece, ottengo: $c=-4b$. L'equazione della retta unita è $-bx+by-4b=0 \Rightarrow y=x+4$. Si tratta dell'asse di simmetria, che è puntualmente unito.

Probabilmente troverai il ragionamento più semplice distinguendo i casi $y=mx+q$ e $x=k$.

Nota: Il contenuto di questo paragrafo corrisponde (con varie modifiche) alle pagine J₁ 12 - 17 del tuo libro di testo.

◆ Simmetria centrale

Definizione: chiamiamo **simmetria centrale** rispetto al punto M la trasformazione geometrica che ad ogni punto P del piano fa corrispondere il punto P' tale che M è il punto medio tra P e P'.

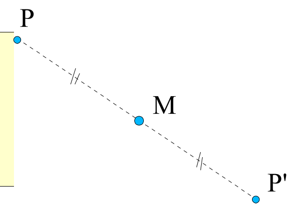

Fig. 11

Teorema: il prodotto (o composizione) di due simmetrie assiali con gli assi perpendicolari è la simmetria centrale rispetto al punto di intersezione degli assi.

Vale anche il teorema inverso: ogni simmetria centrale può essere vista come la composizione di due simmetrie assiali aventi gli assi perpendicolari e passanti per il centro di simmetria.

Dimostrazione: se il punto P viene trasformato in P' dalla simmetria rispetto alla retta *r* e P' viene mandato in P'' dalla simmetria rispetto alla retta *s*, allora $OP=OP'=OP''$ perché la simmetria assiale è una isometria. Inoltre, ponendo $P\hat{O}H=\alpha$, abbiamo $H\hat{O}P'=\alpha$, $\hat{P}'OK=K\hat{O}P''=90°-\alpha$ e quindi $P\hat{O}P''=180°$. ovvero P, O e P'' sono allineati c.v.d.

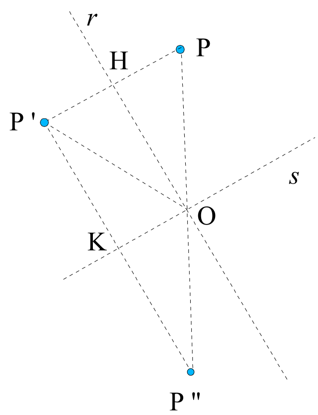

Fig. 12

Teorema: la simmetria centrale è una isometria. Inoltre la simmetria centrale conserva la direzione delle rette, ovvero manda una retta *r* in una retta r' tale che $r'\|r$.

Dimostrazione: se il segmento AB viene trasformato nel segmento A'B' dalla simmetria di centro O, allora i triangoli AOB e A'OB' sono congruenti per il primo criterio, quindi $AB=A'B'$ c.v.d.

Inoltre, $O\hat{A}'B'\simeq O\hat{A}B$, quindi le rette *r* ed *s*, tagliate dalla trasversale AA', formano angoli alterni interni congruenti, e pertanto sono parallele.

Avremmo anche potuto affermare che la simmetria centrale è una isometria, in quanto composizione di due simmetrie assiali, che sono anche esse isometrie.

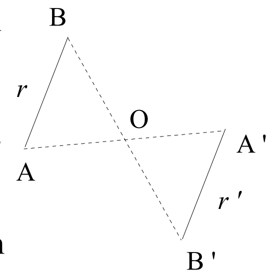

Fig. 13

Proprietà: la simmetria centrale è una trasformazione involutoria.

Risulta infatti evidente che, applicandola due volte di seguito (ovvero componendola con se stessa) si ottiene la trasformazione identica. In altri termini, la simmetria centrale coincide con la sua inversa.

Osservazione: l'insieme delle simmetrie centrali (anche considerando solo quelle aventi lo stesso centro) <u>non</u> forma un gruppo, in quanto la composizione di due simmetrie centrali non è una simmetria centrale (è l'identità, nel caso in cui le due simmetrie abbiano lo stesso centro; altrimenti, come vedremo, è una traslazione).

Proprietà: le equazioni della simmetria rispetto ad un punto $C(a,b)$ sono: $\begin{cases} \boldsymbol{x'=2a-x} \\ \boldsymbol{y'=2b-y} \end{cases}$.

In forma matriciale: $\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}+\begin{pmatrix} 2a \\ 2b \end{pmatrix}$.

In particolare, le equazioni della simmetria rispetto all'origine sono: $\begin{cases} \boldsymbol{x'=-x} \\ \boldsymbol{y'=-y} \end{cases}$.

Dimostrazione: se il punto $P(x,y)$ viene mandato in $P'(x',y)$, allora il centro di simmetria C deve essere il punto medio del segmento PP': $a=\dfrac{x+x'}{2} \Rightarrow x'=2a-x$, e lo stesso per l'ordinata.

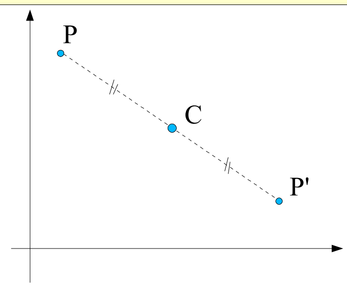

Fig. 14

Esercizio: considera la simmetria σ di centro $C(2,-3)$.

i. determina le equazioni della trasformazione. $\begin{cases} x'=4-x \\ y'=-6-y \end{cases} \Rightarrow \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}+\begin{pmatrix} 4 \\ -6 \end{pmatrix}$

ii. determina le equazioni della trasformazione inversa.

Coincidono con quelle della trasformazione data. Questo significa che la trasformazione è involutoria.

iii. determina le equazioni della trasformazione composta $\sigma^2=\sigma\circ\sigma$.

$\begin{cases} x''=4-x'=4-4+x=x \\ y''=-6-y'=-6+6+y=y \end{cases}$. Componendo la simmetria con se stessa, si ottiene l'identità. Questo ci conferma che si tratta di una trasformazione involutoria.

iv. verifica che si tratta di una isometria.

Se i punti $A(x_A,y_A)$, $B(x_B,y_B)$ vengono mandati in $A'(x_{A'},y_{A'})$, $B'(x_{B'},y_{B'})$ allora:

$$A'B'=\sqrt{(x_{B'}-x_{A'})^2+(y_{B'}-y_{A'})^2}=\sqrt{(4-x_B-(4-x_A))^2+(-6-y_B-(-6-y_A))^2}=\sqrt{(x_A-x_B)^2+(y_A-y_B)^2}=AB \quad .$$

v. verifica che manda rette in rette.

La generica retta di equazione $ax+by+c=0$ viene mandata in:

$a(4-x')+b(-6-y')+c=0 \;\Rightarrow\; ax+by-4a+6b-c=0 \quad .$

L'equazione della trasformata è lineare, per cui rappresenta ancora una retta.

vi. verifica che conserva la direzione delle rette.

Dai calcoli precedenti, vediamo che la retta di coefficiente angolare $m=-a/b$ viene mandata nella retta di coefficiente angolare $m'=-a/b=m$ c.v.d.

Conservando la direzione delle rette, vengono conservati anche il parallelismo e la perpendicolarità.

vii. determina i punti uniti della trasformazione.

Imponendo $\begin{cases} x'=x \\ y'=y \end{cases}$, ricaviamo: $\begin{cases} x=2 \\ y=3 \end{cases}$. Quindi l'unico punto unito è il centro di simmetria.

viii. determina le rette unite della trasformazione.

Una retta coincide con la sua trasformata se: $c=-4a+6b-c \;\Rightarrow\; c=-2a+3b \quad .$

Sono quindi unite le rette: $ax+by-2a+3b=0 \;\Rightarrow\; b(y+3)=-a(x-2) \;\Rightarrow\; y+3=m(x-2) \;\vee\; x=2 \quad .$

Si tratta del fascio di rette passanti per il centro di simmetria. Sono rette globalmente unite.

Prova a ripetere il ragionamento distinguendo i casi $y=mx+q$ e $x=k$.

Nota: Il contenuto di questo paragrafo corrisponde (con varie modifiche) alla pagina J_1 17 del tuo libro di testo.

◆ Traslazione

Definizione: chiamiamo **traslazione** di vettore $\vec{v}$ la trasformazione geometrica che associa ad ogni punto P del piano il punto P' che si ottiene applicando a P il vettore $\vec{v}$.

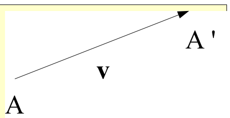

Fig. 15

Teorema: il prodotto (o composizione) di due simmetrie assiali con gli assi *r* ed *s* paralleli è la traslazione che ha:

- direzione perpendicolare a quella comune ad *r* ed *s*;
- verso che va da *r* (simmetria applicata per prima) ad *s* (simmetria applicata per seconda);
- modulo uguale al doppio della distanza tra gli assi *r* ed *s*.

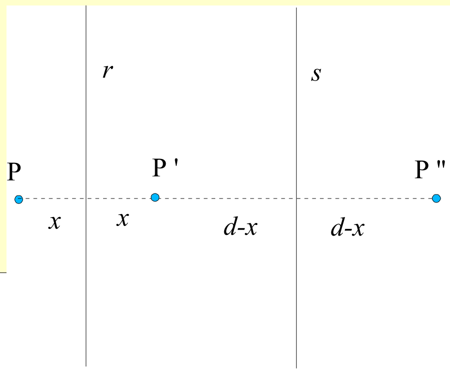

Fig. 16

Vale anche il teorema inverso: ogni traslazione può essere vista come la composizione di due simmetrie assiali aventi gli assi paralleli tra loro, perpendicolari al vettore della traslazione e distanti $|\vec{v}|/2$.

Dimostrazione: supponiamo che il punto P sia esterno alla striscia *rs* e che la sua distanza *x* da *r* sia minore della distanza d tra i due assi. La simmetria assiale rispetto ad r manda P in un punto P' le cui distanze da r ed s sono x e $d-x$ rispettivamente. In seguito, la simmetria assiale rispetto ad s manda P' in un punto P" la cui distanza da s è $d-x$. Ne segue che, comunque venga scelto il punto P, il segmento PP" è sempre perpendicolare agli assi r ed s e di lunghezza: $PP''=2x+2(d-x)=2d$ (indipendente da P) c.v.d.

Puoi "divertirti" a dimostrare che lo stesso risultato viene ottenuto qualunque sia la posizione di P.

Teorema: la traslazione è una isometria. Inoltre, la traslazione conserva la direzione delle rette, ovvero manda una retta r in una retta r' tale che $r'\|r$.

Dimostrazione: se il segmento AB viene trasformato nel segmento A'B' dalla traslazione di vettore $\vec{v}$, allora il quadrilatero AA'B'B ha i lati AA' e BB' opposti e paralleli, e quindi è un parallelogramma. Ne segue che $AB=A'B'$ e $A'B'\|AB$ c.v.d.

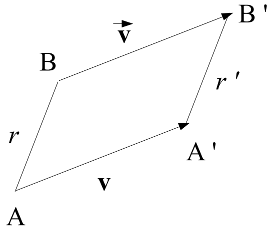

Fig. 17

Avremmo anche potuto affermare che la traslazione è una isometria, in quanto composizione di due simmetrie assiali, che sono anche esse isometrie.

Osservazione: è ovvio che la traslazione <u>non</u> è una trasformazione involutoria, in quanto applicandola due volte di seguito (ovvero componendola con se stessa) si ottiene una traslazione di vettore $2\vec{v}$, e non l'identità. Inoltre, la sua inversa è la traslazione di vettore $-\vec{v}$, che non coincide con la trasformazione di partenza.

Proprietà: l'insieme delle traslazioni, sul quale è definita l'operazione di composizione, forma un gruppo abeliano (sottogruppo del gruppo delle isometrie).

Possiamo infatti notare che:

- la composizione di due traslazioni di vettori $\vec{v}_1$ e $\vec{v}_2$, in qualunque ordine vengano prese, è ancora una traslazione (di vettore $\vec{v}_1+\vec{v}_2$);
- l'operazione di composizione gode della proprietà associativa;
- esiste (ed appartiene all'insieme delle traslazioni), l'elemento neutro dell'operazione di composizione, che è dato dall'identità $\mathbb{I}$ (in questo caso, la traslazione di vettore nullo);
- ogni traslazione ammette una traslazione inversa (quella di vettore opposto).

Proprietà: le equazioni della traslazione di vettore $\vec{v}\equiv(a,b)$ sono: $\begin{cases} \boldsymbol{x'=x+a} \\ \boldsymbol{y'=y+b} \end{cases}$.

In forma matriciale: $\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}+\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$.

Esercizio: considera la traslazione τ di vettore $\vec{v}\equiv(2,-3)$.

i. determina le equazioni della trasformazione. $\begin{cases} x'=x+2 \\ y'=y-3 \end{cases} \Rightarrow \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}+\begin{pmatrix} 2 \\ -3 \end{pmatrix}$

ii. determina le equazioni della trasformazione inversa τ^{-1} . $\begin{cases} x'=x-2 \\ y'=y+3 \end{cases}$

Esse non coincidono con quelle della trasformazione data, in quanto la trasformazione non è involutoria.

Tieni presente che, d'ora in poi, dopo avere ricavato le equazioni della trasformazione inversa, "scambierò" le variabili di partenza e quelle di arrivo, in modo da vedere τ^{-1} come una trasformazione indipendente, non necessariamente legata a τ . Se questo procedimento ti confonde, non sei tenuto a fare lo stesso.

iii. determina le equazioni della trasformazione composta $\tau^2=\tau\circ\tau$.

$\begin{cases} x''=x'+2=x+2+2=x+4 \\ y''=y'-3=y-3-3=y-6 \end{cases}$. Non si ottiene l'identità, in quanto la trasformazione non è involutoria.

iv. verifica che si tratta di una isometria.

Se i punti $A(x_A, y_A)$, $B(x_B, y_B)$ vengono mandati in $A'(x_{A'}, y_{A'})$, $B'(x_{B'}, y_{B'})$ allora:

$$A'B'=\sqrt{(x_{B'}-x_{A'})^2+(y_{B'}-y_{A'})^2}=\sqrt{(x_B+2-(x_A-2))^2+(y_B-3-(y_A-3))^2}=\sqrt{(x_B-x_A)^2+(y_B-y_A)^2}=AB \quad .$$

v. verifica che manda rette in rette.

La generica retta di equazione $ax+by+c=0$ viene mandata in:

$a(x'-2)+b(y'+3)+c=0 \Rightarrow ax+by-2a+3b+c=0$.

L'equazione della trasformata è lineare, per cui rappresenta ancora una retta.

vi. verifica che conserva la direzione delle rette.

Dai calcoli precedenti, vediamo che la retta di coefficiente angolare $m=-a/b$ viene mandata nella retta di coefficiente angolare $m'=-a/b=m$ c.v.d.

Conservando la direzione delle rette, vengono conservati anche il parallelismo e la perpendicolarità.

vii. determina i punti uniti della trasformazione.

Imponendo $\begin{cases} x'=x \\ y'=y \end{cases}$, non troviamo soluzioni; quindi, ovviamente, non esistono punti uniti.

viii. determina le rette unite della trasformazione.

Una retta coincide con la sua trasformata se: $c=-2a+3b+c \Rightarrow 2a-3b=0 \Rightarrow m=-\frac{a}{b}=\frac{3}{2}$.

Sono quindi unite le rette del fascio di equazione $y=\frac{3}{2}x+q$, ovvero quelle parallele al vettore della traslazione.

Si tratta di rette globalmente unite. Prova a ripetere il ragionamento distinguendo i casi $y=mx+q$ e $x=k$.

Nota: Il contenuto di questo paragrafo corrisponde (con varie modifiche) alle pagine J_I 8 - 12 del tuo libro di testo.

◆ Rotazione

Definizione: chiamiamo **rotazione** di centro O ed angolo α la trasformazione geometrica che associa ad ogni punto P del piano il punto P' tale che:

- $OP=OP'$;
- $P\hat{O}P'=\alpha$.

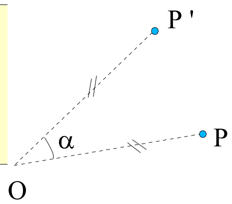

Fig. 18

Teorema: il prodotto (o composizione) di due simmetrie assiali con gli assi *r* ed *s* incidenti è la rotazione che ha:

- centro nel punto O di intersezione tra *r* ed *s*;
- verso di rotazione da *r* (simmetria applicata per prima) ad *s* (simmetria applicata per seconda);
- ampiezza α uguale al doppio dell'angolo tra gli assi *r* ed *s*.

Vale anche il teorema inverso: ogni rotazione può essere vista come la composizione di due simmetrie assiali aventi gli assi incidenti tra loro nel centro di rotazione e formanti un angolo $\alpha/2$.

Osserva che, per quanto visto in precedenza, la simmetria centrale è una rotazione di 180°.

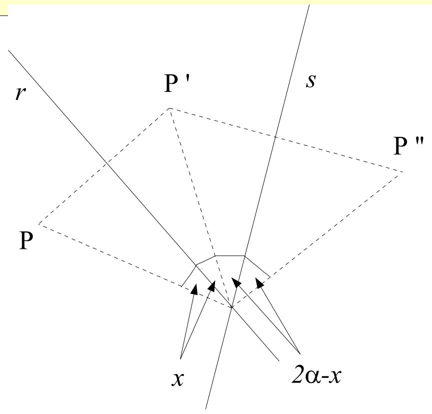

Fig. 19

Dimostrazione: è analoga al caso della traslazione. Consideriamo $P\hat{O}H=x<\alpha$. Poiché la simmetria assiale è un'isometria, avremo $\hat{P}'OK=\alpha$, $\hat{P}'OK=K\hat{O}P''=\alpha-x$.

Di conseguenza, comunque venga scelto il punto P, sarà $PO=P''O$ e $P\hat{O}P''=2x+2(\alpha-x)=2\alpha$ (che non dipende da P) c.v.d.

Anche in questo caso, puoi dimostrare che lo stesso risultato viene ottenuto qualunque sia la posizione di P.

Teorema: la rotazione è una isometria.

Dimostrazione: se il segmento AB viene trasformato nel segmento A'B' dalla rotazione di centro O ed angolo α, allora: $A\hat{O}A'=B\hat{O}B'=\alpha$. Se, come nel caso in figura, $\alpha>B\hat{O}A'$, abbiamo: $A\hat{O}B=A'\hat{O}B'=\alpha-B\hat{O}A'$ uguali per differenza. Ne segue che i triangoli AOB e A'OB' sono uguali per il primo criterio, e, in particolare, $AB=A'B'$ c.v.d.

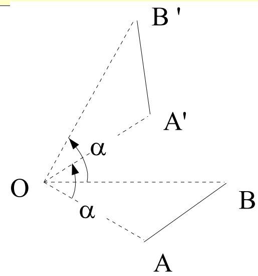

Fig. 20

Avremmo anche potuto affermare che la rotazione è una isometria, in quanto composizione di due simmetrie assiali, che sono anche esse isometrie.

Osservazione: è ovvio che la rotazione non conserva (in generale) la direzione delle rette e (in generale) non è una trasformazione involutoria, in quanto applicandola due volte di seguito (ovvero componendola con se stessa) si ottiene una rotazione di angolo 2α , e non l'identità. Inoltre, la sua inversa è la rotazione di angolo $-\alpha$, che (sempre in generale) non coincide con la trasformazione di partenza.

Proprietà: l'insieme delle rotazioni aventi centro O assegnato, sul quale è definita l'operazione di composizione, forma un gruppo abeliano (sottogruppo del gruppo delle isometrie).

Possiamo infatti notare che:

- la composizione di due rotazioni di centro O ed angoli α e β, in qualunque ordine vengano prese, è ancora una rotazione di centro O ed angolo $\alpha+\beta$;
- l'operazione di composizione gode della proprietà associativa;
- esiste (ed appartiene all'insieme delle rotazioni), l'elemento neutro dell'operazione di composizione, che è dato dall'identità $\mathbb{I}$ (in questo caso, la rotazione attorno ad O di un angolo nullo);
- ogni rotazione attorno ad O ammette una rotazione inversa (quella di angolo opposto).

Osservazione: l'insieme delle rotazioni con centri diversi, invece, <u>non</u> forma un gruppo, in quanto la composizione di due rotazioni può essere sia una rotazione che una traslazione.

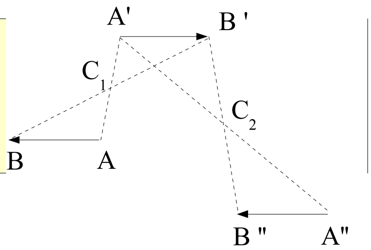

Fig. 21

Un semplice controesempio è dato dalla composizione di due simmetrie centrali (che, come sappiamo, sono particolari rotazioni), di centri C_1 e C_2 distinti.
Prova a dimostrare che essa fornisce come risultato una traslazione avente come direzione quella della retta che congiunge i due centri, come verso quello che va da C_1 a C_2 e come modulo il doppio della distanza C_1C_2. (Suggerimento: considera il triangolo AA'A" ...).

Proprietà: la rotazione di un angolo α avente come centro l'origine degli assi ha equazioni:

$$\begin{cases} \boldsymbol{x'=x\cos\alpha-y\,sen\,\alpha} \\ \boldsymbol{y'=x\,sen\,\alpha+y\cos\alpha} \end{cases}$$. In forma matriciale: $$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} \cos\alpha & -sen\,\alpha \\ sen\,\alpha & \cos\alpha \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$.

Dimostrazione: facendo riferimento alla figura, possiamo scrivere:

$$x=OB=OP\cos\beta \quad ; \quad y=PB=OP\,sen\,\beta \quad ;$$

$$x'=OP'\cos(\alpha+\beta)=OP\cos\alpha\cos\beta-OP\,sen\,\alpha\,sen\,\beta=x\cos\alpha-y\,sen\,\alpha \quad ;$$

$$y'=OP'\,sen(\alpha+\beta)=OP\,sen\,\alpha\cos\beta+OP\cos\alpha\,sen\,\beta=x\,sen\,\alpha+y\cos\alpha \quad .$$

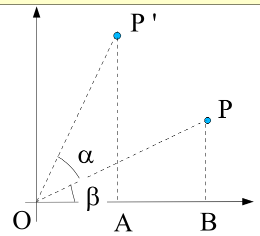

Fig. 22

Proprietà: la rotazione di un angolo α e centro $C(x_C, y_C)$ ha equazioni:

$$\begin{cases} x'=(x-x_C)\cos\alpha-(y-y_C)\,sen\,\alpha+x_C \\ y'=(x-x_C)\,sen\,\alpha+(y-y_C)\cos\alpha+y_C \end{cases}$$, che possiamo scrivere:

$$\begin{cases} \boldsymbol{x'=x\cos\alpha-y\,sen\,\alpha+p} \\ \boldsymbol{y'=x\,sen\,\alpha+y\cos\alpha+q} \end{cases}$$. In forma matriciale: $$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} \cos\alpha & -sen\,\alpha \\ sen\,\alpha & \cos\alpha \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}+\begin{pmatrix} p \\ q \end{pmatrix}$$.

Per ricavare le formule precedenti, puoi vedere la rotazione come composizione delle seguenti trasformazioni:

- traslazione di vettore $-\vec{v}(-x_C, -y_C)$, che porta il centro C nell'origine;
- rotazione di centro l'origine ed angolo α;

- traslazione di vettore $\vec{v}(x_C, y_C)$, che riporta il punto C nella sua posizione iniziale.

Confrontando tra loro le precedenti equazioni, puoi osservare che le coordinate del centro sono le soluzioni del sistema:

$$\begin{cases} p = x_C(1-\cos\alpha)+y_C \operatorname{sen}\alpha \\ q = -x_C \operatorname{sen}\alpha + y_C(1-\cos\alpha) \end{cases}.$$

Esercizio: considera la rotazione ρ di centro l'origine ed ampiezza $\theta=\pi/6$.

i. determina le equazioni della trasformazione. $\begin{cases} x'=x\sqrt{3}/2-y/2 \\ y'=x/2+y\sqrt{3}/2 \end{cases} \Rightarrow \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sqrt{3}/2 & -1/2 \\ 1/2 & \sqrt{3}/2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$

ii. determina le equazioni della trasformazione inversa.

Non è necessario invertire il sistema formato dalle equazioni precedenti, in quanto sappiamo che la rotazione inversa è quella di centro l'origine e ampiezza $-\theta$: $\begin{cases} x'=x\sqrt{3}/2+y/2 \\ y'=-x/2+y\sqrt{3}/2 \end{cases}$.

Tali equazioni non coincidono con quelle della trasformazione data, in quanto la trasformazione non è involutoria.

iii. determina le equazioni della trasformazione composta $\rho^2=\rho\circ\rho$.

Senza svolgere calcoli, sappiamo che si tratta della rotazione di centro l'origine e ampiezza $2\theta=\pi/3$:

$\begin{cases} x'=x/2-y\sqrt{3}/2 \\ y'=x\sqrt{3}/2+y/2 \end{cases}$. Non si ottiene l'identità, in quanto la trasformazione non è involutoria.

iv. verifica che si tratta di una isometria.

Per non diventarci matti, conviene fare così:

$$A'B'=\sqrt{(x_{B'}-x_{A'})^2+(y_{B'}-y_{A'})^2}=\sqrt{\left(x_B\frac{\sqrt{3}}{2}+\frac{y_B}{2}-x_A\frac{\sqrt{3}}{2}-\frac{y_A}{2}\right)^2+\left(-\frac{x_B}{2}+y_B\frac{\sqrt{3}}{2}+\frac{x_A}{2}-y_A\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2}=$$

$$\sqrt{\frac{3}{4}(x_B-x_A)^2+\frac{1}{4}(y_B-y_A)^2+\frac{1}{4}(x_B-x_A)^2+\frac{3}{4}(y_B-y_A)^2}=\sqrt{(x_B-x_A)^2+(y_B-y_A)^2}=AB \quad .$$

v. verifica che manda rette in rette.

La generica retta di equazione $ax+by+c=0$ viene mandata in:

$$a(x'\sqrt{3}/2+y'/2)+b(-x'/2+y'\sqrt{3}/2)+c=0 \Rightarrow (a\sqrt{3}-b)x+(a+b\sqrt{3})y+2c=0 \quad .$$

L'equazione della trasformata è lineare, per cui rappresenta ancora una retta.

vi. verifica che manda rette parallele in rette parallele.

Come abbiamo visto, la retta di coefficiente angolare $m=-a/b$ viene mandata nella retta di coefficiente angolare:

$m'=\dfrac{b-a\sqrt{3}}{a+b\sqrt{3}}=\dfrac{m\sqrt{3}+1}{\sqrt{3}-m}$ che dipende solo da *m*, e non da *q*. Di conseguenza, se sono uguali i coefficienti angolari delle rette date, lo sono anche quelli delle loro corrispondenti.

Ripeti il ragionamento distinguendo i casi $y=mx+q$ e $x=k$.

vii. verifica che manda rette perpendicolari in rette perpendicolari.

Consideriamo solo equazioni della forma $y=mx+q$. Se due rette r_1 ed r_2 sono perpendicolari, hanno coefficienti angolari tali che: $m_1 \cdot m_2=-1$. Le loro corrispondenti avranno coefficienti angolari tali che:

$$m_1'\cdot m_2' = \frac{m_1\sqrt{3}+1}{\sqrt{3}-m_1}\cdot\frac{m_2\sqrt{3}+1}{\sqrt{3}-m_2} = \frac{3m_1m_2+m_1\sqrt{3}+m_2\sqrt{3}+1}{3-m_1\sqrt{3}-m_2\sqrt{3}+m_1m_2} = -1 \quad \text{c.v.d.}$$

viii.determina i punti uniti della trasformazione.

Imponendo $\begin{cases} x'=x \\ y'=y \end{cases}$, ricaviamo $\begin{cases} x=0 \\ y=0 \end{cases}$, quindi l'unico punto unito è il centro di rotazione.

ix. determina le rette unite della trasformazione.

Una retta coincide con la sua trasformata se: $\frac{a\sqrt{3}-b}{a} = \frac{a+b\sqrt{3}}{b} = \frac{2c}{c} \Rightarrow \begin{cases} a\sqrt{3}-b=2a \\ a+b\sqrt{3}=2b \end{cases}$.

Tale sistema ammette solo la soluzione $a=0 \wedge b=0$, che non corrisponde ad una retta, quindi non esistono rette unite. Ripeti il ragionamento distinguendo i casi $y=mx+q$ e $x=k$.

A questo punto puoi studiare il paragrafo "La rappresentazione grafica delle coniche", a pagg. J 22 - J 24 del libro di testo, sul quale non ho nessuna modifica da apportare.

Nota: Il contenuto di questo paragrafo corrisponde (con varie modifiche) alle pagine J_1 18 - 20 del tuo libro di testo.

◆ Le isometrie in generale

Teorema: qualunque isometria può essere ottenuta dalla composizione di un massimo di tre simmetrie assiali.

Questo teorema, di cui non riportiamo la dimostrazione, afferma che le simmetrie assiali possono essere considerate come i "mattoncini" che ci permettono di costruire qualunque isometria.

Più esattamente, esistono i seguenti tipi di isometrie:

- simmetria assiale;
- prodotto di due simmetrie assiali (che può essere una traslazione o una rotazione a seconda che gli assi di simmetria siano paralleli o incidenti);
- prodotto di tre simmetrie assiali.

Abbiamo già considerato i primi due tipi di isometria, mentre non abbiamo ancora incontrato il terzo.

Teorema: il prodotto di tre generiche simmetrie assiali è una isometria che può essere ottenuta dalla composizione tra una simmetria assiale e una traslazione in direzione dell'asse della simmetria considerata. Tale isometria viene chiamata **glissosimmetria**.

Non dimostriamo il teorema, ma precisiamo che l'aggettivo "generiche" nell'enunciato significa che i tre assi di simmetria non appartengono ad uno stesso fascio, ovvero non sono tutti paralleli tra loro (fascio proprio), né passano tutti per uno stesso punto (fascio improprio). In questi due casi particolari, l'isometria ottenuta sarebbe una semplice simmetria assiale.

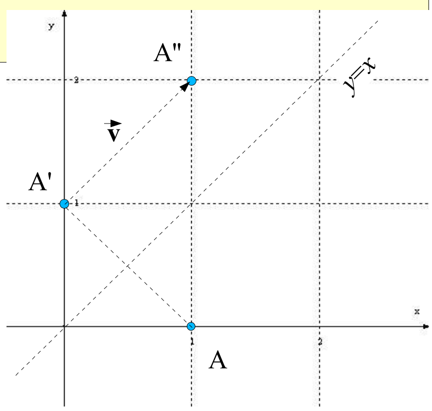

Fig. 23

Esempio: componiamo la simmetria rispetto alla bisettrice del primo e del terzo quadrante con la traslazione di vettore $\vec{v}\equiv(1,1)$ parallelo alla bisettrice stessa: $\begin{cases} x''=x'+1=y+1 \\ y''=y'+1=x+1 \end{cases}$. Ad esempio, la glissosimmetria ottenuta trasforma il punto $A(1,0)$ prima in $A'(0,1)$, e quindi in $A''(1,2)$.

Definizione: diciamo che una **isometria** è **diretta** se, oltre alle lunghezze dei segmenti ed alle ampiezze degli angoli, conserva anche il verso degli angoli (o, se preferisci, il verso di percorrenza dei vertici di un poligono).
E' invece **indiretta** se inverte il verso degli angoli.

Ad esempio, i triangoli ABC e A'B'C' in figura si corrispondono in una isometria diretta, perché in entrambi incontriamo i vertici nell'ordine ABC se procediamo nello stesso verso (in questo caso, orario). Invece, tra i triangoli ABC e A"B"C" esiste una isometria indiretta, perché per incontrare i vertici nell'ordine ABC devo procedere in versi opposti (orario per il primo triangolo e antiorario per il secondo).

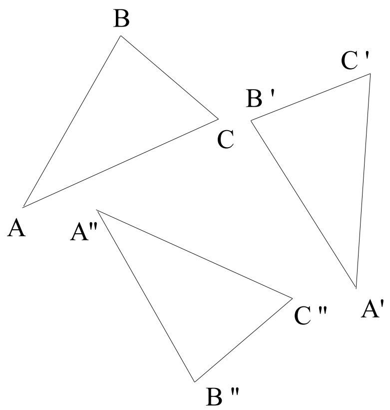

Fig. 24

In termini molto intuitivi, una isometria diretta può essere realizzata semplicemente "facendo scivolare" le nostre figure sul piano, mentre in una isometria indiretta dobbiamo ad un certo punto "uscire fuori" dal piano ed operare un "ribaltamento" attorno ad una retta.
In realtà, il termine utilizzato dalla maggior parte dei testi per l'isometria indiretta è "isometria inversa". La scelta di questo termine, però, ti potrebbe creare confusione con il concetto di "trasformazione inversa", con il quale non ha niente a che fare.

Teorema: sono isometrie dirette quelle che possono essere ottenute componendo un numero pari di simmetrie assiali, ovvero traslazione, rotazione e, ovviamente, l'identità.
Sono invece isometrie indirette quelle che possono essere ottenute componendo un numero dispari di simmetrie assiali, ovvero la simmetria assiale stessa e la glissosimmetria.

Nota l'analogia (assolutamente non casuale) con il segno di un prodotto, che è positivo quando è composto da un numero pari di fattori negativi.

Teorema: se la trasformazione di equazioni $\begin{cases} x'=ax+by+p \\ y'=cx+dy+q \end{cases}$, ovvero $\vec{x}'=A\vec{x}+\vec{v}$, è una isometria, allora il determinante $det\, A=ad-bc$ vale:

- $+1$ se si tratta di una isometria diretta;
- -1 se si tratta di una isometria indiretta.

Non dimostriamo il teorema, ma osserviamo che esso è verificato dalle matrici associate a tutte le isometrie particolari che abbiamo incontrato.

Attenzione: il precedente teorema <u>non</u> è invertibile, ovvero la condizione che il determinante della matrice associata sia uguale a ± 1 è soltanto necessaria, e non sufficiente, perché la trasformazione sia una isometria!

Controesempio: considera la trasformazione $\begin{cases} x'=2x \\ y'=y/2 \end{cases}$, ovvero: $\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 1/2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$.

Per essa, $det\, A=+1$, ma spero sia evidente che la trasformazione non è un'isometria.

Se non ne sei convinto, puoi osservare che un quadrato di lato *l* con i lati paralleli agli assi cartesiani viene trasformato in un rettangolo che ha i lati paralleli all'asse *x* lunghi $2l$, e quelli paralleli all'asse *y* lunghi $l/2$.

I prossimi teoremi forniscono invece le condizioni sufficienti per avere una isometria.

Teorema: se la trasformazione di equazioni $\begin{cases} x'=ax+by+p \\ y'=cx+dy+q \end{cases}$ verifica le condizioni:

$a^2+c^2=1 \;\wedge\; b^2+d^2=1 \;\wedge\; ab+cd=0$, allora la trasformazione è una isometria.

Dimostrazione: è semplice ma noiosa. Se i punti A, B vengono mandati in A', B', allora:

$$A'B'=\sqrt{(x_{B'}-x_{A'})^2+(y_{B'}-y_{A'})^2}=\sqrt{[a(x_B-x_A)^2+b(y_B-y_A)]^2+[c(x_B-x_A)^2+d(y_B-y_A)]^2}=$$

$$=\sqrt{(a^2+c^2)(x_B-x_A)^2+2(ab+cd)(x_B-x_A)(y_B-y_A)+(b^2+d^2)(y_B-y_A)^2} \quad .$$

Osserviamo che, se valgono le condizioni elencate nell'ipotesi, allora: $A'B'=\sqrt{(x_B-x_A)^2+(y_B-y_A)^2}=AB$ c.v.d.

Corollario: la forma più generale delle equazioni di un'isometria è:

- $\begin{cases} \boldsymbol{x'=x\cos\alpha-y\,sen\,\alpha+p} \\ \boldsymbol{y'=x\,sen\,\alpha+y\cos\alpha+q} \end{cases}$ se l'isometria è diretta;
- $\begin{cases} \boldsymbol{x'=x\cos\alpha+y\,sen\,\alpha+p} \\ \boldsymbol{y'=x\,sen\,\alpha-y\cos\alpha+q} \end{cases}$ se l'isometria è indiretta.

In altri termini, se la trasformazione di equazioni $\begin{cases} x'=ax+by+p \\ y'=cx+dy+q \end{cases}$, ovvero $\vec{x}'=A\vec{x}+\vec{v}$, verifica entrambe le seguenti condizioni:

- $det\, A=ad-bc=\pm 1$;
- la matrice A ha gli elementi di una diagonale uguali e quelli dell'altra diagonale opposti;

allora la trasformazione è una isometria.

Omettiamo la dimostrazione.

Esercizio: considera l'isometria $\gamma=\tau\circ\rho$ ottenuta dalla composizione della rotazione ρ di centro l'origine e angolo $\alpha=\pi/6$ e della traslazione τ di vettore $\vec{v}\equiv(2,1)$.

i. determina le equazioni della trasformazione.

$$\begin{cases} x'=x\sqrt{3}/2-y/2+2 \\ y'=x/2+y\sqrt{3}/2+1 \end{cases} \Rightarrow \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} \sqrt{3}/2 & -1/2 \\ 1/2 & \sqrt{3}/2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}+\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Si tratta di una isometria diretta, in quanto: $det\,A=1$, gli elementi della diagonale principale sono uguali e quelli della diagonale secondaria sono opposti.

ii. determina le equazioni della trasformazione inversa.

$$\begin{cases} x'=x\sqrt{3}/2+y/2-\sqrt{3}-1/2 \\ y'=-x/2+y\sqrt{3}/2+1-\sqrt{3}/2 \end{cases} \Rightarrow \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} \sqrt{3}/2 & 1/2 \\ -1/2 & \sqrt{3}/2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}+\begin{pmatrix} -\sqrt{3}-1/2 \\ 1-\sqrt{3}/2 \end{pmatrix}$$

iii. determina le equazioni della isometria $\lambda=\rho\circ\tau$.

$$\begin{cases} x'=(x+2)\sqrt{3}/2-(y+1)/2+2=x\sqrt{3}/2-y/2+\sqrt{3}-1/2 \\ y'=(x+2)/2+(y+1)\sqrt{3}/2+1=x/2+y\sqrt{3}/2+1+\sqrt{3}/2 \end{cases}$$

iv. verifica che γ manda rette in rette.

La generica retta di equazione $ax+by+c=0$ viene mandata in:

$$a(x\sqrt{3}/2+y/2-\sqrt{3}-1/2)+b(-x/2+y\sqrt{3}/2+1-\sqrt{3}/2)+c=0 \Rightarrow$$

$$(a\sqrt{3}-b)x+(a+b\sqrt{3})y-a(2\sqrt{3}+1)+b(2-\sqrt{3})+2c=0 \quad .$$

L'equazione della trasformata è lineare, per cui rappresenta ancora una retta.

v. verifica che manda rette parallele in rette parallele.

Come abbiamo visto, la retta di coefficiente angolare $m=-a/b$ viene mandata nella retta di coefficiente angolare: $m'=\frac{b-a\sqrt{3}}{b\sqrt{3}+a}=\frac{m\sqrt{3}+1}{\sqrt{3}-m}$ che dipende solo da *m*, e non da *q*. Di conseguenza, se sono uguali i coefficienti angolari delle rette date, lo sono anche quelli delle loro corrispondenti.

Ripeti il ragionamento distinguendo i casi $y=mx+q$ e $x=k$.

vi. verifica che manda rette perpendicolari in rette perpendicolari.

Consideriamo solo equazioni della forma $y=mx+q$. Se due rette r_1 ed r_2 sono perpendicolari, hanno coefficienti angolari tali che: $m_1\cdot m_2=-1$. Le loro corrispondenti avranno coefficienti angolari tali che:

$$m_1'\cdot m_2'=\frac{m_1\sqrt{3}+1}{\sqrt{3}-m_1}\cdot\frac{m_2\sqrt{3}+1}{\sqrt{3}-m_2}=\frac{3m_1m_2+m_1\sqrt{3}+m_2\sqrt{3}+1}{3-m_1\sqrt{3}-m_2\sqrt{3}+m_1m_2}=-1 \quad \text{c.v.d.}$$

vii. determina i punti uniti della trasformazione.

Imponendo $\begin{cases} x'=x \\ y'=y \end{cases}$ e svolgendo dei calcoli molto laboriosi, ricaviamo: $\begin{cases} x=-\sqrt{3}/2 \\ y=5/2+\sqrt{3} \end{cases}$.

Metodo alternativo: sappiamo che la trasformazione ottenuta è una rotazione attorno ad un centro generico, per cui l'unico punto unito è il centro di rotazione. Quindi, riprendendo le equazioni $\begin{cases} p=x_C(1-cos\,\alpha)+y_C\,sen\,\alpha \\ q=-x_C\,sen\,\alpha+y_C(1-cos\,\alpha) \end{cases}$ e sostituendo $p=2$, $q=1$, $\alpha=\pi/3$, otteniamo la stessa soluzione precedente.

viii.determina le rette unite della trasformazione.

Una retta coincide con la sua trasformata se: $\frac{a+b\sqrt{3}}{a}=\frac{a-b\sqrt{3}}{b}=\frac{-a(2\sqrt{3}+1)+b(2\sqrt{3}+1)+2c}{c}$.

Il sistema formato da queste equazioni non ha soluzione, quindi non esistono rette unite (sì, confesso di non avere avuto voglia di risolverlo, ma sapevo in anticipo la risposta, in quanto una rotazione di 30° non ammette rette unite).

Ripeti il ragionamento distinguendo i casi $y=mx+q$ e $x=k$.

Nota: Il contenuto di questo paragrafo corrisponde (con varie modifiche) alle pagine J$_1$ 20 - 22 del tuo libro di testo.

4. Similitudine

◆ Omotetia

Definizione: chiamiamo **omotetia** di centro C e rapporto k la trasformazione geometrica che associa ad ogni punto P del piano il punto P' tale che:

- C, P e P' sono allineati;
- $CP'=|k|CP$;
- se $k>0$ i punti P e P' si trovano dalla stessa parte rispetto a C;
- se $k<0$ i punti P e P' si trovano da parti opposte rispetto a C.

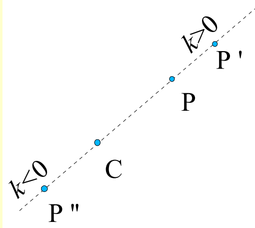

Fig. 25

E' evidente che l'omotetia non conserva le distanze, e quindi non è un'isometria.

Casi particolari:

- per $k=1$ si ottiene l'identità;
- per $k=-1$ si ottiene la simmetria di centro C.

Teorema: l'omotetia conserva l'allineamento dei punti e il parallelismo delle rette, ovvero trasforma rette in rette e rette parallele in rette parallele (e, quindi, è una affinità).
Inoltre, l'omotetia è sempre una trasformazione diretta, in quanto conserva il verso degli angoli, o, se preferisci, il verso di percorrenza dei vertici di un poligono, indipendentemente dal segno del rapporto k.

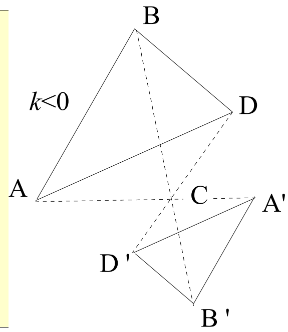

Fig. 26

Non riportiamo la dimostrazione.

Teorema: l'omotetia gode delle seguenti proprietà:

- conserva la direzione delle rette, ovvero manda una retta r in una retta r' tale che $r' \| r$;
- conserva l'ampiezza degli angoli, ovvero manda un angolo in un angolo congruente ad esso;
- se due segmenti si corrispondono in una omotetia, allora il rapporto delle loro lunghezze è uguale al valore assoluto del rapporto di omotetia: $l'/l=|k|$.
- se due figure si corrispondono in una omotetia, allora il rapporto delle loro aree è uguale al quadrato del rapporto di omotetia: $S'/S=k^2$.

Dimostrazione: osserviamo che i triangoli CLM e CL'M' sono simili per il secondo criterio, in quanto hanno le coppie di lati CL, CL' e CM, CM' in proporzione (in quanto si corrispondono nella stessa omotetia, e quindi il loro rapporto

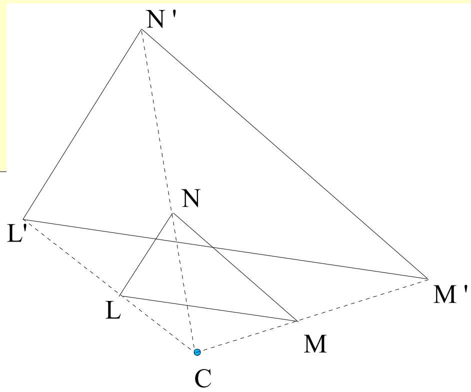

Fig. 27

è $|k|$) e l'angolo in C in comune. Ne segue che gli angoli $C\hat{L}M$ e $C\hat{L}'M'$ sono congruenti; quindi le rette LM ed L'M' sono parallele perché, tagliate dalla trasversale CL', formano angoli corrispondenti congruenti.

Inoltre, i due triangoli hanno i lati in proporzione, quindi: $\frac{L'M'}{LM}=\frac{CL'}{CL}=|k|$ c.v.d.

Omettiamo la dimostrazione dell'ultimo punto.

Corollario: l'omotetia conserva il rapporto tra le lunghezze dei segmenti.
In altri termini, se AB e CD sono due segmenti tali che $CD=h\,AB$ e A'B' e C'D' sono i loro corrispondenti, allora: $C'D'=h\,A'B'$.

Dimostrazione: $C'D'=|k|CD=|k|h\,AB=h\,A'B'$ c.v.d.

Teorema: l'insieme delle omotetie aventi un dato centro C, sul quale consideriamo l'operazione di composizione, assume la struttura di gruppo abeliano.

Possiamo infatti notare che:

- il prodotto di due omotetie di centro C e rapporti k_1 e k_2 , in qualunque ordine vengano prese, è una omotetia di centro C e rapporto $k_1 \cdot k_2$;
- l'operazione di composizione gode della proprietà associativa;
- esiste (ed appartiene all'insieme delle omotetie), l'elemento neutro dell'operazione di composizione, che è dato dall'identità $\mathbb{I}$ (l'omotetia di centro C e rapporto $k=1$);
- l'omotetia di centro C e rapporto *k* ammette una omotetia inversa, che è quella di centro C e rapporto $1/k$.

Proprietà: l'omotetia di rapporto *k* avente come centro l'origine degli assi ha equazioni: $\begin{cases} \boldsymbol{x'=kx} \\ \boldsymbol{y'=ky} \end{cases}$. In forma matriciale: $\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} k & 0 \\ 0 & k \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$.

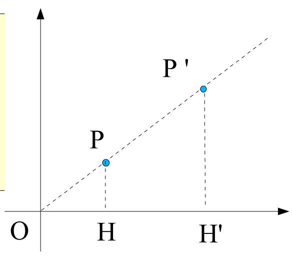

Fig. 28

Dimostrazione: per quanto visto in precedenza, i triangoli OPH e OP'H' sono simili, quindi $P'H'=k\,PH$ e $OH'=k\,OH$ c.v.d.

Proprietà: l'omotetia di rapporto *k* e centro $C(x_C, y_C)$ ha equazioni:

$\begin{cases} x'=k(x-x_C)+x_C \\ y'=k(y-y_C)+y_C \end{cases}$, che si possono anche scrivere: $\begin{cases} \boldsymbol{x'=kx+p} \\ \boldsymbol{y'=ky+q} \end{cases}$.

In forma matriciale: $\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} k & 0 \\ 0 & k \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}+\begin{pmatrix} p \\ q \end{pmatrix}$.

Per ricavare le formule precedenti, puoi vedere l'omotetia come composizione delle seguenti trasformazioni:

- traslazione di vettore $-\vec{v}(-x_C, -y_C)$, che porta il centro C nell'origine;
- omotetia di centro l'origine e rapporto *k*;
- traslazione di vettore $\vec{v}(x_C, y_C)$, che riporta il punto C nella sua posizione iniziale.

Confrontando tra loro le precedenti equazioni, puoi osservare che le coordinate del centro sono:

$x_C=\frac{p}{1-k} \wedge y_C=\frac{q}{1-k}$.

Osservazione: l'insieme delle omotetie con centri diversi, non forma un gruppo, in quanto la composizione di due omotetie può essere sia una omotetia che una traslazione.

Più esattamente, la composizione di due omotetie ω_1 e ω_2 di centri C_1 e C_2 e rapporti k_1 e k_2 rispettivamente, è:

- se $k_1 \cdot k_2 \neq 1$, un'omotetia che ha centro C_3 allineato con C_1 e C_2 e rapporto $k_3=k_1 \cdot k_2$;
- se $k_1 \cdot k_2 = 1$, una traslazione di vettore $\overrightarrow{C_1 C_2}$.

Dimostrazione: se per semplicità prendiamo $C_1 \equiv O$, abbiamo: $\omega_1: \begin{cases} x'=k_1 x \\ y'=k_1 y \end{cases}$, $\omega_2: \begin{cases} x'=k_2 x+p \\ y'=k_2 y+q \end{cases}$, e quindi:

$\omega_2 \circ \omega_1: \begin{cases} x'=k_1 k_2 x+p \\ y'=k_1 k_2 y+q \end{cases}$, da cui puoi dedurre tutte le proposizioni precedenti.

Esercizio: considera l'omotetia di centro $C(1,-3)$ e rapporto $k=2$.

i. determina le equazioni della trasformazione. $\begin{cases} x'=2(x-1)+1=2x-1 \\ y'=2(y+3)-3=2y+3 \end{cases}$

ii. determina le equazioni della trasformazione inversa. $\begin{cases} x'=(x+1)/2 \\ y'=(y-3)/2 \end{cases}$

Tali equazioni non coincidono con quelle della trasformazione data, in quanto la trasformazione non è involutoria.

iii. verifica che manda rette in rette.

La generica retta di equazione $ax+by+c=0$ viene mandata in: $ax+by+a-3b+2c=0$.

L'equazione della trasformata è lineare, per cui rappresenta ancora una retta.

iv. verifica che conserva la direzione delle rette.

La retta di coefficiente angolare $m=-a/b$ viene mandata nella retta di coefficiente angolare $m'=-a/b=m$ c.v.d. Inoltre, conservando la direzione delle rette, vengono conservati anche parallelismo e perpendicolarità.

v. determina i punti uniti della trasformazione.

Imponendo $\begin{cases} x'=x \\ y'=y \end{cases}$, ricaviamo $\begin{cases} x=1 \\ y=-3 \end{cases}$, quindi l'unico punto unito è il centro di rotazione.

vi. determina le rette unite della trasformazione.

Una retta coincide con la sua trasformata se: $a-3b+2c=c \Rightarrow c=3b-a$.

Sono quindi unite le rette: $ax+by+3b-a=0 \Rightarrow b(y+3)=-a(x-1) \Rightarrow y+3=m(x-1) \vee x=1$.

Si tratta del fascio di rette passanti per il centro di omotetia. Sono rette globalmente unite.

Prova a ripetere il ragionamento distinguendo i casi $y=mx+q$ e $x=k$.

Nota: Il contenuto di questo paragrafo corrisponde (con varie modifiche) alle pagine J_1 25 - 29 del tuo libro di testo.

◆ Similitudine

Definizione: chiamiamo **similitudine** la trasformazione geometrica che si ottiene componendo una omotetia ed una isometria.

Ovviamente, nel corso dei tuoi studi precedenti hai già conosciuto una trasformazione detta similitudine. Il fatto di avere utilizzato lo stesso nome, però, non ci autorizza a identificare i due concetti: dobbiamo ancora dimostrare che la "nostra" similitudine gode delle stesse proprietà di quella che hai studiato al biennio.

Se l'omotetia utilizzata per ottenere la similitudine ha rapporto k, allora il suo valore assoluto $|k|$ viene anche detto *rapporto di similitudine*.

Poiché l'omotetia è sempre una trasformazione diretta, allora la similitudine è *diretta* o *indiretta* (nel senso che conserva o inverte il verso degli angoli) a seconda che l'isometria che la compone sia diretta o indiretta.

Possiamo considerare le isometrie come delle particolari similitudini. Infatti, componendo un'isometria con l'omotetia di centro arbitrario e rapporto $k=1$, ovvero l'identità, si ottiene l'isometria di partenza.

In maniera analoga, possiamo considerare le omotetie come delle particolari similitudini ottenute componendo una generica omotetia con l' identità vista come isometria.

Teorema: se due segmenti si corrispondono in una similitudine, allora il rapporto delle loro lunghezze è costante, ed è uguale al rapporto di similitudine.

Viceversa: se una trasformazione geometrica è tale che il rapporto tra due lunghezze corrispondenti è costante, allora la trasformazione è una similitudine, ovvero si può ottenere dalla composizione tra una omotetia ed una isometria.

Inoltre, se due figure si corrispondono in una similitudine, allora il rapporto delle loro aree è uguale al quadrato del rapporto di similitudine: $S'/S=k^2$.

Dimostrazione: dato un segmento di lunghezza l, esso verrà prima trasformato dall'omotetia in un segmento di lunghezza $l'=|k|\cdot l$, e poi dalla isometria in un segmento di lunghezza $l''=l'$. Quindi il rapporto $l''/l=|k|$ non dipende dal segmento scelto.

Non dimostriamo le altre due proposizioni.

Proprietà: due angoli corrispondenti in una similitudine sono congruenti.

Dimostrazione: se il triangolo ABC viene trasformato da una similitudine nel triangolo A'B'C', avremo:

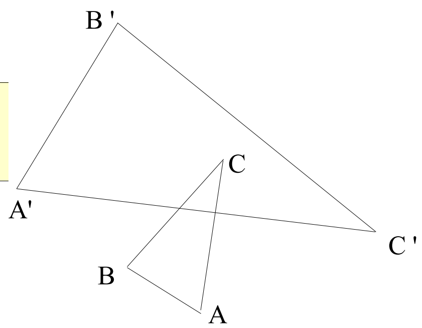

Fig. 29

$$\frac{A'B'}{AB}=\frac{B'C'}{BC}=\frac{C'A'}{CA}=|k|$$

quindi i due triangoli saranno simili (nel senso elementare) per il terzo criterio, e, pertanto, avranno gli angoli corrispondenti congruenti.

Corollario: una similitudine conserva la perpendicolarità, ovvero trasforma due rette r ed s perpendicolari tra loro in due rette r' ed s' perpendicolari tra loro: $r \perp s \Rightarrow r' \perp s'$.

Teorema: le similitudini conservano il parallelismo.
In altri termini, se due rette r ed s sono parallele tra loro, anche le loro corrispondenti r' ed s' sono parallele tra loro (ma, in generale, non saranno parallele alle rette date).

Dimostrazione: consideriamo il parallelogrammo ABCD, che viene trasformato da una similitudine nel quadrilatero A'B'C'D', del quale per il momento non conosciamo la natura. Sappiamo che $A\hat{D}B=C\hat{B}D$ in quanto angoli alterni interni formati dalle parallele AD e BC tagliate dalla trasversale BD. Ma, poiché la similitudine conserva l'ampiezza degli angoli, avremo anche: $A'\hat{D}'B'=C'\hat{B}'D'$.
Di conseguenza, le rette A'D' e B'C', tagliate dalla trasversale B'D', formano angoli alterni interni congruenti, e quindi sono parallele.

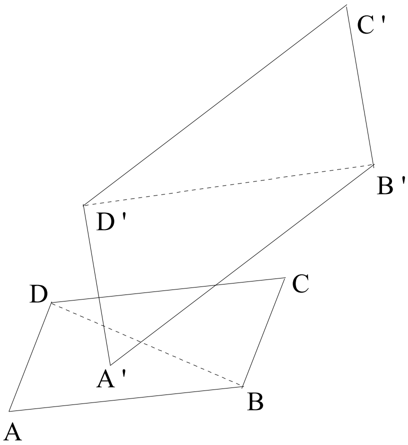

Fig. 30

Teorema: l'insieme delle similitudini, sul quale consideriamo l'operazione di composizione, assume la struttura di gruppo (non abeliano).

Possiamo infatti dimostrare che:

- la composizione di due similitudini è ancora una similitudine;
- l'operazione di composizione gode della proprietà associativa;
- esiste (ed appartiene all'insieme delle similitudini), l'elemento neutro dell'operazione di composizione, che è dato dall'identità $\mathbb{I}$ (la trasformazione che associa ad ogni punto del piano il punto stesso);
- ogni similitudine ammette una similitudine inversa (che associa al “punto di arrivo” P' il “punto di partenza” P).

Il gruppo delle similitudini contiene come sottogruppo quello delle isometrie. Come abbiamo visto in precedenza, invece, l'insieme delle omotetie non è un sottogruppo del gruppo delle similitudini (in quanto la composizione di due omotetie di centro diverso può essere una traslazione).

Teorema: se la trasformazione di equazioni $\begin{cases} x'=ax+by+p \\ y'=cx+dy+q \end{cases}$ verifica le condizioni:

$a^2+c^2=b^2+d^2 \wedge ab+cd=0$, allora la trasformazione è una similitudine.

Inoltre, il rapporto di similitudine è dato da: $k=\sqrt{a^2+c^2}=\sqrt{b^2+d^2}$.

In pratica, si tratta delle stesse condizioni da imporre per avere una isometria, ma per una similitudine la quantità a^2+c^2 può assumere qualunque valore positivo.

Dimostrazione: come abbiamo visto per le isometrie, se i punti A, B vengono mandati in A', B', allora:

$$A'B'=\sqrt{(x_{B'}-x_{A'})^2+(y_{B'}-y_{A'})^2}=\sqrt{[a(x_B-x_A)^2+b(y_B-y_A)]^2+[c(x_B-x_A)^2+d(y_B-y_A)]^2}=$$
$$=\sqrt{(a^2+c^2)(x_B-x_A)^2+2(ab+cd)(x_B-x_A)(y_B-y_A)+(b^2+d^2)(y_B-y_A)^2} \quad .$$

Se valgono le condizioni elencate nell'ipotesi, allora: $A'B'=\sqrt{a^2+c^2}\cdot\sqrt{(x_B-x_A)^2+(y_B-y_A)^2}=k\cdot AB$

per cui le equazioni date definiscono una similitudine di rapporto *k*.

Corollario: la forma più generale delle equazioni di una similitudine è:

- $\begin{cases} \boldsymbol{x'=mx-ny+p} \\ \boldsymbol{y'=nx+my+q} \end{cases}$ con $det\,A=m^2+n^2>0$ se la similitudine è diretta;
- $\begin{cases} \boldsymbol{x'=mx+ny+p} \\ \boldsymbol{y'=nx-my+q} \end{cases}$ con $det\,A=-m^2-n^2<0$ se la similitudine è indiretta.

In altri termini, se nella trasformazione di equazioni $\begin{cases} x'=ax+by+p \\ y'=cx+dy+q \end{cases}$, ovvero $\vec{x}'=A\vec{x}+\vec{v}$, la matrice A ha gli elementi di una diagonale uguali e quelli dell'altra diagonale opposti, allora la trasformazione è una similitudine.

Inoltre, il rapporto di similitudine è: $\boldsymbol{k=\sqrt{|det\,A|}=\sqrt{m^2+n^2}}$.

Omettiamo la dimostrazione.

Proprietà: una similitudine trasforma circonferenze, ellissi, parabole e iperboli in coniche dello stesso genere.

Dimostrazione: per una circonferenza Γ di centro C e raggio *r*, abbiamo: $\overline{PC}=r \quad \forall P\in\Gamma$.

La sua trasformata Γ' avrà: $\overline{P'C'}=kr \quad \forall P'\in\Gamma'$, e quindi sarà una circonferenza che ha:

- come centro il trasformato C' del centro C di Γ;
- come raggio $r'=kr$.

La dimostrazione è analoga per le altre coniche (è sufficiente utilizzare la definizione di ciascuna di esse).

La dimostrazione analitica è più semplice concettualmente, ma molto più laboriosa nei calcoli.

Esercizio: considera la similitudine $\gamma=\tau\circ\rho\circ\omega$ ottenuta dalla composizione della omotetia di centro l'origine degli assi e rapporto $k=\sqrt{2}$, della rotazione ρ di centro l'origine e angolo $\alpha=\pi/4$ e della traslazione τ di vettore $\vec{v}\equiv(-1,1)$.

i. determina le equazioni della trasformazione. $\begin{cases} x'=x-y-1 \\ y'=x+y+1 \end{cases} \Rightarrow \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}+\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}$

Si tratta di una similitudine diretta, in quanto $det\,A=2>0$, gli elementi della diagonale principale sono uguali e quelli della diagonale secondaria sono opposti. Il rapporto di similitudine è $k=\sqrt{|det\,A|}=\sqrt{2}$.

ii. determina le equazioni della trasformazione inversa.

$$\begin{cases} x'=x/2+y/2 \\ y'=-x/2+y/2+1 \end{cases} \Rightarrow \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 1/2 & 1/2 \\ -1/2 & 1/2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}+\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

iii. determina le equazioni della similitudine $\omega\circ\rho\circ\tau$. $\begin{cases} x'=x-y-2 \\ y'=x+y \end{cases}$

iv. verifica che γ manda rette in rette.

La generica retta di equazione $ax+by+c=0$ viene mandata in:

$$a(x-y-1)+b(x+y+1)+c=0 \ \Rightarrow\ (a+b)x+(-a+b)y-a+b+c=0 \ .$$

L'equazione della trasformata è lineare, per cui rappresenta ancora una retta.

v. verifica che manda rette parallele in rette parallele.

La retta di coefficiente angolare $m=-a/b$ viene mandata nella retta di coefficiente angolare:

$m'=\dfrac{a+b}{a-b}=\dfrac{m-1}{m+1}$ che dipende solo da m, e non da q. Di conseguenza, se sono uguali i coefficienti angolari delle rette date, lo sono anche quelli delle loro corrispondenti.

Ripeti il ragionamento distinguendo i casi $y=mx+q$ e $x=k$.

vi. verifica che manda rette perpendicolari in rette perpendicolari.

Consideriamo solo equazioni della forma $y=mx+q$. Se due rette r_1 ed r_2 sono perpendicolari, hanno coefficienti angolari tali che: $m_1\cdot m_2=-1$. Le loro corrispondenti avranno coefficienti angolari tali che:

$$m_1'\cdot m_2'=\frac{m_1-1}{m_1+1}\cdot\frac{m_2-1}{m_2+1}=\frac{m_1m_2-m_1-m_2+1}{m_1m_2+m_1+m_2+1}=-1 \quad \text{c.v.d.}$$

vii. determina i punti uniti della trasformazione.

Imponendo $\begin{cases} x'=x \\ y'=y \end{cases}$, ricaviamo: $\begin{cases} x=0 \\ y=-2 \end{cases}$, che è l'unico punto unito.

viii. determina le rette unite della trasformazione.

Una retta coincide con la sua trasformata se: $\dfrac{a+b}{a}=\dfrac{-a+b}{b}=\dfrac{-a+b+c}{c}$.

Dalla prima condizione, ricavo: $a^2=-b^2$, che ammette solo la soluzione $a=b=0$, che non corrisponde ad una retta. Di conseguenza, non esistono rette unite.

Ripeti il ragionamento distinguendo i casi $y=mx+q$ e $x=k$.

Nota: Il contenuto di questo paragrafo corrisponde (con varie modifiche) alle pagine J_I 30 - 34 del tuo libro di testo.

5. Affinità

Definizione: chiamiamo **affinità** una trasformazione geometrica che conserva l'allineamento dei punti (ovvero manda rette in rette) e conserva il parallelismo (ovvero manda rette parallele in rette parallele).

Dalla definizione precedente, risulta ovvio che tutte le similitudini sono affinità.

Non è vero, invece, il contrario, ovvero non tutte le affinità sono similitudini.

In particolare, in una generica affinità il rapporto tra le lunghezze di segmenti corrispondenti <u>non</u> è fisso, ma dipende dalla direzione dei segmenti, e l'ampiezza degli angoli <u>non</u> è più un invariante della trasformazione.

Al contrario di quanto abbiamo fatto nelle sezioni precedenti, ci limiteremo a studiare le affinità dal punto di vista analitico. Uno studio sintetico risulterebbe più complesso e, soprattutto, non è richiesto dai testi dell'esame di stato.

Se, invece, volessimo seguire lo stesso percorso che abbiamo compiuto per passare dalle isometrie alle similitudini, dovremmo introdurre una nuova trasformazione geometrica, detta *omologia affine* (a cui abbiamo dedicato un accenno in precedenza), e quindi definire le affinità come quelle trasformazioni che si possono ottenere dal prodotto tra una similitudine ed una omologia affine.

Teorema: l'insieme delle affinità, sul quale consideriamo l'operazione di composizione, assume la struttura di gruppo (non abeliano).

Possiamo infatti dimostrare che:

- la composizione di due affinità è ancora una affinità;
- l'operazione di composizione gode della proprietà associativa;
- esiste (ed appartiene all'insieme delle affinità), l'elemento neutro dell'operazione di composizione, che è dato dall'identità $\mathbb{I}$ (la trasformazione che associa ad ogni punto del piano il punto stesso);
- ogni affinità ammette una affinità inversa (quella che associa al "punto di arrivo" P' il "punto di partenza" P).

Il gruppo delle affinità contiene come sottogruppo quello delle similitudini.

Enunceremo, senza dimostrarle, le principali proprietà delle affinità.

Proprietà: la forma più generale delle equazioni di una affinità è:

$$\begin{cases} \boldsymbol{x'=ax+by+p} \\ \boldsymbol{y'=cx+dy+q} \end{cases} \text{, ovvero } \vec{x}\,'=A\vec{x}+\vec{v} \text{ , con } \boldsymbol{det\,A=\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix}=ad-bc\neq 0} \text{ . Inoltre:}$$

- se $det\,A>0$, l'affinità è *diretta*, ovvero conserva l'orientamento dei vertici di un poligono;
- se $det\,A>0$, l'affinità è *indiretta*, ovvero scambia il verso degli angoli.

La quantità $|det\,A|=|ad-bc|$ viene chiamata **rapporto di affinità**.

Definizione: chiamiamo **dilatazione** di centro l'origine e *rapporti di dilatazione h* (in orizzontale) e

k (in verticale) la trasformazione di equazioni $\begin{cases} \boldsymbol{x'=hx} \\ \boldsymbol{y'=ky} \end{cases}$ con $h \neq 0 \wedge k \neq 0$.

Se la dilatazione ha come centro un punto $C(x_C, y_C)$, le sue equazioni diventano:

$\begin{cases} x'=h(x-x_C)+x_C \\ y'=k(y-y_C)+y_C \end{cases}$, ovvero: $\begin{cases} x'=hx+p \\ y'=ky+q \end{cases}$.

Per una dilatazione, il rapporto di affinità vale $|det\ A|=|h \cdot k|$.

Le dilatazioni sono, in un certo senso, le più semplici affinità che non siano anche similitudini.

Una generica affinità può essere ottenuta componendo una dilatazione con una similitudine.

Proprietà: una affinità conserva il rapporto tra le aree delle figure.

In altri termini, se due figure S e T vengono mandate da una affinità nelle figure S' e T', allora il rapporto tra le loro aree è costante: $\frac{A_S}{A_T}=\frac{A_{S'}}{A_{T'}}$.

Inoltre, se due figure si corrispondono in una affinità, allora il rapporto tra le loro aree è uguale al rapporto di affinità: $\boldsymbol{\frac{A_{S'}}{A_S}=\frac{A_{T'}}{A_T}=|det\ A|}$.

Osserva che, se l'affinità è anche una similitudine, allora il rapporto di affinità è uguale al quadrato del rapporto di similitudine: $|det\ A|=k^2$.

Definizione: le affinità che conservano le aree vengono chiamate **equiaffinità** o **equivalenze**.

E' evidente che una equiaffinità ha rapporto di affinità $|det\ A|=1$.

Osserva che tutte le isometrie sono equiaffinità, ma non è vero il contrario.

Ad esempio, la trasformazione di equazioni $\begin{cases} x'=2x \\ y'=y/2 \end{cases}$, che abbiamo già considerato in precedenza, è una equiaffinità, in quanto $det\ A=1$, ma non è una isometria.

Esempio: consideriamo la trasformazione descritta dalle equazioni $\begin{cases} x'=2x-y+5 \\ y'=x-y+1 \end{cases}$.

Essa è una affinità, in quanto le sue equazioni sono lineari, e $det\ A=-1$; inoltre, si tratta di una equiaffinità e di una affinità indiretta.

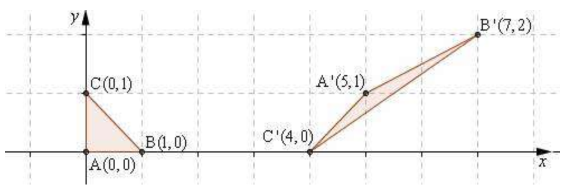

Fig. 31

Per visualizzarne meglio le proprietà, vediamo come agisce sul triangolo ABC in figura. Osserviamo che:

- l'isometria conserva sia le dimensioni che la "forma" delle figure;
- la similitudine conserva la "forma", ma non le dimensioni;

- l'affinità non conserva né la “forma”, né le dimensioni.

Puoi calcolare $Area_{ABC}=Area_{A'B'C'}=1/2$. Inoltre, puoi osservare che, mentre i vertici ABC si succedono in verso antiorario, quelli A'B'C' lo fanno in verso orario.

Proprietà: una generica affinità è individuata in maniera univoca da tre coppie di punti corrispondenti.

Limitandoci ad una spiegazione di tipo analitico, è evidente che le equazioni $\begin{cases} x'=ax+by+p \\ y'=cx+dy+q \end{cases}$ contengono sei parametri, per determinare i quali è necessario e sufficiente imporre sei condizioni (compatibili).

Ad esempio, se vogliamo determinare l'affinità che manda i punti $A(0,0)$, $B(1,0)$, $C(0,1)$ nei punti $A'(5,1)$, $B'(7,2)$, $C'(4,0)$ rispettivamente, dobbiamo imporre il simpaticissimo sistema di sei equazioni nelle sei incognite *a*, *b*, *c*, *d*, *p*, *q*:

$\begin{cases} p=5 \\ q=1 \\ a+p=7 \\ c+q=2 \\ b+q=4 \\ d+q=0 \end{cases}$ che, risolto, fornisce le equazioni dell'esempio precedente: $\begin{cases} x'=2x-y+5 \\ y'=x-y+1 \end{cases}$.

Proprietà: una affinità “conserva il punto medio dei segmenti”, ovvero manda il punto medio M di un generico segmento AB nel punto medio M' del segmento trasformato A'B'.

Osservazioni:

- Non dire “sai che scoperta!” La proprietà non è banale, ma dipende dalla linearità delle equazioni dell'affinità.

  Ad esempio, la trasformazione $\begin{cases} x'=x^3 \\ y'=y^3 \end{cases}$ <u>non</u> gode di questa proprietà.
- La dimostrazione è immediata, anche se noiosa: basta svolgere i calcoli.
- La proprietà può essere generalizzata: se un punto P divide il segmento AB in due parti tali che $AP=k\,PB$, allora l'affinità lo trasforma in un punto P' che divide il segmento A'B' in modo che: $A'P'=k\,P'B'$.

Proprietà: una affinità trasforma ellissi, parabole e iperboli in coniche dello stesso genere.

Attenzione: poiché le affinità <u>non</u> conservano il rapporto tra le lunghezze dei segmenti, dal punto di vista della geometria affine, la circonferenza deve essere considerate come un caso particolare dell'ellisse. Quindi, in generale, le affinità <u>non</u> mandano circonferenze in circonferenze, ma trasformano circonferenze in ellissi.

Esercizio: considera le equazioni $\begin{cases} x'=-x+y \\ y'=2y-1 \end{cases}$, ovvero: $\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}+\begin{pmatrix} 0 \\ -1 \end{pmatrix}$.

i. verifica che esse determinano una affinità e determinane il genere.

Si tratta di una affinità in quanto le equazioni sono lineari, e $\det A=-2\neq 0$. Poiché $\det A<0$, si tratta di una affinità inversa. Poiché il rapporto di affinità è $|\det A|=2$, essa raddoppia le aree.

ii. determina le equazioni della affinità inversa.

$$\begin{cases} x'=-x+y/2+1/2 \\ y'=y/2+1/2 \end{cases} \Rightarrow \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} -1 & 1/2 \\ 1/2 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}+\begin{pmatrix} 1/2 \\ 1/2 \end{pmatrix}$$

iii. verifica che manda rette in rette.

La generica retta di equazione $ax+by+c=0$ viene mandata in:

$$a(-x+y/2+1/2)+b(y/2+1/2)+c=0 \Rightarrow -2ax+(a+b)y+a+b+2c=0 \quad .$$

L'equazione della trasformata è lineare, per cui rappresenta ancora una retta.

iv. verifica che manda rette parallele in rette parallele.

La retta di coefficiente angolare $m=-a/b$ viene mandata nella retta di coefficiente angolare:

$m'=\dfrac{2a}{a+b}=\dfrac{2m}{m-1}$ che dipende solo da *m*, e non da *q*. Di conseguenza, se sono uguali i coefficienti angolari delle rette date, lo sono anche quelli delle loro corrispondenti.

Ripeti il ragionamento distinguendo i casi $y=mx+q$ e $x=k$.

v. verifica se conserva la relazione di perpendicolarità.

Consideriamo solo equazioni della forma $y=mx+q$. Se due rette r_1 ed r_2 sono perpendicolari, hanno coefficienti angolari tali che: $m_1\cdot m_2=-1$. Le loro corrispondenti avranno coefficienti angolari tali che:

$m_1'\cdot m_2'=\dfrac{2m_1}{m_1-1}\cdot\dfrac{2m_2}{m_2-1}=\dfrac{4m_1m_2}{m_1m_2-m_1-m_2+1}=\dfrac{4}{m_1+m_2}$. Quindi, la relazione di perpendicolarità in generale non è conservata. Tuttavia, esistono delle particolari rette perpendicolari che vengono mandate in rette perpendicolari, e sono quelle che verificano le relazioni: $\begin{cases} m_1\cdot m_2=-1 \\ m_1+m_2=-4 \end{cases} \Rightarrow m^2+4m-1=0 \Rightarrow m=-2\pm\sqrt{5}$

ovvero formano i due fasci impropri di equazioni: $y=(-2\pm\sqrt{5})x+q$.

vi. determina i punti uniti della trasformazione.

Imponendo $\begin{cases} x'=x \\ y'=y \end{cases}$, ricaviamo: $\begin{cases} x=1/2 \\ y=1 \end{cases}$, che è l'unico punto unito.

vii. determina le rette unite della trasformazione.

Una retta coincide con la sua trasformata se: $\dfrac{-2a}{a}=\dfrac{a+b}{b}=\dfrac{a+b+2c}{c}$.

Risolvendo il sistema formato dalle due condizioni, ricavo: $a=-6c \wedge b=2c$, da cui, ponendo per semplicità $c=1$, ricavo: $-6x+2y+1=0 \Rightarrow y=3x-1/2$, che è l'equazione di una retta unita.

Il procedimento seguito non è valido se $a=0$. In questo caso, ricavo: $\dfrac{b+2c}{c}=1 \Rightarrow b=-c$. Da qui ottengo l'equazione $-cy+c=0 \Rightarrow y=1$, che è l'altra retta unita. Entrambe sono rette globalmente unite.

Ripeti il ragionamento distinguendo i casi $y=mx+q$ e $x=k$.

Esercizio: considera le equazioni $\begin{cases} x'=x-2y+2 \\ y'=-y+2 \end{cases}$, ovvero: $\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}+\begin{pmatrix} 2 \\ 2 \end{pmatrix}$.

i. verifica che esse determinano una affinità e determinane il genere.

Si tratta di una affinità in quanto le equazioni sono lineari, e $det\,A=-1\neq 0$. Poiché $det\,A<0$, si tratta di una affinità inversa. Poiché il rapporto di affinità è $|det\,A|=1$, si tratta di una equiaffinità (ma non isometria).

ii. determina le equazioni della affinità inversa. $\begin{cases} x'=x-2y+2 \\ y'=-y+2 \end{cases} \Rightarrow \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}+\begin{pmatrix} 2 \\ 2 \end{pmatrix}$

iii. verifica che manda rette in rette.

La generica retta di equazione $ax+by+c=0$ viene mandata in:

$a(x-2y+2)+b(-y+2)+c=0 \Rightarrow ax-(2a+b)y+2a+2b+c=0$.

L'equazione della trasformata è lineare, per cui rappresenta ancora una retta.

iv. verifica che manda rette parallele in rette parallele.

La retta di coefficiente angolare $m=-a/b$ viene mandata nella retta di coefficiente angolare:

$m'=\dfrac{a}{2a+b}=\dfrac{m}{2m-1}$ che dipende solo da *m*, e non da *q*. Di conseguenza, se sono uguali i coefficienti angolari delle rette date, lo sono anche quelli delle loro corrispondenti.

Ripeti il ragionamento distinguendo i casi $y=mx+q$ e $x=k$.

v. verifica se conserva la relazione di perpendicolarità.

Consideriamo solo equazioni della forma $y=mx+q$. Se due rette r_1 ed r_2 sono perpendicolari, hanno coefficienti angolari tali che: $m_1\cdot m_2=-1$. Le loro corrispondenti avranno coefficienti angolari tali che:

$m_1'\cdot m_2'=\dfrac{m_1}{2m_1-1}\cdot\dfrac{m_2}{2m_2-1}=\dfrac{m_1 m_2}{4m_1 m_2-m_1-m_2+1}=\dfrac{1}{m_1+m_2+3}$. Quindi, la relazione di perpendicolarità in generale non è conservata. Tuttavia, esistono delle particolari rette perpendicolari che vengono mandate in rette perpendicolari, e sono quelle che verificano le relazioni: $\begin{cases} m_1\cdot m_2=-1 \\ m_1+m_2+3=-1 \end{cases} \Rightarrow m^2+4m-1=0 \Rightarrow m=-2\pm\sqrt{5}$

ovvero formano i due fasci impropri di equazioni: $y=(-2\pm\sqrt{5})x+q$.

(Sì, mi sono accorto che è lo stesso risultato dell'esempio precedente, ma non so spiegarne il motivo).

vi. determina i punti uniti della trasformazione.

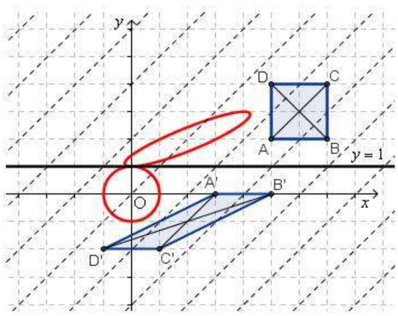

Fig. 32

Imponendo $\begin{cases} x'=x \\ y'=y \end{cases}$, ricaviamo da entrambe le equazioni: $y=1$, per cui tutti i punti di questa retta sono uniti, e la retta stessa è puntualmente unita.

vii. determina le rette unite della trasformazione.

Una retta coincide con la sua trasformata se: $1=\dfrac{-2a-b}{b}=\dfrac{2a+2b+c}{c}$.

Risolvendo il sistema formato dalle due condizioni, ricavo: $a=-b \wedge c=1$, da cui ricavo:

$-bx+by+1=0 \Rightarrow y=x+q$, quindi sono globalmente unite tutte le rette parallele (o coincidenti) alla bisettrice del primo e del terzo quadrante. Il procedimento seguito non è valido se $a=0$. In questo caso, ricavo:

$\frac{2b+c}{c}=-1 \Rightarrow b=-c$. Da qui ottengo l'equazione $-cy+c=0 \Rightarrow y=1$, che è la retta unita ricavata in precedenza. Ripeti il ragionamento distinguendo i casi $y=mx+q$ e $x=k$.

La figura cerca di visualizzare l'azione dell'affinità mostrandone la retta di punti uniti, alcune rette unite, una circonferenza e la sua immagine, un quadrato e la sua immagine.

◆ **Conclusione**

Dedichiamo solo un accenno al fatto che esistono trasformazioni geometriche di tipo più generale rispetto alle affinità. In particolare, se introducessimo una nuova trasformazione geometrica, detta *omologia*, potremmo considerare le trasformazioni che si ottengono dalla composizione tra una affinità ed una omologia.

Tali trasformazioni vengono dette *proiettività* o *collineazioni*. Esse trasformano rette in rette, ma non conservano il parallelismo, per cui possono mandare rette parallele in rette incidenti, o viceversa.

Le proiettività formano un gruppo, che contiene al suo interno il sottogruppo delle affinità.

Per avere un'idea più concreta del loro funzionamento, potremmo immaginare di proiettare un piano α su un piano β tramite una sorgente S di raggi luminosi:

- se la sorgente è all'infinito, per cui i raggi sono paralleli (pensa alla luce del Sole), ed i piani α e β sono anch'essi paralleli, allora la corrispondenza tra di loro è una *isometria*;
- se la sorgente è ad una distanza finita, per cui i raggi divergono dalla sua posizione (pensa ad una lampadina), ed i piani α e β sono paralleli, allora la corrispondenza tra di loro è una *similitudine*;
- se la sorgente è all'infinito, ovvero i raggi sono paralleli, ma i piani α e β sono incidenti, allora la corrispondenza tra di loro è una *affinità*;
- se, infine, la sorgente è ad una distanza finita, per cui i raggi sono obliqui, ed anche i piani α e β sono incidenti, allora la corrispondenza tra di loro è una *proiettività*.

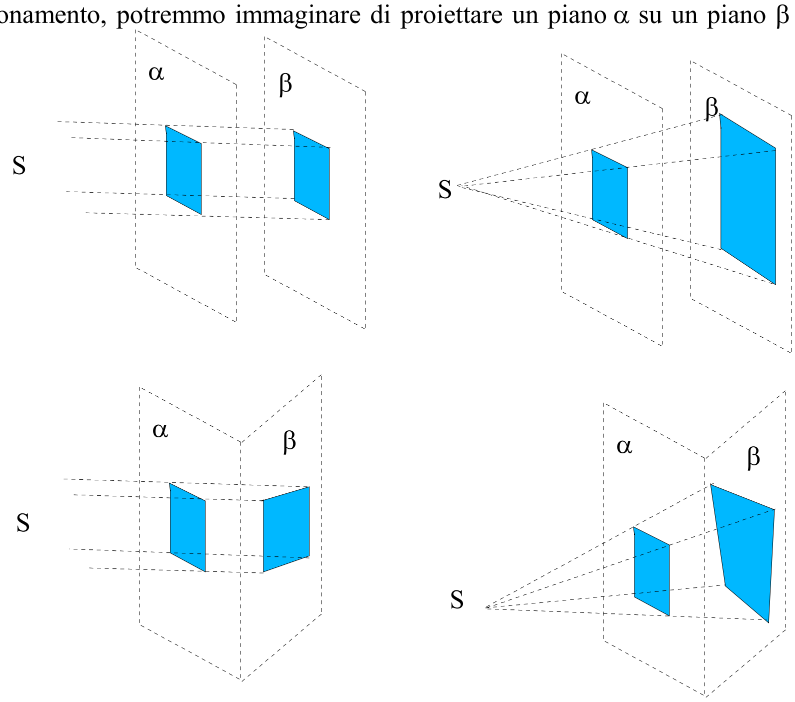

Fig. 33 Il disegno vorrebbe rappresentare (in senso orario): isometria, similitudine, affinità, proiettività.

Le trasformazioni proiettive, a loro volta formano un sottogruppo delle *trasformazioni topologiche* o *omeomorfismi*, che non mandano rette in rette, ma "deformano" curve e superfici senza "strapparle".

Oltre all'interesse matematico, un importante campo di applicazione pratico di questi concetti è quello dello sviluppo di software che debbano simulare sullo schermo le tre dimensioni dello spazio (CAD, videogiochi, ritocco fotografico, elaborazione video, etc).

Nota: Il contenuto di questo paragrafo corrisponde (con modifiche) alle pagine J₁ 27 - 8 e 35 - 37 del tuo libro di testo.